

Publications du **L**aboratoire de  
**C**ombinatoire et d'  
**I**nformatique  
**M**athématique

**33**

---

Cédric Lamathe

**Spécification de classes de structures  
arborescentes**

---

 **Université du Québec à Montréal**

# Publications du Laboratoire de Combinatoire et d'Informatique Mathématique

---

## Responsable des Publications du LaCIM

Srecko Brlek

courriel: brlek@lacim.uqam.ca

LaCIM, Université du Québec à Montréal

C.P. 8888, Succ. Centre-Ville

Montréal (Québec) Canada

H3C 3P8

## Éditeur technique

André Lauzon

## Comité éditorial

A. ARNOLD	<i>Bordeaux I</i>	J. LABELLE	<i>UQAM</i>
F. BERGERON	<i>UQAM</i>	C. LAM	<i>Concordia</i>
J. BERSTEL	<i>Marne-la-Vallée</i>	A. LASCOUX	<i>Marne-la-Vallée</i>
S. BRLEK	<i>UQAM</i>	P. LEROUX	<i>UQAM</i>
R. CORI	<i>Bordeaux I</i>	C. REUTENAUER	<i>UQAM</i>
P. FLAJOLET	<i>INRIA</i>	R. STANLEY	<i>MIT</i>
D. FOATA	<i>Strasbourg</i>	V. STREHL	<i>Erlangen</i>
A. GARSIA	<i>UCSD</i>	D. THÉRIEN	<i>McGill</i>
I. GESSEL	<i>Brandeis</i>	G.X. VIENNOT	<i>Bordeaux I</i>
I. GOULDEN	<i>Waterloo</i>	T. WALSH	<i>UQAM</i>
G. LABELLE	<i>UQAM</i>	Y. YEH	<i>Academia Sinica</i>

---

## Volumes parus

- 1 *Parallélisme: modèles et complexité*, S. Brlek (éd.), ACFAS'89, Actes, **1990**
- 2 *Séries indicatrices d'espèces pondérées et  $q$ -analogues*, H. Décoste, **1990**
- 3 *Étude des arbres hyperquaternaires*, L. Laforest, **1990**
- 4 *Contribution à l'étude des empilements*, P. Lalonde, **1991**
- 5 *Calcul combinatoire de séries indicatrices de cycles*, I. Constantineau, **1991**
- 6 *Notes On Schubert Polynomials*, I. G. Macdonald, **1991**
- 7 *Combinatoire des tableaux oscillants et des polynômes de Bessel*, L. Favreau, **1991**
- 8 *Réécritures dans l'algèbre de Lie libre, le groupe libre et l'algèbre associative libre*, G. Melançon, **1991**
- 9  *$q$ -énumération de polyominoes convexes*, M. Bousquet-Mélou, **1991**
- 10 *Atelier de Combinatoire franco-québécois*, J. Labelle, J.-G. Penaud (éd.), Mai 1991, Actes, **1992**
- 11 *Séries formelles et combinatoire algébrique*, P. Leroux, C. Reutenauer (éd.), Juin 1992, Actes, **1992**
- 12 *Structures combinatoires et calcul symbolique*, Y. Chiricota, **1993**
- 13 *Aspects combinatoires des nombres de Stirling, des polynômes orthogonaux de Sheffer et de leurs  $q$ -analogues*, A. de Médicis, **1993**
- 14 *A theory of noncommutative determinants and characteristic functions of graphs I*, I. M. Gelfand and V. S. Rethak; *Matroids on chamber systems*, I. M. Gelfand and A. V. Borovik, **1993**
- 15 *Modèles mathématiques pour la synthèse des systèmes informatiques*, S. Brlek (éd.), ACFAS'94, Actes, **1994**
- 16 *Produits et coproduits des fonctions quasi-symétriques et de l'algèbre des descentes*, C. Malvenuto, **1994**
- 17 *Une interprétation combinatoire des approximants de Padé*, Emmanuel Roblet, **1994**

..... suite en fin de volume

---

Publications du **Laboratoire de  
Combinatoire et d'  
Informatique  
Mathématique**

**33**

---

Cédric Lamathe

**Spécification de classes de structures  
arborescentes**

---



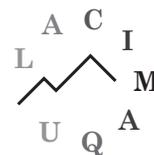
Université du Québec à Montréal

Dépôt légal, quatrième trimestre 2004, Bibliothèque nationale du Québec

ISBN 2-89276-348-7 LaCIM Montréal

©LaCIM, Montréal, Octobre 2004.

Laboratoire de combinatoire et d'informatique mathématique  
Université du Québec à Montréal  
C.P. 8888, Succ. Centre-Ville  
Montréal (Québec) Canada  
H3C 3P8



UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

SPÉCIFICATION DE CLASSES DE STRUCTURES  
ARBORESCENTES

THÈSE  
PRÉSENTÉE  
COMME EXIGENCE PARTIELLE  
DU DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES

PAR  
CÉDRIC LAMATHE

AOÛT 2003



## REMERCIEMENTS

Il faudrait remercier de très nombreuses personnes et beaucoup d'entre elles vont ici être oubliées; qu'elles m'en excusent.

Je souhaite en premier lieu remercier chaleureusement les membres du jury, Pierre Bouchard, Michel Bousquet, Srečko Brlek, Dominique Gouyou-Beauchamps, Gilbert Labelle et Pierre Leroux, pour leur lecture minutieuse de ma thèse et leurs remarques très pertinentes.

Je tiens également à remercier les personnes suivantes :

- “les bons maîtres”, Pierre Leroux et Gilbert Labelle, mes directeurs de thèse, pour leur bienveillance, leur humanité, leur enthousiasme mathématique, et bien d'autres choses; mais surtout parce qu'ils sont eux. Leur contact ne peut qu'enrichir;
- Marie-Noëlle et Milan, pour m'avoir fait découvrir ce pays d'hiver et pour m'avoir réappris à m'émerveiller;
- tous les membres du LaCIM et du département de mathématiques, aussi bien les professeurs que les secrétaires, qui ont toujours été prêts à m'encourager, m'aider et me conseiller avec le sourire; avec une mention spéciale à André Lauzon et Lise Tourigny pour leur patience et leur disponibilité continue à mon égard;
- mon père et ma mère, humbles héros obscurs de tout ceci;
- et toutes les personnes incroyables que j'ai eu l'honneur de rencontrer au Québec, notamment Cedric et Marni, Srečko, sans oublier Francis et Michel, pour tout.

Avant de finir, un grand merci à l'ISM et au LaCIM, pour le soutien financier et logistique qu'ils m'ont apporté durant ces trois années.



## Table des matières

Liste des tableaux . . . . .	vii
Liste des figures . . . . .	ix
Résumé . . . . .	xi
Introduction . . . . .	xii
<b>I Théorie des espèces</b>	<b>7</b>
Chapitre I	
ESPÈCES DE STRUCTURES . . . . .	9
1.1 Notions d'espèces de structures pondérées . . . . .	9
1.2 Espèces moléculaires et asymétriques . . . . .	12
1.2.1 Espèce et développement moléculaires . . . . .	12
1.2.2 Structures asymétriques . . . . .	17
1.3 Substitution (composition partitionnelle) généralisée . . . . .	18
1.4 Séries indicatrices . . . . .	22
1.5 Les espèces $P_4^{\text{bic}}(X, Y)$ et $P_6^{\text{bic}}(X, Y)$ . . . . .	25
1.6 Théorème de dissymétrie et inversion de Lagrange . . . . .	28
Chapitre II	
SÉRIE INDICATRICE D'ASYMÉTRIE TRANSLATÉE . . . . .	31
2.1 Position du problème . . . . .	31
2.2 La série indicatrice d'asymétrie translaturée . . . . .	33
2.2.1 Définition de $\Gamma_{F,\xi}$ . . . . .	33
2.2.2 Comportement face aux opérations combinatoires usuelles . . . . .	34
2.3 Exemples et applications . . . . .	38
2.3.1 Applications à l'énumération de sous-structures asymétriques . . . . .	39
2.3.2 Ensembles et $n$ -ensembles . . . . .	41
2.3.3 Cycles et permutations . . . . .	43
2.3.4 Arbres, arborescences et endofonctions . . . . .	47
2.3.5 Membres d'assemblées . . . . .	52

2.3.6	Autres calculs . . . . .	57
2.4	Triangle de Pascal généralisé . . . . .	66
<b>II Énumération et classification de familles de 2-arbres</b>		<b>73</b>
Chapitre III		
	ESPÈCE DES 2-ARBRES . . . . .	75
3.1	Introduction et propriétés des 2-arbres . . . . .	76
3.1.1	Les 2-arbres et les espèces pointées associées . . . . .	76
3.1.2	Les 2-arbres orientés . . . . .	80
3.1.3	Les 2-arbres $k$ -gonaux . . . . .	80
3.1.4	L'espèce $B$ . . . . .	81
3.2	Espèces quotient liées aux 2-arbres . . . . .	83
Chapitre IV		
	CLASSIFICATION DES ESPÈCES DES 2-ARBRES EXTERPLANS ET EX- TERPLANAIRES . . . . .	87
4.1	Espèces des 2-arbres exterplans et exterplanaires . . . . .	87
4.2	Formules d'addition . . . . .	94
4.3	Développement moléculaire des 2-arbres exterplans et exterplanaires . . . . .	99
4.3.1	Classification des 2-arbres exterplans . . . . .	99
4.3.2	Classification des 2-arbres exterplanaires . . . . .	100
4.4	Formules d'énumération . . . . .	104
4.4.1	Énumération des 2-arbres exterplans . . . . .	104
4.4.2	Énumération des 2-arbres exterplanaires . . . . .	107
4.4.3	Une autre méthode d'énumération non étiquetée . . . . .	110
Chapitre V		
	ÉNUMÉRATION DES 2-ARBRES SOLIDES . . . . .	113
5.1	Espèces des 2-arbres solides . . . . .	113
5.2	Les 2-arbres solides orientés . . . . .	115
5.2.1	Énumération selon le nombre d'arêtes . . . . .	116
5.2.2	Énumération selon la distribution des degrés . . . . .	120
5.3	Les 2-arbres solides non orientés . . . . .	125
5.3.1	Énumération selon le nombre d'arêtes . . . . .	126
5.3.2	Énumération selon la distribution des arêtes . . . . .	131

Chapitre VI	
ÉNUMÉRATION DES 2-ARBRES $k$ -GONAUX . . . . .	135
6.1 Introduction . . . . .	135
6.2 L'espèce $B$ des 2-arbres $k$ -gonaux pointés en une arête orientée . . . . .	137
6.3 Cas orienté . . . . .	140
6.4 Cas non orienté . . . . .	141
6.4.1 Cas impair . . . . .	142
6.4.2 Cas pair . . . . .	145
6.5 Enumération selon le périmètre . . . . .	153
6.5.1 Un version pondérée de l'espèce $B$ . . . . .	153
6.5.2 Cas orienté . . . . .	157
6.5.3 Cas non orienté . . . . .	159
6.6 Dénombrement asymptotique . . . . .	163
Conclusion . . . . .	169
Appendice A	
STATISTIQUES SUR LES ESPÈCES MOLÉCULAIRES . . . . .	173
Appendice B	
STATISTIQUES SUR LES 2-ARBRES SOLIDES . . . . .	179
Appendice C	
STATISTIQUES SUR LES 2-ARBRES $k$ -GONAUX . . . . .	181
RÉFÉRENCES . . . . .	193



## Liste des tableaux

A.1	Espèces élémentaires et leurs séries indicatrices de cycles et d'asymétrie	173
A.2	Le triangle de Pascal $\mathbb{P}$ pour les espèces moléculaires jusqu'au degré 4	174
A.3	La matrice $\mathbb{P}^\xi$ pour les espèces moléculaires jusqu'au degré 4	175
A.4	Séries indicatrices d'asymétrie classiques et translatées pour les espèces moléculaires jusqu'au degré 4	176
A.5	Les séries $\Gamma_{E_n^\pm}$ et $\Gamma_{E_n^\pm, \xi}$ pour $n \leq 6$	177
B.1	Nombre de 2-arbres solides selon le nombre d'arêtes	179
B.2	Nombre de 2-arbres solides selon la distribution des degrés des arêtes	179
C.1	Valeurs numériques de $\xi_p$ , $\alpha_p$ , $\bar{\alpha}_p$ et $\beta_p$ , $p = 1, \dots, 11$	181
C.2	Valeurs de $\tilde{a}_n$ pour $k = 2, \dots, 12$ et $n = 0, \dots, 20$	181
C.3	Polynômes $b_n(t)$ pour $k = 2, 3, 4, 5$ et $n = 0, \dots, 9$	183
C.4	Coefficients de $\tilde{a}_o(x, t)$ pour $k = 2, \dots, 9$ et $n = 0, \dots, 10$	186
C.5	Coefficients de $\tilde{a}(x, t)$ pour $k = 2, \dots, 9$ et $n = 0, \dots, 10$	189



## Liste des figures

0.1	Un 2-arbre . . . . .	2
1.1	Trois arborescences pondérées étiquetées non isomorphes mais semblables . . . . .	15
1.2	Un arbre a) non asymétrique, et b) asymétrique . . . . .	17
1.3	Un arbre a) étiqueté, b) partiellement étiqueté . . . . .	19
1.4	Un arbre coloré sur [8] de poids $u^5 t_1^3 t_3^2 t_4 t_8 t_{13}$ . . . . .	23
1.5	Arbre coloré typique non étiqueté de poids $u^5 t_1^3 t_3^2 t_4 t_8 t_{13}$ . . . . .	23
1.6	Arbre coloré asymétrique typique non étiqueté de poids $u^5 t_1^3 t_3^2 t_4 t_8 t_{13}$ . . . . .	23
1.7	Une $P_4^{\text{bic}}(X, Y)$ -structure et une $P_6^{\text{bic}}(X, Y)$ -structure . . . . .	25
1.8	Treillis des sous-groupes de a) $D_2$ et b) $S_3$ et fonction de Möbius . . . . .	27
2.1	Formule d'addition pour $E_2(1 + X)$ . . . . .	32
2.2	Une permutation pondérée dans $S_w$ , et une sous-permutation de $S_w(1 + X)$ . . . . .	40
3.1	Un 2-arbre sur l'ensemble d'arêtes $\mathcal{E} = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$ . . . . .	77
3.2	Théorème de dissymétrie . . . . .	79
3.3	Un 2-arbre orienté . . . . .	80
3.4	Une $B$ -structure et les pages qui la composent . . . . .	82
3.5	Une $B$ -structure . . . . .	82
3.6	Une page . . . . .	83
4.1	Un 2-arbre plan et un de ses étiquetages possibles . . . . .	88
4.2	Deux 2-arbres exterplans différents, un 2-arbre exterplanaire . . . . .	88
4.3	Correspondance entre 2-arbres exterplans et triangulations . . . . .	89
4.4	Les trois isomères de formule $C_4H_6$ . . . . .	89
4.5	Correspondance entre polyènes hydrocarbonés et 2-arbres exterplanaires . . . . .	90
4.6	Premiers termes du développement moléculaire de l'espèce $a_\pi$ , des 2-arbres exterplans . . . . .	90

4.7	Premiers termes du développement moléculaire de l'espèce $\mathbf{a}_p$ , des 2-arbres exterplanaires . . . . .	91
4.8	$B = 1 + XB^2$ . . . . .	91
4.9	Illustrations des exposants . . . . .	93
4.10	Symétries d'ordre deux dans l'espèce $P_4^{\text{bic}}(X, \mathcal{B})$ . . . . .	96
4.11	Les espèces $E_2(B)$ , $XC_3(B)$ et $B_+ \cdot B$ . . . . .	99
4.12	L'espèce $\mathbf{a}_p^-$ . . . . .	101
4.13	L'espèce $\mathbf{a}_p^\Delta$ . . . . .	101
4.14	L'espèce des $\mathbf{a}_p$ -structures pointés en un triangle avec un de ces arêtes distinguée . . . . .	102
5.1	Deux 2-arbres solides distincts, mais le même 2-arbre . . . . .	113
5.2	Une $B$ -structure . . . . .	114
5.3	Illustration des équations (5.8), (5.9) et (5.10) . . . . .	116
5.4	Bijection entre 2-arbres solides orientés et cactus triangulaires plans . . . . .	120
5.5	Un 2-arbre non étiqueté $\tau$ -symétrique . . . . .	126
5.6	Une $B_{\text{Sym}}$ -structure, $k$ impair . . . . .	128
5.7	Une $B_{\text{Sym}}$ -structure, $k$ pair . . . . .	128
5.8	Une $\mathbf{a}_o^\Delta$ -structure $\tau$ -symétrique . . . . .	130
6.1	Des 2-arbres $k$ -gonaux pour $k = 3$ et $k = 5$ . . . . .	135
6.2	Un 2-arbre 4-gonal non orienté et orienté . . . . .	136
6.3	Pages dans le cas non orienté pour a) $k = 5$ , b) $k = 6$ . . . . .	142
6.4	Espèces squelette a) $Q(X, Y)$ , b) $S(X, Y)$ et c) $U(X, Y)$ . . . . .	143
6.5	a) Une structure de l'espèce $\mathbf{a}_{\text{TS}}$ , et b) une des pages totalement symétriques qui la composent . . . . .	146
6.6	Une paire de pages alternées et une page mixte . . . . .	147
6.7	Décomposition d'une $\tilde{\mathbf{a}}^\rightarrow$ -structure $\tau$ -symétrique . . . . .	149
6.8	Une $\mathbf{a}_o$ -structure pointée en un triangle avec un arête distinguée $\tau$ -symétrique non étiquetée . . . . .	150
6.9	Deux $\tilde{\mathbf{a}}_{o,\tau}^\diamond$ -structures avec axes de symétrie arête–arête . . . . .	151
6.10	Une $\tilde{\mathbf{a}}_{o,\tau}^\diamond$ -structure avec des symétries arête–arête et sommet–sommet . . . . .	151
6.11	Une $\tilde{\mathbf{a}}_{o,\tau}^\diamond$ -structure avec axes de symétrie sommet–sommet . . . . .	152
6.12	Un graphe d'arche à 12 sommets . . . . .	170

## Résumé

Le principal sujet abordé dans cette thèse est la spécification et l'énumération de classes de 2-arbres. L'outil principal utilisé est la théorie des espèces de structures. Divisée en six chapitres, cette thèse comporte deux parties.

La première partie, composée de deux chapitres, est consacrée à la théorie des espèces. Le premier chapitre consiste à introduire sommairement les différentes notions de cette théorie que nous utilisons dans les chapitres suivants. Nous nous attardons particulièrement aux concepts d'espèce et de développement moléculaire ainsi que de substitution généralisée. Par la suite, nous introduisons en détail les séries indicatrices associées à ce contexte, ainsi que deux nouvelles espèces à deux sortes,  $P_4^{\text{bic}}(X, Y)$  et  $P_6^{\text{bic}}(X, Y)$ .

Le second chapitre est réservé à l'étude d'une nouvelle série formelle : la série indicatrice d'asymétrie translatée. Nous présentons une définition de cette série après avoir légitimé son introduction. Ensuite, nous établissons le comportement de cette série face aux opérations combinatoires classiques. Nous en déduisons alors une méthode inédite pour l'énumération des sous-structures asymétriques, ainsi que des expressions explicites pour la série indicatrice d'asymétrie translatée des espèces usuelles. Ce chapitre se termine par une généralisation au cas pondéré du triangle de Pascal.

La deuxième partie, composée de quatre chapitres, est entièrement dédiée à l'étude des 2-arbres. Dans le troisième chapitre, nous définissons l'espèce des 2-arbres ainsi que certaines de ses variations, pour ensuite présenter l'outil fondamental de cette partie, le théorème de dissymétrie. Nous terminons ce chapitre en proposant la méthode générale d'énumération des 2-arbres basée sur la notion d'espèce quotient.

Le chapitre quatre porte sur la classification par rapport aux symétries des 2-arbres exterplans et exterplanaires. Nous prouvons quatre nouvelles formules d'addition conduisant, après utilisation du théorème de dissymétrie et d'équations fonctionnelles, au développement moléculaire des espèces des 2-arbres exterplans et exterplanaires. Nous en déduisons aisément l'énumération complète de ces structures.

Les chapitres cinq et six traitent du dénombrement des 2-arbres solides et  $k$ -gonaux, respectivement. Dans les deux cas, nous obtenons préalablement l'énumération des structures orientées. Par la suite, en utilisant les espèces quotients, nous déduisons l'énumération dans le cas non orienté. Pour les 2-arbres solides, nous obtenons des formules explicites, tandis que pour les 2-arbres  $k$ -gonaux, nous établissons des formules de récurrence pour le dénombrement non étiqueté, ainsi qu'une étude asymptotique.



## Introduction

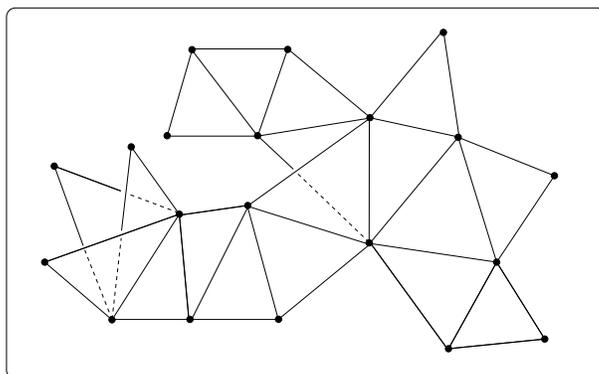
Le dénombrement et la classification de familles de structures discrètes sont des problèmes clés en combinatoire. De nombreuses approches théoriques à ces types de problèmes sont disponibles. Dans cette thèse, nous travaillons dans le contexte de la théorie des espèces de structures. Cette théorie a été introduite par A. Joyal (Joyal, 81) faisant le lien entre théorie des catégories et combinatoire algébrique. Cette théorie consiste en un relèvement au niveau des structures des opérations usuelles sur les séries génératrices exponentielles et tildes (ordinaires) et indicatrices de cycles.

La série indicatrice de cycles est une généralisation du polynôme indicateur de cycles de la théorie de Pólya. Ceci permet dans de nombreux cas de résoudre des problèmes d'énumération, notamment pour les graphes et les composés chimiques; voir (Pólya, 37; Pólya et Read, 87), mais également des questions d'énumération pondérée en utilisant la version pondérée du lemme de Burnside (alias Cauchy-Frobenius); voir (Stockmeier, 71).

Afin de dénombrer les structures asymétriques (structures dont le stabilisateur est trivial), G. Labelle a introduit une nouvelle série indicatrice appelée la série indicatrice d'asymétrie, (Labelle, G., 89-1), dans le contexte des espèces de structures. Il a alors montré que cette série, notée  $\Gamma_F(x_1, x_2, \dots)$ , pour une espèce quelconque  $F$ , possède des propriétés similaires (notamment la stabilité face aux opérations combinatoires) à la série indicatrice de cycles  $Z_F(x_1, x_2, \dots)$ .

Cependant, lors de mes recherches sur le dénombrement asymétrique de certains 2-arbres, j'ai remarqué que la série indicatrice d'asymétrie est incompatible avec la substitution  $F \circ G$  d'une espèce  $G$  à terme constant non nul  $G(0) \neq 0$ , c'est-à-dire lorsque l'espèce  $G$  possède des structures sur l'ensemble vide. La première partie de cette thèse a pour but de contourner cette difficulté. Pour ce faire, nous introduisons une nouvelle série formelle, la *série indicatrice d'asymétrie translatée*, qui, pour une espèce  $F$  et une série de poids,  $\xi$ , est notée  $\Gamma_{F,\xi}$ . Cette série généralise la série indicatrice d'asymétrie classique de G. Labelle, au sens où  $\Gamma_{F,0} = \Gamma_F$ . Un des sujets principaux de cette thèse est alors de valider la définition de  $\Gamma_{F,\xi}$  en étudiant son comportement par rapport aux opérations combinatoires usuelles (addition, produit, substitution, dérivation, pointage) et en calculant explicitement cette série pour les espèces couramment utilisées.

L'autre sujet principal abordé dans cette thèse a trait au dénombrement et à la classification par rapport aux symétries de diverses familles de 2-arbres, équivalents bidimensionnels des arbres de Cayley. Un 2-arbre est essentiellement un graphe simple composé de triangles attachés entre eux selon leurs arêtes de façon arborescente, à savoir sans cycle de triangles; voir la figure 0.1 pour une illustration. Les premiers



**Figure 0.1** Un 2-arbre

travaux sur ce sujet se trouvent dans (Palmer, 69), pour le dénombrement étiqueté des 2-arbres, et dans (Harary et Palmer, 73), pour le cas non étiqueté. Les 2-arbres généraux ont de nombreuses propriétés et applications. En effet, d'un point de vue de théorie des graphes, les 2-arbres possèdent la propriété remarquable d'être uniquement tricolores, à savoir, il existe une unique façon de colorer les sommets avec un jeu de trois couleurs, de sorte que deux sommets adjacents ne reçoivent pas la même couleur. Bien entendu, l'unicité de cette coloration est considérée à permutation près des couleurs. De plus, les 2-arbres sont également impliqués en théorie de la classification comme éléments de base de calcul de distances et dissimilarités d'arbres, en phylogénie ou dans le contexte des mathématiques sociales; voir (Leclerc et Makarenkov, 98).

La première partie de cette thèse traite essentiellement de résultats théoriques concernant la théorie des espèces de structures. Le chapitre premier a pour but de présenter sommairement les concepts de cette théorie nous étant utiles. On s'attarde plus particulièrement sur les notions d'espèce moléculaire (indécomposable sous la somme combinatoire), fondamentale en théorie des espèces, et de développement moléculaire, ainsi que sur une introduction précise de la série indicatrice d'asymétrie de G. Labelle.

Deux espèces moléculaires spéciales apparaissent dans la deuxième partie. Ce sont les espèces à deux sortes  $P_4^{\text{bic}}(X, Y)$  et  $P_6^{\text{bic}}(X, Y)$ . Ces espèces sont introduites et étudiées dans le chapitre 1, ce qui nous permet d'illustrer les concepts de théorie des espèces préalablement introduits. On calcule notamment les séries associées à ces espèces, ainsi que leurs dérivées. Ces espèces vont jouer un rôle fondamental pour la classification des 2-arbres extérplans et extérplanaires, via des formules d'addition les impliquant.

On termine ce chapitre en rappelant deux résultats fondamentaux de combinatoire énumérative, le théorème de dissymétrie pour les arbres et la formule d'inversion composée de Lagrange. Le théorème de dissymétrie pour les arbres, proposé par P. Leroux dans le cadre des espèces (Leroux, 88), est une formule reliant l'espèce des arbres à trois espèces d'arbres pointés associés. Cela entraîne alors des relations au niveau de toutes les séries génératrices et indicatrices. Ce théorème, après adaptation aux 2-arbres, sera

l'élément de base de toutes nos démarches.

L'inversion de Lagrange est, quant à elle, un outil très bien connu et très utilisé en combinatoire. Elle permet de calculer les coefficients de la série exponentielle (des structures étiquetées) d'une espèce caractérisée par une équation fonctionnelle implicite, comme celle, par exemple, des arborescences (arbres enracinés), notée  $\mathcal{A}$ ,

$$\mathcal{A} = X \cdot E(\mathcal{A}),$$

où  $E$  est l'espèce des ensembles.

Dans le chapitre deux, on introduit la nouvelle série formelle appelée série indicatrice d'asymétrie translatée. On commence par poser le problème légitimant cette nouvelle série. Ensuite, on propose une définition formelle pour cette série et on étudie son comportement face aux opérations combinatoires usuelles, à savoir, l'addition, le produit, la substitution, la dérivation et le pointage. Fort de ces résultats, on propose une méthode générale de dénombrement de sous-structures asymétriques, à savoir des structures partiellement étiquetées et dépourvues de symétrie. On propose également des formules explicites pour les séries indicatrices d'asymétrie translatées des espèces usuelles : ensembles, cycles permutations, arbres, ... On s'intéresse aussi au cas des assemblées d'espèces, généralisant le concept de composantes connexes, et on donne trois groupes de formules pour les assemblées connexes, circulaires et permutées. De plus, on calcule la série  $\Gamma_{F,\xi}$ , pour les espèces  $F$  des chaînes, involutions, permutations paires et ensembles orientés, ce dernier cas faisant appel à une nouvelle formule d'addition. Finalement, on termine ce chapitre avec une généralisation du triangle infini de Pascal. Ceci permet de calculer, à l'aide d'un logiciel de calcul, les séries indicatrices d'asymétrie translatées pour des espèces moléculaires, connaissant l'expression de leur série indicatrice d'asymétrie classique.

La seconde partie de cette thèse est entièrement consacrée à l'étude de trois types de 2-arbres, les 2-arbres exterplanaires, solides et  $k$ -gonaux. Le chapitre 3 est un chapitre introductif général sur les 2-arbres. On commence par proposer deux définitions de ces structures arborescentes ainsi qu'un peu de terminologie relatives à ces structures. On présente alors les espèces pointées associées aux 2-arbres et on prouve le résultat fondamental de notre étude, le théorème de dissymétrie pour les 2-arbres, suivant la méthodologie de Fowler, Gessel, Labelle et Leroux, (Fowler et al., 02). Par la suite, on introduit une orientation sur les 2-arbres. La première étape de nos démarches consistera toujours, dans les chapitres suivants, à analyser le cas orienté, pour ensuite en déduire le cas non orienté. On introduit alors les 2-arbres  $k$ -gonaux que nous énumérons dans le chapitre 6 selon le nombre de  $k$ -gones et selon le périmètre. Ensuite, on définit l'espèce fondamentale  $B$  des 2-arbres pointés en une arête orientée. Cette espèce est l'espèce de base de tous nos calculs, et les diverses autres espèces considérées seront exprimées en fonction de  $B$ . On termine ce chapitre avec les espèces quotients liées aux 2-arbres. On propose des relations pour les séries génératrices tildes et indicatrices de cycles d'espèces de la forme  $F/\mathbb{Z}_2$ , où  $\mathbb{Z}_2 = \{1, \tau\}$  est un groupe à deux éléments dont l'action de  $\tau$  est de renverser l'orientation des  $F$ -structures. De telles espèces

quotients permettent, à partir du dénombrement des structures orientées, de déduire le dénombrement dans le cas non orienté.

L'objet du chapitre 4 est de classifier par rapport aux symétries les espèces des 2-arbres exteplanaires et exteplanaires. Un 2-arbre est *exteplanair* s'il est plongeable dans le plan de sorte que tous les sommets appartiennent à la face infinie. Un 2-arbre *exteplan* est un 2-arbre muni d'un tel plongement. On cherche alors à établir le développement moléculaire de ces deux espèces. Pour ce faire, on prouve en premier lieu, quatre formules d'addition relatives aux espèces  $E_2$ , des ensembles de cardinal deux,  $C_3$ , des cycles (orientés) de longueur trois,  $P_4^{\text{bic}}(X, Y)$  et  $P_6^{\text{bic}}(X, Y)$ , introduites dans le premier chapitre. Fort de ces formules d'addition et à partir d'équations fonctionnelles, ainsi que du théorème de dissymétrie, on déduit ensuite des expressions explicites pour tous les coefficients apparaissant dans les deux développements. On utilise alors ces développements pour obtenir toutes les séries ainsi que leurs coefficients, associées aux diverses espèces impliquées dans ce chapitre. On présente également une autre approche pour le dénombrement non étiqueté, qui est due à Palmer et Read.

Le chapitre 5 traite des 2-arbres solides. Ce sont des 2-arbres plongés dans l'espace. Cela signifie que les triangles forment des faces de la structure, ne pouvant s'interpénétrer. Ces structures sont en bijection avec les cactus plans triangulaires considérés à réflexion près. Le but est ici d'énumérer les 2-arbres solides selon le nombre d'arêtes (ou, de façon équivalente, de triangles) et selon la distribution des degrés des arêtes. On commence avec le cas orienté, et on obtient des formules explicites pour le dénombrement étiqueté et non étiqueté selon les deux paramètres mentionnés ci-haut. Ensuite, en utilisant le concept d'espèce quotient, on déduit le même type de résultats pour les 2-arbres solides non orientés.

Le chapitre final de cette thèse, le chapitre 6, est consacré à l'étude des 2-arbres  $k$ -gonaux. Ce sont des 2-arbres libres (sans structure ajoutée) dans lesquels les triangles sont remplacés par des polygones de taille  $k$ , que l'on appelle  $k$ -gones. On commence par caractériser l'espèce fondamentale  $B$  des 2-arbres  $k$ -gonaux pointés en une arête orientée. On déduit, de l'équation fonctionnelle que  $B$  satisfait, des expressions pour les coefficients des séries  $B(x)$ ,  $\tilde{B}(x)$  et  $Z_B(x_1, x_2, \dots)$ . À partir de ces résultats, on exprime les espèces pointées orientées du théorème de dissymétrie en fonction de  $B$ , et on déduit facilement le dénombrement des 2-arbres  $k$ -gonaux orientés étiquetés et non étiquetés. On passe ensuite au cas des 2-arbres  $k$ -gonaux non orientés. Il faut ici traiter deux cas suivant la parité de l'entier  $k$ , qui représente la taille des polygones utilisés dans les 2-arbres. Le cas où  $k$  est impair suit des travaux de Fowler et al. (Fowler et al., 02) utilisant des espèces squelettes, que l'on généralise assez directement. Le cas où  $k$  est pair est plus complexe et nécessite d'analyser avec précision les symétries des structures fixées sous le changement d'orientation induit par l'élément  $\tau \in \mathbb{Z}_2$ , conformément aux formules du chapitre trois concernant les séries associées à des espèces quotients. On utilise alors les résultats précédents pour dénombrer les mêmes objets suivant leur périmètre, à savoir le nombre d'arêtes externes que comporte la structure. Il suffit d'obtenir des versions pondérées de toutes les espèces impliquées dans l'énumération des cas orientés et non orientés. Notons que dans tous les cas,

on obtient des formules explicites pour le dénombrement étiqueté et des formules de récurrence pour le dénombrement non étiqueté. Finalement, dans la dernière section de ce chapitre, on procède à une étude asymptotique complète, notamment pour le cas non étiqueté, des 2-arbres  $k$ -gonaux (non pondérés). Nos travaux généralisent à un  $k$  quelconque, les résultats asymptotiques pour les arbres traditionnels ( $k = 2$ ; voir (Otter, 48)) et les 2-arbres ( $k = 3$ ; voir (Fowler et al., 02)).

Les résultats du chapitre 2 sont issus de (Labelle et Lamathe, 04). Les résultats sur les 2-arbres sont publiés ou en voie de publication dans les articles suivants :

- classification des 2-arbres exterplanaires (chapitre 4) : (Labelle, Lamathe et Leroux, 01; Labelle, Lamathe et Leroux, 03),
- énumération des 2-arbres solides (chapitre 5) : (Bousquet et Lamathe, 02; Bousquet et Lamathe, Soumis),
- dénombrement des 2-arbres  $k$ -gonaux (chapitre 6) : (Labelle, Lamathe et Leroux, 02; Labelle, Lamathe et Leroux, 04).



**Partie I**

**Théorie des espèces**



# Chapitre I

## ESPÈCES DE STRUCTURES

Ce chapitre a pour but d'introduire sommairement les divers concepts de la théorie des espèces de structures qui nous sont utiles pour le dénombrement et la classification des diverses classes de 2-arbres qui nous intéressent. Nous définissons d'abord le concept d'espèces de structures pondérées, ainsi que les séries usuelles associées au contexte des espèces. On s'attache ensuite à l'introduction des espèces moléculaires et asymétriques, éléments de base de la classification (développement moléculaire) des structures arborescentes. Après cela, nous étudions une opération particulière de la théorie des espèces, à savoir la substitution (composition partitionnelle) généralisée. Ceci va légitimer l'introduction d'une nouvelle série formelle au chapitre 2, dans le but de prendre en compte la substitution d'espèces à terme constant non nul, dans le cadre de la série indicatrice d'asymétrie. Cette série est introduite à la section suivante, où l'on s'attache à définir de façon unifiée cette série indicatrice et la série indicatrice de cycles. Nous donnons notamment certaines propriétés fondamentales de ces deux séries indicatrices. Nous illustrons par la suite les notions précédemment introduites avec les deux espèces moléculaires spéciales  $P_4^{\text{bic}}(X, Y)$  et  $P_6^{\text{bic}}(X, Y)$ , fondamentales dans l'étude des 2-arbres exterplanaires (voir chapitre 4). Nous terminons ce chapitre en donnant deux résultats classiques de combinatoire énumérative, notamment le théorème de dissymétrie pour les arbres, qui sera, après adaptation, la pierre de base de tous les résultats relatifs aux 2-arbres dans la deuxième partie. Il est à noter, qu'à moins d'avis contraire, la plupart des résultats de ce chapitre sont issus de (Bergeron, Labelle et Leroux, 98).

### 1.1 Notions d'espèces de structures pondérées

Considérons  $\mathbb{K}$  un anneau intègre inclus dans  $\mathbb{C}$  (par exemple  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  lui-même) et une famille dénombrable d'indéterminées distinctes  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, \dots)$ . On forme alors  $\mathbb{A} = \mathbb{K}[[\vec{v}]]$ , l'anneau des séries formelles en les indéterminées  $\vec{v}$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .

**Définition 1.1.1** *Un ensemble  $\mathbb{A}$ -pondéré est un couple  $(A, w)$ , où  $A$  est un ensemble quelconque et*

$$w : A \longrightarrow \mathbb{A} \tag{1.1}$$

est une fonction de poids associant à chaque élément  $a \in A$  un poids  $w(a) \in \mathbb{A}$ . De plus, la somme  $|A|_w$ , définie par

$$|A|_w = \sum_{a \in A} w(a) \quad (1.2)$$

est appelée le poids total (ou l'inventaire ou le cardinal) de l'ensemble pondéré  $(A, w)$ .

Pour que le poids total d'un ensemble  $\mathbb{A}$ -pondéré soit bien défini, il faut que la somme (1.2) existe. Dans ce cas, on dit que l'ensemble  $\mathbb{A}$ -pondéré  $(A, w)$  est *sommable*.

De manière informelle, une *espèce de structures pondérée* est une classe de structures pondérées étiquetées stable sous les isomorphismes. La définition suivante formalise cette notion.

**Définition 1.1.2** Soit  $\mathbb{A} = \mathbb{K}[[\vec{v}]]$ . Une espèce de structures  $\mathbb{A}$ -pondérée  $F_w$  est un foncteur

$$F_w : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{A}}$$

de la catégorie  $\mathbb{B}$  des ensembles finis et bijections vers la catégorie  $\mathbb{E}_{\mathbb{A}}$  des ensembles  $\mathbb{A}$ -pondérés sommables et des bijections préservant le poids.

Soit  $U$  un ensemble fini. On appelle  $F_w$ -structure sur  $U$ , tout élément  $s \in F_w[U]$ . On dit que  $U$  est l'ensemble sous-jacent de  $s$  ou que  $s$  est étiquetée par les éléments de  $U$ . On note  $w(s)$  le poids de  $s$ .

On dit que deux  $F_w$ -structures  $s_1$  et  $s_2$  sont *isomorphes* si l'une est transportable sur l'autre le long d'une bijection  $\sigma$  entre leurs ensembles sous-jacents (*i.e.*  $s_2 = F_w[\sigma](s_1)$ ). La condition de préservation du poids assure alors que les deux structures  $s_1$  et  $s_2$  ont le même poids. La relation d'isomorphie entre structures définit une relation d'équivalence. Les classes sont appelées les *types d'isomorphie* (ou *structures non étiquetées*).

Deux espèces  $\mathbb{A}$ -pondérées  $F_w$  et  $G_v$  sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme naturel (au sens catégorique)  $\alpha$  entre les foncteurs  $F_w$  et  $G_v$ ,  $\alpha : F_w \rightarrow G_v$ . On note  $F_w = G_v$  pour signifier que les espèces pondérées  $F_w$  et  $G_v$  sont isomorphes plutôt que  $F_w \cong G_v$ . Cela signifie que pour tout ensemble fini  $U$ , il existe une bijection  $\alpha_U : F_w[U] \rightarrow G_v[U]$  et que cette famille de bijections  $\{\alpha_U\}$  commute avec les réétiquetages  $\sigma : U \rightarrow V$ , c'est-à-dire,  $\alpha_V \circ F_w[\sigma] = G_v[\sigma] \circ \alpha_U$ .

Dans le but d'alléger le texte, on omettra par la suite de mentionner, quand le contexte est clair, l'anneau de pondération  $\mathbb{A}$ .

Plusieurs séries peuvent être associées aux espèces de structures. Les trois plus classiques sont présentées dans la définition suivante.

**Définition 1.1.3** Soit  $F = F_w$  une espèce de structures pondérée quelconque. La série génératrice (exponentielle) des structures étiquetées, notée  $F(x)$ , la série ordinaire des structures non étiquetées (appelée parfois série tilde), notée  $\tilde{F}(x)$ , et la série indicatrice de cycles  $Z_F(x_1, x_2, \dots)$ , associées à l'espèce  $F$ , sont les séries formelles suivantes :

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} f_n(w) \frac{x^n}{n!}, \quad (1.3)$$

$$\tilde{F}(x) = \sum_{n \geq 0} \tilde{f}_n(w) x^n, \quad (1.4)$$

$$Z_F(x_1, x_2, x_3, \dots) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} |\text{Fix}F[\sigma]|_w x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} \dots, \quad (1.5)$$

où  $f_n(w)$  et  $\tilde{f}_n(w)$  représentent respectivement les inventaires (pondérés) des  $F$ -structures étiquetées et non étiquetées bâties sur un ensemble à  $n$  éléments, et  $|\text{Fix}F[\sigma]|_w$  est le poids total des  $F$ -structures laissées fixes par la permutation  $\sigma$ .

En d'autres termes,  $f_n(w)$  représente le poids total de toutes les  $F_w$ -structures sur l'ensemble  $[n]$ , alors que  $\tilde{f}_n(w)$  représente celui des  $F_w$ -structures non étiquetées sur  $n$  points. Par la suite, la série génératrice ordinaire  $\tilde{F}(x)$  des structures non étiquetées est appelée *série tilde*. Lorsque la pondération associée à l'espèce  $F = F_w$  est triviale (pour tout  $F$ -structure  $s$ ,  $w(s) = 1$ ), les entiers  $f_n = f_n(1)$ ,  $\tilde{f}_n = \tilde{f}_n(1)$  et  $|\text{Fix}F[\sigma]| = |\text{Fix}F[\sigma]|_1$  désignent les nombres de  $F$ -structures sur un ensemble à  $n$  éléments respectivement étiquetées, non étiquetées et laissées fixes par  $\sigma \in \mathbb{S}_n$ . Notons que si deux espèces pondérées  $F_w$  et  $G_v$  sont isomorphes, alors les trois séries définies par (1.3), (1.4) et (1.5) de ces espèces coïncident deux à deux.

**Remarque 1.1.4** Les deux séries définies par (1.3) et (1.4) peuvent être obtenues en spécialisant la série indicatrice de cycles en remplaçant dans (1.5),  $x_1$  par  $x$ , et  $x_i$  par 0, pour  $i \geq 2$ , et  $x_i$  par  $x^i$ , respectivement :

$$F(x) = Z_F(x, 0, 0, \dots), \quad \tilde{F}(x) = Z_F(x, x^2, x^3, \dots). \quad (1.6)$$

De multiples opérations ont été définies au niveau des espèces, voir (Joyal, 81; Joyal, 86; Yeh, 86). Les principales sont l'addition, la multiplication, la substitution, la dérivation et le pointage. Pour des exposés complets à propos de ces opérations, voir (Bergeron, Labelle et Leroux, 98). Mais, la substitution est la seule de ces opérations contrainte à une condition sur les espèces. En effet, pour que la substitution de deux espèces pondérées  $F = F_w$  et  $G = G_v$  soit définie, on impose la condition que  $G$  ne possède pas de structure sur l'ensemble vide, ce que l'on note  $G(0) = 0$ ;  $G(0)$  représente le terme constant de l'espèce  $G$ . On verra par la suite que l'on peut obtenir une notion de substitution plus générale moyennant certaines restrictions sur l'espèce  $F$ .

L'opération d'addition permet, en outre, d'obtenir une décomposition canonique de chaque espèce  $F = F_w$ , sous la forme suivante :

$$F = F_0 + F_1 + F_2 + F_3 + \dots, \quad (1.7)$$

où  $F_n$  représente l'espèce  $F = F_w$  restreinte au cardinal  $n$ , à savoir, pour tout ensemble fini  $U$ ,

$$F_n[U] = \begin{cases} F[U], & \text{si } |U| = n, \\ \emptyset, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.8)$$

**Exemple 1.1.5** Nous allons illustrer la décomposition canonique présentée ci-dessus en considérant les espèces  $E$  des ensembles et  $C$  des cycles orientés. Pour ces deux espèces, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} E &= 1 + X + E_2 + E_3 + \dots = \sum_{n \geq 0} E_n, \\ C &= X + C_2 + C_3 + \dots = \sum_{n \geq 1} C_n, \end{aligned}$$

où  $E_n$  et  $C_n$  sont respectivement les espèces des ensembles de cardinal  $n$  et des cycles (orientés) de taille  $n$ ,  $E_0 = 1$ ,  $E_1 = X = C_1$ .

Cette décomposition est importante et permet, dans de nombreux cas, d'obtenir des formules relativement simples pour les séries associées aux espèces, ainsi que des formules énumératives explicites.

Finalement, on définit les puissances d'une espèce  $F = F_w$  par

$$F^0 = 1, \quad F^n = \underbrace{F \cdot F \cdot \dots \cdot F}_{n \text{ fois}}, \quad (1.9)$$

où 1 est l'espèce définie par  $1[U] = \{U\}$ , si  $U = \emptyset$ , et  $\emptyset$  sinon.

## 1.2 Espèces moléculaires et asymétriques

Le concept d'espèce moléculaire est central dans la théorie des espèces. En effet, il est à la base de la classification de structures selon leurs symétries, en permettant de trier les structures par rapport à leur stabilisateur. C'est ce type de classification, appelé *développement moléculaire*, que nous établissons pour les espèces des 2-arbres exteplans et exteplanaires dans la deuxième partie. De plus, dans ce type de classification, des structures dépourvues de symétries apparaissent. De telles structures sont dites *asymétriques*.

### 1.2.1 Espèce et développement moléculaires

Cette section est consacrée à l'introduction des notions d'*espèce moléculaire* et de *développement moléculaire* (ou décomposition moléculaire). On considère ici des espèces non pondérées pour introduire la notion d'espèce moléculaire, ceci ayant pour but de faciliter la lecture.

**Définition 1.2.1** Une espèce moléculaire  $M$  est une espèce ne possédant qu'un seul type d'isomorphie.

En d'autres termes, deux  $M$ -structures quelconques sont toujours isomorphes. De telles espèces sont caractérisées par le fait qu'elles sont indécomposables sous la somme combinatoire :

$$M \text{ est moléculaire} \iff (M = F + G \Rightarrow F = 0 \text{ ou } G = 0). \quad (1.10)$$

Il est toujours possible de représenter une espèce moléculaire sous la forme d'une espèce quotient

$$M = \frac{X^n}{H}, \quad (1.11)$$

où  $X^n$  représente l'espèce des listes (ou ordres linéaires) de longueur  $n$  et  $H$  est un sous-groupe du groupe symétrique à  $n$  éléments  $\mathbb{S}_n$ . On écrit  $H \leq \mathbb{S}_n$ . En fait,  $H$  est le *stabilisateur* d'une quelconque  $M$ -structure sur l'ensemble  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ , c'est-à-dire, le sous-groupe de  $\mathbb{S}_n$  dont les éléments fixent la  $M$ -structure considérée. On dit que  $n$  est le *degré* de l'espèce  $M$ . C'est en fait le cardinal sur lequel est construite l'espèce moléculaire  $M$ . Une espèce moléculaire est ainsi entièrement déterminée par la donnée de son degré et de son stabilisateur. Notons que le stabilisateur d'une structure est aussi appelé son *groupe d'automorphismes*.

**Proposition 1.2.2** Deux espèces moléculaires de même degré  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X^n/H$  et  $X^n/K$ , où  $H$  et  $K$  sont des sous-groupes de  $\mathbb{S}_n$ , sont égales (i.e. isomorphes en tant qu'espèces) si et seulement si  $H$  et  $K$  sont des sous-groupes conjugués de  $\mathbb{S}_n$ .  $\square$

Donnons dès maintenant quelques exemples d'espèces moléculaires usuelles.

**Exemple 1.2.3** Les espèces moléculaires suivantes sont toutes de degré  $n$  et sont obtenues en décrivant explicitement le sous-groupe de  $\mathbb{S}_n$  qui stabilise une quelconque de leurs structures :

- lorsque  $H = 1$ , le sous-groupe trivial de  $\mathbb{S}_n$ , alors  $X^n/1 = X^n$ ;
- lorsque  $H = \langle \rho \rangle$ , où  $\rho$  est la permutation circulaire (engendrant un groupe cyclique d'ordre  $n$ ),  $\rho = (1, 2, \dots, n)$ , alors  $X^n/\langle \rho \rangle = C_n$ , l'espèce des cycles (orientés) de taille  $n$ ;
- lorsque  $H = D_n$ , où  $D_n$  représente le groupe diédral de degré  $n$ , alors  $X^n/D_n$  est l'espèce des polygones de taille  $n$  (appelés aussi  $n$ -gones) et est usuellement notée  $P_n$ ;
- si maintenant le groupe  $H$  est  $\mathbb{S}_n$  lui-même, alors on a  $X^n/\mathbb{S}_n = E_n$ , l'espèce des ensembles de cardinal  $n$ .

On note  $\mathcal{M}$  l'ensemble des espèces moléculaires. Il est facile de voir que les premiers éléments de cet ensemble, jusqu'au degré 3, sont

$$\mathcal{M} = \{1, X, E_2, X^2, E_3, C_3, XE_2, X^3, \dots\}. \quad (1.12)$$

Les espèces moléculaires ont été répertoriées jusqu'au degré 7 jusqu'à présent; voir (Labelle, J., 85; Chiricota, 93-1; Chiricota, 93-2; Bergeron, Labelle et Leroux, 98).

De plus, chaque espèce  $F$  peut être exprimée comme une combinaison linéaire (possiblement infinie) à coefficients entiers d'espèces moléculaires, de la manière suivante :

$$F = \sum_{M \in \mathcal{M}} f_M M, \quad (1.13)$$

où  $f_M \in \mathbb{N}$  représente le nombre de sous-espèces de  $F$  isomorphes à  $M$ .

En décomposant l'action du groupe symétrique sur l'espèce  $F$  pour chaque degré, on peut montrer le résultat suivant.

**Proposition 1.2.4** *Pour chaque espèce  $F$ , le développement (1.13) est unique.*  $\square$

**Définition 1.2.5** *Soit  $F$  une espèce quelconque. Le développement (1.13) est appelé développement moléculaire ou décomposition moléculaire de l'espèce  $F$ .*

Ce développement est puissant puisque, en plus de classifier l'espèce  $F$  selon ses symétries (correspondant à chaque type de sous-groupe de  $\mathbb{S}_n$  fixant certaines  $F$ -structures), il contient toutes les séries génératrices usuelles associées à une espèce de structures.

**Remarque 1.2.6** Dans le cas d'une espèce pondérée  $F_w$ , la décomposition (1.13) devient

$$F_w = \sum_{M \in \mathcal{M}} f_M(w) M, \quad (1.14)$$

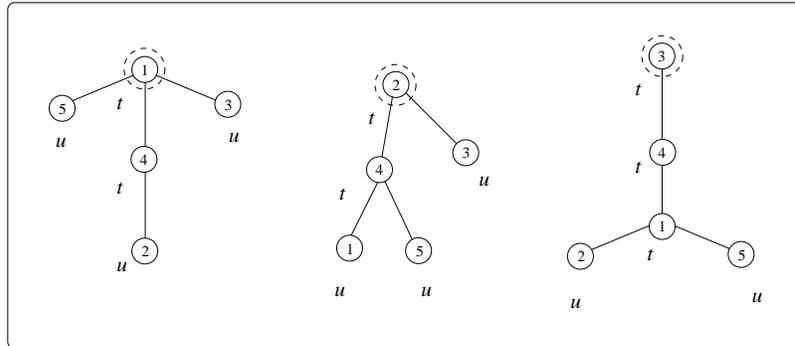
où  $f_M(w)$  est une série de puissances en les variables de poids, donnant le poids total des structures non étiquetées déterminant des sous-espèces isomorphes à  $M$ .

**Exemple 1.2.7** Pour illustrer la signification des coefficients  $f_M(w)$  dans des expressions de la forme (1.14), considérons l'espèce des arborescences pondérées par  $t$  pour chaque noeud interne (racine comprise) et par  $u$  pour chaque feuille. Par exemple, en figure 1.1, nous pouvons voir trois arborescences pondérées de la manière ci-dessus bâties sur cinq sommets et qui ne sont pas *isomorphes*. Par contre, ces structures déterminent des sous-espèces moléculaires isomorphes. On dit que ces structures sont *semblables*. On peut voir en effet que leurs stabilisateurs sont conjugués ou encore, ce qui est souvent plus facile à concevoir, qu'elles peuvent être réétiquetées de façon telle

que leurs stabilisateurs soient identiques. Dans le cas présent, l'espèce moléculaire correspondante est  $X^3 E_2(X)$ . Les deux premières arborescences possèdent le poids  $u^3 t^2$  et la troisième, le poids  $u^2 t^3$ . Alors, le terme

$$\cdots + (2u^3 t^2 + u^2 t^3) X^3 E_2(X) + \cdots \quad (1.15)$$

apparaît dans le développement moléculaire de l'espèce des arborescences pondérées comme défini plus haut. Notons que le coefficient 2 dans (1.15) est appelé la *multiplicité* de l'espèce moléculaire  $X^3 E_2(X)$  de poids  $u^3 t^2$ .



**Figure 1.1** Trois arborescences pondérées étiquetées non isomorphes mais semblables

On peut aussi considérer des espèces plus fondamentales que les espèces moléculaires : les espèces *atomiques*.

**Définition 1.2.8** On dit qu'une espèce moléculaire  $M \neq 1$  est atomique si elle est indécomposable sous l'opération de produit.

Les premières espèces atomiques, jusqu'au degré 4, sont

$$X, E_2, E_3, C_3, E_4, E_4^\pm, E_2 \circ E_2, P_4^{\text{bic}}, C_4, E_2 \circ X^2, \quad (1.16)$$

où  $E_4^\pm = X^4/\mathcal{A}_4$  est l'espèce des *ensembles orientés* de taille 4,  $\mathcal{A}_4 \leq \mathbb{S}_4$  étant le sous-groupe alterné de  $\mathbb{S}_4$ , et  $P_4^{\text{bic}} = X^4/D_2$ , où  $D_2$  est le groupe diédral à quatre éléments, est l'espèce des *quadrilatères bicolores*. Un exposé plus détaillé sur les espèces  $P_n^{\text{bic}}$ , pour  $n \geq 2$  un entier pair, est conduit en section 1.5, dans le cadre d'une généralisation de ces espèces.

De plus, Yeh, ((Yeh, 86)), a montré que toute espèce moléculaire  $M$  se décompose comme produit d'espèces atomiques de façon unique, à l'ordre des facteurs près. En gardant à l'esprit que toute espèce pondérée  $F_w$  se développe de façon unique comme combinaison linéaire d'espèces moléculaires, il est alors naturel de considérer les espèces pondérées dans un anneau de séries formelles de la forme

$$\mathbb{C} [[\vec{v}; X, E_2, E_3, C_3, \dots]],$$

où  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, \dots)$  est une famille dénombrable de variables de poids et les espèces utilisées sont les atomiques.

La notion d'espèce moléculaire peut alors se généraliser au cas d'espèces multisortes de façon naturelle. Nous traitons ici le cas à deux sortes, la généralisation à un nombre quelconque de sortes étant immédiate. Considérons deux sortes  $X$  et  $Y$ . Toute espèce moléculaire à deux sortes  $M = M(X, Y)$  peut s'écrire

$$M(X, Y) = \frac{X^n Y^m}{H}, \quad (1.17)$$

où  $H \leq \mathbb{S}_n^X \times \mathbb{S}_m^Y$  est le stabilisateur d'une  $M$ -structure quelconque. Ici,  $\mathbb{S}_n^X$  (resp.  $\mathbb{S}_n^Y$ ) représente le groupe symétrique de degré  $n$  agissant sur les points de sorte  $X$  (resp.  $Y$ ).

Il est intéressant de noter que, pour une espèce moléculaire  $M$  quelconque, l'expression de la série indicatrice de cycles prend une forme agréable qui en facilite le calcul.

**Théorème 1.2.9** ((Kerber, 86; Labelle, G., Labelle, J., Pineau, 95; Bergeron, Labelle et Leroux, 98)). *Soit  $M(X, Y) = X^n Y^m / H$  une espèce moléculaire à deux sortes, avec  $H \leq \mathbb{S}_n^X \times \mathbb{S}_m^Y$ . Alors, la série indicatrice de cycles de  $M$  est donnée par*

$$Z_M(x_1, x_2, \dots; y_1, y_2, \dots) = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} x_1^{c_1(h)} x_2^{c_2(h)} \dots y_1^{d_1(h)} y_2^{d_2(h)} \dots, \quad (1.18)$$

où  $c_i(h)$  (resp.  $d_i(h)$ ), pour  $i \geq 1$ , représente le nombre de cycles de longueur  $i$  de la permutation sur les points de sorte  $X$  (resp. de sorte  $Y$ ) induite par l'élément  $h \in H$ , et  $|H|$  désigne le cardinal du groupe  $H$ .  $\square$

Finalement, pour conclure sur les espèces moléculaires, considérons deux espèces moléculaires  $M$  et  $N$ . Alors l'espèce  $M(N)$ , obtenue par substitution de  $N$  dans  $M$ , reste moléculaire. Par exemple, les espèces  $E_2(E_2)$  et  $C_3(X^2)$  sont moléculaires. Le produit de deux espèces moléculaires est lui aussi une espèce moléculaire. De plus, il est possible de calculer le stabilisateur de l'espèce obtenue par produit ou substitution de deux espèces moléculaires de la façon suivante.

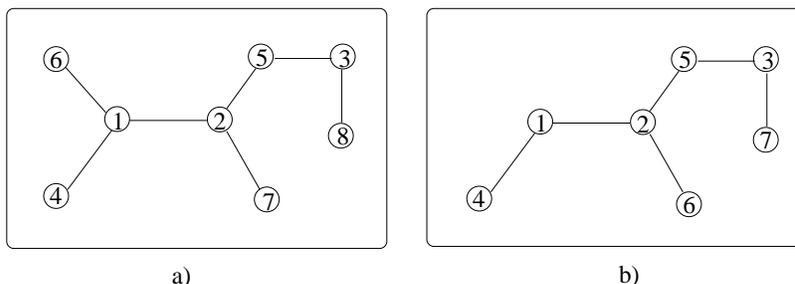
**Proposition 1.2.10** *Soient  $H$  un sous-groupe de  $\mathbb{S}_n$  et  $K$ , un sous-groupe de  $\mathbb{S}_m$ , où  $n, m \in \mathbb{N}$ . Alors, on a*

$$\begin{aligned} a) \quad & \frac{X^n}{H} \cdot \frac{X^m}{K} = \frac{X^{n+m}}{H \times K}, \\ b) \quad & \frac{X^n}{H} \circ \frac{X^m}{K} = \frac{X^{nm}}{H \wr K}, \quad \text{si } m > 0, \end{aligned}$$

où  $H \times K$  désigne le produit cartésien de  $H$  par  $K$  vu comme sous-groupe de  $\mathbb{S}_{n+m}$ , et  $H \wr K$  représente le produit en couronne des actions de groupes  $H$  sur  $[n]$  et  $K$  sur  $[m]$ .  $\square$

### 1.2.2 Structures asymétriques

Les structures asymétriques sont caractérisées par le fait que leur groupe d'automorphismes est réduit à la permutation identité (comme sous-groupe du groupe symétrique) de son ensemble sous-jacent. Cette notion, dans le contexte des espèces, a été introduite et discutée par G. Labelle dans (Labelle, G., 89-1; Labelle, G., 92; Labelle, G., 93).



**Figure 1.2** Un arbre a) non asymétrique, et b) asymétrique

**Définition 1.2.11** Soient  $F = F_w$  une espèce de structures pondérée,  $U$  un ensemble fini quelconque et  $s$  une  $F$ -structure sur l'ensemble  $U$ . La structure  $s$  est dite asymétrique si son stabilisateur est trivial, c'est-à-dire, pour toute permutation  $\sigma$  sur  $U$ ,

$$F[\sigma](s) = s \implies \sigma = \mathbf{1}_U. \quad (1.19)$$

Par exemple, l'arbre présenté en figure 1.2 a) n'est pas asymétrique, puisqu'il admet la transposition  $\sigma = (46)$  comme automorphisme. Par contre, celui proposé en figure 1.2 b) est totalement asymétrique, étant donné que seule la permutation identité le fixe sous son action.

On peut donc considérer la sous-espèce notée  $\overline{F}$  d'une espèce  $F = F_w$  constituée par l'ensemble des  $F$ -structures asymétriques. Cette sous-espèce est appelée *partie plate* ou encore *partie asymétrique* de l'espèce  $F$ .

**Définition 1.2.12** Soit  $F = F_w$  une espèce pondérée. La partie asymétrique de  $F$  est définie, pour tout ensemble fini  $U$ , par

$$\overline{F}[U] = \{s \in F[U] \mid s \text{ est asymétrique}\}. \quad (1.20)$$

Pour une espèce  $F = F_w$  quelconque, il peut arriver que l'on ait  $\overline{F} = F$ . Dans ce cas, on dit que  $F$  est une espèce *asymétrique*. La propriété d'asymétrie pour des espèces est stable sous les opérations suivantes : addition, produit, substitution, pointage.

**Exemple 1.2.13** Les espèces  $X$ , des singletons, et  $L = \sum_{n \geq 0} X^n$ , des listes, sont asymétriques. En effet, aucun réétiquetage non trivial d'une liste ne peut fixer la structure de la liste. On déduit aussi que l'espèce  $X^n$ ,  $n \geq 1$ , est asymétrique puisque toute

sous-espèce d'une espèce asymétrique est elle-même asymétrique. De plus, il est facile de voir que l'on a

$$\overline{X} = X, \quad \overline{L} = L, \quad \overline{E} = 1 + X, \quad \overline{C} = X. \quad (1.21)$$

Notons aussi que seules les espèces moléculaires de la forme  $X^n$ ,  $n \geq 0$ , sont asymétriques. Il est donc évident que toute espèce asymétrique  $F = F(X)$  s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire à coefficients entiers des espèces  $X^n$ ,

$$F(X) = \sum_{n \geq 0} f_n X^n, \quad (1.22)$$

où  $f_n$  est le nombre de  $F$ -structures *non-étiquetées* construites sur un ensemble à  $n$  éléments. Il est à noter que si  $F$  est asymétrique, alors  $F(x) = \tilde{F}(x) = \sum_{n \geq 0} f_n x^n$  et  $Z_F = F(x_1)$ .

On définit aussi la *série génératrice des structures asymétriques non étiquetées*  $\overline{F}(x)$  d'une espèce pondérée  $F$  quelconque par

$$\overline{F}(x) = \sum_{n \geq 0} \overline{f}_n(w) x^n, \quad (1.23)$$

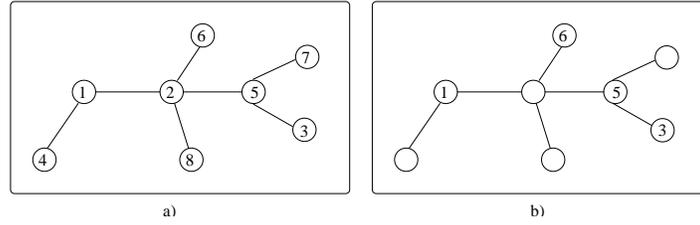
où  $\overline{f}_n(w)$  est le poids total des  $F$ -structures asymétriques non étiquetées sur un ensemble à  $n$  éléments.

### 1.3 Substitution (composition partitionnelle) généralisée

Comme nous l'avons mentionné plus tôt, de nombreuses opérations ont été introduites dans le contexte des espèces de structures. Ces opérations sont toutes définies pour des espèces quelconques, hormis l'opération de substitution (pléthystique). En effet, pour que l'espèce  $F \circ G$ , composée de  $G = G_v$  par  $F = F_w$  soit définie, il faut que  $G(0) = 0$ , ce qui signifie que l'espèce  $G$  ne possède pas de structure sur l'ensemble vide. On dit alors que  $G$  est une espèce à *terme constant nul*. Il est cependant possible d'étendre dans certains cas l'opération de substitution de deux espèces  $F \circ G$  au cas d'espèces  $G$  à terme constant non nul.

Le premier exemple d'utilisation de la substitution d'espèces à terme constant non nul consiste en l'étude des *structures partiellement étiquetées*. Une structure partiellement étiquetée s'obtient d'une structure étiquetée en retirant certaines étiquettes de la structure, incluant les cas d'aucune étiquette ou de toutes. Pour illustrer cela, considérons l'espèce  $\mathcal{A}$  des *arbres* (de Cayley). En figure 1.3 a), on peut voir un arbre étiqueté comportant 8 sommets, et, en figure 1.3 b), un arbre partiellement étiqueté que l'on peut obtenir à partir du premier.

La définition suivante formalise la notion d'espèces de structures partiellement étiquetées, dans le cas d'une espèce moléculaire  $M$ .



**Figure 1.3** Un arbre a) étiqueté, b) partiellement étiqueté

**Définition 1.3.1** Soit  $M = M(X)$  une espèce moléculaire quelconque. On définit l'espèce des  $M$ -structures partiellement étiquetées, notée  $M(1 + X)$ , par

$$M(1 + X) = M(T + X)|_{T:=1}, \quad (1.24)$$

où  $T$  est une sorte auxiliaire de singletons. Plus généralement, pour un entier  $k \geq 0$ , on définit l'espèce des  $M$ -structures partiellement  $k$ -colorées par

$$M(k + X) = M(kT + X)|_{T:=1}. \quad (1.25)$$

Notons que l'espèce  $M(T + X)$  est en fait un espèce à deux sortes construite à partir des sortes de singletons  $X$  et  $T$ . La définition précédente signifie alors que pour obtenir une  $M$ -structure partiellement étiquetée, on construit dans un premier temps une  $M(T + X)$ -structure à deux sortes, puis on retire les étiquettes de tous les points de sorte  $T$ .

De façon analogue, pour construire une  $M(k + X)$ -structure, c'est-à-dire une  $M$ -structure partiellement  $k$ -colorée, on commence par construire une  $M(kT + X)$ -structure, à savoir une  $M$ -structure sur les deux sortes  $T$  et  $X$  de singletons en attachant à chaque singleton de sorte  $T$  une couleur  $i$ ,  $1 \leq i \leq k$ . Ensuite, on désétiquette les points de sorte  $T$ .

De façon encore plus générale, considérons  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, \dots)$  une famille dénombrable de variables de poids. Soit alors  $\mathbb{C}[[\vec{v}]]$  l'anneau des séries formelles en les indéterminées  $\vec{v}$ . Tout élément  $\xi \in \mathbb{C}[[\vec{v}]]$  s'écrit donc

$$\xi = c_1\mu_1 + c_2\mu_2 + c_3\mu_3 + \dots,$$

où, pour  $i \geq 1$ ,  $c_i \in \mathbb{C}$  et  $\mu_i \in \mathbb{C}[[\vec{v}]]$  est un monôme unitaire en les variables  $v_1, v_2, \dots$ . On généralise alors, pour  $\xi \in \mathbb{C}[[\vec{v}]]$ , à la substitution de  $1_\xi + X$  dans une espèce moléculaire  $M$ , où  $1_\xi = T_\xi|_{T:=1}$  avec  $T_\xi = c_1T_{\mu_1} + c_2T_{\mu_2} + c_3T_{\mu_3} + \dots$ , où  $T_{\mu_i}$  représente l'espèce des singletons de sorte  $T$  pondérés par le monôme  $\mu_i$ . Concrètement, prenons une  $M(T_\xi + X)$ -structure quelconque. Pour obtenir une  $M(1_\xi + X)$ -structure, à savoir une  $M$ -structure partiellement étiquetée pondérée, on désétiquette tous les points de sorte  $T$  tout en conservant leur poids. On écrit alors,

$$M(1_\xi + X) = M(T_\xi + X)|_{T:=1}. \quad (1.26)$$

On préfère dans certains cas utiliser une notation multiplicative pour la pondération. La relation (1.26) prend la forme

$$M(\xi + X) = M(\xi \cdot T + X)|_{T:=1}. \quad (1.27)$$

Nous choisissons ici d'adopter ce profil; on écrira alors  $M(\xi + X)$  où  $\xi \in \mathbb{C}[[\vec{v}]]$ , par analogie avec  $M(k + X)$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ .

Considérons maintenant deux espèces pondérées  $F_w$  et  $G_v$  à poids dans  $\mathbb{C}[[\vec{v}]]$ , où  $G_v$  est supposée à terme constant non nul. Dans le but d'assurer que la substitution  $F_w \circ G_v$  de  $G_v(X)$  dans  $F_w(X)$  soit bien définie, certaines *conditions de sommabilité* doivent être satisfaites. Ces conditions suivent : considérons le terme constant de  $G_v$ ,

$$\xi = G_v(0) \in \mathbb{C}[[\vec{v}]]. \quad (1.28)$$

Alors, la composée  $F_w \circ G_v$  est bien définie si

- a)  $\xi(0, 0, 0, \dots) = 0$  et  $F_w(X)$  est arbitraire (à savoir, le terme constant de la série  $\xi$  est nul),

ou si

- b)  $F_w(X)$  est une espèce polynomiale (à savoir, il n'existe pas de  $F_w$ -structure sur tout ensemble suffisamment grand) et  $G_v(X)$  est arbitraire.

**Exemple 1.3.2** Soit  $F_w = E = 1 + X + E_2 + E_3 + \dots$ , l'espèce (non pondérée) des ensembles finis et  $G_v = v_2 + 2v_3^4 + v_4C_3$  où  $C_3$  représente l'espèce des cycles (orientés) de longueur trois. Alors,  $F_w \circ G_v = E \circ (v_2 + 2v_3^4 + v_4C_3)$  est bien définie puisque

$$\xi = G_v(0) = v_2 + 2v_3^4, \quad \xi(0, 0, \dots) = 0. \quad (1.29)$$

Néanmoins, l'espèce  $E \circ (4 + v_2 + 2v_3^4 + v_4C_3)$  n'est pas définie car, dans ce cas,

$$\xi = 4 + v_2 + 2v_3^4, \quad \xi(0, 0, \dots) = 4 \neq 0, \quad (1.30)$$

et  $F_w \circ G_v(0) = E(4) = \infty$ . Enfin, l'espèce  $E_3(4 + v_2 + 2v_3^4 + v_4C_3)$  est bien définie étant donné que l'espèce  $E_3$  est bien évidemment polynomiale.

Notons que, dans le cas où l'on considère une espèce  $F_w$  polynomiale de degré au plus  $d \in \mathbb{N}^*$ , alors  $F_w$  possède un unique développement de la forme

$$F_w(X) = \sum_{\substack{M \in \mathcal{M} \\ \deg M \leq d}} f_M(w)M(X),$$

et on définit  $F_w(\xi + X)$  par

$$F_w(\xi + X) := \sum_{\substack{M \in \mathcal{M} \\ \deg M \leq d}} f_M(w)M(\xi + X). \quad (1.31)$$

On motive ainsi la définition suivante.

**Définition 1.3.3** Soit  $G_v$  une espèce dont le terme constant vérifie  $G_v(0) = \xi$ . On pose  $X := G_+$ , où  $G_+ = G - \xi$ . Alors,

$$F_w \circ G_v = \sum_{\substack{M \in \mathcal{M} \\ \deg M \leq d}} f_M(w) M(\xi + X) \circ G_+. \quad (1.32)$$

Intéressons nous maintenant au calcul explicite du terme constant de  $M(\xi + X)$ , où  $M$  est une espèce moléculaire et  $\xi \in \mathbb{C}[[\vec{v}]]$ . Ce terme constant est donné par  $M(\xi) = M(\xi T + X)|_{X:=0}$ . On obtient alors une formule explicite permettant le calcul de  $M(\xi)$  à partir de la série indicatrice de cycles  $Z_M$  de l'espèce  $M$ .

**Proposition 1.3.4** Soit  $M$  une espèce moléculaire et  $\xi = c_1\mu_1 + c_2\mu_2 + \dots \in \mathbb{C}[[\vec{v}]]$ . Alors, on a

$$M(\xi) = Z_M(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots), \quad (1.33)$$

où, pour  $k \geq 1$ ,  $\xi_k = c_1\mu_1^k + c_2\mu_2^k + \dots$  et  $Z_M(x_1, x_2, \dots)$  est la série indicatrice de cycles de  $M$ .

**Preuve.** Considérons d'abord le cas où  $\xi = 1$ . En utilisant (1.38), (voir plus loin), il vient successivement

$$\begin{aligned} M(1) &= M(X)|_{X:=1} := \text{cardinal ou poids total des types de } M\text{-structures} \\ &= \tilde{\sigma}_M(1, 0, 0, \dots) \\ &= Z_M(1, 1, 1, \dots), \end{aligned} \quad (1.34)$$

où  $\tilde{\sigma}_M$  est définie par (1.38). Considérons désormais  $\xi \in \mathbb{N}[[\vec{v}]]$ . On peut alors écrire

$$\xi = n_1\mu_1 + n_2\mu_2 + \dots,$$

où, pour  $i \geq 1$ ,  $n_i \in \mathbb{N}$  et  $\mu_i \in \mathbb{N}[\vec{v}]$  sont des monômes unitaires. Alors, la notation multiplicative  $\xi X$  signifie,

$$\xi X = c_1 X_{\mu_1} + c_2 X_{\mu_2} + \dots = c_1 \mu_1 X + c_2 \mu_2 X + \dots,$$

où  $\mu X := X_\mu$ , par définition. On a alors,

$$Z_{\xi X} = c_1 \mu_1 Z_X + c_2 \mu_2 Z_X + \dots = (c_1 \mu_1 + c_2 \mu_2 + \dots) Z_X = \xi x_1.$$

On en déduit,

$$\begin{aligned} M(\xi) &= (M \circ \xi X)(1) \\ &= (Z_{M \circ \xi X})(1, 1, 1, \dots) \\ &= Z_M(\xi_1 x_1, \xi_2 x_2, \xi_3 x_3, \dots)|_{x_i:=1} \\ &= Z_M(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots), \end{aligned} \quad (1.35)$$

où  $\xi_i = p_i \circ \xi = n_1 \mu_1^i + n_2 \mu_2^i + \dots$ ,  $p_i$  étant la  $i^{\text{ième}}$  somme de puissances et  $(Z_{\xi T})_k = p_k \circ Z_{\xi T}$ . Le cas général où  $\xi = c_1 \mu_1 + c_2 \mu_2 + \dots \in \mathbb{C}[[\vec{v}]]$  découle alors du principe du prolongement des identités polynomiales (Bergeron, Labelle et Leroux, 98) étant donné que les deux membres de (1.33) sont des polynômes en  $c_1, c_2, \dots$  qui coïncident lorsque  $c_1, c_2, \dots \in \mathbb{N}$ . ■

Etant donné que toute espèce  $F = F_w$  s'écrit comme combinaison linéaire d'espèces moléculaires et par la linéarité de la série indicatrice de cycles face à l'opération d'addition, on déduit le résultat suivant.

**Corollaire 1.3.5** *Soit  $F = F_w$  une espèce pondérée quelconque vérifiant les conditions de sommabilité et  $\xi \in \mathbb{C}[[\vec{v}]]$ . Alors, on a*

$$F_w(\xi) = Z_{F_w}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots). \quad (1.36)$$

□

## 1.4 Séries indicatrices

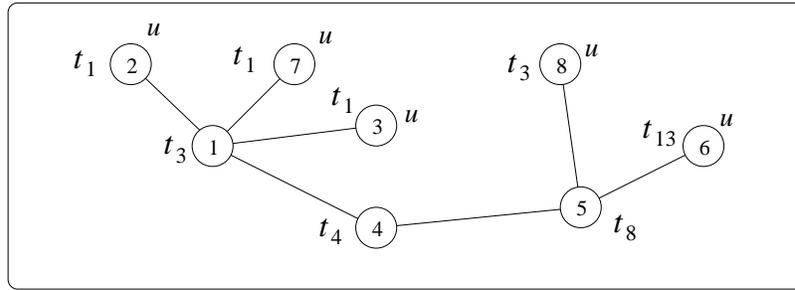
Soit  $F = F_w$  une espèce pondérée quelconque. Deux séries indicatrices principales peuvent être associées à l'espèce  $F$ : la série indicatrice de cycles  $Z_F(x_1, x_2, \dots)$  et la série indicatrice d'asymétrie  $\Gamma_F(x_1, x_2, \dots)$ . Dans le but d'introduire ces deux séries de façon unifiée, nous considérons une famille dénombrable  $\vec{t} = (t_1, t_2, \dots)$  de variables formelles auxiliaires qui n'apparaissent pas dans le poids original  $w$ . Nous formons alors une nouvelle espèce pondérée, notée  $F_{w, \vec{t}}$  dont les structures sont des  $F_w$ -structures colorées au sens suivant : une  $F_{w, \vec{t}}$ -structure sur un ensemble fini  $U$  est un couple  $(f, c)$  où  $f$  est une  $F_w$ -structure sur  $U$  et  $c$  est une coloration,  $c : U \rightarrow \{1, 2, 3, \dots\}$ . Le  $w, \vec{t}$ -poids de la structure  $(f, c)$  est alors donné par l'expression suivante

$$w(f) \prod_{u \in U} t_{c(u)}. \quad (1.37)$$

Un automorphisme d'une structure  $(f, c)$  est une permutation  $\sigma : U \rightarrow U$  qui est un automorphisme de  $f$  préservant la coloration, *i.e.*,  $c = c \circ \sigma$ . Le  $w, \vec{t}$ -poids est alors un monôme dont les variables incluent certains  $t_i$ . Par exemple, la figure 1.4 montre un arbre construit sur l'ensemble  $[8] = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  coloré et pondéré de la façon décrite au-dessus, où le poids original d'un arbre était  $u$  élevé à une puissance égale au nombre de feuilles de l'arbre (par convention dans cette figure, si un noeud  $x$  est coloré  $c(x)$ , alors le poids  $t_{c(x)}$  est attaché à ce noeud).

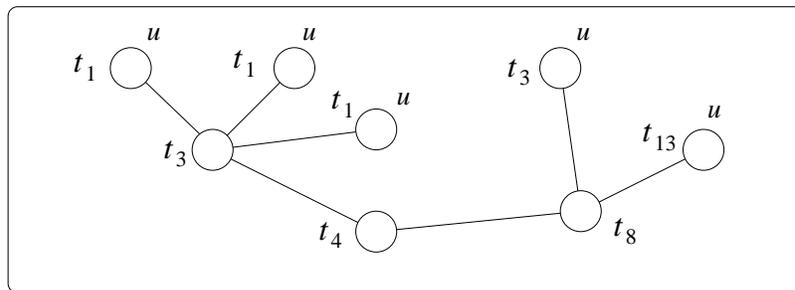
En retirant les étiquettes des  $F_{w, \vec{t}}$ -structures, tout en conservant leur poids, deux fonctions symétriques,  $\tilde{\sigma}_{F_w}(t_1, t_2, t_3, \dots)$  et  $\bar{\sigma}_{F_w}(t_1, t_2, t_3, \dots)$  en les variables  $t_i$ , sont associées à chaque espèce  $F_w$ , comme suit :

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{F_w}(t_1, t_2, t_3, \dots) &= \text{poids total des } F_{w, \vec{t}}\text{-structures non étiquetées,} \\ \bar{\sigma}_{F_w}(t_1, t_2, t_3, \dots) &= \text{poids total des } F_{w, \vec{t}}\text{-structures asymétriques} \\ &\quad \text{non étiquetées.} \end{aligned}$$

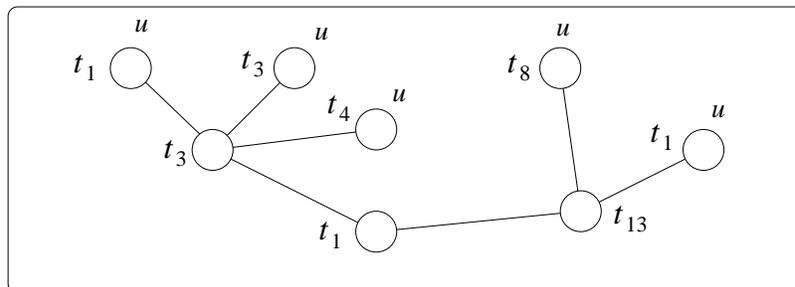


**Figure 1.4** Un arbre coloré sur  $[8]$  de poids  $u^5 t_1^3 t_3^2 t_4 t_8 t_{13}$

Les figures 1.5 et 1.6 décrivent respectivement une  $F_{w,\vec{t}}$ -structure non étiquetée typique, pour  $F_w$  l'espèce des arbres pondérés par leur nombre de feuilles, et une  $F_{w,\vec{t}}$ -structure non étiquetée asymétrique typique, ayant toutes deux le poids  $u^5 t_1^3 t_3^2 t_4 t_8 t_{13}$ . Remarquons que si l'on oublie la coloration dans la figure 1.6, la structure n'est plus asymétrique et le poids devient  $u^5$ .



**Figure 1.5** Arbre coloré typique non étiqueté de poids  $u^5 t_1^3 t_3^2 t_4 t_8 t_{13}$



**Figure 1.6** Arbre coloré asymétrique typique non étiqueté de poids  $u^5 t_1^3 t_3^2 t_4 t_8 t_{13}$

Il est bien connu dans la théorie des fonctions symétriques (voir par exemple (Macdonald, 95)) que les sommes de puissances en les variables  $t_i, i \geq 1$ , définies par

$$p_k = p_k(t_1, t_2, t_3, \dots) = \sum_{i \geq 1} t_i^k, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

forment une base algébrique de l'anneau des fonctions symétriques en les  $t_i$ ,  $i \geq 1$ . Cela signifie que toute fonction symétrique en les  $t_i$  s'écrit de façon unique comme une série de puissances en  $p_1, p_2, p_3, \dots$ . En particulier, (voir (Bergeron, Labelle et Leroux, 98; Labelle, G., 89-1)), les séries indicatrices  $Z_{F_w}$  et  $\Gamma_{F_w}$ , peuvent être définies dans cette base.

**Proposition 1.4.1** *Soit  $F_w$  une espèce pondérée. Alors, la série indicatrice de cycles  $Z_{F_w}(p_1, p_2, p_3, \dots)$  est l'unique série satisfaisant*

$$Z_{F_w}(p_1, p_2, p_3, \dots) = \tilde{\sigma}_{F_w}(t_1, t_2, t_3, \dots). \quad (1.38)$$

□

**Définition 1.4.2** *Pour toute espèce pondérée  $F_w$ , la série indicatrice d'asymétrie*

$$\Gamma_{F_w}(p_1, p_2, p_3, \dots)$$

*est l'unique série satisfaisant*

$$\Gamma_{F_w}(p_1, p_2, p_3, \dots) = \bar{\sigma}_{F_w}(t_1, t_2, t_3, \dots). \quad (1.39)$$

**Remarque 1.4.3** Notons que la formule (1.38) caractérisant la série indicatrice est équivalente à la formule (1.5). Ceci peut être établi en utilisant la théorie de Pólya. On aurait ainsi pu utiliser (1.38) pour définir  $Z_{F_w}$ . Cependant, la formule (1.5) est souvent plus adaptée au calcul explicite de la série indicatrice de cycles.

Ces deux séries indicatrices sont très importantes sachant qu'elles incluent les trois séries génératrices que l'on a considérées, à titre de spécialisations. Le résultat suivant explicite ce lien.

**Proposition 1.4.4** *Soit  $F = F_w$  une espèce pondérée. Alors, on a*

$$F(x) = Z_F(x, 0, 0, \dots) = \Gamma_F(x, 0, 0, \dots), \quad (1.40)$$

et

$$\tilde{F}(x) = Z_F(x, x^2, x^3, \dots), \quad \bar{F}(x) = \Gamma_F(x, x^2, x^3, \dots). \quad (1.41)$$

□

Pour le cas d'espèces à deux sortes, la proposition précédente prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} F(x, y) &= Z_F(x, 0, \dots; y, 0, \dots) = \Gamma_F(x, 0, \dots; y, 0, \dots), \\ \tilde{F}(x, y) &= Z_F(x, x^2, \dots; y, y^2, \dots), \\ \bar{F}(x, y) &= \Gamma_F(x, x^2, \dots; y, y^2, \dots). \end{aligned} \quad (1.42)$$

Finalement, on dispose d'une formule explicite permettant le calcul de la série indicatrice d'asymétrie pour une espèce moléculaire à deux sortes  $M(X, Y)$ .

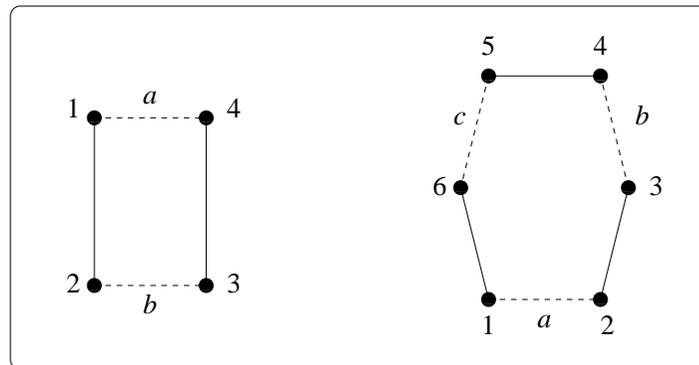
**Théorème 1.4.5** ((Bergeron, Labelle et Leroux, 98; Kerber, 86; Labelle, G., Labelle, J., Pineau, 95; Pineau, 95)). Soit  $M(X, Y) = X^n Y^m / H$  une espèce moléculaire à deux sortes, avec  $H \leq \mathbb{S}_n^X \times \mathbb{S}_m^Y$ . Alors, la série indicatrice d'asymétrie de  $M$  est donnée par

$$\begin{aligned} \Gamma_M(x_1, x_2, \dots; y_1, y_2, \dots) \\ = \frac{1}{|H|} \sum_{V \leq H} \mu(\{1\}, V) x_1^{c_1(V)} x_2^{c_2(V)} \dots y_1^{d_1(V)} y_2^{d_2(V)} \dots, \end{aligned} \quad (1.43)$$

où la somme est prise sur les sous-groupes  $V$  de  $H$ ,  $\{1\}$  est le sous-groupe identité de  $H$ ,  $\mu(\{1\}, V)$  représente la valeur de la fonction de Möbius dans le treillis des sous-groupes de  $H$  et  $c_i(V)$  (resp.  $d_i(V)$ ) désigne le nombre d'orbites possédant  $i$  éléments de sorte  $X$  (resp.  $Y$ ) par rapport à l'action naturelle de  $V$  sur  $[n]$  (resp.  $[m]$ ).  $\square$

### 1.5 Les espèces $P_4^{\text{bic}}(X, Y)$ et $P_6^{\text{bic}}(X, Y)$

L'objet de cette section est l'étude de deux espèces moléculaires (non pondérées) spéciales  $P_4^{\text{bic}}(X, Y)$  et  $P_6^{\text{bic}}(X, Y)$ . Ces espèces jouent un rôle fondamental dans la classification de l'espèce des 2-arbres extérioritaires. On s'attache ici à illustrer les divers concepts précédemment introduits. Notons que les résultats de cette section sont nouveaux et proviennent de (Labelle, Lamathe et Leroux, 01; Labelle, Lamathe et Leroux, 03). Commençons par définir l'espèce (à une sorte)  $P_n^{\text{bic}}$  pour  $n$  un entier pair, introduite par (Labelle, J., 85) :  $P_n^{\text{bic}}$  est l'espèce des  $n$ -gones bicolores étiquetés aux sommets. Plus précisément, les arêtes d'un polygone à  $n$  côtés sont colorées avec un jeu de deux couleurs,  $\{0, 1\}$ , de façon *propre*, c'est-à-dire, de sorte que deux arêtes adjacentes ne reçoivent pas la même couleur. On peut alors généraliser cette définition à l'espèce à deux sortes  $P_n^{\text{bic}}(X, Y)$ , où  $X$  représente la sorte des arêtes de couleur 1 (lignes pointillées) et  $Y$ , la sorte des sommets, comme illustré par la figure 1.7, pour  $n = 4$  et  $n = 6$ . Les lignes pleines font partie de la structure et ne représentent aucune sorte (ceci signifie que l'on ne les étiquette pas).



**Figure 1.7** Une  $P_4^{\text{bic}}(X, Y)$ -structure et une  $P_6^{\text{bic}}(X, Y)$ -structure

Il est clair que ces espèces sont moléculaires. Donc, dans le but de complètement les décrire, il faut identifier leur stabilisateur et les écrire sous la forme (1.17). On a

$$P_4^{\text{bic}}(X, Y) = \frac{X^2 Y^4}{D_2} \quad \text{et} \quad P_6^{\text{bic}}(X, Y) = \frac{X^3 Y^6}{S_3}, \quad (1.44)$$

où  $D_2$  et  $S_3$  sont caractérisés par leur action sur les structures étiquetées de la figure 1.7 :

1.  $D_2 = \langle h, v \rangle \leq \mathbb{S}_2^X \times \mathbb{S}_4^Y$ , avec

$$h = (a, b)(1, 2)(3, 4) \quad \text{et} \quad v = (a)(b)(1, 4)(2, 3).$$

Noter que  $h^2 = 1$ ,  $v^2 = 1$ ,  $hv = vh$ , et  $D_2 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ .

2.  $S_3 = \langle s, \omega \rangle \leq \mathbb{S}_3^X \times \mathbb{S}_6^Y$ , où

$$s = (a)(b, c)(1, 2)(3, 6)(4, 5) \quad \text{et} \quad \omega = (a, b, c)(1, 3, 5)(2, 4, 6).$$

Remarquer que  $s^2 = 1$ ,  $\omega^3 = 1$ ,  $s\omega s = \omega^2$ , et  $S_3 \cong \mathbb{S}_3$ .

Le lien entre les espèces à deux sortes  $P_n^{\text{bic}}(X, Y)$  et certaines classes de 2-arbres est explicité dans la deuxième partie traitant de la classification et de l'énumération de diverses familles de 2-arbres.

Nous passons maintenant au calcul des séries indicatrices de cycles et d'asymétrie des espèces  $P_4^{\text{bic}}(X, Y)$  et  $P_6^{\text{bic}}(X, Y)$ , basé sur l'utilisation des théorèmes 1.2.9 et 1.4.5. Ensuite, en utilisant les règles (1.42), on déduit aisément les séries génératrices associées aux espèces  $P_4^{\text{bic}}(X, Y)$  et  $P_6^{\text{bic}}(X, Y)$ .

**Proposition 1.5.1** *Les séries indicatrices de cycles des deux espèces  $P_4^{\text{bic}}(X, Y)$  et  $P_6^{\text{bic}}(X, Y)$  sont données par*

$$Z_{P_4^{\text{bic}}}(x_1, x_2, \dots; y_1, y_2, \dots) = \frac{1}{4}(x_1^2 y_1^4 + 2x_2 y_2^2 + x_1^2 y_2^2), \quad (1.45)$$

$$Z_{P_6^{\text{bic}}}(x_1, x_2, \dots; y_1, y_2, \dots) = \frac{1}{6}(x_1^3 y_1^6 + 2x_3 y_3^2 + 3x_1 x_2 y_2^3). \quad (1.46)$$

**Preuve.** Il suffit, pour commencer, d'écrire explicitement les éléments des groupes  $D_2$  et  $S_3$ . On a

$$D_2 = \{1, h, v, v \cdot h\} \quad \text{et} \quad S_3 = \{1, s, \omega, \omega^2, s \cdot \omega, s \cdot \omega^2\}.$$

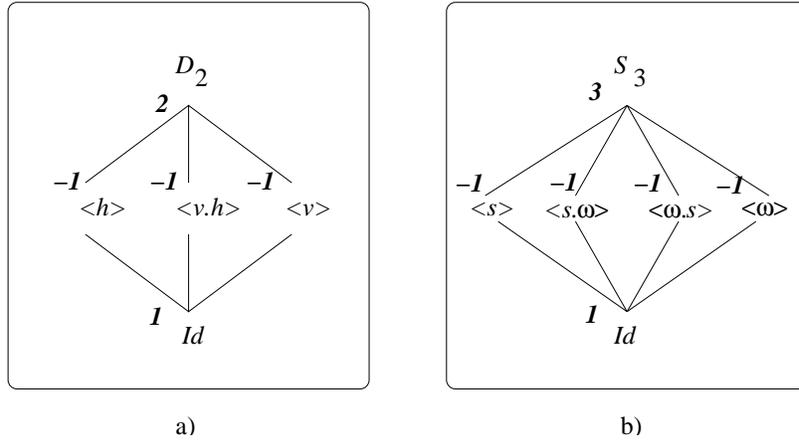
On utilise ensuite le théorème 1.2.9, à savoir, pour chacun des éléments de ces groupes, on calcule leur nombre de cycles de longueur  $i$ ,  $1 \leq i \leq 4$  pour  $D_2$  et  $1 \leq i \leq 6$  pour  $S_3$ . Par exemple, pour l'élément  $v \cdot h \in D_2$ , on voit, à partir de la figure 1.7, qu'il possède deux cycles de longueur 1 pour les points de sorte  $X$  et deux cycles de longueur 2 pour les points de sorte  $Y$ , donnant le terme  $x_1^2 y_2^2$ . ■

**Proposition 1.5.2** Les séries indicatrices d'asymétrie des deux espèces  $P_4^{\text{bic}}(X, Y)$  et  $P_6^{\text{bic}}(X, Y)$  sont données par

$$\Gamma_{P_4^{\text{bic}}}(x_1, x_2, \dots; y_1, y_2, \dots) = \frac{1}{4}(x_1^2 y_1^4 - x_1^2 y_2^2 - 2x_2 y_2^2 + 2x_2 y_4), \quad (1.47)$$

$$\Gamma_{P_6^{\text{bic}}}(x_1, x_2, \dots; y_1, y_2, \dots) = \frac{1}{6}(x_1^3 y_1^6 - x_3 y_3^2 - 3x_1 x_2 y_2^3 + 3x_3 y_6). \quad (1.48)$$

**Preuve.** Commençons par écrire les treillis des sous-groupes de  $D_2$  et  $S_3$ . La figure 1.8 représente les treillis de ces deux groupes, où les chiffres gras à la gauche des éléments



**Figure 1.8** Treillis des sous-groupes de a)  $D_2$  et b)  $S_3$  et fonction de Möbius

du treillis donnent la valeur de la fonction de Möbius. Il suffit ensuite de calculer les orbites rattachées à chacun des éléments du treillis conformément au théorème 1.4.5. ■

Confirmons maintenant les expressions des séries génératrices associées aux espèces  $P_4^{\text{bic}}(X, Y)$  et  $P_6^{\text{bic}}(X, Y)$ . On a

$$P_4^{\text{bic}}(x, y) = \frac{1}{4}x^2 y^4, \quad \tilde{P}_4^{\text{bic}}(x, y) = x^2 y^4, \quad \overline{P}_4^{\text{bic}}(x, y) = 0, \quad (1.49)$$

$$P_6^{\text{bic}}(x, y) = \frac{1}{6}x^3 y^6, \quad \tilde{P}_6^{\text{bic}}(x, y) = x^3 y^6, \quad \overline{P}_6^{\text{bic}}(x, y) = 0. \quad (1.50)$$

Le fait que les deux séries  $\overline{P}_4^{\text{bic}}(x, y)$  et  $\overline{P}_6^{\text{bic}}(x, y)$  valent 0 signifie que ces deux espèces sont purement symétriques, *i.e.*, leur partie asymétrique est réduite à l'espèce nulle,

$$\overline{P}_4^{\text{bic}}(X, Y) = 0, \quad \overline{P}_6^{\text{bic}}(X, Y) = 0.$$

Etant donné que les espèces  $P_4^{\text{bic}}(X, Y)$  et  $P_6^{\text{bic}}(X, Y)$  sont moléculaires, les espèces obtenues par substitution de l'espèce  $Y := X^k$ ,  $k \geq 1$ , dans ces espèces sont moléculaires. Les espèces  $P_4^{\text{bic}}(X, X^k)$  et  $P_6^{\text{bic}}(X, X^k)$  sont essentielles pour l'obtention du développement moléculaire des 2-arbres extéplanaires. D'ailleurs, remarquons que

$$P_4^{\text{bic}}(X, 1) = E_2(X), \quad P_6^{\text{bic}}(X, 1) = C_3(X), \quad (1.51)$$

conformément à la figure 1.7, en posant  $Y := 1$ , ce qui correspond à retirer les étiquettes des sommets.

Pour terminer cette section, donnons les dérivées des espèces à deux sortes  $P_4^{\text{bic}}(X, Y)$  et  $P_6^{\text{bic}}(X, Y)$ . Ces dérivées interviennent dans le calcul de formules d'addition impliquant ces espèces.

**Proposition 1.5.3** *Les dérivées partielles des espèces  $P_4^{\text{bic}}(X, Y)$  et  $P_6^{\text{bic}}(X, Y)$  sont données par*

$$\frac{\partial}{\partial X} P_4^{\text{bic}}(X, Y) = X E_2(Y^2), \quad \frac{\partial}{\partial Y} P_4^{\text{bic}}(X, Y) = X^2 Y^3, \quad (1.52)$$

$$\frac{\partial}{\partial X} P_6^{\text{bic}}(X, Y) = E_2(X Y^3), \quad \frac{\partial}{\partial Y} P_6^{\text{bic}}(X, Y) = X^3 Y^5. \quad (1.53)$$

**Preuve.** Soit  $F(X, Y)$  une espèce à deux sortes quelconque, et  $U$  et  $V$  deux ensembles finis correspondant aux deux sortes  $X$  et  $Y$ . Alors, les dérivées partielles, par rapport à  $X$  et  $Y$ , sont les espèces définies par les formules suivantes

$$\frac{\partial F}{\partial X}[U, V] = F[U + \{*\}, V], \quad \frac{\partial F}{\partial Y}[U, V] = F[U, V + \{*\}],$$

où  $*$  est un point supplémentaire utilisé dans la construction des  $F$ -structures. Remplaçant successivement  $F$  par  $P_4^{\text{bic}}$  et  $P_6^{\text{bic}}$ , on obtient le résultat annoncé. ■

## 1.6 Théorème de dissymétrie et inversion de Lagrange

Dans cette section, nous allons présenter deux résultats fort utiles dans le cadre de l'étude des 2-arbres et de leur énumération. Le premier, le *théorème de dissymétrie* pour les arbres, introduit par (Leroux, 88; Leroux et Miloudi, 92), est, après adaptation aux cas des 2-arbres, la pierre angulaire de la classification et de l'énumération des diverses classes de 2-arbres que nous considérons. Le second, l'*inversion de Lagrange*, est un outil bien connu en combinatoire énumérative, et permet, dans de nombreux cas, d'extraire explicitement les coefficients de séries définies par des équations fonctionnelles implicites.

• **Théorème de dissymétrie :** Nous présentons ici le théorème de dissymétrie dans le cadre des arbres  $R$ -enrichis, où  $R$  est une espèce quelconque. Considérons les espèces  $\mathbf{a}$ , des *arbres* et  $\mathcal{A}$ , des *arborescences* (arbres enracinés). Rappelons que l'espèce  $\mathcal{A}$  est caractérisée par l'équation fonctionnelle suivante

$$\mathcal{A} = X \cdot E(\mathcal{A}), \quad (1.54)$$

où  $E$  est l'espèce des ensembles.

**Définition 1.6.1** ((Labelle, G., 81)). *Un arbre  $R$ -enrichi sur un ensemble fini  $U$  est la donnée*

- i) d'un arbre  $t$  quelconque construit sur l'ensemble  $U$ ,
- ii) d'une  $R$ -structure sur l'ensemble des voisins (sommets adjacents) de chacun des sommets de  $t$ .

On note  $\mathbf{a}_R$  l'espèce des arbres  $R$ -enrichis.

Remarquons que lorsque l'enrichissement  $R = E$  est l'espèce des ensembles, on retrouve naturellement les arbres (libres). On peut alors définir l'espèce des *arborescences  $R'$ -enrichies*, où la notation  $\prime$  désigne l'opérateur de dérivation combinatoire, comme étant l'espèce des arbres  $R$ -enrichis plantés en un de leurs sommets. Cette espèce, notée  $\mathcal{A}_{R'}$ , satisfait alors l'équation fonctionnelle suivante

$$\mathcal{A}_{R'} = X \cdot R'(\mathcal{A}_{R'}). \quad (1.55)$$

Cette espèce est définie avec l'espèce dérivée  $R'$  étant donné que planter un arbre  $R$ -enrichi en un sommet brise la  $R$ -structure autour du sommet pointé et de tous les autres sommets. En fait, on se trouve dans le cas où la  $R$ -structure autour de chaque sommet est bâtie à l'aide d'un point supplémentaire n'apparaissant pas dans l'ensemble sous-jacent. Il est important de distinguer l'espèce  $\mathcal{A}_{R'}$ , de l'espèce  $\mathbf{a}_R^\bullet$  des arbres  $R$ -enrichis *pointés* en un sommet qui est caractérisée par l'équation fonctionnelle

$$\mathbf{a}_R^\bullet = X R(\mathcal{A}_{R'})$$

On a alors le théorème de dissymétrie suivant, donné par (Labelle, G., 92) pour le cas  $R$ -enrichi.

**Théorème 1.6.2** THÉORÈME DE DISSYMMÉTRIE. *Soit  $R$  une espèce telle que  $R'[\emptyset] \neq \emptyset$ . Alors, on a*

$$\mathbf{a}_R^\bullet + \mathbf{a}_R^- = \mathbf{a}_R + \mathbf{a}_R^{\bullet-}, \quad (1.56)$$

où les exposants  $\bullet$ ,  $-$  et  $\bullet-$  désignent le pointage en un sommet, en une arête et en une arête ayant elle-même un de ses deux sommets adjacents distingué, respectivement.  $\square$

La démonstration de ce théorème dans le cas des arborescences  $R$ -enrichies est ici omise. Notons cependant qu'elle est similaire au cas des arbres classiques, correspondant à l'enrichissement  $R = E$ ; voir (Bergeron, Labelle et Leroux, 98; Leroux, 88; Leroux et Miloudi, 92).

**• Inversion de Lagrange :** Considérons  $\mathbb{D}$  une  $\mathbb{Q}$ -algèbre. On note  $\mathbb{D}[[x]]$  l'anneau des séries formelles en l'indéterminée  $x$  à coefficients dans  $\mathbb{D}$ . Soient  $A(x)$ ,  $R(x)$  et  $F(x)$  trois séries formelles de l'anneau  $\mathbb{D}[[x]]$ . Supposons, de plus, que  $R(0) \neq 0$  et que  $A(x)$  satisfait l'équation  $A(x) = xR(A(x))$ . Alors, pour  $n \geq 1$ , on dispose de la formule

$$[x^n]F(A(x)) = \frac{1}{n}[t^{n-1}]F'(t)R^n(t), \quad (1.57)$$

où  $[x^n]B(x)$  représente le coefficient en  $x^n$  de la série formelle  $B(x) \in \mathbb{D}[[x]]$ . Cette formule est appelée *formule d'inversion de Lagrange composée*. Elle permet de trouver explicitement les coefficients de la composée d'une série  $A(x)$  par  $F(x)$ , dès lors que la série  $A(x)$  satisfait une équation fonctionnelle implicite. En termes d'espèces, si  $A$ ,  $R$  et  $F$  sont trois espèces telles que  $R[\emptyset] \neq \emptyset$  et  $A = X \cdot R(A)$ , alors on dispose d'une formule donnant le nombre de structures étiquetées de l'espèce composée  $F(A)$ . Illustrons cette formule avec l'exemple suivant.

**Exemple 1.6.3** Considérons l'espèce  $\mathcal{F}$  des forêts (libres) d'arborescences ordonnées. Une *forêt* d'arborescences est un ensemble d'arborescences. Il est bien connu que l'espèce des arborescences ordonnées, notée  $\mathcal{A}_L$ , est caractérisée par l'équation fonctionnelle suivante

$$\mathcal{A}_L = X \cdot L(\mathcal{A}_L), \quad (1.58)$$

où  $L$  est l'espèce des ordres linéaires. Cette espèce correspond à l'espèce des arborescences  $L$ -enrichies. De plus, on a

$$\mathcal{F} = E(\mathcal{A}_L). \quad (1.59)$$

Trouvons maintenant le nombre  $f_n$  de forêts d'arborescences ordonnées étiquetées sur  $n$  sommets. On vérifie préalablement que l'on satisfait bien les conditions énoncées ci-haut. Les séries génératrices associées aux espèces  $L$  et  $E$  sont données par

$$L(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n \geq 0} x^n \quad \text{et} \quad E(x) = e^x = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}. \quad (1.60)$$

Considérant la formule (1.57), avec  $A(x) = \mathcal{A}_L(x)$ ,  $R(x) = L(x)$ , et  $F(x) = e^x$ , et puisque  $L(0) = 1 \neq 0$ , on déduit

$$\frac{f_n}{n!} = [x^n]F(A(x)) = \frac{1}{n}[t^{n-1}]e^t(1-t)^{-n}, \quad (1.61)$$

$$= \frac{1}{n}[t^{n-1}] \left( \sum_{i \geq 0} \frac{t^i}{i!} \right) \left( \sum_{j \geq 1} \frac{n^{<j>}}{j!} t^j \right), \quad (1.62)$$

où  $n^{<j>} = n(n+1) \dots (n+j-1)$  désigne la  $j^{\text{ième}}$  factorielle montante de  $n$ . On obtient alors

$$f_n = n! \frac{1}{n} \sum_{i+j=n-1} \frac{1}{i!} \frac{1}{j!} n^{<j>}.$$

Finalement, le nombre  $f_n$  de forêts d'arborescences ordonnées étiquetées sur  $n$  sommets est donné par

$$f_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} n^{<k>}. \quad (1.63)$$

## Chapitre II

### SÉRIE INDICATRICE D'ASYMÉTRIE TRANSLATÉE

Ce chapitre est consacré à l'étude d'une nouvelle série formelle, appelée la série indicatrice d'asymétrie translaturée. On débute ce chapitre en posant le problème de la prise en compte de la substitution d'espèces à terme constant non nul dans une autre espèce, motivant ainsi l'introduction de la nouvelle série. Ensuite, nous donnons une définition formelle de cette série et en étudions le comportement face aux opérations combinatoires usuelles. Nous en déduisons alors des formules générales pour le dénombrement de structures partiellement étiquetées asymétriques et nous calculons la série indicatrice d'asymétrie translaturée pour les espèces couramment utilisées et pour des assemblées d'espèces. Nous terminons ce chapitre en proposant une généralisation du triangle infini de Pascal, permettant ainsi de calculer les séries indicatrices d'asymétrie translaturées pour toutes les espèces moléculaires.

#### 2.1 Position du problème

Dans ce chapitre, nous allons considérer l'anneau de séries formelles suivant

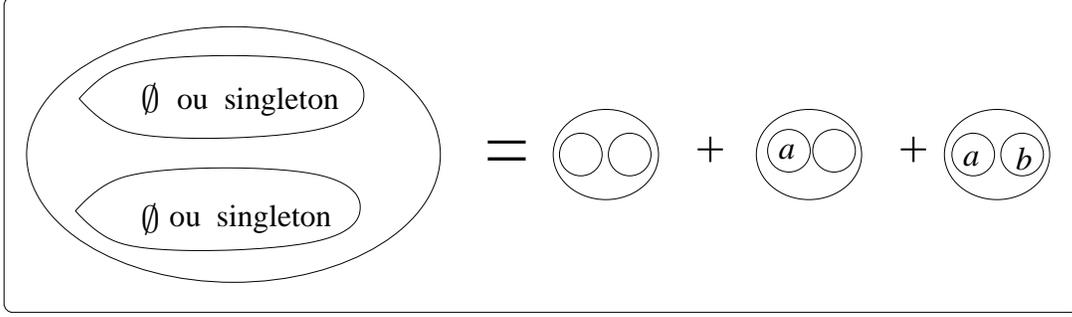
$$\mathbb{C}[[\vec{v}]][[X, E_2, E_3, C_3, \dots]] = \mathbb{C}[[\vec{v}; X, E_2, E_3, C_3, \dots]], \quad (2.1)$$

où  $\mathbb{C}$  dénote le corps des nombres complexes, et  $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots)$  sont certaines variables de poids. Les espèces  $X, E_2, E_3, C_3, \dots$  utilisées sont les espèces *atomiques*, introduites au chapitre premier dans la définition 1.2.8. Tout au long de ce chapitre, nous supposons que les développements moléculaires (pondérés) de la forme (1.14),

$$F_w = \sum_{M \in \mathcal{M}} f_M(w)M,$$

sont effectuées dans l'anneau  $\mathbb{C}[[\vec{v}; X, E_2, E_3, C_3, \dots]]$ . Les opérations combinatoires introduites au chapitre précédent restent valides dans cet anneau (voir (Joyal, 86; Yeh, 86)). Cependant, dans le but de construire la composition d'espèces à terme constant non nul, nous supposons que les conditions de sommabilité introduites dans la section 1.3 sont toujours vérifiées.

**Position du problème :** Soient  $F$  et  $G$  deux espèces quelconques. Rappelons sommairement le comportement des séries indicatrices de cycles,  $Z_F$ , et d'asymétrie,



**Figure 2.1** Formule d'addition pour  $E_2(1 + X)$

$\Gamma_F$ , face aux opérations combinatoires usuelles (voir (Bergeron, Labelle et Leroux, 98)) :

$$Z_{F+G} = Z_F + Z_G, \quad \Gamma_{F+G} = \Gamma_F + \Gamma_G, \quad (2.2)$$

$$Z_{F \cdot G} = Z_F \cdot Z_G, \quad \Gamma_{F \cdot G} = \Gamma_F \cdot \Gamma_G, \quad (2.3)$$

$$Z_{F'} = \frac{\partial}{\partial x_1} Z_F, \quad \Gamma_{F'} = \frac{\partial}{\partial x_1} \Gamma_F, \quad (2.4)$$

$$\text{si } G(0) = 0, \text{ alors } Z_{F \circ G} = Z_F \circ Z_G, \quad \Gamma_{F \circ G} = \Gamma_F \circ \Gamma_G, \quad (2.5)$$

où  $\circ$  désigne la composition *pléthystique*. Mais,

$$\text{si } G(0) \neq 0, \text{ alors } Z_{F \circ G} = Z_F \circ Z_G, \text{ tandis que } \Gamma_{F \circ G} \neq \Gamma_F \circ \Gamma_G \text{ en général. } (2.6)$$

Pour illustrer la dernière assertion,  $\Gamma_{F \circ G} \neq \Gamma_F \circ \Gamma_G$ , considérons  $F = E_2(X)$ , l'espèce des ensembles à deux éléments, et  $G = 1 + X$ , l'espèce de l'ensemble vide ou des singletons. C'est d'ailleurs sur cet exemple, dont nous avons besoin pour l'énumération des 2-arbres extérplans (voir chapitre 4), que nous avons découvert l'incompatibilité de la série indicatrice d'asymétrie avec le cas d'espèces à terme constant non nul. Comme illustré par la figure 2.1, nous avons la formule d'addition suivante :

$$F \circ G(X) = E_2(1 + X) = 1 + X + E_2(X). \quad (2.7)$$

Alors,

$$\Gamma_{F \circ G} = 1 + x_1 + \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2) \neq \Gamma_F \circ \Gamma_G = \frac{1}{2}((1 + x_1)^2 - (1 + x_2)),$$

puisque  $\Gamma_{E_2} = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2)$  et  $\Gamma_X = x_1$ .

Le but de ce chapitre est de contourner ce problème en généralisant la définition de la série indicatrice d'asymétrie  $\Gamma_F$  pour obtenir ainsi une nouvelle série indicatrice formelle, notée  $\Gamma_{F,\xi}$ , et satisfaisant

$$\Gamma_F = \Gamma_{F,0}, \quad (2.8)$$

$$\Gamma_{F \circ G} = \Gamma_{F,\xi} \circ \Gamma_G, \quad \text{où } \xi = G(0). \quad (2.9)$$

Comme les espèces sont pondérées dans l'anneau  $\mathbb{C}[[\vec{v}]]$ , on peut écrire chaque élément de poids  $\xi \in \mathbb{C}[[\vec{v}]]$  comme une  $\mathbb{C}$ -combinaison linéaire de monômes unitaires  $\mu_i$  en les variables de poids  $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots)$ , de la façon suivante,

$$\xi = c_1\mu_1 + c_2\mu_2 + c_3\mu_3 + \dots,$$

où  $c_i \in \mathbb{C}$ , pour tout  $i \geq 1$ .

Notons que les relations (2.2)–(2.4) permettent d'obtenir le comportement des séries génératrices face aux opérations combinatoires, via les règles de la proposition 1.4.4.

## 2.2 La série indicatrice d'asymétrie translatée

Dans cette partie, nous introduisons la nouvelle série formelle,  $\Gamma_{F,\xi}$ , appelée *série indicatrice d'asymétrie translatée*. Nous étudions aussi le comportement de cette nouvelle série face aux opérations combinatoires classiques. Nous montrons ainsi que cette série est stable sous ces opérations, ce qui légitime la définition que nous en donnons.

### 2.2.1 Définition de $\Gamma_{F,\xi}$

#### Définition 2.2.1 (SÉRIE INDICATRICE D'ASYMÉTRIE TRANSLATÉE)

Soit  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, \dots)$  une famille dénombrable de variables de poids,  $\xi = c_1\mu_1 + c_2\mu_2 + c_3\mu_3 + \dots$ , un élément donné de l'anneau  $\mathbb{C}[[\vec{v}]]$  et  $F = F_w \in \mathbb{C}[[\vec{v}]]$ , une espèce pondérée. Alors, la série indicatrice d'asymétrie translatée,  $\Gamma_{F_w,\xi}$ , est définie par la relation

$$\Gamma_{F_w,\xi} = \Gamma_{F_w(\xi+X)} \circ \Gamma_{X-\xi}, \quad (2.10)$$

où  $\circ$  désigne la substitution pléthystique générale.

La relation (2.10) est équivalente à l'expression suivante :

$$\Gamma_{F_w}(\xi + X) = \Gamma_{F_w,\xi} \circ \Gamma_{X+\xi}.$$

Plus explicitement,

$$\Gamma_{F_w,\xi}(x_1, x_2, x_3, \dots) = \Gamma_{F_w(\xi+X)}(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2, x_3 - \xi_3, \dots),$$

où

$$\xi_k = c_1\mu_1^k + c_2\mu_2^k + c_3\mu_3^k + \dots, \quad k \geq 1.$$

Remarquons, en particulier que  $\xi = \xi_1$ . Dans le cas spécial où  $\xi \in \mathbb{C}$ , correspondant à une multiplicité (non pondérée) pure, la définition précédente se ramène à

$$\Gamma_{F_w,\xi}(x_1, x_2, x_3, \dots) = \Gamma_{F_w(\xi+X)}(x_1 - \xi, x_2 - \xi, x_3 - \xi, \dots), \quad (2.11)$$

puisque, pour tous les  $k \in \mathbb{N}$ , on a  $\xi_k = \xi$ .

La dénomination *translatée* provient du fait que l'on translate par  $\xi$ , avant d'effectuer la substitution dans (2.10). Illustrons immédiatement le calcul de cette nouvelle série.

**Exemple 2.2.2** Nous allons calculer  $\Gamma_{F,\xi}$  pour l'espèce  $F = C_3(X)$  des cycles (orientés) de longueur 3, et pour  $\xi \in \mathbb{N}$ . Commençons par proposer une formule d'addition concernant l'espèce  $C_3$ . On a

$$C_3(\xi + X) = \frac{\xi^3 + 2\xi}{3} + \xi^2 X + \xi X^2 + C_3(X). \quad (2.12)$$

Pour obtenir une telle formule d'addition, il suffit de classer les structures suivant le nombre de points de sorte  $X$  utilisés dans la construction du cycle de longueur 3. Le premier terme de (2.12) correspond à  $Z_{C_3}(\xi, \xi, \xi, \dots)$ , conformément à la théorie de Pólya ((Pólya et Read, 87)). Cela donne en fait le nombre de colorations essentiellement distinctes, avec un jeu de  $\xi$  couleurs, d'un cycle de longueur 3. On peut également utiliser le corollaire 1.3.5. Nous obtenons alors,

$$\begin{aligned} \Gamma_{C_3,\xi} &= \frac{\xi^3 + 2\xi}{3} + \xi^2(x_1 - \xi) + \xi(x_1 - \xi)^2 + \frac{(x_1 - \xi)^3 - (x_3 - \xi)}{3}, \\ &= \xi + \Gamma_{C_3}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

puisque  $\Gamma_{C_3} = \frac{1}{3}(x_1^3 - x_3)$ , voir le tableau A.4. Bien entendu, la même formule reste valide pour  $\xi \in \mathbb{C}$ , et plus généralement,  $\Gamma_{C_3,\xi} = \xi_3 + \Gamma_{C_3}$ , pour  $\xi \in \mathbb{C}[[\vec{v}]]$ , ce que nous établissons dans la section 2.3, proposition 2.3.5.

Si nous considérons maintenant l'espèce  $F = E_2(X)$ , nous obtenons, en généralisant la formule d'addition (2.7),

$$\Gamma_{E_2,\xi} = \xi_2 + \Gamma_{E_2}.$$

Nous verrons plus tard que, dans le cas général, la différence entre la série translatée et la série classique indicatrice d'asymétrie,  $\Gamma_{F,\xi} - \Gamma_F$ , n'est pas nécessairement un élément de  $\mathbb{C}[[\vec{v}]]$  et peut aussi impliquer les variables  $x_i, i \geq 1$ .

## 2.2.2 Comportement face aux opérations combinatoires usuelles

Dans le but de calculer la série indicatrice d'asymétrie translatée pour diverses espèces de structures, nous devons connaître le comportement de cette série face aux opérations combinatoires usuelles. Ceci va permettre, connaissant les séries indicatrices d'asymétrie (classiques) des espèces usuelles, de calculer la translatée pour ces mêmes espèces moyennant certaines formules d'addition. Nous commençons par un lemme technique, pour, par la suite, prouver le théorème donnant le comportement de ces séries relativement aux cinq opérations combinatoires usuelles (addition, produit, substitution, dérivation et pointage). Rappelons (voir corollaire 1.3.5) que si  $F_w$  est une espèce pondérée quelconque dans l'anneau  $\mathbb{C}[[\vec{v}]]$ ,  $\xi = \xi(\vec{v}) \in \mathbb{C}[[\vec{v}]]$ , nous avons

$$F_w(\xi) = Z_{F_w}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots). \quad (2.14)$$

**Lemme 2.2.3** Soit  $\xi$  un élément donné de l'anneau  $\mathbb{C}[[\vec{v}]]$ . Alors,

$$F_w'(\xi + X) = (F_w(\xi + X))'. \quad (2.15)$$

**Preuve.** Introduisons une sorte supplémentaire de singletons, notée  $T$ . Alors, nous avons

$$F'_w(X) = [T]F_w(T + X), \quad (2.16)$$

où  $[T]F_w(T + X)$  désigne le coefficient de  $T$  dans le développement de  $F_w(T + X)$ . En effet, considérons l'espèce à deux sortes  $F_w(T + X)$ . Nous pouvons toujours écrire

$$F_w(T + X) = F_w(X) + TF'_w(X) + O(T^2), \quad (2.17)$$

où  $O(T^2)$  représente la sous-espèce de  $F_w(T + X)$  dont toutes les structures possèdent au moins deux éléments de sorte  $T$  dans leur ensemble sous-jacent. Cette relation est obtenue en appliquant un *développement de Taylor combinatoire* (introduit par (Labelle, G., 89-2)), ou, plus simplement en classant les structures suivant le nombre d'éléments de sorte  $T$  utilisés dans la construction des  $F_w(T + X)$ -structures. Il suffit à présent d'extraire le coefficient en  $T$  de part et d'autre de l'égalité (2.17) pour obtenir la formule annoncée.

Maintenant, pour n'importe quel monôme  $\mu \in \mathbb{C}[[\vec{v}]]$ , nous obtenons,

$$F'_w(\mu + X) = (F_w(\mu + X))', \quad (2.18)$$

puisque, en utilisant la formule (2.16), nous avons

$$(F_w(\mu + X))' = [T]F_w(\mu + (T + X)), \quad (2.19)$$

et donc,

$$F'_w(\mu + X) = F'_w(X)|_{X:=X+\mu} \quad (2.20)$$

$$= [T]F_w(T + X)|_{X:=X+\mu} = [T]F_w(\mu + T + X), \quad (2.21)$$

par associativité de la substitution pléthystique. Le cas où  $\xi = c\mu$ ,  $c \in \mathbb{N}$ , suit directement en appliquant successivement (2.18). Si  $c \in \mathbb{C}$ , nous utilisons le principe d'extension des identités polynomiales ((Bergeron, Labelle et Leroux, 98), page 182). Le cas général  $\xi = c_1\mu_1 + c_2\mu_2 + \dots$  s'obtient une nouvelle fois par itération. ■

Le théorème suivant décrit le comportement de la série indicatrice d'asymétrie translée en regard des opérations combinatoires.

**Théorème 2.2.4** Soient  $F = F_w$  et  $G = G_v$  deux espèces pondérées dans l'anneau  $\mathbb{C}[[\vec{v}]]$  et  $\xi = \xi(\vec{v}) \in \mathbb{C}[[\vec{v}]]$ . On a

$$\Gamma_F = \Gamma_{F,0}, \quad (2.22)$$

$$\Gamma_{F \circ G} = \Gamma_{F,\xi} \circ \Gamma_G, \quad \text{si } \xi = G(0). \quad (2.23)$$

De plus,

$$\Gamma_{F+G,\xi} = \Gamma_{F,\xi} + \Gamma_{G,\xi}, \quad (2.24)$$

$$\Gamma_{F \cdot G,\xi} = \Gamma_{F,\xi} \cdot \Gamma_{G,\xi}, \quad (2.25)$$

$$\Gamma_{F \circ G,\xi} = \Gamma_{F,G(\xi)} \circ \Gamma_{G,\xi}, \quad (2.26)$$

$$\Gamma_{F',\xi} = \frac{\partial}{\partial x_1} \Gamma_{F,\xi}, \quad (2.27)$$

$$\Gamma_{F^\bullet,\xi} = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \Gamma_{F,\xi}. \quad (2.28)$$

**Preuve.** La formule (2.22) est une conséquence directe de la définition de la série  $\Gamma_{F,\xi}$ . La relation (2.23) suit directement de (2.26). Les formules (2.24) et (2.25) sont relativement faciles à établir. Il suffit d'utiliser la définition de la série indicatrice d'asymétrie, et d'écrire

$$\begin{aligned} \Gamma_{F+G,\xi} &= \Gamma_{(F+G)(\xi+X)} \circ \Gamma_{X-\xi} \\ &= \left( \Gamma_{F(\xi+X)} + \Gamma_{G(\xi+X)} \right) \circ \Gamma_{X-\xi}, \end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned} \Gamma_{F \cdot G,\xi} &= \Gamma_{(F \cdot G)(\xi+X)} \circ \Gamma_{X-\xi} \\ &= \Gamma_{F(\xi+X) \cdot G(\xi+X)} \circ \Gamma_{X-\xi} \\ &= \left( \Gamma_{F(\xi+X)} \cdot \Gamma_{G(\xi+X)} \right) \circ \Gamma_{X-\xi}. \end{aligned}$$

La formule (2.28) requiert simplement l'utilisation de (2.25) et (2.27). En utilisant la relation bien connue  $F^\bullet = X \cdot F'$  et le fait que  $\Gamma_{X,\xi} = \Gamma_X = x_1$ , il vient

$$\begin{aligned} \Gamma_{F^\bullet,\xi} &= \Gamma_{XF',\xi} = \Gamma_{X,\xi} \cdot \Gamma_{F',\xi} \\ &= \Gamma_X \cdot \Gamma_{F',\xi} \\ &= x_1 \cdot \Gamma_{F',\xi}. \end{aligned}$$

Alors, en admettant provisoirement la relation (2.27), on obtient (2.28).

Les formules (2.26) et (2.27) demandent un peu plus de travail. Commençons par (2.26). Par définition, nous avons  $\Gamma_{F \circ G,\xi} = \Gamma_{F \circ G(\xi+X)} \circ (x_1 - \xi)$ . Nous pouvons alors écrire

$$F(G(\xi + X)) = F(G(\xi) + G_+(\xi, X)),$$

où, en utilisant le corollaire 1.3.5,  $G(\xi) = Z_G(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots)$  et  $G_+(\xi, X) = G(\xi + X) - G(\xi)$ , est une espèce à terme constant nul. Notons que la notation pléthystique est utilisée,  $\xi_i = p_i \circ \xi = \xi(v_1^i, v_2^i, \dots)$ , où  $p_i$  désigne la  $i^{\text{ième}}$  somme de puissances. Maintenant, si  $H$  est une espèce quelconque à terme constant nul, on obtient par (2.5),

$$\begin{aligned} \Gamma_{F(\alpha+H)} &= \Gamma_{F(\alpha+X) \circ H} = \Gamma_{F(\alpha+X)} \circ \Gamma_H \\ &= \Gamma_{F(X),\alpha} \circ \Gamma_{\alpha+X} \circ \Gamma_H = \Gamma_{F(X),\alpha} \circ \Gamma_{\alpha+H}. \end{aligned}$$

Donc, en posant  $\alpha = G(\xi)$  et  $H = G_+(\xi, X)$ , on trouve

$$\Gamma_{F \circ G, \xi} = \Gamma_{F, G(\xi)} \circ \Gamma_{G, \xi}.$$

Nous arrivons maintenant à la preuve de la formule (2.27). En dérivant l'expression

$$\Gamma_{F, \xi} = \Gamma_{F(\xi+X)} \circ \Gamma_{X-\xi},$$

par rapport à  $x_1$ , nous avons

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \Gamma_{F, \xi} = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \Gamma_{F(\xi+X)} \right) \circ \Gamma_{X-\xi}.$$

Mais, par le lemme 2.2.3, nous avons

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \Gamma_{F(\xi+X)} = \Gamma_{F'(\xi+X)}.$$

On en déduit

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \Gamma_{F, \xi} = \Gamma_{F'(\xi+X)} \circ \Gamma_{X-\xi} = \Gamma_{F', \xi},$$

ce qui achève la preuve. ■

Nous donnerons, dans la section suivante, plusieurs exemples explicites de calcul de la série indicatrice d'asymétrie utilisant le théorème 2.2.4. Voici d'abord quelques exemples simples.

**Exemple 2.2.5** Dans cet exemple, nous désirons obtenir la série indicatrice d'asymétrie translattée de l'espèce  $F = E_2 \cdot C_3$ . On utilise alors la formule (2.25). Pour  $\xi \in \mathbb{C}[[\vec{v}]]$ , on a

$$\begin{aligned} \Gamma_{E_2 \cdot C_3, \xi} &= \Gamma_{E_2, \xi} \cdot \Gamma_{C_3, \xi}, \\ &= (\xi_2 + \Gamma_{E_2}) \cdot (\xi_3 + \Gamma_{C_3}), \\ &= \xi_2 \xi_3 + \xi_3 \Gamma_{E_2} + \xi_2 \Gamma_{C_3} + \Gamma_{E_2} \Gamma_{C_3}. \end{aligned}$$

**Exemple 2.2.6** Par la suite, nous montrerons que, pour  $\xi \in \mathbb{C}$ , on a

$$\Gamma_{E_k, \xi} = \Gamma_{E_k} + \xi \Gamma_{E_{k-2}} + \frac{\xi(\xi+1)}{2!} \Gamma_{E_{k-4}} + \frac{\xi(\xi+1)(\xi+2)}{3!} \Gamma_{E_{k-6}} + \dots, \quad (2.29)$$

où  $E_k$  représente l'espèce des ensembles de taille  $k$  (aussi appelés  $k$ -ensembles). Pour  $k = 3$ , la formule devient  $\Gamma_{E_3, \xi} = \Gamma_{E_3} + \xi \Gamma_{E_1} = \Gamma_{E_3} + \xi x_1$ . Cependant,  $(E_3)' = E_2$ . Ceci est cohérent avec la formule (2.27) du théorème précédent puisque

$$\Gamma_{E_2, \xi} = \xi + \Gamma_{E_2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \Gamma_{E_3, \xi}.$$

Avant de finir cette section, regardons le comportement de cette série pour les espèces asymétriques.

**Remarque 2.2.7** Considérons l'espèce  $F = X$  des singletons. Pour cette espèce, nous avons,

$$\Gamma_{X,\xi} = \Gamma_X = x_1. \quad (2.30)$$

De façon générale, cette observation reste vraie, pour  $n \geq 0$ ,

$$\Gamma_{X^n,\xi} = (\Gamma_{X,\xi})^n = \Gamma_{X^n} = x_1^n. \quad (2.31)$$

En fait, il est clair la série  $\Gamma_{F,\xi}$  est linéaire en  $F$ . On en déduit alors, utilisant (2.31), que la série  $\Gamma_{F,\xi}$  coïncide toujours avec la série indicatrice d'asymétrie classique  $\Gamma_F$ , dès lors que l'espèce  $F$  est asymétrique, à savoir, de la forme  $F(X) = \sum_m f_m X^m$ , où  $f_m \in \mathbb{C}[[\vec{v}]]$ , pour tout  $m \geq 0$ .

### 2.3 Exemples et applications

Cette section est consacrée au calcul de la série indicatrice d'asymétrie translatée pour diverses familles d'espèces, notamment les espèces  $E$  des ensembles,  $C$  des cycles,  $S$  des permutations,  $\mathcal{A}$  des arborescences, et certaines espèces liées aux précédentes. On traite également le cas d'espèces formées d'assemblées de structures, c'est-à-dire, d'espèces  $G$  de la forme  $G = E \circ F$  ou  $G = C \circ F$ , ..., où  $F$  est une autre espèce. Ces résultats sont alors appliqués à l'énumération (ou inventaire pondéré) de sous-structures asymétriques (structures partiellement étiquetées asymétriques). Nous débutons par l'introduction de la méthode générale de l'énumération de sous-structures asymétriques. Avant cela, nous prouvons un lemme technique fort utile pour le calcul des séries  $\Gamma_{F_n,\xi}$  dès lors que l'on connaît une expression explicite pour  $\Gamma_{F,\xi}$ . Rappelons que toute espèce  $F$  se décompose canoniquement suivant les cardinaux de ses ensembles sous-jacents,

$$F = F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_n + \cdots, \quad (2.32)$$

où  $F_n$  désigne la restriction de l'espèce  $F$  aux ensembles de cardinal  $n$ . Dans le but de calculer les séries  $\Gamma_{F,\xi}$ , pour chaque espèce  $F = F_w$ , nous introduisons une variable de poids supplémentaire,  $t$ , n'apparaissant pas dans  $\xi$  ou dans le poids d'origine  $w$ . Cette nouvelle variable a pour but de tenir compte du cardinal des ensembles sous-jacents. Considérons alors l'espèce auxiliaire suivante :

$$F_w(tX) = \sum_{n \geq 0} t^n F_n. \quad (2.33)$$

Par linéarité, il s'ensuit que

$$\Gamma_{F_w(tX),\xi} = \sum_{n \geq 0} t^n \Gamma_{F_n,\xi}. \quad (2.34)$$

**Lemme 2.3.1** Soient  $F = F_w(X)$  une espèce pondérée dans l'anneau  $\mathbb{C}[[\vec{v}]]$  et  $t$  une variable de poids qui n'apparaît pas dans  $\xi$  et dans le poids originel  $w$ . Alors,

$$\Gamma_{F_n, \xi} = [t^n] \Gamma_{F, t\xi}(tx_1, t^2x_2, t^3x_3, \dots). \quad (2.35)$$

**Preuve.** Par le théorème 2.2.4, nous avons,  $\Gamma_{F \circ G, \xi} = \Gamma_{F, G(\xi)} \circ \Gamma_{G, \xi}$ . Prenant  $G(X) = tX$ , on déduit successivement

$$\begin{aligned} \Gamma_{F(tX), \xi} &= \Gamma_{F, t\xi} \circ \Gamma_{tX, \xi} \\ &= \Gamma_{F, t\xi} \circ (tx_1) \\ &= \Gamma_{F, t\xi}(tx_1, t^2x_2, t^3x_3, \dots), \end{aligned}$$

car  $\Gamma_{tX, \xi} = tx_1$ . On conclut en utilisant le fait que  $\Gamma_{F_n, \xi} = [t^n] \Gamma_{F(tX), \xi}$ . ■

Notons que la formule (2.35) peut être réécrite sous la forme suivante

$$\Gamma_{F_n, \xi} = [t^n] \Gamma_{F(t\xi + tX)}(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2, x_3 - \xi_3, \dots), \quad (2.36)$$

où  $\xi_i = \xi(\vec{v}^i) = \xi(v_1^i, v_2^i, v_3^i, \dots)$ , pour tout  $i \geq 1$ . On utilise la formule (2.35) ou (2.36) suivant les cas.

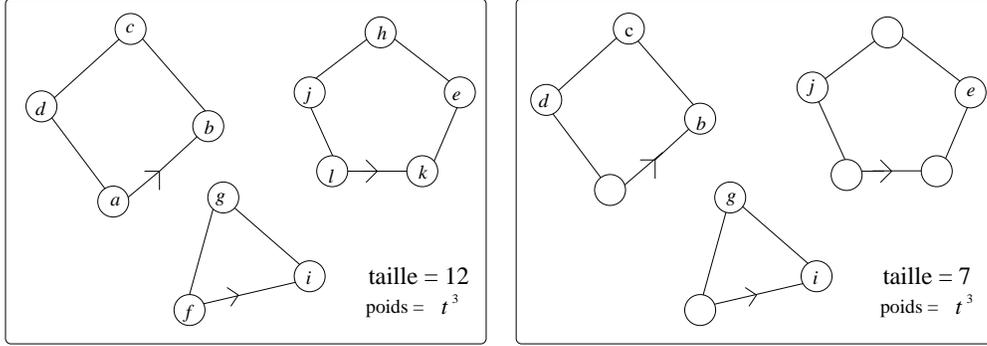
### 2.3.1 Applications à l'énumération de sous-structures asymétriques

Dans cette partie, nous allons prouver un résultat simple permettant d'énumérer les sous-structures d'une espèce, aussi bien étiquetées, que non étiquetées et non étiquetées asymétriques. Considérons une espèce pondérée  $F = F_w$ . On associe à cette espèce l'espèce *translatée*  $\text{sub}F_w$  définie par

$$\text{sub}F_w(X) = F_w(1 + X). \quad (2.37)$$

Une structure appartenant à l'espèce  $\text{sub}F_w$  est une  $F_w$ -structure *partiellement étiquetée* ou, dit plus simplement, une *sous-structure* d'une  $F_w$ -structure. En effet, chaque élément participant à la construction d'une  $\text{sub}F_w$ -structure est soit un élément vide (une 1-structure), soit un élément étiqueté (une  $X$ -structure). Pour illustrer le concept de sous-structure, considérons l'espèce  $F_w(X) = S_w(X)$  des permutations pondérées  $\sigma$ , où le poids  $w(\sigma)$  de  $\sigma$  est  $t$  élevé à une puissance égale au nombre de cycles de la permutation  $\sigma$ . La figure 2.2 présente une permutation et une sous-permutation de  $S_w$  comportant chacune trois cycles, c'est-à-dire de poids  $t^3$ .

**Définition 2.3.2** Soit  $F = F_w(X)$  une espèce pondérée quelconque. On nomme *sub* $F_w$ -structure (ou plus simplement *sous-structure*, s'il n'y a pas d'ambiguïté) toute structure  $s$  appartenant à l'espèce  $\text{sub}F_w(X) = F_w(1 + X)$ . De plus, on dit que  $s$  est une sous-structure de taille  $k$  si  $s$  possède  $k$  éléments étiquetés.



**Figure 2.2** Une permutation pondérée dans  $S_w$ , et une sous-permutation de  $S_w(1+X)$

Par exemple, la sous-permutation présentée en figure 2.2 (à gauche) est de taille 7, tandis que la permutation présentée dans la même figure (à droite) est de taille 12.

Pour obtenir les séries génératrices associées à l'espèce  $\text{sub}F_w(X)$ , nous utilisons les formules de substitution (au niveau des séries indicatrices) suivantes :

$$\Gamma_{F_w(1+X)} = \Gamma_{F_w,1}(1+x_1, 1+x_2, 1+x_3, \dots), \quad (2.38)$$

$$Z_{F_w(1+X)} = Z_{F_w}(1+x_1, 1+x_2, 1+x_3, \dots). \quad (2.39)$$

Utilisant maintenant les règles de la proposition 1.4.4, on déduit les séries génératrices associées aux  $\text{sub}F_w$ -structures :

$$\begin{aligned} \text{sub}F_w(x) &= Z_{\text{sub}F_w}(x, 0, 0, \dots) \\ &= Z_{F_w}(1+x, 1, 1, \dots) = \Gamma_{F_w,1}(1+x, 1, 1, \dots), \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} (\text{sub}F_w)^\sim(x) &= Z_{\text{sub}F_w}(x, x^2, x^3, \dots) \\ &= Z_{F_w}(1+x, 1+x^2, 1+x^3, \dots), \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} \overline{\text{sub}F_w}(x) &= \Gamma_{\text{sub}F_w}(x, x^2, x^3, \dots) \\ &= \Gamma_{F_w,1}(1+x, 1+x^2, 1+x^3, \dots). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Il est important de remarquer que dans les relations (2.38), (2.40) et (2.42), la série indicatrice d'asymétrie translaturée (par  $\xi = 1$ )  $\Gamma_{F_w,1}$  est utilisée, contrairement aux relations (2.39) et (2.41), où la série indicatrice de cycles non-translatée  $Z_{F_w}$  est utilisée. Cela provient du fait que la substitution d'espèces à terme constant non-nul (ici, l'espèce  $1+X$ ) présente un comportement stable face à la série indicatrice de cycles à la différence de la série indicatrice d'asymétrie classique (non translaturée).

La proposition suivante donne des formules permettant de calculer le poids total (ou le nombre, si le poids est trivial, *i.e.*, lorsque toutes les structures reçoivent le poids 1) de  $\text{sub}F_w$ -structures de taille  $k$  à partir de  $F_w$ -structures de taille  $n$ , en fonction des entiers  $n$  et  $k$ , dans les cas étiqueté, non étiqueté et non étiqueté asymétrique.

**Proposition 2.3.3** Soient  $F = F_w(X)$  une espèce pondérée et  $t, x$  deux variables de poids supplémentaires n'apparaissant pas dans le poids originel  $w$ . Alors,

i) le poids total des  $\text{sub}F_w$ -structures étiquetées de taille  $k$  obtenues à partir de  $F_w$ -structures sur  $[n]$  est donné par

$$k![x^k][t^n]Z_{F_w}(t(1+x), t^2, t^3, \dots); \quad (2.43)$$

ii) le poids total des  $\text{sub}F_w$ -structures non étiquetées de taille  $k$  obtenues à partir de  $F_w$ -structures de taille  $n$  est donné par

$$[x^k][t^n]Z_{F_w}(t(1+x), t^2(1+x^2), t^3(1+x^3), \dots); \quad (2.44)$$

iii) le poids total des  $\text{sub}F_w$ -structures non étiquetées asymétriques de taille  $k$  obtenues à partir de  $F_w$ -structures de taille  $n$  est donné par

$$[x^k][t^n]\Gamma_{F_w, t}(t(1+x), t^2(1+x^2), t^3(1+x^3), \dots). \quad (2.45)$$

**Preuve.** Considérons l'espèce  $\text{sub}F_n$  définie par

$$(\text{sub}F_n)(X) = F_n(1+X) = [t^n]F(tX) \circ (1+X). \quad (2.46)$$

Pour obtenir les relations (2.43), (2.44) et (2.45), il suffit alors d'extraire les coefficients en  $x^k$  des trois séries suivantes :

$$(\text{sub}F_n)(x), \widetilde{(\text{sub}F_n)}(x), \overline{(\text{sub}F_n)}(x). \quad (2.47)$$

■

### 2.3.2 Ensembles et $n$ -ensembles

Nous cherchons ici à calculer les séries indicatrices d'asymétrie translatées  $\Gamma_{E, \xi}$  et  $\Gamma_{E_n, \xi}$ , des espèces  $E$  et  $E_n$  des ensembles et des ensembles de cardinal  $n$ ,  $n \geq 0$ . On commence par calculer  $\Gamma_{E, \xi}$  en utilisant une formule d'addition permettant de développer  $E(\xi + X)$ ; ensuite, à l'aide du lemme 2.3.1, on obtient  $\Gamma_{E_n, \xi}$ .

**Proposition 2.3.4** (ENSEMBLES) *Soit  $\xi \in \mathbb{C}[[\vec{v}]]$ . Alors,*

$$\Gamma_{E, \xi} = Z_E(\xi_2, \xi_4, \dots)\Gamma_E, \quad (2.48)$$

$$\Gamma_{E_n, \xi} = \sum_{i \geq 0}^{[\frac{n}{2}]} Z_{E_i}(\xi_2, \xi_4, \xi_6, \dots, \xi_{2i})\Gamma_{E_{n-2i}}. \quad (2.49)$$

De plus, si  $\xi \in \mathbb{C}$ , on a

$$\Gamma_{E_n, \xi} = \sum_{i \geq 0}^{[\frac{n}{2}]} \left\langle \begin{matrix} \xi \\ i \end{matrix} \right\rangle \Gamma_{E_{n-2i}}, \quad (2.50)$$

où  $\left\langle \begin{matrix} \xi \\ i \end{matrix} \right\rangle = \frac{\xi(\xi+1)\dots(\xi+i-1)}{i!}$  représente le coefficient binomial de seconde sorte.

**Preuve.** Commençons par la formule (2.48). Nous disposons de la formule d'addition suivante :

$$E(\xi + X) = E(\xi)E(X).$$

Alors,

$$\Gamma_{E,\xi} = \Gamma_{E(\xi+X)} \circ \Gamma_{X-\xi} = E(\xi)\Gamma_E \circ \Gamma_{X-\xi},$$

où  $E(\xi) = Z_E(\xi_1, \xi_2, \dots)$  conformément au corollaire 1.3.5. Or, le tableau A.1 en annexe donne

$$\begin{aligned} \Gamma_E \circ \Gamma_{X-\xi} &= \exp \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} \frac{x_k - \xi_k}{k} \\ &= \exp \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1} x_k}{k} \cdot \exp \sum_{k \geq 1} (-1)^k \frac{\xi_k}{k} = \frac{\Gamma_E(x_1, x_2, \dots)}{\Gamma_E(\xi_1, \xi_2, \dots)}. \end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\Gamma_{E,\xi} = \frac{Z_E(\xi_1, \xi_2, \dots)}{\Gamma_E(\xi_1, \xi_2, \dots)} \Gamma_E = E(\xi_2) \Gamma_E,$$

puisque

$$\frac{Z_E(x_1, x_2, \dots)}{\Gamma_E(x_1, x_2, \dots)} = \frac{e^{x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + \frac{x_4}{4} + \dots}}{e^{x_1 - \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} - \frac{x_4}{4} + \dots}} = e^{x_2 + \frac{x_4}{2} + \frac{x_6}{3} + \dots} = Z_E(x_2, x_4, \dots). \quad (2.51)$$

Maintenant, par utilisation du lemme 2.3.1, on obtient d'abord

$$\Gamma_{E_n, \xi} = [t^n] \Gamma_{E, t\xi}(tx_1, t^2x_2, \dots) = [t^n] \frac{Z_E(t\xi_1, t^2\xi_2, \dots)}{\Gamma_E(t\xi_1, t^2\xi_2, \dots)} \sum_{k \geq 0} t^k \Gamma_{E_k(X)}.$$

Ainsi, par la relation (2.51),

$$\begin{aligned} \Gamma_{E(tX), \xi} &= Z_E(t^2\xi_2, t^4\xi_4, \dots) \sum_{k \geq 0} t^k \Gamma_{E_k(tX)} \\ &= \left( \sum_{i \geq 0} t^{2i} Z_{E_i}(\xi_2, \xi_4, \dots) \right) \left( \sum_{k \geq 0} t^k \Gamma_{E_k(X)} \right). \end{aligned} \quad (2.52)$$

On obtient donc

$$\Gamma_{E_n, \xi} = \Gamma_{E_n} + Z_{E_1}(\xi_2, \xi_4, \dots) \Gamma_{E_{n-2}} + Z_{E_2}(\xi_2, \xi_4, \dots) \Gamma_{E_{n-4}} + \dots, \quad (2.53)$$

qui donne la formule (2.49). Finalement, considérons  $\xi \in \mathbb{C}$ , un nombre complexe (sans poids). Etant donné que  $\xi_i = \xi$ , pour tout  $i \geq 1$ , et en utilisant (2.51) et (2.52), il vient

$$\begin{aligned} Z_{E_i}(\xi, \xi, \dots) &= [t^{2i}] Z_E(t^2\xi, t^4\xi, \dots) \\ &= [t^{2i}] e^{t^2\xi + \frac{t^4\xi}{2} + \frac{t^6\xi}{3} + \dots} \\ &= [t^{2i}] (1 - t^2)^{-\xi} = \frac{\xi^{<i>}}{i!}, \end{aligned} \quad (2.54)$$

où  $\xi^{<i>} = \xi(\xi+1) \dots (\xi+i-1)$  désigne la  $i^{\text{ième}}$  factorielle montante. En substituant (2.54) dans (2.53), on arrive à l'expression annoncée (2.50). ■

### 2.3.3 Cycles et permutations

Considérons les espèces  $C$  et  $C_n$  des cycles (orientés) et des cycles (orientés) de taille  $n$ , respectivement. En utilisant une approche similaire au cas précédent des ensembles, on obtient la proposition suivante.

**Proposition 2.3.5** (CYCLES ORIENTÉS) *Soit  $\xi \in \mathbb{C}[[\vec{v}]]$ . Alors, les séries indicatrices d'asymétrie translatées des espèces  $C$  des cycles et  $C_n$  des cycles de longueur  $n$ , sont données par*

$$\Gamma_{C,\xi} = (Z_C - \Gamma_C)(\xi_1, \xi_2, \dots) + \Gamma_C, \quad (2.55)$$

$$\Gamma_{C_n,\xi} = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \left( \phi(d) - \mu(d) \right) \xi_d^{\frac{n}{d}} + \Gamma_{C_n}, \quad (2.56)$$

où  $\phi$  et  $\mu$  désignent respectivement les fonctions classiques d'Euler et de Möbius.

**Preuve.** Commençons par rappeler une formule d'addition bien connue concernant l'espèce des cycles à deux sortes  $C(T + X)$  (voir (Bergeron, Labelle et Leroux, 98), page 109) :

$$C(T + X) = C(T) + C(L(T)X), \quad (2.57)$$

où  $L$  est l'espèce des ordres linéaires (listes). En y posant  $T := \xi$ , il vient

$$\Gamma_{C(\xi+X)} = C(\xi) + \Gamma_{C(L(\xi)X)} = C(\xi) + \Gamma_C \circ \Gamma_{L(\xi)X}. \quad (2.58)$$

Mais, à partir du tableau A.1, on a

$$\Gamma_C = - \sum_{k \geq 1} \frac{\mu(k)}{k} \ln(1 - x_k),$$

et  $L(\xi) = (1 - \xi)^{-1}$  (voir corollaire 1.3.5). Nous en déduisons alors

$$\begin{aligned} \Gamma_C \circ \Gamma_{L(\xi)X} \circ \Gamma_{X-\xi} &= - \sum_{k \geq 1} \frac{\mu(k)}{k} \ln\left(1 - \frac{x_k - \xi_k}{1 - \xi_k}\right) \\ &= - \sum_{k \geq 1} \frac{\mu(k)}{k} \ln\left(\frac{1 - x_k}{1 - \xi_k}\right) \\ &= \Gamma_C(x_1, x_2, \dots) - \Gamma_C(\xi_1, \xi_2, \dots). \end{aligned}$$

Par (2.58), nous obtenons ainsi

$$\Gamma_{C,\xi} = \Gamma_{C(\xi+X)} \circ \Gamma_{X-\xi} = (Z_C - \Gamma_C)(\xi_1, \xi_2, \dots) + \Gamma_C.$$

Pour établir (2.56), il suffit alors de poser  $\xi := t\xi$  et d'utiliser de façon directe le lemme 2.3.1. Le résultat suit immédiatement en utilisant

$$Z_C = \sum_{n \geq 1} Z_{C_n} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{d|n} \phi(d) x_d^{\frac{n}{d}}, \quad (2.59)$$

et

$$\Gamma_C = \sum_{n \geq 1} \Gamma_{C_n} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) x_d^{\frac{n}{d}}. \quad (2.60)$$

■

Nous obtenons maintenant l'énumération des sous-structures associées à l'espèce des cycles, que nous appelons *sous-cycles*.

**Corollaire 2.3.6** *Le nombre  $c_{n,k}$  de sous-cycles de taille  $k$  obtenus à partir de cycles sur  $[n]$  est donné par*

$$c_{n,k} = (n-1)(n-2) \dots (n-k+1). \quad (2.61)$$

*Le nombre  $\tilde{c}_{n,k}$  de sous-cycles de taille  $k$  non étiquetés obtenus à partir de cycles de longueur  $n$  est donné par*

$$\tilde{c}_{n,k} = \frac{1}{n} \sum_{d|(k,n)} \phi(d) \binom{n/d}{k/d}, \quad k > 0. \quad (2.62)$$

*Le nombre  $\bar{c}_{n,k}$  de sous-cycles asymétriques de taille  $k$  non étiquetés obtenus à partir de cycles de longueur  $n$  est donné par*

$$\bar{c}_{n,k} = \frac{1}{n} \sum_{d|(k,n)} \mu(d) \binom{n/d}{k/d}, \quad k > 0. \quad (2.63)$$

**Preuve.** On utilise la proposition 2.3.3 avec l'espèce non pondérée  $F = C$ . Premièrement, avec (2.59)

$$\begin{aligned} c_n &= k! [x^k] [t^n] \sum_{n \geq 1} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \left( \sum_{\substack{d|n \\ d > 1}} \phi(d) t^n + \phi(1) (t(1+x))^n \right) \\ &= k! [x^k] \frac{1}{n} (1+x)^n \\ &= \frac{k!}{n} \binom{n}{k} \\ &= (n-1)(n-2) \dots (n-k+1). \end{aligned}$$

En ce qui concerne  $\tilde{c}_{n,k}$ , nous avons

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{n,k} &= [x^k] [t^n] \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{d|n} \phi(d) t^n (1+x^d)^{\frac{n}{d}} \\ &= [x^{\frac{k}{d}}] \frac{1}{n} \sum_{d|n} \phi(d) (1+x)^{\frac{n}{d}} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{d|n} \phi(d) \binom{n/d}{k/d}. \end{aligned}$$

Finalement, pour obtenir  $\bar{c}_{n,k}$ , il suffit de remplacer la fonction  $\phi$  par  $\mu$  dans les calculs précédent en accord avec (2.60), après avoir remarqué que

$$[x^k][t^n](Z_C - \Gamma_C)(t, t, \dots) = 0.$$

■

Considérons maintenant les espèces  $S$ , des permutations et  $S_n$ , des permutations de taille  $n$ . Nous rappelons que l'espèce des permutations est caractérisée par la relation suivante :

$$S = E \circ C, \quad (2.64)$$

signifiant que toute permutation se décompose en un ensemble de cycles disjoints. À partir de cette relation et des lois de substitution du théorème 2.2.4, nous allons obtenir les séries indicatrices d'asymétrie translées associées aux espèces  $S$  et  $S_n$ .

**Proposition 2.3.7** (PERMUTATIONS) *Soit  $\xi \in \mathbb{C}[[\vec{v}]]$ . Alors, les séries indicatrices d'asymétrie translées des espèces  $S$ , des permutations et  $S_n$ , des permutations de taille  $n$ , sont données par*

$$\Gamma_{S,\xi} = \frac{Z_S(\xi_1, \xi_2, \dots)}{\Gamma_S(\xi_1, \xi_2, \dots)} \Gamma_S, \quad (2.65)$$

$$\Gamma_{S_n,\xi} = \Gamma_{S_n} + 2\xi_2 \Gamma_{S_{n-2}} + \xi_3 \Gamma_{S_{n-3}} + \dots \\ \dots + \pi_i(\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_i) \Gamma_{S_{n-i}} + \dots, \quad (2.66)$$

$$\text{où } \pi_i(\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_i) = [t^i] \frac{1}{(1 - t^2 \xi_2)^2} \prod_{k \geq 3} \frac{1}{1 - t^k \xi_k}.$$

**Preuve.** Nous utilisons à nouveau la formule d'addition

$$C(T + X) = C(T) + C(L(T)X),$$

où  $L$  est l'espèce des listes. En combinant cette formule avec la relation (2.64), il vient

$$\begin{aligned} S(T + X) &= E(C(T + X)) = E(C(T) + C(L(T)X)) \\ &= E(C(T)) \cdot E(C(L(T)X)) = S(T) \cdot S(L(T)X). \end{aligned}$$

Alors, en posant  $T := \xi \in \mathbb{C}[[\vec{v}]]$ ,

$$\Gamma_{S,\xi} = S(\xi) \Gamma_S \circ \Gamma_{L(\xi)X} \circ \Gamma_{X-\xi},$$

où  $L(\xi) = Z_L(\xi, \xi, \dots) = \frac{1}{1-\xi}$ . Mais,  $\Gamma_S$  est donnée par  $\Gamma_S(x_1, x_2, \dots) = \frac{1-x_2}{1-x_1}$ . Ceci entraîne

$$\begin{aligned}\Gamma_{S,\xi} &= S(\xi) \frac{1 - L(\xi_2)x_2}{1 - L(\xi)x_1} \circ \Gamma_{X-\xi} \\ &= S(\xi) \frac{1 - \frac{x_2 - \xi_2}{1 - \xi_2}}{1 - \frac{x_1 - \xi_1}{1 - \xi_1}} \\ &= S(\xi) \frac{1 - \xi_1}{1 - \xi_2} \cdot \frac{1 - x_2}{1 - x_1} \\ &= \frac{S(\xi)}{\Gamma_S(\xi)} \Gamma_S,\end{aligned}$$

ce qui est équivalent à la formule (2.65). On souhaite maintenant établir (2.66). Remarquons, tout d'abord, que (2.65) implique,

$$\begin{aligned}\Gamma_{S,t\xi} \circ (tx_1) &= \frac{\prod_{k \geq 1} \frac{1}{1 - t^k \xi_k}}{\frac{1 - t^2 \xi_2}{1 - t \xi_1}} \Gamma_{S(tX)} \\ &= \left( \frac{1}{1 - t^2 \xi_2} \right)^2 \prod_{k \geq 3} \frac{1}{1 - t^k \xi_k} \sum_{j \geq 0} t^j \Gamma_{S_j}.\end{aligned}$$

Extrayant alors le coefficient de  $t^n$  dans la dernière égalité donne l'expression annoncée pour  $\Gamma_{S_n,\xi}$ . ■

On en déduit alors des formules énumératives pour les sous-permutations étiquetées, non étiquetées et non étiquetées asymétriques.

**Corollaire 2.3.8** *Le nombre  $s_n$  de sous-permutations de taille  $k$  obtenues à partir de permutations sur l'ensemble  $[n]$  est*

$$s_n = \sum_{i=k}^n i^{(k)} p_{\geq 2}(n-i), \quad (2.67)$$

où  $p_{\geq 2}(m)$  désigne le nombre de partages de l'entier  $m$  en parts plus grandes ou égales à 2 et  $i^{(k)}$  représente la  $k^{\text{ième}}$  factorielle descendante de  $i$ .

Le nombre  $\tilde{s}_n$  de sous-permutations non étiquetées de taille  $k$  obtenues à partir de permutations de taille  $n$  est

$$\tilde{s}_n = [x^k][t^n] \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{1 - t^\nu(1+x^\nu)} = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \mu \vdash k}} \prod_{i \geq 1} \binom{m_i(\lambda)}{m_i(\mu)}, \quad (2.68)$$

où  $m_i(\lambda)$  est le nombre de parts de taille  $i$  dans le partage  $\lambda$ .

Le nombre  $\bar{s}_n$  de sous-permutations non étiquetées asymétriques de taille  $k$  obtenues à partir de permutations de taille  $n$  est

$$\bar{s}_n = [x^k][t^n] \frac{1 - t^2(1 + x^2)}{1 - t(1 + x)} \frac{1}{(1 - t^2)^2} \prod_{\nu \geq 3} \frac{1}{1 - t^\nu}. \quad (2.69)$$

**Preuve.** La preuve est basée sur l'utilisation de la proposition 2.3.3 avec  $F_w = S$ , du tableau A.1 et de la proposition 2.3.7. Commençons avec  $s_n$ . On a

$$\begin{aligned} s_n &= k![x^k][t^n] \frac{1}{1 - t(1 + x)} \frac{1}{1 - t^2} \frac{1}{1 - t^3} \dots \\ &= k![x^k][t^n] \left( \sum_{i \geq 0} t^i (1 + x)^i \right) \left( \sum_{i \geq 0} t^{2i} \right) \left( \sum_{i \geq 0} t^{3i} \right) \dots \\ &= k![t^n] \left( \sum_{i=k}^n t^i \binom{i}{k} \right) \left( \sum_{i \geq 0} t^{2i} \right) \left( \sum_{i \geq 0} t^{3i} \right) \dots \\ &= k! \sum_{i=k}^n \binom{i}{k} p_{\geq 2}(n - i). \end{aligned}$$

De façon similaire, on a

$$\begin{aligned} \tilde{s}_n &= [x^k][t^n] \left( \sum_{j \geq 0} t^j (1 + x)^j \right) \left( \sum_{j \geq 0} t^{2j} (1 + x^2)^j \right) \left( \sum_{j \geq 0} t^{3j} (1 + x^3)^j \right) \dots \\ &= [x^k] \sum_{\lambda \vdash n} (1 + x)^{m_1(\lambda)} (1 + x^2)^{m_2(\lambda)} (1 + x^3)^{m_3(\lambda)} \dots \\ &= \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \mu \vdash k}} \prod_{i \geq 1} \binom{m_i(\lambda)}{m_i(\mu)}, \end{aligned}$$

où  $m_i(\lambda)$  représente le nombre de parts de taille  $i$  du partage  $\lambda$ . Finalement, la formule (2.69) concernant  $\bar{s}_n$  s'obtient directement de la proposition 2.3.3. ■

### 2.3.4 Arbres, arborescences et endofonctions

Dans cette partie, nous nous intéressons aux espèces  $\mathcal{A}$  des *arborescences* (arbres enracinés) et  $\mathcal{a}$  des *arbres* (de Cayley). Comme nous l'avons mentionné dans la section 1.6, l'espèce  $\mathcal{A}$  satisfait l'équation fonctionnelle suivante

$$\mathcal{A} = XE(\mathcal{A}). \quad (2.70)$$

De plus, le théorème de dissymétrie (1.56) prend la forme

$$\mathcal{A} + E_2(\mathcal{A}) = \mathbf{a} + \mathcal{A}^2. \quad (2.71)$$

Notons qu'à partir des deux expressions précédentes, les coefficients des séries  $Z_{\mathcal{A}}$ ,  $Z_{\mathbf{a}}$ ,  $\Gamma_{\mathcal{A}}$  et  $\Gamma_{\mathbf{a}}$  peuvent être calculés explicitement (voir (Bergeron, Labelle et Leroux, 98; Labelle, G., 92)). De plus, dans (Meir et Moon, 83), les auteurs ont énuméré les arborescences asymétriques. Nous nous proposons ici de calculer les séries indicatrices d'asymétrie translátée  $\Gamma_{\mathcal{A},\xi}$  et  $\Gamma_{\mathbf{a},\xi}$  en termes des séries ci-dessus.

**Proposition 2.3.9** (ARBORESCENCES ET ARBRES) *Soit  $\xi \in \mathbb{C}[[\vec{v}]]$ . Alors les séries indicatrices d'asymétrie translátées des espèces  $\mathcal{A}$ , des arborescences et  $\mathbf{a}$ , des arbres, sont données par*

$$\Gamma_{\mathcal{A},\xi} = \Gamma_{\mathcal{A}} \circ \left( \frac{\mathcal{A}(\xi_2)}{\xi_2} x_1 \right), \quad (2.72)$$

$$\Gamma_{\mathbf{a},\xi} = \mathcal{A}(\xi_2) + \Gamma_{\mathcal{A},\xi} - \frac{1}{2}((\Gamma_{\mathcal{A},\xi})_2 + (\Gamma_{\mathcal{A},\xi})^2) \quad (2.73)$$

$$= \mathcal{A}(\xi_2) + \Gamma_{\mathbf{a}} \circ \left( \frac{\mathcal{A}(\xi_2)}{\xi_2} x_1 \right), \quad (2.74)$$

où  $\mathcal{A}(\xi) = Z_{\mathcal{A}}(\xi_1, \xi_2, \dots)$  et  $(\Gamma_{\mathcal{A},\xi})_2 = p_2 \circ \Gamma_{\mathcal{A},\xi} = \Gamma_{\mathcal{A},\xi_2}(x_2, x_4, x_6, \dots)$ .

**Preuve.** Le résultat est une conséquence du théorème 2.2.4. La formule (2.70) donne

$$\Gamma_{\mathcal{A},\xi} = \Gamma_{X,\xi} \cdot \Gamma_{E(\mathcal{A}),\xi} = x_1 \Gamma_{E,\mathcal{A}(\xi)} \circ \Gamma_{\mathcal{A},\xi}. \quad (2.75)$$

Mais, par définition,

$$\begin{aligned} \Gamma_{E,\mathcal{A}(\xi)} &= \Gamma_{E(\mathcal{A}(\xi)+X)} \circ \Gamma_{X-\mathcal{A}(\xi)} \\ &= \Gamma_{E(\mathcal{A}(\xi))E(X)} \circ \Gamma_{X-\mathcal{A}(\xi)} \\ &= E(\mathcal{A}(\xi)) \Gamma_E(x_1 - \mathcal{A}(\xi_1), x_2 - \mathcal{A}(\xi_2), \dots) \\ &= \exp \left( \sum \frac{1}{k} \mathcal{A}(\xi_k) \right) \exp \left( \sum \frac{(-1)^{k-1}}{k} (x_k - \mathcal{A}(\xi_k)) \right) \\ &= e^{\mathcal{A}(\xi_2) + \frac{1}{2} \mathcal{A}(\xi_4) + \frac{1}{3} \mathcal{A}(\xi_6) + \dots} \Gamma_E(x_1, x_2, \dots) \\ &= E(\mathcal{A}(\xi_2)) \Gamma_E(x_1, x_2, \dots) \\ &= \frac{\mathcal{A}(\xi_2)}{\xi_2} \Gamma_E(x_1, x_2, \dots), \end{aligned} \quad (2.76)$$

puisque  $\mathcal{A}(\xi) = \xi E(\mathcal{A}(\xi))$ . On en déduit que  $\Gamma_{\mathcal{A},\xi}$  vérifie l'équation fonctionnelle suivante :

$$\Gamma_{\mathcal{A},\xi} = \left( \frac{\mathcal{A}(\xi_2)}{\xi_2} x_1 \right) \Gamma_E(\Gamma_{\mathcal{A},\xi}). \quad (2.77)$$

Or, la série  $\Gamma_{\mathcal{A}} \circ \left( \frac{\mathcal{A}(\xi_2)}{\xi_2} x_1 \right)$  vérifie aussi la formule (2.77). Donc, la formule (2.72) s'ensuit par unicité de la solution. Les formules (2.73) et (2.74) sont facilement obtenues à partir de (2.71) en utilisant le théorème 2.2.4 et la formule suivante

$$\Gamma_{E_2} = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2).$$

■

**Remarque 2.3.10** Il est aussi possible de calculer les séries  $\Gamma_{\mathcal{A}_{n,\xi}}$  et  $\Gamma_{\mathbf{a}_{n,\xi}}$ , pour les espèces des arborescences et des arbres à  $n$  sommets, en utilisant la formule (2.35), de la manière suivante :

$$\Gamma_{\mathcal{A}_{n,\xi}} = [t^n] \Gamma_{\mathcal{A}} \circ \left( \frac{\mathcal{A}(t^2 \xi_2)}{t \xi_2} x_1 \right), \quad (2.78)$$

$$\Gamma_{\mathbf{a}_{n,\xi}} = [t^n] \left( \mathcal{A}(t \xi) + \Gamma_{\mathbf{a}} \circ \left( \frac{\mathcal{A}(t^2 \xi_2)}{t \xi_2} x_1 \right) \right). \quad (2.79)$$

**Corollaire 2.3.11** Soient  $\mathcal{A}$  l'espèce des arborescences et  $\mathbf{a}$ , celle des arbres. Supposons que les séries  $Z_{\mathcal{A}}$ ,  $\Gamma_{\mathcal{A}}$ ,  $Z_{\mathbf{a}}$  et  $\Gamma_{\mathbf{a}}$  sont écrites sous la forme

$$Z_{\mathcal{A}} = \sum_{\lambda} a_{\lambda} \frac{x_{\lambda_1} x_{\lambda_2} \cdots}{z_{\lambda}}, \quad \Gamma_{\mathcal{A}} = \sum_{\lambda} a_{\lambda}^* \frac{x_{\lambda_1} x_{\lambda_2} \cdots}{z_{\lambda}}, \quad (2.80)$$

$$Z_{\mathbf{a}} = \sum_{\lambda} \alpha_{\lambda} \frac{x_{\lambda_1} x_{\lambda_2} \cdots}{z_{\lambda}}, \quad \Gamma_{\mathbf{a}} = \sum_{\lambda} \alpha_{\lambda}^* \frac{x_{\lambda_1} x_{\lambda_2} \cdots}{z_{\lambda}}, \quad (2.81)$$

où  $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots)$  parcourt l'ensemble des partages d'entiers,

$$z_{\lambda} = 1^{m_1(\lambda)} m_1(\lambda)! 2^{m_2(\lambda)} m_2(\lambda)! \dots,$$

et  $m_i(\lambda)$  désigne le nombre de parts de taille  $i$  du partage  $\lambda$ .

Alors, le nombre de sous-arborescences de taille  $k$  obtenues à partir d'arborescences sur  $[n]$ , est

$$\sum_{\lambda \vdash n} \frac{m_1(\lambda)^{(k)}}{z_{\lambda}} a_{\lambda}, \quad (2.82)$$

où  $\lambda$  parcourt l'ensemble des partages de  $n$ . Le nombre correspondant de sous-arbres est

$$\sum_{\lambda \vdash n} \frac{m_1(\lambda)^{(k)}}{z_{\lambda}} \alpha_{\lambda}. \quad (2.83)$$

Le nombre de sous-arborescences non étiquetées de taille  $k$  obtenues à partir d'arborescences de taille  $n$  est donné par

$$\sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \mu \vdash k}} \binom{m_1(\lambda)}{m_1(\mu)} \binom{m_2(\lambda)}{m_2(\mu)} \cdots \frac{a_{\lambda}}{z_{\lambda}}. \quad (2.84)$$

Le nombre correspondant de sous-arbres non étiquetés est

$$\sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \mu \vdash k}} \binom{m_1(\lambda)}{m_1(\mu)} \binom{m_2(\lambda)}{m_2(\mu)} \cdots \frac{\alpha_{\lambda}}{z_{\lambda}}. \quad (2.85)$$

Le nombre de sous-arborescences non étiquetées asymétriques de taille  $k$  obtenues à partir d'arborescences de taille  $n$  est donné par

$$[t^n] \sum_{\nu=0}^n \sum_{\substack{\lambda \vdash \nu \\ \mu \vdash k}} \binom{m_1(\lambda)}{m_1(\mu)} \binom{m_2(\lambda)}{m_2(\mu)} \dots \frac{a_\lambda^*}{z_\lambda} \varepsilon(t)^{m_1(\lambda)} \varepsilon(t^2)^{m_2(\lambda)} \dots, \quad (2.86)$$

où  $\varepsilon(t) = \sum_{i \geq 1} \tilde{a}_i t^{2i-1}$  et  $\tilde{a}_i$  représente le nombre d'arborescences de taille  $i$ . Le nombre correspondant de sous-arbres non étiquetés asymétriques est

$$[t^n] \left( \chi(k=0) t \varepsilon(t) + \sum_{\nu=0}^n \sum_{\substack{\lambda \vdash \nu \\ \mu \vdash k}} \binom{m_1(\lambda)}{m_1(\mu)} \binom{m_2(\lambda)}{m_2(\mu)} \dots \frac{a_\lambda^*}{z_\lambda} \varepsilon(t)^{m_1(\lambda)} \varepsilon(t^2)^{m_2(\lambda)} \dots \right), \quad (2.87)$$

où  $\chi(k=0)$  vaut 1, si  $k=0$ , et 0 dans les autres cas.

**Preuve.** On se borne à montrer les formules concernant l'espèce  $\mathcal{A}$  des arborescences, (2.82), (2.84) et (2.86); les formules concernant  $\mathcal{a}$ , l'espèce des arbres, (2.83), (2.85), (2.87), suivent directement grâce à la proposition 2.3.9. Commençons avec le nombre  $\mathcal{A}_{n,k}$  de sous-arborescences de taille  $k$  obtenues à partir d'arborescences sur  $[n]$ . Par la proposition 2.3.3, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{n,k} &= k! [x^k] [t^n] Z_{\mathcal{A}}(t(1+x), t^2, t^3, \dots) \\ &= k! [x^k] [t^n] \sum_{\lambda} \frac{a_\lambda}{z_\lambda} (t(1+x))^{m_1(\lambda)} t^{2m_2(\lambda)} t^{3m_3(\lambda)} \dots \\ &= k! [x^k] \sum_{\lambda \vdash n} \frac{a_\lambda}{z_\lambda} (1+x)^{m_1(\lambda)} \\ &= \sum_{\lambda \vdash n} \frac{a_\lambda}{z_\lambda} (m_1(\lambda))^{(k)}. \end{aligned}$$

Pour  $\tilde{\mathcal{A}}_{n,k}$ , le nombre de sous-arborescences non étiquetées de taille  $k$ , on obtient successivement

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{A}}_{n,k} &= [x^k] [t^n] Z_{\mathcal{A}}(t(1+x), t^2(1+x^2), t^3(1+x^3), \dots) \\ &= [x^k] [t^n] \sum_{\lambda} \frac{a_\lambda}{z_\lambda} (t(1+x))^{m_1(\lambda)} (t^2(1+x^2))^{m_2(\lambda)} (t^3(1+x^3))^{m_3(\lambda)} \dots \\ &= [x^k] \sum_{\lambda \vdash n} \frac{a_\lambda}{z_\lambda} \prod_{i \geq 1} (1+x^i)^{m_i(\lambda)} \\ &= \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \mu \vdash k}} \frac{a_\lambda}{z_\lambda} \prod_{i \geq 1} \binom{m_i(\lambda)}{m_i(\mu)}. \end{aligned}$$

Passons maintenant au nombre  $\overline{\mathcal{A}}(n, k)$  de sous-arborescences non étiquetées asymétriques de taille  $k$ . Par la proposition 2.3.3, on obtient

$$\overline{\mathcal{A}}_{n,k} = [x^k] [t^n] \Gamma_{\mathcal{A},t}(t(1+x), t^2(1+x^2), t^3(1+x^3), \dots).$$

Mais, par la proposition 2.3.9,

$$\Gamma_{\mathcal{A},t} = \Gamma_{\mathcal{A}} \circ \left( \frac{A(t^2)}{t^2} x_1 \right).$$

Alors,

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathcal{A},t} \circ (t(1+x)) &= \Gamma_{\mathcal{A}} \circ \left( \frac{A(t^2)}{t^2} t(1+x) \right) \\ &= \sum_{\lambda} \frac{a_{\lambda}^*}{z_{\lambda}} \left( \frac{A(t^2)}{t^2} t(1+x) \right)^{m_1(\lambda)} \left( \frac{A(t^4)}{t^4} t^2(1+x^2) \right)^{m_2(\lambda)} \dots \end{aligned}$$

Or,

$$\frac{A(t^2)}{t^2} = \frac{1}{t^2} Z_A(t_2, t_2, \dots) = \sum \tilde{a}_i t^{2i-1} = \varepsilon(t),$$

en utilisant les lois de la proposition 1.4.4. Finalement, il vient

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{A}}_{n,k} &= [x^k][t^n] \sum_{\lambda} \frac{a_{\lambda}^*}{z_{\lambda}} t^{m_1(\lambda)+2m_2(\lambda)+\dots} \prod_{i \geq 1} (1+x^i)^{m_i(\lambda)} \varepsilon(t^i)^{m_i(\lambda)} \\ &= \sum_{\substack{\lambda+n \\ \mu+k}} \frac{a_{\lambda}^*}{z_{\lambda}} \prod_{i \geq 1} \varepsilon(t^i)^{m_i(\lambda)} \binom{m_i(\lambda)}{m_i(\mu)}, \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. ■

Notons que les formules (2.82)–(2.85) sont parfaitement générales et peuvent s'appliquer à toute espèce  $F$ , en écrivant la série indicatrice de cycles de  $F$  sous la forme

$$Z_F = \sum_{\lambda} f_{\lambda} \frac{x_{\lambda_1} x_{\lambda_2} \dots}{z_{\lambda}}.$$

Cependant, les formules (2.86) et (2.87) sont spécifiques aux espèces des arborescences et des arbres respectivement.

Il est également possible d'appliquer des méthodes récursives pour calculer les séries impliquées dans le calcul des coefficients de la proposition précédente. On illustre ces méthodes en calculant les séries (2.43)–(2.45) de la proposition 2.3.3 pour l'espèce des arborescences.

**Proposition 2.3.12** *Soient  $\mathcal{A}$  l'espèce des arborescences et les séries suivantes*

$$\varphi(x, t) = Z_{\mathcal{A}}(t(1+x), t^2, t^3, \dots), \quad (2.88)$$

$$\psi(x, t) = Z_{\mathcal{A}}(t(1+x), t^2(1+x^2), t^3(1+x^3), \dots), \quad (2.89)$$

$$\gamma(x, t) = \Gamma_{\mathcal{A},t}(t(1+x), t^2(1+x^2), t^3(1+x^3), \dots). \quad (2.90)$$

Alors,

$$\varphi(x, t) = t(1+x)e^{\varphi(x,t) + \frac{1}{2}\varphi(0,t^2) + \frac{1}{3}\varphi(0,t^3) + \dots}, \quad (2.91)$$

$$\psi(x, t) = t(1+x)e^{\psi(x,t) + \frac{1}{2}\psi(x^2,t^2) + \frac{1}{3}\psi(x^3,t^3) + \dots}, \quad (2.92)$$

$$\gamma(x, t) = \frac{\tilde{\mathcal{A}}(t^2)}{t}(1+x)e^{\gamma(x,t) - \frac{1}{2}\gamma(x^2,t^2) + \frac{1}{3}\gamma(x^3,t^3) - \dots}. \quad (2.93)$$

**Preuve.** Il suffit d'utiliser l'équation fonctionnelle  $\mathcal{A} = XE(\mathcal{A})$  et les formules annoncées suivent directement par passage aux séries indicatrices. ■

L'espèce des *endofonctions* (fonctions d'un ensemble sur lui-même), notée  $\text{End}$ , est caractérisée par l'équation fonctionnelle suivante :

$$\text{End} = S \circ \mathcal{A}, \quad (2.94)$$

où  $S$  est l'espèce des permutations. Les séries indicatrices  $Z_{\text{End}}$  et  $\Gamma_{\text{End}}$  ont précédemment été calculées dans (Bergeron, Labelle et Leroux, 98; Labelle, G., 92). Connaissant ces séries, nous pouvons obtenir une formule pour  $\Gamma_{\text{End},\xi}$ , faisant l'objet de la proposition suivante.

**Proposition 2.3.13** (ENDOFONCTIONS) *Soit  $\xi \in \mathbb{C}[[\vec{v}]]$ . Alors, la série indicatrice d'asymétrie translatée de l'espèce  $\text{End}$  des endofonctions est donnée par*

$$\Gamma_{\text{End},\xi} = \frac{\text{End}(\xi)}{\Gamma_S \circ Z_{\mathcal{A}}(\xi_1, \xi_2, \dots)} \cdot \Gamma_{\text{End}} \circ \left( \frac{\mathcal{A}(\xi_2)}{\xi_2} x_1 \right). \quad (2.95)$$

**Preuve.** En utilisant (2.94), le théorème 2.2.4 et (2.72), on obtient successivement,

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{End},\xi} &= \Gamma_{S \circ \mathcal{A},\xi} = \Gamma_{S,\mathcal{A}(\xi)} \circ \Gamma_{\mathcal{A},\xi} \\ &= \frac{Z_S \circ \mathcal{A}(\xi)}{\Gamma_S \circ \mathcal{A}(\xi)} \Gamma_S \circ \Gamma_{\mathcal{A}} \circ \left( \frac{\mathcal{A}(\xi_2)}{\xi_2} x_1 \right), \end{aligned}$$

ce qui est équivalent à (2.95). ■

Il est aussi possible de calculer  $\Gamma_{\text{End}_n,\xi}$ , pour les endofonctions sur un ensemble de taille  $n$ . Il suffit d'appliquer le lemme 2.3.1 à la relation (2.95).

### 2.3.5 Membres d'assemblées

Dans cette section, nous nous intéressons aux couples d'espèces  $(F, G)$  satisfaisant l'équation fonctionnelle  $G = H \circ F$ , où  $H$  est soit l'espèce  $E$  des ensembles, soit l'espèce  $C$  des cycles, soit l'espèce  $S$  des permutations. Nous allons établir des formules permettant de calculer la série indicatrice d'asymétrie translatée de  $G$  en fonction

de  $F$  (et vice versa) dans les trois cas cités. Rappelons préalablement deux notations très utilisées dans cette partie : si  $F = F_w$  est une espèce pondérée quelconque et  $\xi \in \mathbb{C}[[\vec{v}]]$ , nous écrivons

$$F(\xi) = F_w(\xi) = Z_{F_w}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots), \quad (2.96)$$

$$(\Gamma_{F,\xi})_k = (\Gamma_{F_w,\xi})_k = p_k \circ \Gamma_{F_w,\xi} = \Gamma_{F_w,k,\xi_k}(x_k, x_{2k}, x_{3k}, \dots), \quad (2.97)$$

où  $p_k$  désigne la  $k^{\text{ième}}$  somme de puissances.

### 2.3.5.1 Composantes connexes

Considérons  $E$  l'espèce des ensembles. Lorsque deux espèces  $F$  et  $G$  sont liées entre elles par l'équation fonctionnelle  $G = E \circ F$ , on dit qu'une  $F$ -structure est une  $G$ -structure connexe (étant donné que réciproquement, on dit que les  $G$ -structures sont des assemblées de  $F$ -structures). Puisque nous connaissons  $\Gamma_{E,\xi}$  (section 2.3.4), nous obtenons une formule permettant de calculer  $\Gamma_{G,\xi}$  en fonction de  $\Gamma_{F,\xi}$  et inversement.

**Proposition 2.3.14** *Soient  $E$  l'espèce des ensembles,  $F$  et  $G$  deux espèces pondérées quelconques et  $\xi \in \mathbb{C}[[\vec{v}]]$ . Si  $G = E \circ F$ , alors, on a*

$$\Gamma_{G,\xi} = Z_E(F(\xi_2), F(\xi_4), \dots) \cdot \exp\left(\sum_{i \geq 1} \frac{(-1)^{i-1}}{i} (\Gamma_{F,\xi})_i\right). \quad (2.98)$$

Réciproquement,

$$\Gamma_{F,\xi} = \lambda_{\xi,1} + \lambda_{\xi,2} + \dots + \lambda_{\xi,2^m} + \dots, \quad (2.99)$$

$$\text{où } \lambda_{\xi,2^m} = \left( \sum_{k \geq 1} \frac{\mu(k)}{k} \left( \ln \frac{\Gamma_{G,\xi}}{G(\xi_2)} \right)_k \right)_{2^m}.$$

**Preuve.** Commençons par établir (2.98), qui suit directement de

$$\Gamma_{G,\xi} = \Gamma_{E \circ F,\xi} = \Gamma_{E,F(\xi)} \circ \Gamma_{F,\xi},$$

et de la proposition 2.3.4 où  $\xi$  est remplacé par  $F(\xi)$  dans la formule (2.48). Ensuite, prenant le logarithme de l'équation (2.98), composant par  $p_j$ , multipliant par  $\frac{\mu(j)}{j}$  et sommant sur tous les entiers  $j \geq 1$ , il vient

$$\sum_{j \geq 1} \frac{\mu(j)}{j} \left( \ln \frac{\Gamma_{G,\xi}}{G(\xi_2)} \right)_j = - \sum_{n \geq 1} \left( \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) (-1)^{n/d} \right) (\Gamma_{F,\xi})_n \quad (2.100)$$

$$= \Gamma_{F,\xi} - (\Gamma_{F,\xi})_2, \quad (2.101)$$

puisque  $G(\xi_2) = Z_E \circ Z_F(\xi_2, \xi_2, \dots) = E(F(\xi_2))$ , et par utilisation de la relation

$$\frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) (-1)^{n/d} = \begin{cases} -1 & \text{si } n = 1, \\ 1 & \text{si } n = 2, \\ 0 & \text{if } n > 2, \end{cases}$$

prouvée dans (Labelle, G., 92). Par itération de (2.101), on obtient (2.99). ■

### 2.3.5.2 Assemblées circulaires

Considérons  $C$  l'espèce des cycles (orientés). De façon similaire à la section précédente, si deux espèces  $F$  et  $G$  satisfont l'équation fonctionnelle  $G = C \circ F$ , on dit qu'une  $G$ -structure est une *assemblée circulaire* de  $F$ -structures. Nous calculons de nouveau  $\Gamma_{G,\xi}$  en fonction de  $\Gamma_{F,\xi}$  et vice versa.

**Proposition 2.3.15** *Soient  $C$  l'espèce des cycles,  $F$  et  $G$  deux espèces pondérées et  $\xi \in \mathbb{C}[[\vec{v}]]$ . Si  $G = C \circ F$ , alors, on a*

$$\Gamma_{G,\xi} = \beta(\xi_1, \xi_2, \dots) - \sum_{k \geq 1} \frac{\mu(k)}{k} \ln(1 - (\Gamma_{F,\xi})_k), \quad (2.102)$$

où

$$\beta(\xi_1, \xi_2, \dots) = (Z_C - \Gamma_C)(F(\xi_1), F(\xi_2), \dots). \quad (2.103)$$

Réciproquement,

$$\Gamma_{F,\xi} = 1 - \exp\left(-\sum_{k \geq 2} \omega(k) G(\xi_k)\right) \left(-\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} (\Gamma_{G,\xi})_k\right), \quad (2.104)$$

où

$$\omega(k) = \frac{1}{k} \prod_{\substack{p|k \\ p \text{ premier}}} (1 - p). \quad (2.105)$$

**Preuve.** On obtient directement la relation (2.102) en utilisant la proposition 2.3.5 et le théorème 2.2.4. Pour établir l'équation (2.104), commençons par poser  $A(\xi) = \Gamma_{G,\xi} - \beta(\xi_1, \xi_2, \dots)$  et  $B(\xi) = -\ln(1 - \Gamma_{F,\xi})$ . Ensuite, on utilise la formule d'inversion de Möbius suivante

$$A(\xi) = \sum_{k \geq 1} \frac{\mu(k)}{k} (B(\xi))_k \iff B(\xi) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} (A(\xi))_k. \quad (2.106)$$

On trouve ainsi

$$\Gamma_{F,\xi} = 1 - \exp\left(-\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \left((\Gamma_{G,\xi})_k - \beta(\xi_k, \xi_{2k}, \dots)\right)\right). \quad (2.107)$$

Nous allons obtenir (2.104) en exprimant  $\beta$  en fonction de  $G$ . On procède de la manière qui suit. Considérons  $Z_C^{\langle -1 \rangle}(x_1, x_2, \dots)$ , l'inverse sous la substitution pléthystique de  $Z_C(x_1, x_2, \dots)$ . Alors,

$$\begin{aligned} \beta(\xi_1, \xi_2, \dots) &= (Z_C - \Gamma_C)(F(\xi_1), F(\xi_2), \dots) \\ &= G(\xi) - \Gamma_C(F(\xi_1), F(\xi_2), \dots) \\ &= G(\xi) - \Gamma_C \circ Z_C^{\langle -1 \rangle} \circ Z_C(F(\xi_1), F(\xi_2), \dots) \\ &= G(\xi) - \Gamma_C \circ Z_C^{\langle -1 \rangle}(G(\xi_1), G(\xi_2), \dots), \end{aligned} \quad (2.108)$$

puisque  $G = C \circ F$ . Maintenant, remarquons que pour toute série formelle  $z = z(x_1, x_2, \dots)$ , on a

$$\begin{aligned} z = Z_C^{\langle -1 \rangle}(x_1, x_2, \dots) &\iff x_1 = Z_C(z_1, z_2, \dots) \\ &\iff x_1 = \sum_{k \geq 1} \frac{\phi(k)}{k} \ln \frac{1}{1 - z_k} \\ &\iff \ln \frac{1}{1 - z} = \sum_{k \geq 1} \omega(k) x_k, \end{aligned}$$

où  $\omega(k)$  est la fonction arithmétique multiplicative (voir (Labelle, G., 92)) définie par (2.105). Cela implique alors

$$\begin{aligned} \Gamma_C \circ Z_C^{\langle -1 \rangle}(x_1, x_2, \dots) &= \sum_{m \geq 1} \frac{\mu(m)}{m} \ln \frac{1}{1 - z_m} \\ &= \sum_{m \geq 1} \sum_{k \geq 1} \frac{\mu(m)}{m} \omega(k) x_{mk} \\ &= \sum_{n \geq 1} \left( \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} \omega(n/d) \right) x_n \\ &= \sum_{n \geq 1} \mu(n) x_n, \end{aligned} \tag{2.109}$$

de sorte que l'on ait, en utilisant (2.108),

$$\beta(\xi_1, \xi_2, \dots) = G(\xi) - \sum_{n \geq 1} \mu(n) G(\xi_n), \tag{2.110}$$

de laquelle on déduit

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \beta(\xi_k, \xi_{2k}, \dots) &= \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} G(\xi_k) - \sum_{i \geq 1} \frac{1}{i} \sum_{j \geq 1} \mu(j) G(\xi_{ij}) \\ &= \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} G(\xi_k) - \sum_{k \geq 1} \left( \sum_{d|k} d \mu(d) \right) \frac{G(\xi_k)}{k} \\ &= - \sum_{k \geq 2} \omega(k) G(\xi_k). \end{aligned} \tag{2.111}$$

On termine cette preuve en substituant (2.111) dans (2.107). ■

### 2.3.5.3 Assemblées permutées

Pour clore sur le sujet des assemblées, considérons l'espèce  $S$  des permutations. On dit de deux espèces  $F$  et  $G$  que les  $G$ -structures sont des *assemblées permutées* de  $F$ -structures, si  $G = S \circ F$ . On dispose de la relation suivante entre les séries indicatrices d'asymétrie translatées des espèces  $F$  et  $G$ .

**Proposition 2.3.16** Soient  $S$  l'espèce des permutations,  $F$  et  $G$  deux espèces pondérées et  $\xi \in \mathbb{C}[[\vec{v}]]$ . Si  $G = S \circ F$ , alors, on a

$$\Gamma_{G,\xi} = \delta(\xi_1, \xi_2, \dots) \frac{1 - (\Gamma_{F,\xi})_2}{1 - \Gamma_{F,\xi}}, \quad (2.112)$$

où

$$\delta(\xi_1, \xi_2, \dots) = \frac{Z_S(F(\xi_1), F(\xi_2), \dots)}{\Gamma_S(F(\xi_1), F(\xi_2), \dots)} = \frac{1}{(1 - F(\xi_2))^2} \prod_{k \geq 3} \frac{1}{1 - F(\xi_k)}.$$

Réciproquement,

$$\Gamma_{F,\xi} = 1 - \prod_{k=1}^{\infty} G(\xi_k)^{-\mu(k)} \prod_{\nu=0}^{\infty} \frac{G(\xi_{2\nu})}{(\Gamma_{G,\xi})_{2\nu}}. \quad (2.113)$$

**Preuve.** La proposition 2.3.7 donne

$$\begin{aligned} \Gamma_{G,\xi} &= \Gamma_{S,F(\xi)} \circ \Gamma_{F,\xi} \\ &= \frac{Z_S(F(\xi_1), F(\xi_2), \dots)}{\Gamma_S(F(\xi_1), F(\xi_2), \dots)} \Gamma_S \circ \Gamma_{F,\xi} \\ &= \frac{Z_S(F(\xi_1), F(\xi_2), \dots)}{\Gamma_S(F(\xi_1), F(\xi_2), \dots)} \frac{1 - (\Gamma_{F,\xi})_2}{1 - \Gamma_{F,\xi}}, \end{aligned}$$

qui est (2.112). Réciproquement, pour prouver (2.113), remarquons d'abord qu'étant donné que  $Z_S(F(\xi_1), F(\xi_2), \dots) = Z_G(\xi_1, \xi_2, \dots) = G(\xi)$ , on peut réécrire la relation (2.112) sous la forme

$$\frac{1 - \Gamma_{F,\xi}}{1 - F(\xi)} = \frac{G(\xi)}{\Gamma_{G,\xi}} \frac{1 - (\Gamma_{F,\xi})_2}{1 - F(\xi_2)}.$$

En itérant cette dernière égalité, il vient

$$\frac{1 - \Gamma_{F,\xi}}{1 - F(\xi)} = \prod_{\nu=0}^{\infty} \left( \frac{G(\xi)}{\Gamma_{G,\xi}} \right)_{2\nu}. \quad (2.114)$$

Il faut désormais isoler  $\Gamma_{F,\xi}$ . Pour ce faire, il suffit d'exprimer  $1 - F(\xi) = 1 - Z_F(\xi_1, \xi_2, \dots)$  dans (2.114) en fonction de  $G(\xi) = Z_G(\xi_1, \xi_2, \dots)$ . Ceci est facilement obtenu en écrivant

$$Z_G(\xi_1, \xi_2, \dots) = Z_S \circ Z_F(\xi_1, \xi_2, \dots) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - (Z_F)_k(\xi_1, \xi_2, \dots)}.$$

En prenant maintenant le logarithme de la relation précédente et par utilisation de l'inversion de Möbius, on a

$$1 - F(\xi) = \prod_{k=1}^{\infty} G(\xi_k)^{-\mu(k)},$$

ce qui donne (2.113) en utilisant (2.114). ■

### 2.3.6 Autres calculs

Dans cette section nous calculons la série indicatrice d'asymétrie translatée d'autres espèces usuelles, à savoir les chaînes, les involutions, les ensembles orientés ainsi que les permutations paires; voir (Labelle, Lamathe et Leroux, Accepté).

#### 2.3.6.1 Chaînes et involutions

On obtient la série indicatrice d'asymétrie translatée pour les espèces des chaînes et des involutions de manière relativement directe, en se basant sur les résultats de la section précédente et sur le théorème 2.2.4, explicitant le comportement de la série  $\Gamma_{F,\xi}$  face aux opérations combinatoires.

##### • Chaînes :

L'espèce des *chaînes* de longueur  $n$ ,  $\text{Cha}_n$ , est caractérisée par l'équation fonctionnelle suivante :

$$\text{Cha}_n = \begin{cases} E_2(X^{n/2}), & \text{si } n \text{ est pair,} \\ X E_2(X^{(n-1)/2}), & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.115)$$

Rappelons que la série indicatrice d'asymétrie classique de l'espèce des chaînes est donnée par (voir (Labelle et Pineau, 94; Pineau, 95))

$$\Gamma_{\text{Cha}_n}(x_1, x_2, \dots) = \begin{cases} (x_1^n - x_2^{n/2})/2, & \text{si } n \text{ est pair,} \\ x_1(x_1^{n-1} - x_2^{(n-1)/2})/2, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.116)$$

Pour calculer  $\Gamma_{\text{Cha}_n,\xi}$ , pour  $\xi \in \mathbb{C}[[\vec{v}]]$ , on utilise les résultats du théorème 2.2.4, et on traite séparément deux cas suivant la parité de l'entier  $n$ .

- *n pair* : On a

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{Cha}_n,\xi}(x_1, x_2, \dots) &= \Gamma_{E_2(X),\xi^{n/2}} \circ \Gamma_{X^{n/2},\xi} \\ &= (\xi_2^{\frac{n}{2}} + \Gamma_{E_2(X)}) \circ \Gamma_{X^{\frac{n}{2}}} \\ &= \xi_2^{\frac{n}{2}} + \Gamma_{\text{Cha}_n}. \end{aligned}$$

- *n impair* : De la même façon, on obtient, pour  $n$  impair

$$\Gamma_{\text{Cha}_n,\xi}(x_1, x_2, \dots) = x_1 \xi_2^{(n-1)/2} + \Gamma_{\text{Cha}_n}.$$

On a ainsi obtenu le résultat suivant :

**Proposition 2.3.17** *Soit  $\xi \in \mathbb{C}[[\vec{v}]]$ . Alors, la série indicatrice d'asymétrie translatée de l'espèce des chaînes de longueur  $n$  est donnée par*

$$\Gamma_{\text{Cha}_n,\xi} = \begin{cases} \xi_2^{\frac{n}{2}} + \Gamma_{\text{Cha}_n}, & \text{si } n \text{ est pair,} \\ x_1 \xi_2^{(n-1)/2} + \Gamma_{\text{Cha}_n}, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.117)$$

□

Si l'on veut maintenant calculer  $\Gamma_{\text{Cha},\xi}$ , il suffit de sommer l'expression (2.117) sur toutes les valeurs entières de  $n$ .

• **Involutions :**

Considérons maintenant l'espèce Inv des *involutions*, à savoir des permutations  $\sigma$  telles que  $\sigma^2 = \mathbf{1}$ , où  $\mathbf{1}$  est la permutation identité. L'espèce Inv satisfait l'équation fonctionnelle suivante :

$$\text{Inv}(X) = E(X + C_2) = E(X) \cdot E(C_2). \quad (2.118)$$

Soit  $\xi \in \mathbb{C}[[\vec{v}]]$ . On a alors

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{Inv},\xi} &= \Gamma_{E,\xi} \cdot \Gamma_{E(C_2),\xi} \\ &= \Gamma_{E,\xi} \cdot \Gamma_{E,C_2(\xi)} \circ \Gamma_{C_2,\xi}. \end{aligned}$$

Or,

$$\Gamma_{E,\xi} = Z_E(\xi_2, \xi_4, \dots) \Gamma_E = Z_E(\xi_2) \Gamma_E, \quad \text{et} \quad \Gamma_{C_2,\xi} = \xi_2 + \Gamma_{C_2}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{Inv},\xi} &= (Z_E(\xi_2) \Gamma_E) \cdot (Z_E(Z_{C_2}(\xi_2)) \cdot \Gamma_E \circ (\xi_2 + \Gamma_{C_2})) \\ &= Z_E(\xi_2) Z_E(Z_{C_2}(\xi_2)) \Gamma_E(\xi_2) \Gamma_E \Gamma_E \circ (\Gamma_{C_2}) \\ &= Z_E(\xi_2) Z_E(Z_{C_2}(\xi_2)) \Gamma_E(\xi_2) \Gamma_{\text{Inv}} \\ &= \Gamma_E(\xi_2) Z_{\text{Inv}}(\xi_2) \Gamma_{\text{Inv}}. \end{aligned}$$

On a ainsi montré la proposition suivante.

**Proposition 2.3.18** *Soit  $\xi \in \mathbb{C}[[\vec{v}]]$ . Alors, la série indicatrice d'asymétrie translattée  $\Gamma_{\text{Inv},\xi}$  de l'espèce des involutions est donnée par*

$$\Gamma_{\text{Inv},\xi} = \Gamma_E(\xi_2) Z_{\text{Inv}}(\xi_2) \Gamma_{\text{Inv}}. \quad (2.119)$$

□

Noter que les séries  $Z_{\text{Inv}}$  et  $\Gamma_{\text{Inv}}$  ont été explicitement calculées dans (Labelle et Pineau, 94; Pineau, 95).

### 2.3.6.2 Ensembles orientés

Considérons  $\sigma \in \mathbb{S}_n$  une permutation de taille  $n$ . On dit que  $\sigma$  est une *permutation paire* si  $\sigma$  possède un nombre pair de cycles de longueur paire dans sa décomposition en cycles disjoints. On note par  $\mathcal{A}_n$  le sous-groupe alterné de  $\mathbb{S}_n$  formé des permutations paires de  $\mathbb{S}_n$ . On forme alors l'espèce moléculaire  $E_n^\pm$  des *ensembles orientés* de taille  $n$ ,

$$E_n^\pm = X^n / \mathcal{A}_n.$$

Une structure de l'espèce  $E_n^\pm$  consiste en un ordre linéaire sur  $n$  points modulo une permutation paire de ses éléments. En particulier, on a

$$E_0^\pm = 1, \quad E_1^\pm = X, \quad E_2^\pm = E_2, \quad E_3^\pm = C_3.$$

On définit l'espèce des ensembles orientés  $E^\pm$  en posant  $E^\pm = \sum_{n \geq 0} E_n^\pm$ .

Pour calculer la série indicatrice d'asymétrie tradatée  $\Gamma_{E^\pm, \xi}$ , nous utilisons un formule d'addition, donnée par Auger et al. dans (Auger, Labelle et Leroux, 01; Auger, Labelle et Leroux, 02). La première étape consiste en une généralisation de cette formule d'addition au cas de  $E^\pm(\xi + X)$  où  $\xi = c_1\mu_1 + c_2\mu_2 + \dots$  est une variable de poids de l'anneau  $\mathbb{C}[[\vec{v}]]$ .

**Théorème 2.3.19** (FORMULE D'ADDITION  $E_n^\pm$ ) *Nous disposons de la formule d'addition suivante relative à l'espèce  $E_n^\pm$  des ensembles orientés de taille  $n$ ,*

$$E_n^\pm(X_0 + X_1 + X_2 + \dots) = \sum_{\substack{n_0+n_1+\dots+n_r=n \\ \forall i, n_i \leq 1}} 2X_0^{n_0} X_1^{n_1} \dots + \sum_{\substack{n_0+n_1+\dots+n_r=n \\ \exists i, n_i \geq 2}} \frac{X_0^{n_0} X_1^{n_1} \dots}{\mathcal{A}_{n_0, n_1, \dots}}, \quad (2.120)$$

où  $\mathcal{A}_{n_0, n_1, \dots} = \mathcal{A}_n \cap \mathbb{S}_{n_0, n_1, \dots}$  et  $\mathbb{S}_{n_0, n_1, \dots}$  représente le groupe des permutations permutant entre eux chacun des  $n_i$  points de sorte  $X_i$ , pour  $i = 1, 2, \dots$   $\square$

Considérons maintenant  $\xi \in \mathbb{C}[[\vec{v}]]$ . Dans le but de calculer  $\Gamma_{E^\pm, \xi}$ , nous obtenons préalablement une formule d'addition pour  $E^\pm(\xi + X)$ .

**Théorème 2.3.20** *Soit  $\xi = c_1\mu_1 + c_2\mu_2 + \dots$  une variable de poids de l'anneau  $\mathbb{C}[[\vec{v}]]$ . Alors, nous avons*

$$\begin{aligned} E^\pm(\xi + X) &= -1 - (X + \xi) + (1 + X)\Gamma_E(\xi_1, \xi_2, \dots) \\ &\quad + \Gamma_E(\xi_1, \xi_2, \dots)E^\pm(X) \\ &\quad + (Z_E(\xi_1, \xi_2, \dots) - \Gamma_E(\xi_1, \xi_2, \dots))E(X). \end{aligned} \quad (2.121)$$

**Preuve.** Posant sans perte de généralité  $X_0 := X$  et  $X_i := t_i T$ ,  $i \geq 1$ , dans l'équation (2.120), il vient

$$\begin{aligned} E_n^\pm(X + \xi T) &= E_n^\pm(X + (t_1 + t_2 + \dots)T) \\ &= 2 \sum_{\substack{n_0+n_1+n_2+\dots+n_r=n \\ \forall j, n_j \leq 1}} t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots X^{n_0} T^{n-n_0} \\ &\quad + \sum_{\substack{n_0+n_1+n_2+\dots+n_r=n \\ \exists j, n_j \geq 2}} t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots \frac{X^{n_0} T^{n-n_0}}{\mathcal{A}_{n_0, n_1, n_2, \dots}}. \end{aligned}$$

En sommant la dernière relation sur toutes les valeurs positives de l'entier  $n$ , on obtient

$$E^\pm(X + \xi T) = -1 - (X + \xi T) + 2 \sum_{\substack{n_0, n_1, n_2, \dots \\ \forall j \ n_j \leq 1}} t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots X^{n_0} T^{n_1 + n_2 + n_3 + \dots} \\ + \sum_{\substack{n_0, n_1, n_2, \dots \\ \exists j \ n_j \geq 2}} t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots \frac{X^{n_0} T^{n_1 + n_2 + n_3 + \dots}}{\mathcal{A}_{n_0, n_1, n_2, \dots}}.$$

En classifiant les sommes selon les cas  $n_0 = 0$ ,  $n_0 = 1$ ,  $n_0 \geq 2$ , on obtient le développement plus explicite

$$E^\pm(X + \xi T) = -1 - (X + \xi T) + 2 \left( \sum_{n_1 \leq 1, n_2 \leq 1, \dots} t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots T^{n_1 + n_2 + n_3 + \dots} \right. \\ \left. + \sum_{n_1 \leq 1, n_2 \leq 1, \dots} t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots X T^{n_1 + n_2 + n_3 + \dots} \right) \\ + \sum_{\substack{n_1, n_2, \dots \\ \exists j \ n_j \geq 2}} t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots \frac{T^{n_1 + n_2 + n_3 + \dots}}{\mathcal{A}_{0, n_1, n_2, \dots}} \\ + \sum_{\substack{n_1, n_2, \dots \\ \exists j \ n_j \geq 2}} t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots \frac{X T^{n_1 + n_2 + n_3 + \dots}}{\mathcal{A}_{1, n_1, n_2, \dots}} \\ + \sum_{n_0 \geq 2} \sum_{n_1, n_2, \dots} t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots \frac{X^{n_0} T^{n_1 + n_2 + n_3 + \dots}}{\mathcal{A}_{n_0, n_1, n_2, \dots}}.$$

Posant maintenant  $T := 1$  (ce qui correspond à désétiqueter les points de sorte  $T$ ), on a

$$E^\pm(X + \xi) = -1 - (X + \xi) + 2((1 + t_1)(1 + t_2) \dots + X(1 + t_1)(1 + t_2) \dots) \\ + \sum_{n_0 \geq 2} \sum_{\forall j \ n_j \leq 1} t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots \frac{X^{n_0}}{\mathcal{A}_{n_0}} + \sum_{n_0 \geq 2} \sum_{\exists j \ n_j \geq 2} t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots \frac{X^{n_0}}{\mathcal{S}_{n_0}} \\ + \sum_{\exists j \ n_j \geq 2} t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots + X \sum_{\exists j \ n_j \geq 2} t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots \\ = -1 - (X + \xi) + 2(1 + X) \Gamma_E(\xi_1, \xi_2, \dots) \\ + \Gamma_E(\xi_1, \xi_2, \dots) \sum_{n \geq 2} E_n^\pm(X) \\ + (Z_E(\xi_1, \xi_2, \dots) - \Gamma_E(\xi_1, \xi_2, \dots)) \sum_{n \geq 2} E_n(X) \\ + (1 + X) (Z_E(\xi_1, \xi_2, \dots) - \Gamma_E(\xi_1, \xi_2, \dots)).$$

Il suffit alors de remarquer que  $\sum_{n \geq 2} E_n^\pm(X) = E^\pm(X) - 1 - X$  et  $\sum_{n \geq 2} E_n(X) = E(X) - 1 - X$  pour achever la preuve.  $\blacksquare$

**Remarque 2.3.21** Il est important de noter que la formule d'addition du théorème 2.3.20 est cohérente avec le corollaire 1.3.5. En effet, en posant  $X := 0$  dans le théorème 2.3.20, on obtient

$$E^\pm(\xi) = -1 - \xi + \Gamma_E(\xi_1, \xi_2, \dots) + Z_E(\xi_1, \xi_2, \dots), \quad (2.122)$$

puisque  $E(0) = E^\pm(0) = 1$ . Utilisant le fait que (voir (Labelle et Pineau, 94; Pineau, 95))

$$Z_{E^\pm}(x_1, x_2, x_3, \dots) = Z_E(x_1, x_2, x_3, \dots) + Z_E(x_1, -x_2, x_3, -x_4, \dots) - 1 - x_1 \quad (2.123)$$

et

$$Z_E(x_1, -x_2, x_3, -x_4, \dots) = \Gamma_E(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots), \quad (2.124)$$

on confirme alors la relation

$$E^\pm(\xi) = Z_{E^\pm}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots). \quad (2.125)$$

De plus, la série indicatrice d'asymétrie de l'espèce  $E^\pm$  des ensembles orientés est donnée par (voir (Labelle et Pineau, 94; Pineau, 95))

$$\Gamma_{E^\pm}(x_1, x_2, x_3, \dots) = -1 - x_1 + (2 + x_2 - x_3 + x_4 - \dots)\Gamma_E(x_1, x_2, x_3, \dots). \quad (2.126)$$

Nous sommes maintenant prêts à calculer la série indicatrice d'asymétrie tradatée  $\Gamma_{E^\pm, \xi}$  de l'espèce des ensembles orientés, pour une certaine variable de poids  $\xi \in \mathbb{C}[[\vec{v}]]$ . À cet effet, nous utilisons la définition de cette série formelle

$$\Gamma_{E^\pm, \xi} = \Gamma_{E^\pm(\xi+X)}(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2, \dots). \quad (2.127)$$

En passant au niveau des séries  $\Gamma$  dans la formule (2.121), nous déduisons

$$\begin{aligned} \Gamma_{E^\pm(\xi+X)} &= -1 - (\xi + x_1) + (1 + x_1)\Gamma_E(\xi_1, \xi_2, \dots) \\ &\quad + \Gamma_E(\xi_1, \xi_2, \dots)\Gamma_{E^\pm}(x_1, x_2, \dots) \\ &\quad + (Z_E(\xi_1, \xi_2, \dots) - \Gamma_E(\xi_1, \xi_2, \dots))\Gamma_E(x_1, x_2, \dots). \end{aligned} \quad (2.128)$$

Donc, en utilisant la formule explicite (2.126) pour  $\Gamma_{E^\pm}$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \Gamma_{E^\pm, \xi} &= \Gamma_{E^\pm(\xi+X)}(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2, \dots) \\ &= -1 - (\xi_1 + x_1 - \xi_1) + (1 + x_1 - \xi_1)\Gamma_E(\xi_1, \xi_2, \dots) + \Gamma_E(\xi_1, \xi_2, \dots) \\ &\quad \cdot \left( -1 - (x_1 - \xi_1) + (2 + (x_2 - \xi_2) - (x_3 - \xi_3) + \dots) \right. \\ &\quad \left. \cdot \Gamma_E(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2, x_3 - \xi_3, \dots) \right) \\ &\quad + (Z_E(\xi_1, \xi_2, \dots) - \Gamma_E(\xi_1, \xi_2, \dots))\Gamma_E(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2, \dots). \end{aligned}$$

En rassemblant les divers termes et en utilisant le fait que

$$\begin{aligned} \frac{Z_E(\xi_1, \xi_2, \dots)}{\Gamma_E(\xi_1, \xi_2, \dots)} &= \frac{e^{\xi_1 + \frac{1}{2}\xi_2 + \frac{1}{3}\xi_3 + \frac{1}{4}\xi_4 + \dots}}{e^{\xi_1 - \frac{1}{2}\xi_2 + \frac{1}{3}\xi_3 - \frac{1}{4}\xi_4 + \dots}} \\ &= e^{\xi_2 + \frac{1}{2}\xi_4 + \frac{1}{3}\xi_6 + \dots} \\ &= E(\xi_2), \end{aligned}$$

nous obtenons le résultat suivant.

**Proposition 2.3.22** *Soit  $\xi \in \mathbb{C}[[\bar{v}]]$ . Alors, la série indicatrice d'asymétrie translatée  $\Gamma_{E^\pm, \xi}$  de l'espèce des ensembles orientés est donnée par*

$$\Gamma_{E^\pm, \xi} = \Gamma_{E^\pm} + (E(\xi_2) - 1 - \xi_2 + \xi_3 - \xi_4 + \dots) \Gamma_E. \quad (2.129)$$

□

En classifiant les ensembles orientés selon les cardinalités croissantes, on obtient le corollaire suivant.

**Corollaire 2.3.23** *Pour  $n \geq 0$ , soit  $E_n^\pm$  l'espèce des ensembles orientés de taille  $n$ . Alors, pour  $n = 0, 1, 2$ , on a  $\Gamma_{E_n^\pm, \xi} = \Gamma_{E_n^\pm}$  et pour  $n \geq 3$ ,*

$$\begin{aligned} \Gamma_{E_n^\pm, \xi} &= \Gamma_{E_n^\pm} + \xi_3 \Gamma_{E_{n-3}} + (E_2(\xi_2) - \xi_4) \Gamma_{E_{n-4}} \\ &\quad + \xi_5 \Gamma_{E_{n-5}} + (E_3(\xi_2) - \xi_6) \Gamma_{E_{n-6}} \\ &\quad + \xi_7 \Gamma_{E_{n-7}} + (E_4(\xi_2) - \xi_8) \Gamma_{E_{n-8}} + \dots \end{aligned} \quad (2.130)$$

**Preuve.** Introduisons tout d'abord une variable de poids supplémentaire,  $t$ . Nous avons alors l'égalité combinatoire triviale

$$E^\pm(tX) = \sum_{n \geq 0} t^n E_n^\pm(X). \quad (2.131)$$

Par linéarité et en utilisant les propriétés de la série indicatrice d'asymétrie translatée, on obtient

$$\begin{aligned} \Gamma_{E_n^\pm, \xi} &= [t^n] \Gamma_{E^\pm(tX), \xi} = [t^n] \Gamma_{E^\pm \circ (tX), \xi} = [t^n] \Gamma_{E^\pm, t\xi} \circ \Gamma_{tX, \xi} \\ &= [t^n] \Gamma_{E^\pm, t\xi}(tx_1, t^2x_2, t^3x_3, \dots). \end{aligned} \quad (2.132)$$

Par la proposition 2.3.22, il vient

$$\begin{aligned} \Gamma_{E_n^\pm, \xi} &= \Gamma_{E_n^\pm} + [t^n] (E(t^2\xi_2) - 1 - t^2\xi_2 + t^3\xi_3 - \dots) \cdot \Gamma_E(tx_1, t^2x_2, t^3x_3, \dots) \\ &= \Gamma_{E_n^\pm} + [t^n] \left( \sum_{i \geq 1} t^{2i} Z_{E_i}(\xi_2, \xi_4, \dots) + \sum_{i \geq 2} (-1)^{i-1} t^i \xi_i \right) \cdot \sum_{j \geq 0} t^j \Gamma_{E_j} \\ &= \Gamma_{E_n^\pm} + \sum_{\substack{2i+j=n \\ i \geq 1}} E_i(\xi_2) \Gamma_{E_j} + \sum_{\substack{i+j=n \\ i \geq 2}} (-1)^{i-1} \xi_i \Gamma_{E_j}. \end{aligned} \quad (2.133)$$

■

Des expressions explicites des séries  $\Gamma_{E_n^\pm}$  et  $\Gamma_{E_n^\pm, \xi}$ , avec  $0 \leq n \leq 6$ , sont données en annexe en table A.5.

Remarquons que dans le cas spécial  $\xi = k = k \cdot 1$  ( $k \in \mathbb{N}$ , 1=monôme trivial), nous avons  $\xi_\nu = (k \cdot 1)_\nu = k$  et

$$E_i(\xi_2) = E_i(k) = Z_{E_i}(k, k, k, \dots) = \frac{k(k+1) \dots (k+i-1)}{i!}. \quad (2.134)$$

La formule (2.130) se réduit alors à

$$\begin{aligned} \Gamma_{E_n^\pm, k} &= \Gamma_{E_n^\pm} + k\Gamma_{E_{n-3}} + \left( \frac{1}{2!} k^{\langle 2 \rangle} - k \right) \Gamma_{E_{n-4}} \\ &\quad + k\Gamma_{E_{n-5}} + \left( \frac{1}{3!} k^{\langle 3 \rangle} - k \right) \Gamma_{E_{n-6}} + \dots \end{aligned} \quad (2.135)$$

pour  $n \geq 3$ , où  $k^{\langle \nu \rangle} = k(k+1) \dots (k+\nu-1)$  est la  $\nu^{\text{ième}}$  factorielle montante de  $k$ .

### 2.3.6.3 Permutations paires

Dans cette section, nous considérons les espèces des *permutations paires*, notée ALT, et des *permutations impaires*, notée NALT. Rappelons qu'une permutation est dite *paire* si elle comporte un nombre pair de cycles de taille paire dans sa décomposition en cycles disjoints. L'espèce ALT est caractérisée par l'équation fonctionnelle suivante, relativement immédiate à établir.

$$\text{ALT} = E(C_{\text{imp}}) \cdot E_{\text{pair}}(C_{\text{pair}}), \quad (2.136)$$

où  $E$ ,  $E_{\text{pair}}$ ,  $C_{\text{imp}}$  et  $C_{\text{pair}}$  représentent les espèces des ensembles, des ensembles de taille paire, des cycles de longueur impaire et des cycles de longueur paire, respectivement. Quant à l'espèce NALT, elle satisfait la relation suivante :

$$S = E(C_{\text{imp}})E(C_{\text{pair}}) = \text{ALT} + \text{NALT}, \quad (2.137)$$

où  $S$  est l'espèce des permutations. En utilisant les résultats du théorème 2.2.4, nous avons

$$\Gamma_{\text{ALT}, \xi} = \left( \Gamma_{E, C_{\text{imp}}}(\xi) \circ \Gamma_{C_{\text{imp}}, \xi} \right) \cdot \left( \Gamma_{E_{\text{pair}}, C_{\text{pair}}}(\xi) \circ \Gamma_{C_{\text{pair}}, \xi} \right). \quad (2.138)$$

Or, de la relation

$$\Gamma_{E_n, \xi} = \sum_{i \geq 0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} Z_{E_i}(\xi_2) \Gamma_{E_{n-2i}},$$

on déduit

$$\Gamma_{E_{\text{pair}}, \xi} = Z_E(\xi_2) \Gamma_{E_{\text{pair}}}, \quad (2.139)$$

où

$$\Gamma_{E_{\text{pair}}} = \frac{1}{2} \left( \Gamma_E(x_1, x_2, x_3, \dots) + \Gamma_E(-x_1, x_2, -x_3, \dots) \right) \quad (2.140)$$

et

$$\Gamma_E = \exp \left( \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x_k \right). \quad (2.141)$$

De plus, il est facile de voir que l'on a

$$\Gamma_{C_{pair}, \xi} = (Z_{C_{pair}} - \Gamma_{C_{pair}})(\xi) + \Gamma_{C_{pair}}, \quad (2.142)$$

$$\Gamma_{C_{imp}, \xi} = (Z_{C_{imp}} - \Gamma_{C_{imp}})(\xi) + \Gamma_{C_{imp}}, \quad (2.143)$$

avec

$$\Gamma_{C_{imp}} = \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ impair}}} \frac{\mu(n)}{2n} \ln \left( \frac{1+x_n}{1-x_n} \right), \quad (2.144)$$

$$\Gamma_{C_{pair}} = \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ pair}}} \frac{\mu(n)}{n} \ln \left( \frac{1}{1-x_n} \right) + \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ impair}}} \frac{\mu(n)}{2n} \ln \left( \frac{1}{1-x_n^2} \right), \quad (2.145)$$

et

$$Z_{C_{imp}} = \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ impair}}} \frac{\phi(n)}{2n} \ln \left( \frac{1+x_n}{1-x_n} \right), \quad (2.146)$$

$$Z_{C_{pair}} = \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ pair}}} \frac{\phi(n)}{n} \ln \left( \frac{1}{1-x_n} \right) + \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ impair}}} \frac{\phi(n)}{2n} \ln \left( \frac{1}{1-x_n^2} \right), \quad (2.147)$$

ces quatre dernières séries ayant été explicitement calculées dans (Labelle et Pineau, 94; Pineau, 95).

Commençons par calculer  $\Gamma_{E(C_{imp}), \xi}$ . Nous avons,

$$\begin{aligned} \Gamma_{E(C_{imp}), \xi} &= \Gamma_{E, C_{imp}}(\xi) \circ \Gamma_{C_{imp}, \xi} \\ &= Z_E(C_{imp}(\xi_2)) \cdot (\Gamma_E \circ \Gamma_{C_{imp}, \xi}) \\ &= Z_E(C_{imp})(\xi_2) \cdot \Gamma_E \circ ((Z_{C_{imp}} - \Gamma_{C_{imp}})(\xi) + \Gamma_{C_{imp}}) \\ &= Z_E(C_{imp})(\xi_2) \cdot (\Gamma_E \circ Z_{C_{imp}}(\xi)) \cdot \\ &\quad \cdot (\Gamma_E \circ (-\Gamma_{C_{imp}}(\xi))) \cdot (\Gamma_E \circ \Gamma_{C_{imp}}), \end{aligned} \quad (2.148)$$

la dernière égalité étant obtenue en utilisant (2.141). Finalement, nous obtenons

$$\Gamma_{E(C_{imp}), \xi} = \frac{Z_E(C_{imp})(\xi_2)}{\Gamma_E(C_{imp})(\xi)} (\Gamma_E \circ Z_{C_{imp}}(\xi)) \Gamma_{E(C_{imp})}. \quad (2.149)$$

Poursuivons maintenant avec le calcul de  $\Gamma_{E_{pair}(C_{pair}), \xi}$ . On obtient par la même méthode que précédemment, en utilisant (2.139),

$$\begin{aligned} \Gamma_{E_{pair}(C_{pair}), \xi} &= \Gamma_{E_{pair}, C_{pair}}(\xi) \circ \Gamma_{C_{pair}, \xi} \\ &= Z_E(C_{pair}(\xi_2)) \cdot (\Gamma_{E_{pair}} \circ ((Z_{C_{pair}} - \Gamma_{C_{pair}})(\xi) + \Gamma_{C_{pair}})) \\ &= \frac{Z_E(C_{pair})(\xi_2)}{\Gamma_{E_{pair}(C_{pair})}(\xi)} (\Gamma_{E_{pair}} \circ Z_{C_{pair}}(\xi)) \Gamma_{E_{pair}(C_{pair})}. \end{aligned} \quad (2.150)$$

En regroupant les termes du produit de (2.149) et (2.150), nous obtenons

$$\Gamma_{\text{ALT},\xi} = \frac{Z_S(\xi_2)}{\Gamma_{\text{ALT}}(\xi)} (\Gamma_{E_{\text{pair}}} \circ Z_{C_{\text{pair}}}(\xi)) (\Gamma_E \circ Z_{C_{\text{imp}}}(\xi)) \cdot \Gamma_{\text{ALT}}, \quad (2.151)$$

où  $\xi \in \mathbb{C}[[\vec{v}]]$ .

Dans le but de simplifier la relation (2.151), nous utilisons les deux lemmes suivants.

**Lemme 2.3.24** *Soit  $\omega \in \mathbb{C}[[\vec{v}]]$ . Alors, nous avons*

$$Z_E(\omega_2) \cdot \Gamma_E(\omega) = Z_E(\omega), \quad \text{et} \quad Z_E(\omega_2) \cdot \Gamma_{E_{\text{pair}}}(\omega) = Z_{E_{\text{pair}}}(\omega). \quad (2.152)$$

**Preuve.** On obtient successivement

$$\begin{aligned} Z_E(\omega_2) \cdot \Gamma_E(\omega) &= e^{\omega_2 + \frac{1}{2}\omega_4 + \frac{1}{3}\omega_6 + \dots} \cdot e^{\omega_1 - \frac{1}{2}\omega_2 + \frac{1}{3}\omega_3 + \dots} \\ &= e^{\omega_1 + \frac{1}{2}\omega_2 + \frac{1}{3}\omega_3 + \dots} \\ &= Z_E(\omega). \end{aligned}$$

De la même manière,

$$\begin{aligned} Z_E(\omega_2) \cdot \Gamma_{E_{\text{pair}}}(\omega) &= e^{\omega_2 + \frac{1}{2}\omega_4 + \frac{1}{3}\omega_6 + \dots} \cdot \frac{1}{2} \left( e^{\omega_1 - \frac{1}{2}\omega_2 + \frac{1}{3}\omega_3 + \dots} + e^{-\omega_1 - \frac{1}{2}\omega_2 - \frac{1}{3}\omega_3 + \dots} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( e^{\omega_1 + \frac{1}{2}\omega_2 + \frac{1}{3}\omega_3 + \dots} + e^{-\omega_1 + \frac{1}{2}\omega_2 - \frac{1}{3}\omega_3 + \dots} \right) \\ &= Z_{E_{\text{pair}}}(\omega), \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. ■

**Lemme 2.3.25** *Soit  $\xi \in \mathbb{C}[[\vec{v}]]$ . Alors, nous avons*

$$Z_{\text{ALT}} = Z_S(\xi_2) \cdot (\Gamma_{E_{\text{pair}}} \circ Z_{C_{\text{pair}}}(\xi)) \cdot (\Gamma_E \circ Z_{C_{\text{imp}}}(\xi)). \quad (2.153)$$

**Preuve.** L'équation (2.153) provient du fait que

$$\begin{aligned} Z_S(\xi_2) &= Z_{E \circ C}(\xi_2) \\ &= Z_E \circ ((Z_C(\xi))_2) \\ &= Z_E \circ ((Z_{C_{\text{imp}}}(\xi))_2 + (Z_{C_{\text{pair}}}(\xi))_2) \\ &= Z_E \circ ((Z_{C_{\text{imp}}}(\xi))_2) \cdot Z_E \circ ((Z_{C_{\text{pair}}}(\xi))_2). \end{aligned}$$

On obtient le résultat annoncé en utilisant le lemme 2.3.24. ■

Nous avons finalement établi le résultat suivant.

**Proposition 2.3.26** *Soit  $\xi \in \mathbb{C}[[\vec{v}]]$ . Alors, les séries indicatrices d'asymétrie des espèces ALT et NALT sont données par les formules générales suivantes :*

$$\Gamma_{\text{ALT},\xi} = \frac{Z_S(\xi_2)}{\Gamma_{\text{ALT}}(\xi)} (\Gamma_{E_{\text{pair}}} \circ Z_{C_{\text{pair}}}(\xi)) (\Gamma_E \circ Z_{C_{\text{imp}}}(\xi)) \cdot \Gamma_{\text{ALT}} \quad (2.154)$$

$$= \frac{Z_{\text{ALT}}(\xi)}{\Gamma_{\text{ALT}}(\xi)} \cdot \Gamma_{\text{ALT}}, \quad (2.155)$$

et

$$\Gamma_{\text{NALT},\xi} = \Gamma_{S,\xi} - \Gamma_{\text{ALT},\xi}, \quad (2.156)$$

où  $Z_{\text{ALT}}$ ,  $Z_{\text{NALT}}$  sont données par (voir (Labelle et Pineau, 94; Pineau, 95; Bergeron, Labelle et Leroux, 98))

$$Z_{\text{ALT}}(x_1, x_2, \dots) = \frac{1}{2} \prod_{n \geq 1} \frac{1}{1 - x_n} + \frac{1}{2} \prod_{n \geq 1} (1 + x_{2n-1}), \quad (2.157)$$

$$Z_{\text{NALT}}(x_1, x_2, \dots) = \frac{1}{2} \prod_{n \geq 1} \frac{1}{1 - x_n} - \frac{1}{2} \prod_{n \geq 1} (1 + x_{2n-1}), \quad (2.158)$$

$\Gamma_{\text{ALT}}$ ,  $\Gamma_{\text{ALT}}$  par (voir (Labelle et Pineau, 94; Pineau, 95))

$$\Gamma_{\text{ALT}}(x_1, x_2, \dots) = \frac{2 - x_1^2 - x_2}{2(1 - x_1)}, \quad (2.159)$$

$$\Gamma_{\text{NALT}}(x_1, x_2, \dots) = \frac{x_1^2 - x_2}{2(1 - x_1)}. \quad (2.160)$$

et (voir (Labelle et Lamathe, 04))

$$\Gamma_{S,\xi} = \frac{Z_S(\xi)}{\Gamma_S(\xi)} \cdot \Gamma_S. \quad (2.161)$$

□

## 2.4 Triangle de Pascal généralisé

Considérons  $F = F_w$ , une espèce pondérée. L'espèce  $F$  possède toujours un développement moléculaire de la forme

$$F_w = \sum_{M \in \mathcal{M}} f_M(w) M, \quad (2.162)$$

où  $f_M(w)$  est une série de puissances dans les variables de poids représentant le poids total des  $F$ -structures appartenant à une espèce moléculaire isomorphe à  $M$  (voir la remarque 1.2.6). De plus, la transformation qui, à une espèce  $F_w$ , fait correspondre  $\Gamma_{F_w,\xi}$

est linéaire. Alors, sous cette transformation, le développement (2.162) correspond à l'expression

$$\Gamma_{F_w, \xi} = \sum_{M \in \mathcal{M}} f_M(w) \Gamma_{M, \xi}. \quad (2.163)$$

Supposons donc que l'on connaisse le développement moléculaire d'une espèce  $F = F_w$ . Pour calculer la série indicatrice d'asymétrie translaturée  $\Gamma_{F, \xi}$ , il suffit de pouvoir calculer  $\Gamma_{M, \xi}$  pour chaque espèce moléculaire apparaissant dans le développement moléculaire de  $F$ , via la formule

$$\Gamma_{M, \xi} = \Gamma_{M(\xi+X)} \circ \Gamma_{X-\xi}. \quad (2.164)$$

Donc, pour calculer  $\Gamma_{M, \xi}$ , nous devons disposer d'une formule d'addition pour  $M(\xi + X)$ . De tels développements ont été considérés par Auger et al. dans (Auger, Labelle et Leroux, 01; Auger, Labelle et Leroux, 02), dans le cas où  $\xi = 1$ . Ils ont écrit ces formules sous la forme suivante

$$M(1 + X) = \sum_{N \preceq M} \binom{M}{N} N(X), \quad (2.165)$$

où  $N \preceq M$  signifie que  $N$  parcourt l'ensemble des espèces moléculaires dont le degré est inférieur ou égal à celui de  $M$ ,  $\deg N \leq \deg M$ . Les coefficients  $\binom{M}{N}$  sont des entiers positifs ou nuls et peuvent être considérés comme des coefficients binomiaux généralisés (ils sont interprétés dans (Auger, Labelle et Leroux, 00) en termes de structures partiellement étiquetées). C'est la raison pour laquelle on considère la matrice infinie  $\mathbb{P}$  formée de ces coefficients. On note

$$\mathbb{P} = \left( \binom{M}{N} \right)_{M, N \in \mathcal{M}}.$$

Cette matrice contient le *triangle de Pascal* comme sous-matrice. Ceci correspond en fait au cas où  $M = X^m$  et  $N = X^n$ , pour  $m, n \geq 0$ . En effet, pour  $M = X^m$ , on a

$$M(1 + X) = (1 + X)^m = \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} X^n.$$

Les entrées de la matrice  $\mathbb{P}$  jusqu'au degré 4 sont présentées dans le tableau A.2 en annexe, où les valeurs des coefficients binomiaux classiques sont encadrées. Considérons maintenant un vecteur colonne infini  $\mathbb{M}$  formé des espèces moléculaires classées suivant leur degré, en ordonnant ensuite de façon arbitraire mais fixée, les espèces moléculaires d'un même degré. Par exemple, les 19 premiers éléments de ce vecteur (correspondant à toutes les espèces moléculaires jusqu'au degré 4) sont

$$(1, X, E_2, X^2, E_3, C_3, XE_2, X^3, E_4, E_4^\pm, E_2(E_2), XE_3, E_2^2, P_4^{\text{bic}}, C_4, XC_3, X^2E_2, E_2(X^2), X^4). \quad (2.166)$$

En utilisant ce vecteur, l'ensemble des équations du type (2.165) pour  $M \in \mathcal{M}$  variant, s'écrit sous la forme matricielle

$$\mathbb{M}(1 + X) = \mathbb{P} \mathbb{M}(X). \quad (2.167)$$

De plus, Auger et al. ont généralisé la formule (2.167) pour un nombre complexe  $\xi \in \mathbb{C}$  quelconque, de la façon suivante :

$$\mathbb{M}(\xi + X) = \mathbb{P}^\xi \mathbb{M}(X), \quad (2.168)$$

où  $\mathbb{P}^\xi$  est la puissance  $\xi^{\text{ième}}$  de la matrice  $\mathbb{P}$  définie par

$$\mathbb{P}^\xi = e^{\xi \ln \mathbb{P}} = e^{\xi \ln(\mathbb{I} + \mathbb{Q})} = e^{\xi(\mathbb{Q} - \frac{1}{2}\mathbb{Q}^2 + \frac{1}{3}\mathbb{Q}^3 - \dots)}, \quad (2.169)$$

où  $\mathbb{Q} = \mathbb{P} - \mathbb{I}$  est une matrice triangulaire inférieure stricte.

Nous allons maintenant généraliser une nouvelle fois la définition de la matrice  $\mathbb{P}^\xi$  pour ainsi tenir compte du cas pondéré où  $\xi \in \mathbb{C}[[\vec{v}]]$ . Rappelons que l'on peut écrire le poids  $\xi \in \mathbb{C}[[\vec{v}]]$  comme combinaison linéaire à coefficients complexes de monômes (unitaires),

$$\xi = c_1 \mu_1 + c_2 \mu_2 + \dots$$

On commence par considérer un monôme unitaire  $\mu \in \mathbb{C}[[\vec{v}]]$  et on définit la matrice  $\mathbb{P}^\mu$  par

$$\mathbb{P}^\mu = \left( \binom{M}{N} \mu^{\deg M - \deg N} \right)_{M, N \in \mathcal{M}}, \quad (2.170)$$

où  $\deg M$  désigne le degré de l'espèce moléculaire  $M$ , à savoir le nombre de points sur lequel les  $M$ -structures (toutes isomorphes) existent. Notons qu'ainsi chaque entrée de la matrice  $\mathbb{P}^\mu$  est de la forme  $c\mu^k$ , où  $c, k \in \mathbb{N}$ .

**Lemme 2.4.1** *Soit  $\mu, \nu \in \mathbb{C}[[\vec{v}]]$  deux monômes unitaires quelconques. Alors, les deux matrices  $\mathbb{P}^\mu$  et  $\mathbb{P}^\nu$  commutent,*

$$\mathbb{P}^\mu \mathbb{P}^\nu = \mathbb{P}^\nu \mathbb{P}^\mu. \quad (2.171)$$

**Preuve.** Soit  $M$  une espèce moléculaire quelconque. Considérons l'espèce translatée par  $\mu \in \mathbb{C}[[\vec{v}]]$ ,  $M(\mu + X)$ . On rappelle qu'une  $M(\mu + X)$ -structure peut être interprétée comme une  $M(X)$ -structure dans laquelle certains points (ou peut-être aucun) ont été désétiquetés (remplacés par des points "vides"), chacun de ces points ayant le poids  $\mu$ . On dispose ainsi de la relation suivante

$$M(\mu + X) = \sum_{N \preceq M} \binom{M}{N} \mu^{\deg M - \deg N} N(X). \quad (2.172)$$

Faisant la substitution  $X := \nu + X$  dans l'équation (2.172), il vient successivement

$$\begin{aligned}
M(\mu + (\nu + X)) &= \sum_{N \preceq M} \binom{M}{N} \mu^{\deg M - \deg N} N(\nu + X) \\
&= \sum_{N \preceq M} \binom{M}{N} \mu^{\deg M - \deg N} \sum_{P \preceq N} \binom{N}{P} \nu^{\deg N - \deg P} P(X) \\
&= \sum_{P \preceq M} \left( \sum_{P \preceq N \preceq M} \binom{M}{N} \frac{\mu^{\deg M}}{\mu^{\deg N}} \binom{N}{P} \frac{\nu^{\deg N}}{\nu^{\deg P}} \right) P(X).
\end{aligned} \tag{2.173}$$

On a ainsi montré

$$\mathbb{M}(\mu + (\nu + X)) = \mathbb{P}^\mu \mathbb{P}^\nu \mathbb{M}(X). \tag{2.174}$$

On déduit alors facilement que  $\mathbb{P}^\mu \mathbb{P}^\nu = \mathbb{P}^\nu \mathbb{P}^\mu$  en utilisant le fait que la substitution d'espèces est associative,

$$M(\mu + (\nu + X)) = M((\mu + \nu) + X) = M((\nu + \mu) + X) = M(\nu + (\mu + X)). \tag{2.175}$$

■

Le fait que le produit de matrices  $\mathbb{P}^\mu$  et  $\mathbb{P}^\nu$  commute suggère la définition suivante pour la matrice  $\mathbb{P}^\xi$  où  $\xi$  est une série appartenant à  $\mathbb{C}[[\vec{v}]]$ .

**Définition 2.4.2** Soit  $\xi = c_1\mu_1 + c_2\mu_2 + \dots \in \mathbb{C}[[\vec{v}]]$ . On définit la matrice  $\mathbb{P}^\xi$  par

$$\mathbb{P}^\xi = (\mathbb{P}^{\mu_1})^{c_1} (\mathbb{P}^{\mu_2})^{c_2} \dots \tag{2.176}$$

Il résulte immédiatement de cette définition que les matrices  $\mathbb{P}^\xi$  satisfont la règle usuelle des exposants

$$\mathbb{P}^\xi \mathbb{P}^\alpha = \mathbb{P}^{\xi + \alpha},$$

pour  $\xi$  et  $\alpha \in \mathbb{C}[[\vec{v}]]$ .

On obtient maintenant une caractérisation du vecteur colonne  $\mathbb{M}(\xi + X)$  des espèces moléculaires en termes de la matrice  $\mathbb{P}^\xi$ .

**Théorème 2.4.3** Il existe une famille infinie de matrices triangulaires inférieures infinies à coefficients dans  $\mathbb{Z}$

$$\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \dots, \Lambda_k, \dots, \tag{2.177}$$

telle que pour tout  $\xi = c_1\mu_1 + c_2\mu_2 + \dots \in \mathbb{C}[[\vec{v}]]$ , on ait

$$\mathbb{P}^\xi = e^{\xi_1 \Lambda_1 + \frac{1}{2} \xi_2 \Lambda_2 + \frac{1}{3} \xi_3 \Lambda_3 + \dots + \frac{1}{k} \xi_k \Lambda_k + \dots}, \tag{2.178}$$

où  $\xi_k = c_1\mu_1^k + c_2\mu_2^k + \dots$ . De plus,

$$\mathbb{M}(\xi + X) = \mathbb{P}^\xi \mathbb{M}(X). \tag{2.179}$$

**Preuve.** Considérons une monôme unitaire  $\mu \in \mathbb{C}[[\vec{v}]]$ . On définit alors la matrice  $\mathbb{Q}_\mu$  triangulaire inférieure stricte par la relation suivante :

$$\mathbb{P}^\mu = \mathbb{I} + \mathbb{Q}_\mu, \quad (2.180)$$

où  $\mathbb{I}$  est la matrice infinie identité. On écrit

$$\mathbb{P}^\mu = e^{\ln \mathbb{P}^\mu} = e^{\ln(\mathbb{I} + \mathbb{Q}_\mu)} = e^{\mathbb{Q}_\mu - \frac{1}{2}\mathbb{Q}_\mu^2 + \frac{1}{3}\mathbb{Q}_\mu^3 - \dots}. \quad (2.181)$$

Puisque les coefficients de  $\mathbb{P}^\mu$  sont de la forme  $c\mu^k$ , où  $c \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ , les coefficients de la somme  $\mathbb{Q}_\mu - \frac{1}{2}\mathbb{Q}_\mu^2 + \frac{1}{3}\mathbb{Q}_\mu^3 - \dots$  sont des combinaisons linéaires de tels monômes. En extrayant les coefficients en  $\mu^k$ , pour chaque  $k \geq 1$ , on définit une nouvelle famille  $(\Lambda_k)_{k \geq 1}$  de matrices indépendantes de  $\mu$  par la relation suivante

$$\mathbb{Q}_\mu - \frac{1}{2}\mathbb{Q}_\mu^2 + \frac{1}{3}\mathbb{Q}_\mu^3 - \dots = \mu\Lambda_1 + \frac{1}{2}\mu^2\Lambda_2 + \frac{1}{3}\mu^3\Lambda_3 + \dots. \quad (2.182)$$

Il est clair que les coefficients des matrices  $\Lambda_k$ ,  $k \geq 1$ , sont des entiers (dans  $\mathbb{Z}$ ) et sont nuls sauf pour un nombre fini d'entre eux. On obtient alors une nouvelle expression pour  $\mathbb{P}^\mu$ ,

$$\mathbb{P}^\mu = e^{\mu\Lambda_1 + \frac{1}{2}\mu^2\Lambda_2 + \frac{1}{3}\mu^3\Lambda_3 + \dots}. \quad (2.183)$$

Alors, en utilisant la relation (2.176) et le lemme 2.4.1, il vient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^\xi &= (\mathbb{P}^{\mu_1})^{c_1} (\mathbb{P}^{\mu_2})^{c_2} \dots \\ &= \prod_{i \geq 1} e^{c_i(\mu_i\Lambda_1 + \frac{1}{2}\mu_i^2\Lambda_2 + \frac{1}{3}\mu_i^3\Lambda_3 + \dots)} \\ &= e^{(\sum c_i\mu_i)\Lambda_1 + \frac{1}{2}(\sum c_i\mu_i^2)\Lambda_2 + \frac{1}{3}(\sum c_i\mu_i^3)\Lambda_3 + \dots} \\ &= e^{\xi_1\Lambda_1 + \frac{1}{2}\xi_2\Lambda_2 + \frac{1}{3}\xi_3\Lambda_3 + \dots}. \end{aligned} \quad (2.184)$$

Pour maintenant établir (2.179), remarquons d'abord que l'on a, pour  $c \in \mathbb{N}$ ,

$$(\mathbb{P}^\mu)^c \mathbb{M}(X) = \underbrace{\mathbb{P}^\mu \mathbb{P}^\mu \dots \mathbb{P}^\mu}_{c \text{ fois}} \mathbb{M}(X) = \underbrace{\mathbb{P}^\mu \mathbb{P}^\mu \dots \mathbb{P}^\mu}_{c-1 \text{ fois}} \mathbb{M}(\mu + X) \quad (2.185)$$

$$= \dots = \mathbb{M}(c\mu + X). \quad (2.186)$$

On montre de même que pour  $\xi = c_1\mu_1 + c_2\mu_2 + \dots$ ,  $c_i \in \mathbb{N}$ , on a

$$\mathbb{P}^\xi \mathbb{M}(X) = \mathbb{M}(\xi + X).$$

On invoque alors le principe d'extension des identités polynomiales pour obtenir (2.179), étant donné que l'identité est vraie pour le cas particulier où les  $c_i$  sont des entiers positifs ou nuls. ■

La matrice  $\mathbb{P}^\xi$ , pour les espèces moléculaires de degré au plus quatre, est donnée au tableau A.3 en annexe. Noter que l'on a utilisé la formule (2.178) pour obtenir ce tableau, en calculant préalablement les matrices  $\Lambda_i$ ,  $i \geq 1$ .

Le théorème précédent admet un corollaire immédiat permettant de calculer le vecteur colonne  $\Gamma_{\mathbb{M},\xi}$  des séries indicatrices d'asymétrie translatée  $\Gamma_{M,\xi}$  en fonction de  $\mathbb{P}^\xi$  et du vecteur colonne  $\Gamma_{\mathbb{M}}$  des  $\Gamma_M$ , où  $M$  parcourt l'ensemble des espèces moléculaires. La translation inverse  $x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2, \dots$  est ensuite utilisée.

**Corollaire 2.4.4** *Soit  $\xi \in \mathbb{C}[[\vec{v}]]$ . Alors,*

$$\Gamma_{\mathbb{M},\xi} = \mathbb{P}^\xi \Gamma_{\mathbb{M}}(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2, x_3 - \xi_3, \dots). \quad (2.187)$$

□

En utilisant la formule (2.187) et le langage de calcul formel Maple, nous avons calculé les séries  $\Gamma_{M,\xi}$  pour toutes les espèces moléculaires  $M$  de degré au plus 4. Ces séries sont présentées au tableau A.4.



**Partie II**

**Énumération et classification de  
familles de 2-arbres**



## Chapitre III

### ESPÈCE DES 2-ARBRES

L'espèce des 2-arbres ainsi que ses généralisations ont été extensivement étudiées dans la littérature. Les premiers travaux à ce sujet se trouvent dans (Palmer, 69), pour le dénombrement étiqueté des 2-arbres, et dans (Harary et Palmer, 73), pour le cas non étiqueté. Dans le même temps, Moon (Moon, J. W., 69), et Beineke et Pippert (Beineke et Pippert, 69) ont tous trois généralisé ces résultats dans le cas étiqueté à la classe des  $k$ -arbres (arbres  $k$ -dimensionnels construits à partir de simplexes de dimension  $k$ ).

Mentionnons également les travaux de Palmer et Read (Palmer et Read, 73) qui ont dénombré les 2-arbres extérplanaires (2-arbres plongeables dans le plan de sorte que les faces soient des triangles), qu'ils appellent planaires dans leur article, dans les cas étiqueté et non étiqueté. C'est précisément ce type de 2-arbres que nous considérons dans le chapitre 4, dans le but, cependant, de les classer selon leurs symétries.

Deux années plus tard, en compagnie de Harary (Harary, Palmer et Read, 75), ils ont généralisé les résultats précédents en dénombrant les 2-arbres  $k$ -gonaux extérplanaires. Ce travail est très proche de l'énumération des arbres cellulaires ("cell-growth problem"). Dans le chapitre 6, de tels 2-arbres sont considérés hormis que nous n'imposons pas de restriction de planarité. Cela signifie que nous considérons les mêmes objets, mais vus en tant que graphes simples.

Plus récemment, T. Kloks (Kloks, 90; Kloks, 93) a dénombré les 2-arbres partiels 2-connexes, à savoir, les 2-arbres dans lesquels certaines arêtes ont été enlevées sans briser la 2-connexité de la structure, selon le nombre d'arêtes. Ces structures sont plus générales que les 2-arbres  $k$ -gonaux puisque la taille des polygones qu'on y trouve n'est pas fixe et que certains d'entre eux possèdent des arêtes manquantes.

Les 2-arbres présentent de nombreuses propriétés remarquables. Notons par exemple que les 2-arbres forment une famille de graphes simples qui sont uniquement tricolores. Cela signifie que tout 2-arbre peut être proprement coloré (deux sommets adjacents ne reçoivent pas la même couleur) de manière unique avec un jeu de trois couleurs, à permutation près des couleurs. Ces objets sont également utilisés en mathématiques sociales et en phylogénie comme éléments de base du calcul des dissimilarités et distances d'arbres en théorie de la classification; voir (Leclerc et Makarenkov, 98).

Finalement, Fowler, Gessel, Labelle et Leroux, dans (Fowler et al., 02), ont proposé

de nouvelles équations fonctionnelles pour l'espèce des 2-arbres et certaines espèces pointées associées, incluant un théorème de dissymétrie pour les 2-arbres. Ils ont donné de nouvelles formules de récurrence pour le cas non étiqueté ainsi que des formules asymptotiques. Les présents travaux, dans les chapitres 4, 5 et 6, sont inspirés de leur approche, notamment le théorème de dissymétrie.

### 3.1 Introduction et propriétés des 2-arbres

#### 3.1.1 Les 2-arbres et les espèces pointées associées

On note  $\mathcal{A}$  l'espèce des 2-arbres; par la suite, on garde cette notation pour les diverses spécialisations de familles de 2-arbres que nous introduisons, lorsque le contexte n'est pas ambigu. Commençons par donner deux définitions équivalentes de l'espèce des 2-arbres. La première est une définition récursive (voir par exemple (Fowler et al., 00; Fowler et al., 02)) et la seconde est purement axiomatique (voir (Bousquet et Lamathe, 02; Bousquet et Lamathe, Soumis)).

**Définition 3.1.1** *On définit récursivement l'espèce  $\mathcal{A}$  des 2-arbres comme étant la plus petite classe de graphes simples telle que :*

1. *l'arête seule fait partie de  $\mathcal{A}$ ;*
2. *si un graphe simple  $G$  possède un sommet, noté  $x$ , de degré 2 dont les voisins sont adjacents et tel que le graphe  $G - x$  obtenu à partir de  $G$  en enlevant le sommet  $x$  et les arêtes incidentes à  $x$  est dans  $\mathcal{A}$ , alors  $G$  appartient à  $\mathcal{A}$ .*

**Définition 3.1.2** *Soit  $\mathcal{E}$  un ensemble non vide de  $n$  éléments appelés arêtes. Un 2-arbre est soit une arête seule (si  $n = 1$ ), soit un sous-ensemble non vide  $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}_3(\mathcal{E})$  dont les éléments sont appelés triangles, et qui satisfont les conditions suivantes :*

1. *pour toute paire  $\{a, b\} = \{\{a_1, a_2, a_3\}, \{b_1, b_2, b_3\}\}$  d'éléments distincts de  $\mathcal{T}$ , on a  $|a \cap b| \leq 1$ ;*
2. *pour tout couple  $(a, b) = (\{a_1, a_2, a_3\}, \{b_1, b_2, b_3\})$  d'éléments distincts de  $\mathcal{T}$ , il existe une unique suite*

$$t_0 = a, t_1, t_2, \dots, t_k = b$$

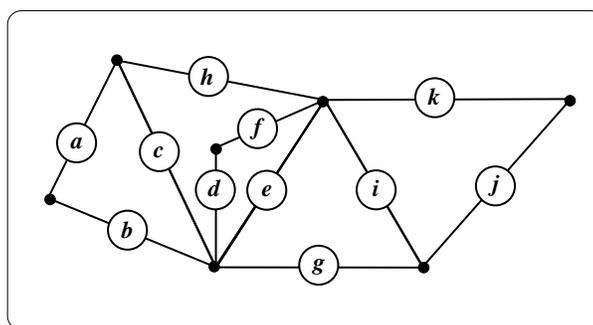
*avec  $t_i \in \mathcal{T}$ ,  $i \geq 1$ , telle que l'on ait  $|t_i \cap t_{i+1}| = 1$ , pour tout  $i = 0, 1, \dots, k-1$ .*

De façon plus concrète, un 2-arbre est essentiellement un graphe simple connexe constitué de triangles qui sont liés entre eux selon les arêtes de manière arborescente, c'est-à-dire, sans former de cycle de triangles. Notons que dans un 2-arbre, le nombre d'arêtes,  $|\mathcal{E}|$ , est toujours impair; voir le lemme 3.1.3, ci-bas.

Dans la deuxième définition, on suppose implicitement que les 2-arbres sont étiquetés aux arêtes. Dans certains cas, comme nous le verrons par la suite, on conviendra plutôt

d'étiqueter les 2-arbres aux triangles ou encore aux triangles et aux arêtes à la fois. C'est la raison pour laquelle, on peut considérer que l'espèce des 2-arbres forme une espèce à deux sortes,  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(X, Y)$ , où  $X$  et  $Y$  représentent les sortes des triangles et des arêtes, respectivement.

On dit qu'une arête  $e$  et un triangle  $t$  sont *incidents* si  $e \in t$ . On définit le *degré* d'une arête comme étant le nombre de triangles qui lui sont incidents. La *distribution des degrés* des arêtes d'un 2-arbre peut ainsi être décrite par un vecteur infini  $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3, \dots)$ , où  $n_i$  représente le nombre d'arêtes de degré  $i$ . On désigne par  $\text{Supp}(\vec{n})$  le *support* de  $\vec{n}$ , à savoir l'ensemble des indices  $i$  tels que  $n_i$  est non nul. Par exemple, le 2-arbre présenté en figure 3.1 comporte  $n = 11$  arêtes,  $m = 5$  triangles et sa distribution des degrés est donnée par le vecteur  $\vec{n} = (8, 2, 1)$ . Un *chemin* dans un 2-arbre est une suite finie d'éléments distincts  $[x_1, x_2, \dots, x_k]$ ,  $k \geq 1$ , telle que les éléments  $x_i$  sont alternativement des arêtes et des triangles incidents. Alors, par analogie avec les concepts classiques de théorie des graphes concernant les arbres, on définit le *centre* d'un 2-arbre comme étant l'élément central du plus long chemin du 2-arbre. Comme dans le cas des arbres, ce centre est uniquement déterminé, et peut être soit une arête, soit un triangle (pour les arbres, le centre est toujours un sommet ou une arête). Pour trouver le centre d'un 2-arbre, on peut utiliser un processus d'effeuillage de la structure, analogue au cas des arbres, excepté qu'ici, une feuille d'un 2-arbre est un triangle possédant deux arêtes de degré 1. Par exemple, par ce processus, on trouve que le centre du 2-arbre de la figure 3.1 est l'arête étiquetée  $e$ . Notons que dans la définition 3.1.2, la condition 1 signifie que deux triangles ne peuvent partager qu'une arête au plus. La seconde condition stipule qu'il existe un unique chemin entre deux triangles quelconques, assurant ainsi que la structure est arborescente (connexe, ne possédant pas de cycle de triangles).



**Figure 3.1** Un 2-arbre sur l'ensemble d'arêtes  $\mathcal{E} = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$

Le premier résultat de cette section propose une condition nécessaire et suffisante à l'existence d'un 2-arbre.

**Lemme 3.1.3** Soient  $m, n$  deux entiers positifs et  $\vec{n} = (n_1, n_2, \dots)$  un vecteur infini d'entiers naturels positifs ou nuls. Alors,

1. *il existe un 2-arbre possédant  $m$  triangles et  $n$  arêtes si et seulement si  $n = 2m + 1$ ;*
2. *il existe un 2-arbre possédant  $m$  triangles et  $n$  arêtes et ayant  $\vec{n}$  comme distribution des degrés des arêtes si et seulement si*

$$n = 2m + 1, \quad \sum n_i = n \quad \text{et} \quad \sum in_i = 3m. \quad (3.1)$$

**Preuve.** La condition 1 est évidente étant donné qu'à partir du 2-arbre composé d'une arête (et donc zéro triangle!) chaque triangle ajouté à la structure augmente de deux le nombre d'arêtes. La relation  $\sum n_i = n$  de la condition 2 est immédiate. En ce qui concerne la relation  $\sum in_i = 3m$ , il suffit d'observer que le membre de gauche donne le degré total des arêtes de la structure alors que, dans le membre de droite, chaque triangle contribue pour trois unités au degré total. La suffisance des conditions est facile à établir par récurrence sur le nombre de triangles. ■

Du fait de la relation  $n = 2m + 1$ , il est équivalent de dénombrer les 2-arbres non étiquetés selon le nombre d'arêtes ou de triangles. Il est à noter, toutefois, que le nombre d'arêtes est toujours impair.

Pour obtenir l'énumération et la classification des 2-arbres, on suit ici l'approche de Fowler, Gessel, Labelle et Leroux introduite dans (Fowler et al., 00; Fowler et al., 02), basée sur l'utilisation d'équations fonctionnelles et sur un théorème de dissymétrie. Ce théorème est une généralisation du théorème de dissymétrie pour les arbres (voir (Bergeron, Labelle et Leroux, 98)) et du Théorème de Dissimilarité pour les 2-arbres, voir (Harary et Palmer, 73), page 74. Considérons trois pointages relatifs aux 2-arbres, notés par les exposants  $-$ ,  $\Delta$  et  $\underline{\Delta}$ :

1.  $-$  indique le pointage en une arête,
2.  $\Delta$  indique le pointage en un triangle,
3.  $\underline{\Delta}$  indique le pointage en un triangle dont une des arêtes est elle-même distinguée.

Alors, on définit les espèces  $a^-$ ,  $a^\Delta$  et  $a^{\underline{\Delta}}$  comme étant les espèces des 2-arbres pointés respectivement en une arête, en un triangle et en un triangle ayant une arête distinguée. Ces quatre espèces sont alors liées par la relation du théorème suivant.

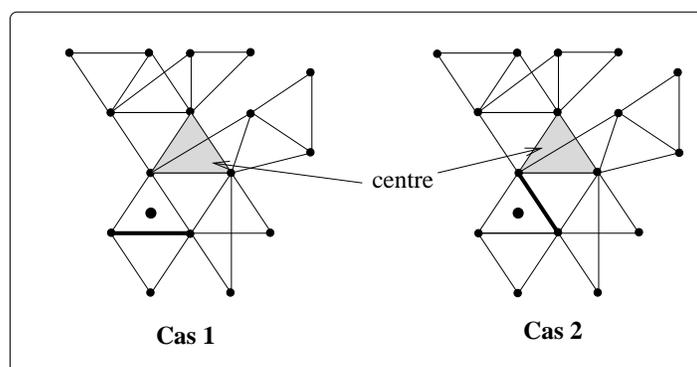
**Théorème 3.1.4** (THÉORÈME DE DISSYMETRIE POUR LES 2-ARBRES ) *Soit  $a$  l'espèce des 2-arbres. Alors, nous avons l'isomorphisme d'espèces suivant :*

$$a^- + a^\Delta = a + a^{\underline{\Delta}}. \quad (3.2)$$

**Preuve.** On établit un isomorphisme naturel entre les deux membres de la relation (3.2) : le membre de gauche représente les 2-arbres qui sont pointés en une arête ou en

un triangle, tandis que dans le membre de droite, l'espèce  $a$  correspond canoniquement aux 2-arbres pointés en leur centre, que ce centre soit une arête ou un triangle. Faisons maintenant correspondre bijectivement le pointage hors centre avec le pointage en un triangle possédant lui-même une de ses arêtes distinguée. On traite séparément les cas du pointage en une arête et en un triangle. La figure 3.2 illustre ces deux cas, où le triangle pointé est repéré par un point noir, et l'arête pointée, par une ligne épaisse.

**Cas 1 :** Considérons d'abord le cas du pointage d'un 2-arbre en une arête distincte de son centre. Appelons  $\bullet\text{---}\bullet$  cette arête distinguée. Soit  $\triangle$ , le triangle adjacent à l'arête  $\bullet\text{---}\bullet$  se trouvant dans la direction du centre (il est clair que ce triangle est uniquement déterminé, par la nature arborescente des 2-arbres). On pointe alors le triangle  $\triangle$  tout en conservant l'arête  $\bullet\text{---}\bullet$  pointée (voir figure 3.2). On obtient ainsi un 2-arbre faisant partie de l'espèce  $a^\triangle$ .



**Figure 3.2** Théorème de dissymétrie

**Cas 2 :** Prenons maintenant le cas d'un 2-arbre pointé en un triangle différent de son centre. De façon similaire au cas précédent, on pointe l'arête adjacente à ce triangle se trouvant dans la direction du centre.

Il est facile de voir que ce processus est bijectif (réversible). En effet, considérons un 2-arbre pointé en un triangle ayant une de ses arêtes distinguée. On se place à l'intérieur du triangle pointé et on regarde dans la direction du centre. Si l'arête pointée se trouve dans la direction du centre, on conserve le pointage du triangle. Dans les autres cas, y compris le cas où le triangle pointé est le centre, on ne conserve que l'arête pointée.

Il est clair que cette construction définit un isomorphisme naturel entre les deux membres de (3.2), puisque la bijection proposée est indépendante de l'étiquetage des 2-arbres et commute donc avec les réétiquetages. ■

Ce théorème de dissymétrie permet d'obtenir une relation entre l'espèce (non pointée)  $a$  et certaines des espèces pointées. On écrit, au niveau des espèces,

$$a = a^- + a^\triangle - a^\triangle. \quad (3.3)$$

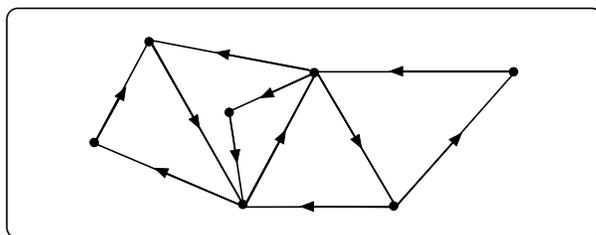
Cette dernière équation implique des relations au niveau de toutes les séries qui sont associées à ces espèces de structures. Cette équation est très utile étant donné que l'on pourra exprimer les trois espèces  $a^-$ ,  $a^\Delta$  et  $a^\triangleleft$  à l'aide d'équations fonctionnelles.

### 3.1.2 Les 2-arbres orientés

La première étape de notre démarche relative à l'étude des 2-arbres consiste à définir une orientation sur les structures.

**Définition 3.1.5** *On dit qu'un 2-arbre est orienté si ses arêtes sont orientées de telle sorte que tous les triangles soient des cycles orientés.*

La figure 3.3 propose un exemple de 2-arbre orienté. En fait, l'orientation d'une arête quelconque d'un 2-arbre peut être étendue de façon unique à l'ensemble de la structure, en orientant en premier les triangles incidents à l'arête choisie, puis en propageant récursivement l'orientation à tous les triangles adjacents. Il est clair que ce processus d'orientation est cohérent, par la nature arborescente des 2-arbres. Cela signifie que l'orientation de chaque arête est bien définie.



**Figure 3.3** Un 2-arbre orienté

De plus, le théorème de dissymétrie reste valide dans le cas où les 2-arbres sont orientés. Si on note  $a_o$ , l'espèce des 2-arbres orientés, et si les exposants  $-$ ,  $\Delta$  et  $\triangleleft$  indiquent toujours les mêmes pointages, alors, on dispose du résultat suivant.

**Théorème 3.1.6** (THÉORÈME DE DISSYMMÉTRIE - CAS ORIENTÉ) *Soit  $a_o$  l'espèce des 2-arbres orientés. Alors, on a*

$$a_o^- + a_o^\Delta = a_o + a_o^{\triangleleft}. \quad (3.4)$$

□

### 3.1.3 Les 2-arbres $k$ -gonaux

On s'intéresse également dans le chapitre 6 à une généralisation des 2-arbres classiques. Cette généralisation apparaît naturellement et est liée à certaines spécialisations des *arbres cellulaires* ("cell-growth problem", dans la langue de Shakespeare); voir (Harary, Palmer et Read, 75). Nous allons modifier la définition des 2-arbres en remplaçant les

triangles par des quadrilatères, des pentagones ou plus généralement des polygones à  $k$  côtés, appelés  $k$ -gones, avec  $k \geq 3$  fixé. De tels 2-arbres sont qualifiés de *2-arbres  $k$ -gonaux*. On dit qu'un tel 2-arbre est orienté, si chaque arête est orientée de telle sorte que chaque  $k$ -gone soit orienté circulairement. Les conditions d'existence des 2-arbres du lemme 3.1.3 doivent être modifiées de la façon suivante.

**Proposition 3.1.7** *Soient  $m$  et  $n$  deux entiers positifs,  $\vec{n} = (n_1, n_2, \dots)$  un vecteur infini d'entiers naturels positifs ou nuls et  $k \geq 3$ , un entier quelconque. Alors, on dispose des conditions suivantes.*

1. *Il existe un 2-arbre  $k$ -gonal possédant  $m$   $k$ -gones et  $n$  arêtes si et seulement si  $n = (k - 1)m + 1$ .*
2. *Il existe un 2-arbre  $k$ -gonal possédant  $m$   $k$ -gones et  $n$  arêtes avec  $\vec{n}$  comme distribution des degrés des arêtes si et seulement si*

$$n = (k - 1)m + 1, \quad \sum n_i = n \quad \text{et} \quad \sum in_i = km. \quad (3.5)$$

□

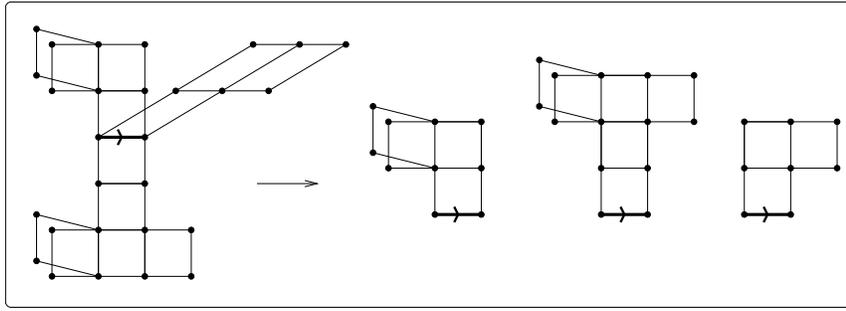
La démonstration est essentiellement la même que pour le lemme 3.1.3. De plus, les dernières conditions englobent évidemment celle de ce lemme; il suffit de prendre le cas particulier  $k = 3$ .

Les deux conditions 1 et 2 ont également du sens dans le cas où  $k = 2$ . En effet, il suffit d'interpréter un 2-arbre 2-gonal étiqueté aux triangles comme un arbre étiqueté aux arêtes, les arêtes du 2-arbre correspondant alors aux sommets de l'arbre.

### 3.1.4 L'espèce $B$

On introduit une nouvelle espèce, qui joue un rôle fondamental dans notre démarche. C'est l'espèce  $B = \alpha^{\rightarrow}$  des 2-arbres  $k$ -gonaux *pointés en une arête orientée*, à savoir des 2-arbres dans lesquels une arête est choisie puis orientée. Comme nous l'avons déjà mentionné, l'orientation de l'arête racine peut être propagée à l'ensemble du 2-arbre de manière unique, de sorte qu'il existe un isomorphisme d'espèces entre  $B$  et  $\alpha_o^-$ . Cependant, comme nous le verrons par la suite, il est souvent plus intéressant de ne pas propager cette orientation et de considérer que seule l'arête pointée est orientée. Notons qu'ici les sortes  $X$  et  $Y$  représentent les sortes des  $k$ -gones (généralisant les triangles) et des arêtes, respectivement. Dans le but d'obtenir une caractérisation de l'espèce  $B$ , on introduit la notion de *page*, une notion qui s'avèrera utile par la suite.

**Définition 3.1.8** *Soit  $t$  une  $B$ -structure dont l'arête pointée est notée  $a$ . On appelle page de  $t$  tout sous-2-arbre maximal de  $t$  contenant un seul  $k$ -gone incident à l'arête  $a$ .*



**Figure 3.4** Une  $B$ -structure et les pages qui la composent

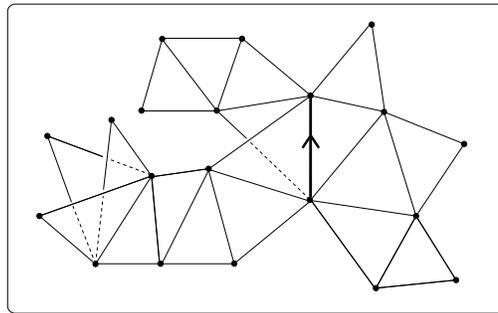
La figure 3.4 montre la décomposition d'une  $B$ -structure en pages dans le cas où  $k = 4$ .

Voici une équation fonctionnelle caractérisant l'espèce  $B$ .

**Proposition 3.1.9** Soit  $B = B(X, Y) = \mathcal{A}^{\rightarrow}$  l'espèce des 2-arbres  $k$ -gonaux pointés en une arête orientée. Alors, on a

$$B(X, Y) = Y \cdot E(XB^{k-1}(X, Y)). \quad (3.6)$$

**Preuve.** Considérons un 2-arbre  $k$ -gonal planté en une de ses arêtes qui est orientée. Rappelons que  $X$  représente ici la sorte des  $k$ -gones et  $Y$ , celle des arêtes. Une  $B$ -structure est composée d'une arête, correspondant au facteur  $Y$  dans la relation (3.6), autour de laquelle se trouve un ensemble de pages (voir figure 3.5, où  $k = 3$ ). Ainsi, on obtient l'équation fonctionnelle



**Figure 3.5** Une  $B$ -structure

$$B(X, Y) = Y \cdot E(P(X, Y)), \quad (3.7)$$

où  $P$  désigne l'espèce à deux sortes des pages de 2-arbres  $k$ -gonaux et  $E$  l'espèce des ensembles. Il nous reste alors à analyser la structure d'une page. Une page est composée du  $k$ -gone adjacent à l'arête racine (donnant une  $X$ -structure), dont les arêtes

restantes peuvent être orientées canoniquement, comme l'illustre la figure 3.6, a) pour le cas où  $k$  est impair et, b), lorsque  $k$  est un entier pair. Ceci permet alors d'attacher sur chacune de ces arêtes orientées une  $B$ -structure sans ambiguïté. L'espèce  $P$  satisfait ainsi l'équation fonctionnelle suivante :

$$P(X, Y) = XB^{k-1}(X, Y). \quad (3.8)$$

Regroupant les équations (3.7) et (3.8), on obtient le résultat annoncé. ■

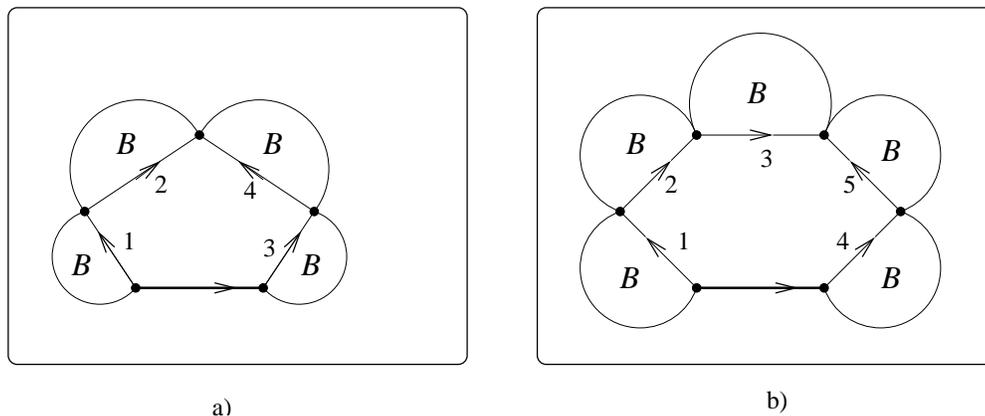


Figure 3.6 Une page

### 3.2 Espèces quotient liées aux 2-arbres

À des fins d'énumération non étiquetée des 2-arbres, nous utilisons le concept d'*espèce quotient*. La méthode générale associée aux 2-arbres, introduite dans (Fowler et al., 00; Fowler et al., 02), consiste, dans un premier temps, à obtenir les résultats dans le cas orienté. Ensuite, on se détache de l'orientation en quotientant les espèces considérées par un groupe à deux éléments,  $\mathbb{Z}_2 = \{1, \tau\}$ , où l'action de  $\tau$  est de renverser l'orientation des structures.

La notion d'espèce quotient a été introduite par (Joyal, 86; Yeh, 86; Labelle, J., 85). Voir aussi (Bergeron, Labelle et Leroux, 98) pour un exposé plus détaillé sur ces espèces. On s'attache uniquement ici à considérer des espèces quotients de la forme  $F/\mathbb{Z}_2$ , où  $F = F_w$  est une espèce de structures "orientées" pondérées, et  $\mathbb{Z}_2 = \{1, \tau\}$ , est le groupe cyclique d'ordre deux ( $\tau^2 = 1$ ) et où l'action de l'élément  $\tau$  consiste à renverser l'orientation des structures. Il va sans dire que chaque structure de l'espèce  $F$  que nous considérons doit n'offrir qu'au plus deux orientations distinctes de la structure. Ainsi, chaque structure de l'espèce quotient  $F/\mathbb{Z}_2$  consiste en une orbite  $\{s, \tau \cdot s\}$  d'une  $F$ -structure  $s$  sous l'action du groupe  $\mathbb{Z}_2$ . Noter que l'ensemble  $\{s, \tau \cdot s\}$  est composé d'un ou deux éléments. Dans le cas où il est réduit à un élément, à savoir si  $\tau \cdot s = s$ , on dit que la  $F$ -structure est *invariante* par changement d'orientation ou *laissée fixe* sous l'action de  $\tau \in \mathbb{Z}_2$ . On parle alors aussi de *structure*  $\tau$ -symétrique. Comme nous le

verrons par la suite, la difficulté principale de l'énumération non étiquetée provient de l'expression de la série génératrice ordinaire et de la série indicatrice de cycles des structures  $\tau$ -symétriques. En effet, pour calculer la série génératrice  $(F/\mathbb{Z}_2)^\sim$  de l'espèce quotient  $F/\mathbb{Z}_2$ , on utilise le résultat suivant qui est une conséquence du lemme de Burnside (voir (Bousquet, 99), Proposition 2.2.4).

**Proposition 3.2.1** ((Bousquet, 99)) *Soit  $F = F_w$  une espèce pondérée quelconque et  $G$ , un groupe agissant sur  $F$ . Alors, la série génératrice tilde de l'espèce quotient  $F/G$  (énumérant les  $F/G$ -structures non étiquetées) est donnée par*

$$(F/G)^\sim(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{n \geq 0} |\text{Fix}_{\tilde{F}_n}(g)|_w x^n, \quad (3.9)$$

où  $\text{Fix}_{\tilde{F}_n}(g)$  désigne l'ensemble des  $F$ -structures non étiquetées d'ordre  $n$  laissées fixes sous l'action de  $g \in G$  et  $|\text{Fix}_{\tilde{F}_n}(g)|_w$  est le poids total de cet ensemble. □

Notons que, dans le cas où  $G = \mathbb{Z}_2$ , ce résultat prend la forme simple suivante :

$$(F/\mathbb{Z}_2)^\sim(x) = \frac{1}{2} \left( \tilde{F}(x) + \tilde{F}_\tau(x) \right), \quad (3.10)$$

où  $\tilde{F}_\tau(x) = \sum_{n \geq 0} |\text{Fix}_{\tilde{F}_n}(\tau)|_w x^n$  est la série génératrice tilde des  $F$ -structures non étiquetées  $\tau$ -symétriques.

Il nous sera aussi très utile de pouvoir calculer la série indicatrice d'espèces quotient. Pour ce faire, on utilise la proposition suivante, qui est également une conséquence du lemme de Burnside.

**Proposition 3.2.2** *Soit  $G$  un groupe agissant sur une espèce pondérée  $F = F_w$ . Alors, la série indicatrice de cycle de l'espèce  $F/G$  est donnée par*

$$Z_{F/G}(x_1, x_2, x_3, \dots) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}_{F_{w, \vec{t}(1)}}(g)|_w, \quad (3.11)$$

où  $|\text{Fix}_{F_{w, \vec{t}(1)}}(g)|_w = |\{\alpha \in F_{w, \vec{t}(1)} \mid g \cdot \alpha = \alpha\}|_w$  et  $\vec{t} = (t_1, t_2, t_3, \dots)$ . □

On considère dans cette proposition une espèce de structures pondérée  $F_{w, \vec{t}}$  comme définie dans la section 1.4. Nous n'utiliserons ce résultat que dans le cas du groupe  $G = \mathbb{Z}_2 = \{1, \tau\}$ , et l'équation (3.11) prend la forme

$$Z_{F/\mathbb{Z}_2}(x_1, x_2, x_3, \dots) = \frac{1}{2} \left( Z_F(x_1, x_2, x_3, \dots) + |\text{Fix}_{F_{w, \vec{t}(1)}}(\tau)|_w \right). \quad (3.12)$$

Expliquons maintenant la démarche générale que nous utilisons dans le cadre de l'énumération des 2-arbres  $R$ -enrichis dans les chapitres 5 et 6. Notons que cette méthode a

été introduite dans (Fowler et al., 00; Fowler et al., 02). Soit  $a_o$  l'espèce des 2-arbres  $R$ -enrichis orientés. Dans un premier temps, nous exprimons les sous-espèces pointées de  $a_o$ ,  $a_o^-$ ,  $a_o^\diamond$  et  $a_o^{\diamond\diamond}$ , à l'aide d'équations fonctionnelles simples en termes de l'espèce  $B$ , permettant d'obtenir l'énumération étiquetée et non étiquetée de ces espèces. Le théorème de dissymétrie conduit alors à l'énumération des 2-arbres  $R$ -enrichis orientés. Ensuite, on utilise le groupe  $\mathbb{Z}_2 = \{1, \tau\}$  pour se défaire de l'orientation des structures en quotientant les espèces  $a_o^-$ ,  $a_o^\diamond$  et  $a_o^{\diamond\diamond}$ . On obtient ainsi une caractérisation de l'espèce  $a$  des 2-arbres  $R$ -enrichis (non orientés), de la manière suivante :

$$a = \frac{a_o}{\mathbb{Z}_2} = \frac{a_o^-}{\mathbb{Z}_2} + \frac{a_o^\diamond}{\mathbb{Z}_2} - \frac{a_o^{\diamond\diamond}}{\mathbb{Z}_2}. \quad (3.13)$$

L'énumération des  $a$ -structures étiquetées sera directe. Dans le cas non étiqueté, nous ferons appel aux propositions 3.2.1 et 3.2.2. La difficulté sera alors de calculer les séries génératrices tildes et indicatrices de cycles associées aux structures  $\tau$ -symétriques.



## Chapitre IV

### CLASSIFICATION DES ESPÈCES DES 2-ARBRES EXTERPLANS ET EXTERPLANAIRES

#### 4.1 Espèces des 2-arbres exterplans et exterplanaires

L'objet de ce chapitre est la classification par rapport aux symétries des familles de 2-arbres appelés *exterplans* et *exterplanaires* (“outerplanar” en anglais).

**Définition 4.1.1** *Un graphe  $G$  est dit exterplanaire s'il existe un plongement de  $G$  dans le plan tel que tous les sommets de  $G$  appartiennent à la région infinie du plan (la face externe). On appelle graphe exterplan, un graphe muni d'un tel plongement (à réflexion, rotation et homéomorphisme préservant l'orientation près).*

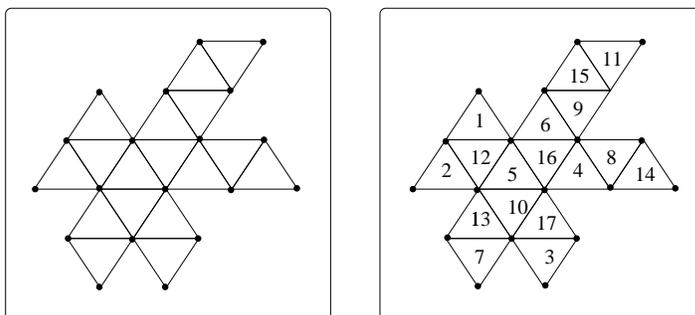
Notons que tous les 2-arbres (classiques) sont des graphes planaires au sens usuel de la théorie des graphes. Cependant, dans (Harary et Palmer, 73), les auteurs ont qualifié de planaires les 2-arbres que nous considérons. Le terme “exter” que nous utilisons ici, signifie que l'on ajoute une condition supplémentaire sur les faces des structures. Mentionnons aussi les travaux de (Palmer et Read, 73) à propos de l'énumération des plongements dans le plan de 2-arbres sans aucune condition sur les faces, qu'ils ont aussi appelé plans. Nous établissons ici le développement moléculaire des espèces des 2-arbres exterplans dans un premier temps à partir du théorème de dissymétrie et de formules d'addition simples. Par la suite, nous donnons le même type de développement pour l'espèce des 2-arbres exterplanaires, en utilisant une méthode similaire, basée sur de nouvelles formules d'addition relatives aux espèces à deux sortes  $P_4^{\text{bic}}(X, Y)$  et  $P_6^{\text{bic}}(X, Y)$  introduites au chapitre premier.

Pour un 2-arbre  $t$ , le fait d'être exterplanaire se traduit par les deux conditions équivalentes suivantes :

- i) toutes les faces de  $t$  (hormis la face externe éventuellement) sont des triangles;
- ii) toutes les arêtes de  $t$  sont de degré au plus deux (il y a au plus deux triangles attachés à chaque arête).

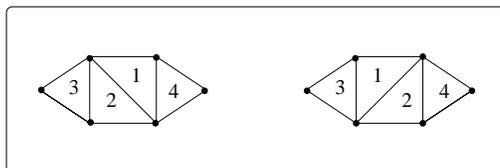
Dans ce chapitre, par convenance, nous considérons les 2-arbres étiquetés aux triangles. La figure 4.1 propose un exemple d'un 2-arbre exterplan, c'est-à-dire d'un plongement

particulier d'un 2-arbre exterplanaire, ainsi qu'un des étiquetages possibles de celui-ci avec l'ensemble  $[17] = \{1, 2, \dots, 17\}$ .



**Figure 4.1** Un 2-arbre plan et un de ses étiquetages possibles

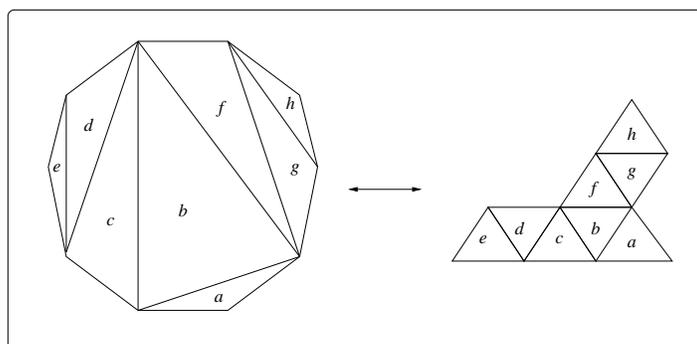
Pour illustrer la différence entre 2-arbre exterplan et exterplanaire, considérons les deux 2-arbres étiquetés de la figure 4.2. Ce sont deux 2-arbres exterplans différents, mais un seul 2-arbre exterplanaire, étant donné que les 2-arbres exterplanaires sont en fait des 2-arbres exterplans considérés à réflexion (symétrie verticale) près.



**Figure 4.2** Deux 2-arbres exterplans différents, un 2-arbre exterplanaire

Les 2-arbres exterplans et exterplanaires peuvent être mis en correspondance avec plusieurs objets combinatoires dont certains sont issus de la chimie. Il est facile de voir que les 2-arbres exterplans sont en bijection avec les triangulations (non enracinées) de polygones dans le plan. La figure 4.3 montre une telle correspondance, qui est en fait également une correspondance entre les 2-arbres exterplanaires et les triangulations de polygones dans l'espace (c'est-à-dire sans orientation), aussi connue sous le nom de triangulations du disque, voir (Brown, 64).

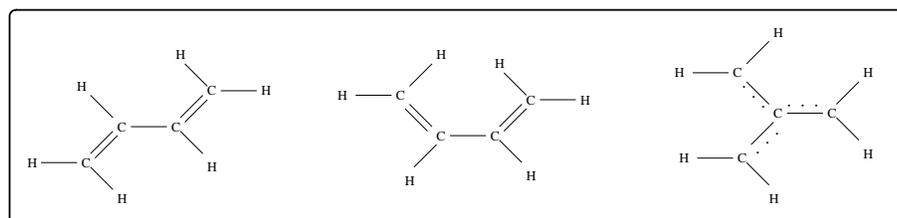
De plus, les 2-arbres exterplanaires sont en correspondance avec les molécules (au sens de la chimie!) de *polyènes hydrocarbonés* de formule moléculaire  $C_nH_{n+2}$ . Il faut cependant exclure certains 2-arbres exterplanaires, qui ne donnent pas lieu à des molécules existantes. Celles-ci sont qualifiées de configurations non planaires dans (Cyvin et al., 95). Un *polyène* est un composé chimique qui contient plus de deux liaisons doubles par molécule. En figure 4.4, on peut voir les trois isomères de polyènes hydrocarbonés de formule moléculaire  $C_4H_6$ ; voir (Cyvin et al., 95). Remarquons que les liaisons doubles entre atomes sont représentées par des traits doubles et que, dans la troisième molécule les liaisons doubles sont en fait des liaisons "tournantes" (non



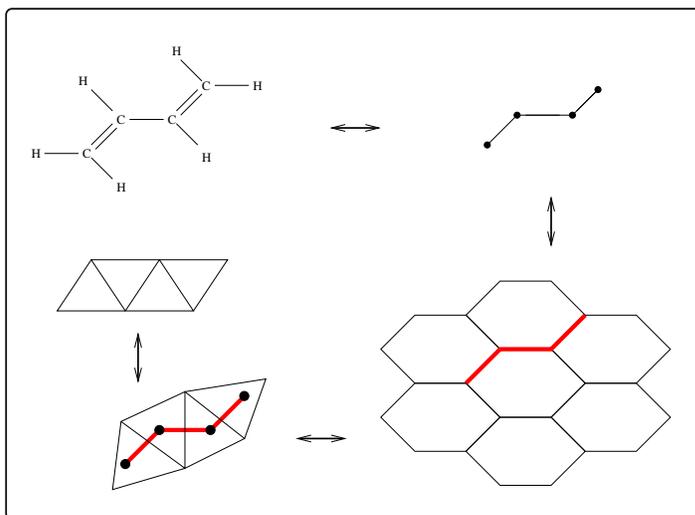
**Figure 4.3** Correspondance entre 2-arbres exterplans et triangulations

saturées, possédant des électrons libres) représentées par des pointillés. On peut alors, en quelques étapes assez directes, établir une correspondance entre les 2-arbres exterplanaires et ces molécules, où le paramètre commun est le nombre de triangles, pour le 2-arbre, et le nombre d'atomes de carbone  $C$  du polyène. La figure 4.5 illustre les étapes de cette correspondance. On considère dans cette figure un isomère de polyène de formule  $C_4H_6$ . La première étape consiste à "effeuiller" les atomes d'hydrogène  $H$  et à oublier les liaisons doubles. On obtient alors un arbre caractérisé par des angles de  $2\pi/3$  entre les arêtes. Le chimiste sera capable de reconstruire la molécule à partir de cet arbre. Il est alors clair que cet arbre est identique à un arbre plongé dans le réseau hexagonal à cause des angles de  $2\pi/3$  entre les arêtes. Il suffit alors de placer un triangle sur chaque sommet de l'arbre et de tenir compte des relations d'incidence dans l'arbre pour obtenir un 2-arbre exterplanaire. Ainsi, obtenir le développement moléculaire explicite de l'espèce des 2-arbres exterplanaires correspond à classifier les molécules de polyènes de formules  $C_nH_{n+2}$  selon les types de symétries de ces molécules; cela revient à trouver le groupe d'automorphismes de chaque molécule. On peut également en déduire l'énumération des polyènes hydrocarbonés pour chaque type de symétrie.

Avant de commencer notre démarche, et dans le but d'illustrer le développement que nous désirons établir, nous donnons les premiers termes du développement moléculaire des espèces  $a_\pi$  des 2-arbres exterplans (voir figure 4.6 et équation (4.1)), et  $a_p$ , des 2-arbres exterplanaires (voir figure 4.7 et équation (4.2)). Les développements complets



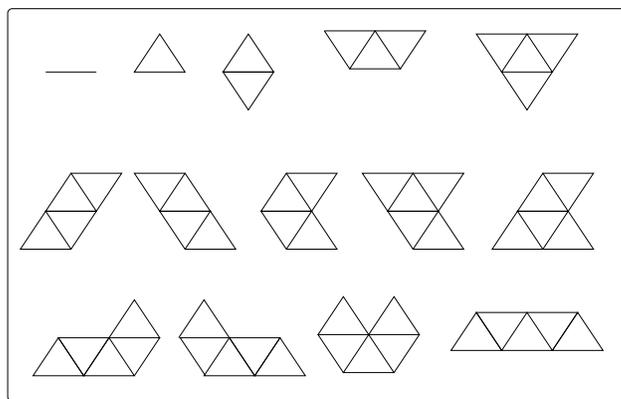
**Figure 4.4** Les trois isomères de formule  $C_4H_6$



**Figure 4.5** Correspondance entre polyènes hydrocarbonés et 2-arbres exterplanaires

explicités seront donnés dans les théorèmes 4.3.2 et 4.3.7.

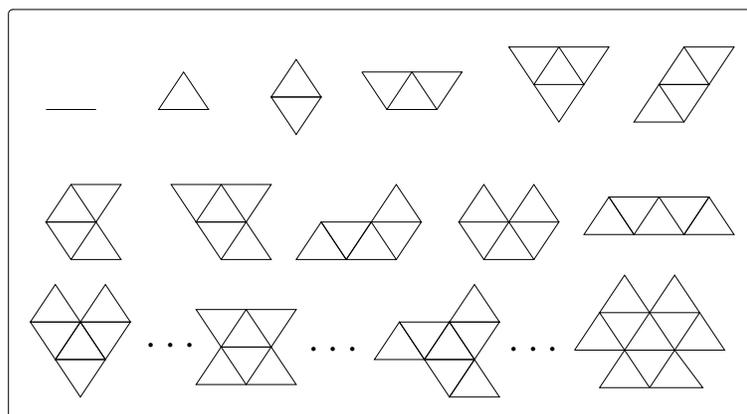
$$a_{\pi} = a_{\pi}(X) = 1 + X + E_2(X) + X^3 + XC_3(X) + 2E_2(X^2) + X^4 + 6X^5 + \dots \quad (4.1)$$



**Figure 4.6** Premiers termes du développement moléculaire de l'espèce  $a_{\pi}$ , des 2-arbres exterplans

$$a_p = a_p(X) = 1 + X + E_2(X) + XE_2(X) + XE_3(X) + 2E_2(X^2) + 2X^5 + 2XE_2(X^2) + X^2E_2(X^2) + \dots + P_4^{bic}(X, X) + \dots + XC_3(X^2) + \dots + XP_6^{bic}(X, X) + \dots \quad (4.2)$$

Introduisons maintenant l'espèce auxiliaire  $B$  de base, des 2-arbres exterplanaires pointés en une arête externe (une arête de degré un) munie d'une orientation. Cette espèce,



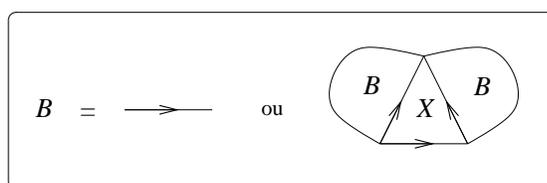
**Figure 4.7** Premiers termes du développement moléculaire de l'espèce  $a_p$ , des 2-arbres exteplanaires

ainsi que toutes celles considérées par la suite, est étiquetée aux triangles. Cela signifie que la sorte de base est la sorte  $X$  des triangles. Rappelons que l'orientation de l'arête pointée peut être étendue à l'ensemble de la structure (voir section 3.1.2). Il est important de remarquer que le fait que les 2-arbres soient considérés dans le plan, implique que l'on peut canoniquement les orienter en utilisant l'orientation du plan. Cela signifie que l'espèce  $B$  est isomorphe à l'espèce des 2-arbres exteplans pointés en une arête externe.

L'espèce  $B$  est alors caractérisée par l'équation fonctionnelle

$$B = 1 + XB^2, \quad (4.3)$$

conformément à la figure 4.8.



**Figure 4.8**  $B = 1 + XB^2$

Il est également bien connu que l'espèce  $B$  peut être vue comme l'espèce des triangulations enracinées de polygones. L'espèce  $B$  va jouer un rôle fondamental tout au long de ce chapitre en tant qu'espèce de base de nos calculs. Notons que cette espèce est asymétrique puisque toute  $B$ -structure possède un groupe d'automorphismes trivial. Ceci implique que les coefficients du développement moléculaire de  $B$  coïncident avec ceux de la série génératrice tilde de  $B$ . De plus, comme mentionné dans la section 1.2, le développement moléculaire de  $B$  est de la forme  $\sum_n b_n X^n$ , où  $b_n$  donne le nombre

de  $B$ -structures non étiquetées sur  $n$  triangles. La proposition suivante explicite ces coefficients, qui, comme attendu, sont les nombres de Catalan.

**Proposition 4.1.2** *Le développement moléculaire de l'espèce  $B = B(X)$  est donné par*

$$B(X) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{c}_n X^n, \quad (4.4)$$

où  $\mathbf{c}_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$  (nombres de Catalan). Plus généralement, si on note  $B^k(X) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{c}_n^{(k)} X^n$ ,  $k \geq 1$ , alors

$$\mathbf{c}_n^{(k)} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} (-1)^i \binom{k-1-i}{i} \mathbf{c}_{n+k-1-i} \quad (4.5)$$

$$= \frac{k}{n} \binom{2n-1+k}{n-1}. \quad (4.6)$$

**Preuve.** La formule pour  $\mathbf{c}_n$  suit directement d'une application de la formule d'inversion de Lagrange sur la relation (4.3). On peut aussi l'obtenir en développant en série la solution algébrique  $B(X) = (1 - \sqrt{1 - 4X})/2X$  de (4.3). Pour les coefficients  $\mathbf{c}_n^{(k)}$  de l'espèce  $B^k$ , on travaille avec la série génératrice tilde (des structures non étiquetées). On commence par remarquer que

$$B^k(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} (-1)^i \binom{k-1-i}{i} \frac{B(x)}{x^{k-1-i}} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k-2}{2} \rfloor} (-1)^{i+1} \binom{k-2-i}{i} \frac{1}{x^{k-1-i}}, \quad (4.7)$$

où  $\lfloor \cdot \rfloor$  désigne la fonction partie entière. La formule (4.7) se montre par récurrence sur l'entier  $k$ , en distinguant deux cas suivant la parité de  $k$ , et en utilisant le fait que  $A^2(x) = \frac{1}{x}(A(x) - 1)$ . Alors, en extrayant le coefficient en  $x^n$  dans l'expression (4.7), on obtient le résultat annoncé (4.5) pour  $\mathbf{c}_n^{(k)}$ . On établit (4.6) par inversion de Lagrange composée (voir section 1.6) avec  $F(x) = (1+x)^k$  appliquée à la relation  $B - 1 = X((B - 1) + 1)^2$ . ■

Par exemple, pour  $k$  allant de 1 à 6, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_n^{(1)} &= \mathbf{c}_n = \frac{1}{n} \binom{2n}{n-1}, \\ \mathbf{c}_n^{(2)} &= \mathbf{c}_{n+1} = \frac{2}{n} \binom{2n+1}{n-1}, \\ \mathbf{c}_n^{(3)} &= \mathbf{c}_{n+2} - \mathbf{c}_{n+1} = \frac{3}{n} \binom{2n+2}{n-1}, \\ \mathbf{c}_n^{(4)} &= \mathbf{c}_{n+3} - 2\mathbf{c}_{n+2} = \frac{4}{n} \binom{2n+3}{n-1}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_n^{(5)} &= \mathbf{c}_{n+4} - 3\mathbf{c}_{n+3} + \mathbf{c}_{n+2} = \frac{5}{n} \binom{2n+4}{n-1}, \\ \mathbf{c}_n^{(6)} &= \mathbf{c}_{n+5} - 4\mathbf{c}_{n+4} + 3\mathbf{c}_{n+3} = \frac{6}{n} \binom{2n+5}{n-1}. \end{aligned}$$

Dans le but d'alléger les notations, on étend la définition des nombres de Catalan de la façon suivante :

$$\mathbf{c}_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \chi(n \in \mathbb{N}). \quad (4.9)$$

En d'autres termes, le nombre  $\mathbf{c}_n$  est le nombre usuel de Catalan si  $n$  est un entier positif ou nul, est 0 dans les autres cas.

Rappelons les deux théorèmes de dissymétrie que nous allons utiliser dans les cas ext-plan et ext-planaire.

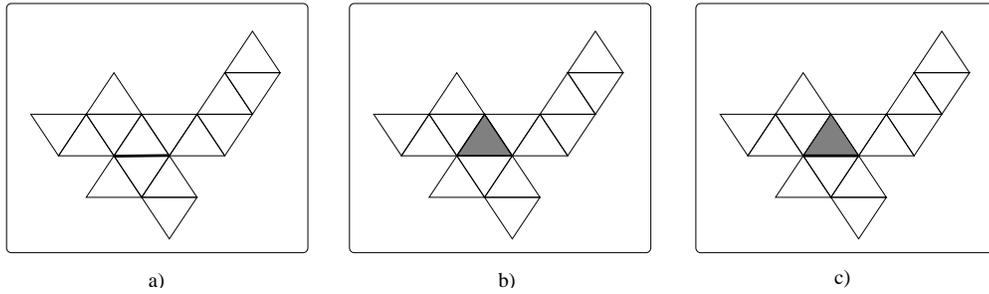
**Théorème 4.1.3** THÉORÈME DE DISSYMMÉTRIE POUR LES 2-ARBRES EXTERPLANS ET EXTERPLANAIRES. *Les espèces  $\mathbf{a}_\pi$  des 2-arbres ext-plans et  $\mathbf{a}_p$  des 2-arbres ext-planaires satisfont les isomorphismes d'espèces suivants :*

$$\mathbf{a}_\pi^- + \mathbf{a}_\pi^\triangle = \mathbf{a}_\pi + \mathbf{a}_\pi^{\triangleleft}, \quad (4.10)$$

et

$$\mathbf{a}_p^- + \mathbf{a}_p^\triangle = \mathbf{a}_p + \mathbf{a}_p^{\triangleleft}, \quad (4.11)$$

où les exposants  $-$ ,  $\triangle$  et  $\triangleleft$  représentent le pointage des 2-arbres en une arête (figure 4.9 a), en un triangle (figure 4.9 b), et en un triangle possédant une de ses arêtes distinguée (figure 4.9 c).  $\square$



**Figure 4.9** Illustration des exposants : a)  $-$ , b)  $\triangle$  et c)  $\triangleleft$

Dans la section suivante, nous allons proposer plusieurs formules d'addition relatives aux espèces  $E_2(Y)$ , des ensembles de cardinal deux,  $C_3(Y)$ , des cycles (orientés) de taille trois, et aux deux espèces moléculaires spéciales  $P_4^{\text{bic}}(X, Y)$  et  $P_6^{\text{bic}}(X, Y)$  introduites à la section 1.5. Nous utilisons alors ces diverses formules d'addition, combinées au théorème de dissymétrie, pour obtenir le développement moléculaire de l'espèce  $\mathbf{a}_\pi$ , dans un premier temps, et  $\mathbf{a}_p$  par la suite. Enfin, nous terminerons ce chapitre en proposant de nombreuses formules d'énumération à partir des séries génératrices exponentielle et ordinaire et des séries indicatrices de cycles et d'asymétrie.

## 4.2 Formules d'addition

Dans cette partie, nous nous proposons de prouver quatre formules d'addition, qui vont s'avérer nécessaires pour obtenir les développements moléculaires des espèces des 2-arbres exteplanaires et exteplanaires.

**Proposition 4.2.1** *Soit  $\mathcal{B}$  une espèce asymétrique dont le développement moléculaire est donné par*

$$\mathcal{B}(Y) = \sum_{k \geq 0} b_k Y^k, \quad b_k \in \mathbb{N}.$$

*Alors, on dispose des formules d'addition suivantes, relatives aux espèces  $E_2$  des ensembles à deux éléments et  $C_3$  des cycles de longueur trois :*

$$E_2(\mathcal{B}(Y)) = \sum_{k \geq 1} b_k E_2(Y^k) + \sum_{k \geq 0} \alpha_k Y^k, \quad (4.12)$$

$$C_3(\mathcal{B}(Y)) = \sum_{k \geq 1} b_k C_3(Y^k) + \sum_{k \geq 0} \beta_k Y^k, \quad (4.13)$$

avec

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}(b_0^2 + b_0), \quad \beta_0 = \frac{1}{3}(b_0^3 + 2b_0), \quad (4.14)$$

$$\alpha_k = \frac{1}{2} \sum_{i+j=k} b_i b_j - \frac{1}{2} \chi(2|k) b_{\frac{k}{2}}, \quad k \geq 1, \quad (4.15)$$

$$\beta_k = \frac{1}{3} \sum_{l+m+n=k} b_l b_m b_n - \frac{1}{3} \chi(3|k) b_{\frac{k}{3}}, \quad k \geq 1, \quad (4.16)$$

où, pour  $a, b \in \mathbb{N}$ ,  $\chi(a|b) = 1$ , si  $a$  divise  $b$ , et 0, sinon.

**Preuve.** Rappelons que le terme constant d'une espèce  $F(\mathcal{B}(Y))$  est donné par

$$F(b_0) = Z_F(b_0, b_0, \dots)$$

où  $b_0 = \mathcal{B}(0)$ . Cela mène directement à (4.14). Une analyse précise des différentes espèces moléculaires pouvant apparaître dans le développement de  $E_2(\mathcal{B})$ , nous permet d'écrire la relation suivante :

$$E_2(\mathcal{B}) = \sum_{k \geq 1} \gamma_k E_2(Y^k) + \sum_{k \geq 0} \alpha_k Y^k. \quad (4.17)$$

Il faut alors calculer les coefficients  $\alpha_k$  et  $\gamma_k$ , pour tout  $k \geq 1$ . Il est important de noter que l'on peut ordonner, dans l'espèce  $\mathcal{B}$ , les  $b_k$  différentes copies de la molécule  $Y^k$ , pour chaque  $k \geq 1$ . Ainsi, pour obtenir une  $E_2(Y^k)$ -structure à partir de l'espèce  $E_2(\mathcal{B})$ , il faut prendre deux fois la même copie de  $Y^k$  parmi les  $b_k$  disponibles; dans tout autre cas, la paire de  $\mathcal{B}$ -structures considérée sera asymétrique. On en déduit donc

que  $\gamma_k = b_k$ , pour tout  $k \geq 1$ . Pour maintenant calculer  $\alpha_k$ , il est possible de procéder à une énumération directe. Cependant, nous préférons introduire une méthode différente que l'on utilise par la suite. Cette méthode est basée sur la dérivation de l'expression considérée suivie d'une intégration. Dérivons tout d'abord les deux membres de (4.17). On obtient

$$\mathcal{B}\mathcal{B}' = \sum_{k \geq 1} k b_k Y^{2k-1} + \sum_{k \geq 1} k \alpha_k Y^{k-1}.$$

Intégrant alors la dernière relation, dans le contexte des séries formelles en  $Y$ , il vient

$$\frac{1}{2}\mathcal{B}^2 = \frac{1}{2} \sum_{k \geq 1} b_k Y^{2k} + \sum_{k \geq 0} \alpha_k Y^k + \text{const.}$$

Il suffit désormais d'identifier les coefficients de  $Y^n$  dans les deux membres de l'égalité précédente pour arriver à l'expression (4.15). Pour obtenir (4.16), écrivons

$$C_3(\mathcal{B}) = \sum_{k \geq 1} \delta_k C_3(Y^k) + \sum_{k \geq 0} \beta_k Y^k. \quad (4.18)$$

Le même argument que celui utilisé précédemment implique  $\delta_k = b_k$ ,  $k \geq 1$ , et la même technique de dérivation-intégration appliquée à l'équation (4.18) donne la formule annoncée pour  $\beta_k$ . Notons que durant ce procédé, nous avons utilisé le fait que

$$(C_3(\mathcal{B}))' = L_2(\mathcal{B})\mathcal{B}' = \mathcal{B}^2\mathcal{B}',$$

où  $L_2$  représente l'espèce des listes de deux éléments. ■

Nous allons maintenant passer aux résultats principaux de cette section, à savoir des formules d'addition relatives aux espèces  $P_4^{\text{bic}}(X, Y)$  et  $P_6^{\text{bic}}(X, Y)$ . Nous utilisons la notation compacte  $b_k^{(n)}$  pour désigner le coefficient de  $Y^k$  dans le développement moléculaire de l'espèce  $\mathcal{B}^n(Y)$ , avec la convention que  $b_x^{(n)} = 0$  si l'indice  $x$  est fractionnaire, pour tout  $n, k \geq 1$ .

**Théorème 4.2.2** *Soit  $\mathcal{B}$  une espèce asymétrique quelconque dont le développement moléculaire est donnée par*

$$\mathcal{B}(Y) = \sum_{n \geq 0} b_n Y^n, \quad b_n \in \mathbb{N}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} P_4^{\text{bic}}(X, \mathcal{B}(Y)) &= \sum_{k \geq 1} a'_k X^2 Y^k + \sum_{k \geq 1} a''_k E_2(X Y^k) + \sum_{k \geq 1} a'''_k X^2 E_2(Y^k) \\ &\quad + \sum_{k \geq 0} a_k^{iv} P_4^{\text{bic}}(X, Y^k), \end{aligned} \quad (4.19)$$

où

$$a'_k = \frac{1}{4}b_k^{(4)} - \frac{3}{4}b_{\frac{k}{2}}^{(2)} + \frac{1}{2}b_{\frac{k}{4}}, \quad (4.20)$$

$$a''_k = b_k^{(2)} - b_{\frac{k}{2}}, \quad (4.21)$$

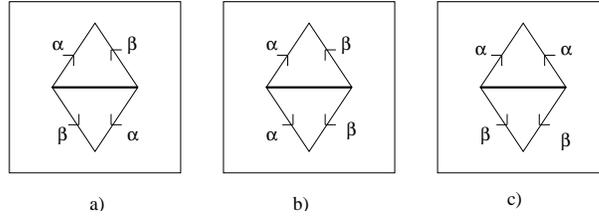
$$a'''_k = \frac{1}{2}(b_k^{(2)} - b_{\frac{k}{2}}), \quad (4.22)$$

$$a_k^{iv} = b_k. \quad (4.23)$$

**Preuve.** Nous utilisons une méthode très similaire à celle de la proposition 4.2.1, en procédant à une analyse précise des différentes symétries pouvant apparaître dans les structures de l'espèce  $P_4^{\text{bic}}(X, \mathcal{B}(Y))$ . Ceci conduit à la relation (4.19) où tous les coefficients sont à expliciter. Remarquons tout d'abord que  $a_k^{iv} = b_k$  puisque la seule manière d'obtenir une  $P_4^{\text{bic}}(X, Y^k)$ -structure à partir de l'espèce  $P_4^{\text{bic}}(X, \mathcal{B}(Y))$  est de prendre quatre fois la même copie de la molécule  $Y^k$ , parmi les  $b_k$  disponibles. Cela donne directement (4.23). Ensuite, considérons les  $E_2(XY^k)$ -structures. Pour obtenir de telles structures de l'espèce  $P_4^{\text{bic}}(X, \mathcal{B}(Y))$ , il est possible de prendre deux  $Y^{\frac{k}{2}}$ -structures non isomorphes, notées  $\alpha$  et  $\beta$  à partir de l'espèce  $\mathcal{B}$ , et de les agencer des deux manières distinctes décrites par les figures 4.10 a) et 4.10 b). Cela donne le terme

$$2 \sum_l \binom{b_l}{2} E_2(XY^{2l}), \quad \text{où } l = k/2,$$

où il ne faut pas oublier que les deux triangles internes contribuent pour un  $X$  chacun. Nous pouvons aussi prendre une  $Y^i$ -structure  $\alpha$  et une  $Y^j$ -structure  $\beta$  telles que  $i + j = k$  et  $i \neq j$ , et les mettre dans les deux configurations illustrées par les figures 4.10 a) et b). Ces dernières configurations conduisent au terme



**Figure 4.10** Symétries d'ordre deux dans l'espèce  $P_4^{\text{bic}}(X, \mathcal{B})$

$$2 \sum_{\substack{i+j=k-1 \\ i < j}} b_i b_j E_2(XY^k),$$

dans le développement moléculaire de l'espèce  $P_4^{\text{bic}}(X, \mathcal{B})$ . Cela mène alors à la relation (4.21), c'est-à-dire,

$$a''_k = 2 \sum_{\substack{i+j=k \\ i < j}} b_i b_j + 2 \binom{b_{\frac{k}{2}}}{2} = b_k^{(2)} - b_{\frac{k}{2}}.$$

Intéressons nous maintenant au coefficient  $a_k'''$  de  $X^2E_2(Y^k)$  dans la relation (4.19). Les seules configurations menant à une  $X^2E_2(Y^k)$ -structure sont dessinées en figure 4.10 c). On a ainsi

$$a_k''' = \sum_{\substack{i+j=k \\ i < j}} b_i b_j + \binom{b_{\frac{k}{2}}}{2} = \frac{1}{2}(b_k^{(2)} - b_{\frac{k}{2}})$$

différents types de  $X^2E_2(Y^k)$ -structures. Il ne reste plus qu'à déterminer la partie asymétrique de l'espèce  $P_4^{\text{bic}}(X, \mathcal{B}(Y))$ , à savoir, le coefficient  $a_k'$  de l'espèce moléculaire  $X^2Y^k$  dans le développement moléculaire (4.19), pour tout  $k$ . Pour l'obtenir, on commence par dériver (combinatoirement) la relation (4.19). Il suffit alors d'identifier le coefficient de  $X^2Y^k$  dans chaque membre de l'égalité obtenue. Durant ce calcul, il est à noter que l'on a utilisé la dérivée partielle combinatoire d'une espèce composée  $F(X, \mathcal{B})$ . En fait, comme en analyse, nous avons

$$(F(X, \mathcal{B}))' = \left. \frac{\partial F(X, Y)}{\partial X} \right|_{Y:=\mathcal{B}} + \left. \frac{\partial F(X, Y)}{\partial Y} \right|_{Y:=\mathcal{B}} \cdot \mathcal{B}', \quad (4.24)$$

et nous pouvons utiliser la proposition 1.5.3. ■

On peut aussi, après avoir dérivé (4.19), obtenir l'expression de  $a_k'''$  en identifiant les coefficients de  $X^2E_2(Y^k)$ . De plus, il est possible de raffiner notre classification par rapport aux symétries, en distinguant selon les symétries de réflexion et celles de rotation. En effet, les symétries qui sont illustrées par la figure 4.10 sont de type rotationnelle pour a), de réflexion verticale pour b), et enfin, de réflexion horizontale pour c).

Nous passons maintenant à la présentation d'une formule d'addition concernant l'espèce  $P_6^{\text{bic}}(X, Y)$ .

**Théorème 4.2.3** *Pour toute espèce asymétrique  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(Y)$  dont le développement moléculaire est donné par*

$$\mathcal{B}(Y) = \sum_{k \geq 0} b_k Y^k,$$

*nous avons*

$$P_6^{\text{bic}}(X, \mathcal{B}(Y)) = \sum_{k \geq 4} d_k' X^3 Y^k + \sum_{k \geq 2} d_k'' X E_2(X Y^k) + \sum_{k \geq 2} d_k''' C_3(X Y^k) + \sum_{k \geq 0} d_k^{iv} P_6^{\text{bic}}(X, Y^k), \quad (4.25)$$

*avec*

$$\begin{aligned} d_k' &= \frac{1}{6} b_k^{(6)} - \frac{1}{2} b_{\frac{k}{2}}^{(3)} + \frac{1}{3} b_{\frac{k}{3}}^{(2)} + \frac{2}{3} b_{\frac{k}{6}}, \\ d_k'' &= b_k^{(3)} - b_{\frac{k}{3}}, \\ d_k''' &= \frac{1}{2} (b_k^{(2)} - b_{\frac{k}{2}}), \\ d_k^{iv} &= b_k, \end{aligned} \quad (4.26)$$

où  $b_k^{(n)}$  représente le coefficient de  $X^k$  dans  $\mathcal{B}^n(Y)$ .

**Preuve.** Une analyse précise des divers types de symétrie pouvant apparaître dans l'espèce  $P_6^{\text{bic}}(X, \mathcal{B})$  nous conduit au développement (4.25). On calcule alors tous les coefficients de ce développement en utilisant la même méthode que pour le théorème précédent relatif à l'espèce  $P_4^{\text{bic}}(X, \mathcal{B})$ . ■

Nous utilisons dans les deux sections suivantes les formules d'addition de cette section dans le cas particulier où  $\mathcal{B}(Y) = B(X)$ , l'espèce liée aux 2-arbres introduites en section 4.1. Prenant en compte la substitution  $\mathcal{B} = B$  dans les deux théorèmes précédents, les coefficients apparaissant dans les développements moléculaires des espèces  $P_4^{\text{bic}}$  et  $P_6^{\text{bic}}$  deviennent simples. En utilisant la proposition 4.1.2, on obtient les formules d'addition suivantes

$$P_4^{\text{bic}}(X, \mathcal{B}(X)) = \sum_{k \geq 1} a'_k X^k + \sum_{k \geq 1} a''_k E_2(X^k) + \sum_{k \geq 1} a'''_k X^2 E_2(X^k) + \sum_{k \geq 0} a_k^{iv} P_4^{\text{bic}}(X, X^k), \quad (4.27)$$

et

$$P_6^{\text{bic}}(X, \mathcal{B}) = \sum_{k \geq 4} d'_k X^k + \sum_{k \geq 2} d''_k X E_2(X^k) + \sum_{k \geq 2} d'''_k C_3(X^k) + \sum_{k \geq 0} d_k^{iv} P_6^{\text{bic}}(X, X^k), \quad (4.28)$$

où

$$\begin{aligned} a'_k &= \frac{1}{4} \mathbf{c}_{k+1} - \frac{1}{2} \mathbf{c}_k - \frac{3}{4} \mathbf{c}_{\frac{k}{2}} + \frac{1}{2} \mathbf{c}_{\frac{k-2}{4}}, \\ a''_k &= \mathbf{c}_k - \mathbf{c}_{\frac{k-1}{2}}, \\ a'''_k &= \frac{1}{2} (\mathbf{c}_{k+1} - \mathbf{c}_{\frac{k}{2}}), \\ a_k^{iv} &= \mathbf{c}_k, \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} d'_k &= \frac{1}{6} \mathbf{c}_{k+2} - \frac{2}{3} \mathbf{c}_{k+1} + \frac{1}{2} \mathbf{c}_k - \frac{1}{2} \mathbf{c}_{\frac{k+1}{2}} + \frac{1}{2} \mathbf{c}_{\frac{k-1}{2}} - \frac{1}{6} \mathbf{c}_{\frac{k}{3}} + \frac{1}{2} \mathbf{c}_{\frac{k-3}{6}}, \\ d''_k &= \mathbf{c}_{k+1} - \mathbf{c}_k - \mathbf{c}_{\frac{k-1}{3}}, \\ d'''_k &= \frac{1}{2} (\mathbf{c}_k - \mathbf{c}_{\frac{k-1}{2}}), \\ d_k^{iv} &= \mathbf{c}_k. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Forts de ces quatre formules d'addition, nous sommes à présent capables de donner les développements moléculaires des espèces  $\mathcal{A}_\pi$ , des 2-arbres exterplans et  $\mathcal{A}_p$ , des 2-arbres exterplanaires.

### 4.3 Développement moléculaire des 2-arbres exterplans et exterplanaires

Dans cette partie, nous allons utiliser le théorème de dissymétrie ainsi que les formules d'addition de la section précédente pour obtenir une forme explicite du développement moléculaire des espèces des 2-arbres exterplans et exterplanaires.

#### 4.3.1 Classification des 2-arbres exterplans

Avant de débiter nos calculs, nous rappelons qu'un 2-arbre exterplan est un 2-arbre plongé dans le plan de sorte que toutes les faces internes soient des triangles. De plus, le théorème de dissymétrie permet d'exprimer l'espèce  $a_\pi$  en fonction des espèces pointées  $a_\pi^-$ ,  $a_\pi^\Delta$ , et  $a_\pi^{\hat{\Delta}}$ , de la façon suivante :

$$a_\pi = a_\pi^- + a_\pi^\Delta - a_\pi^{\hat{\Delta}}. \quad (4.31)$$

En utilisant l'orientation du plan, on obtient une caractérisation des espèces  $a_\pi^-$ ,  $a_\pi^\Delta$ , et  $a_\pi^{\hat{\Delta}}$ , à l'aide d'expressions en fonction de  $B$ . La démonstration de ces relations étant immédiate, on se contente ici de les illustrer avec la figure 4.11.

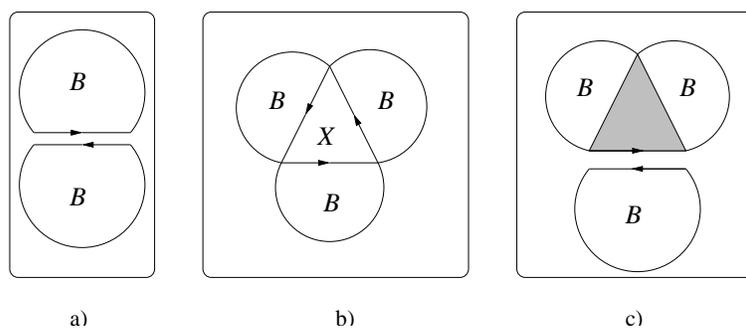
**Théorème 4.3.1** *Les espèces pointées apparaissant dans le théorème de dissymétrie satisfont les équations fonctionnelles suivantes :*

$$a_\pi^- = E_2(B), \quad (4.32)$$

$$a_\pi^\Delta = XC_3(B), \quad (4.33)$$

$$a_\pi^{\hat{\Delta}} = B_+ \cdot B, \quad (4.34)$$

où  $B_+ = B - 1$ . □



**Figure 4.11** Les espèces  $E_2(B)$ ,  $XC_3(B)$  et  $B_+ \cdot B$

Combinant les relations (4.32), (4.33), (4.34), le théorème de dissymétrie (4.31) et les formules d'addition pour les espèces  $E_2(B)$  et  $C_3(B)$  de la section 4.2, on calcule aisément le développement moléculaire de l'espèce  $a_\pi$  des 2-arbres exterplans.

**Théorème 4.3.2** *Le développement moléculaire de l'espèce  $a_\pi$  des 2-arbres exterplans est donné par*

$$a_\pi = a_\pi(X) = 1 + X + \sum_{k \geq 2} b_k X^k + \sum_{k \geq 1} c_k E_2(X^k) + \sum_{k \geq 1} d_k X C_3(X^k), \quad (4.35)$$

avec

$$b_k = \frac{2}{3} \mathbf{c}_k - \frac{1}{6} \mathbf{c}_{k+1} - \frac{1}{2} \mathbf{c}_{\frac{k}{2}} - \frac{1}{3} \mathbf{c}_{\frac{k-1}{3}}, \quad (4.36)$$

$$c_k = d_k = \mathbf{c}_k, \quad (4.37)$$

où  $X^k$  représente l'espèce des listes de taille  $k$  de triangles et  $\mathbf{c}_k$  désigne les nombres de Catalan avec la convention que  $\mathbf{c}_r = 0$  si  $r$  n'est pas un entier; voir (4.9).  $\square$

Pour conclure cette partie, nous donnons la partie asymétrique de l'espèce  $a_\pi$  (voir Chapitre 1, et (Labelle, G., 89-1)) :

$$\bar{a}_\pi(X) = 1 + X + \sum_{k \geq 2} b_k X^k, \quad (4.38)$$

où  $b_k$ , pour  $k \in \mathbb{N}$ , est donné par la formule (4.36). Noter que l'espèce asymétrique  $\bar{a}_\pi$  ne doit pas être confondue avec l'espèce pointée  $a_\pi^-$ .

### 4.3.2 Classification des 2-arbres exterplanaires

Cette partie est consacrée à l'obtention du développement moléculaire de l'espèce  $a_p$  des 2-arbres exterplanaires, à savoir l'espèce des 2-arbres admettant un plongement dans le plan de telle sorte que toutes les faces internes soient des triangles. La différence avec les 2-arbres exterplans réside dans le fait que ces plongements ne sont pas explicitement donnés et que les symétries de réflexion sont autorisées. En d'autres termes, les 2-arbres exterplanaires sont considérés comme des graphes simples. Dans le cas exterplanaire, le théorème de dissymétrie conduit à la relation suivante au niveau des espèces :

$$a_p = a_p^- + a_p^\Delta - a_p^{\Delta\Delta}. \quad (4.39)$$

On caractérise alors les espèces  $a_p^-$ ,  $a_p^\Delta$  et  $a_p^{\Delta\Delta}$  avec des équations fonctionnelles en termes des espèces auxiliaires  $P_4^{\text{bic}}(X, Y)$  et  $P_6^{\text{bic}}(X, Y)$ , introduites au chapitre premier, et de l'espèce fondamentale  $B$ .

**Théorème 4.3.3** *Les espèces pointées  $a_p^-$ ,  $a_p^\Delta$  et  $a_p^{\Delta\Delta}$  satisfont les isomorphismes d'espèces suivants :*

$$a_p^-(X) = 1 + X E_2(B) + P_4^{\text{bic}}(X, Y)|_{Y:=B}, \quad (4.40)$$

$$a_p^\Delta(X) = X + X^2 E_2(B) + X E_2(B_+) + X P_6^{\text{bic}}(X, Y)|_{Y:=B}, \quad (4.41)$$

$$a_p^{\Delta\Delta}(X) = X E_2(B) + X^2 E_2(B^2). \quad (4.42)$$

**Preuve.** On établit les identités (4.40) et (4.42) en analysant les structures en fonction du degré de l'arête pointée, à savoir le nombre de triangles qui lui sont attachés. Par exemple, les trois termes du membre de droite de la relation (4.40) correspondent aux degrés 0, 1 et 2, degré maximal que peut avoir une arête d'un 2-arbre extérieurement planaire. On établit un isomorphisme entre les deux membres de (4.40); celui-ci est illustré en figure 4.12. De la même manière, les quatre termes de (4.41), décrivent les quatre

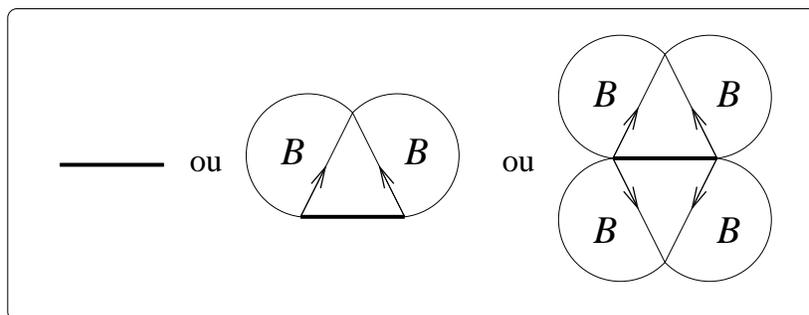


Figure 4.12 L'espèce  $a_p^-$

possibilités pour le nombre d'arêtes de degré deux du triangle racine, de 0 à 3; voir la figure 4.13. Finalement, la même méthode permet d'établir l'équation fonctionnelle

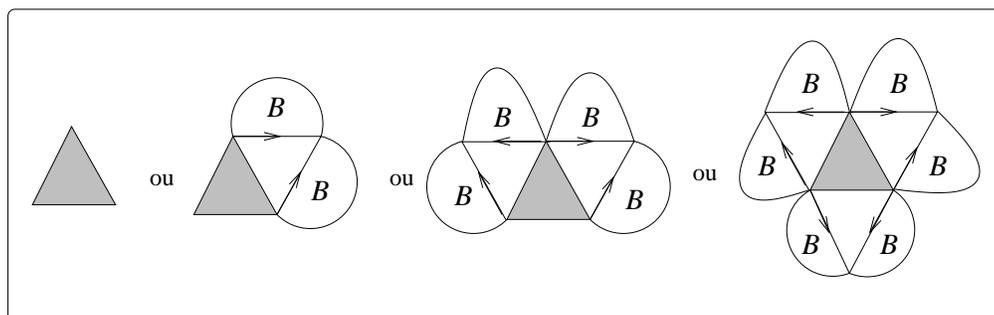


Figure 4.13 L'espèce  $a_p^\Delta$

(4.42) et la figure 4.14 illustre la démarche. ■

Ainsi, à l'aide des relations (4.40), (4.41) et (4.42), il devient facile, via l'utilisation des formules d'addition relatives aux espèces  $P_4^{\text{bic}}(X, B)$ ,  $P_6^{\text{bic}}(X, B)$ ,  $E_2(B)$  et  $C_3(B)$ , ainsi que de la proposition 6.3.1, d'obtenir les développements moléculaires des espèces  $a_p^-$  et  $a^\Delta$ . Dans les quatre théorèmes suivants, la même notation est utilisée pour les divers coefficients apparaissant dans les développements.

**Théorème 4.3.4** *Le développement moléculaire de l'espèce  $a_p^-$ , des 2-arbres extérieurement planaires pointés en une arête, est donné par*

$$a_p^-(X) = 1 + \sum_{k \geq 0} a_k^1 X^k + \sum_{k \geq 1} a_k^2 E_2(X^k) + \sum_{k \geq 1} a_k^3 X E_2(X^k)$$

$$+ \sum_{k \geq 1} a_k^4 X^2 E_2(X^k) + \sum_{k \geq 1} a_k^5 P_4^{\text{bic}}(X, X^k), \quad (4.43)$$

où

$$\begin{aligned} a_k^1 &= \frac{1}{4} \mathbf{c}_{k+1} - \frac{3}{4} \mathbf{c}_{\frac{k}{2}} - \frac{1}{2} \mathbf{c}_{\frac{k-1}{2}} + \frac{1}{2} \mathbf{c}_{\frac{k-2}{4}}, \\ a_k^2 &= \mathbf{c}_k - \mathbf{c}_{\frac{k-1}{2}}, \\ a_k^3 &= a_k^5 = \mathbf{c}_k, \\ a_k^4 &= \frac{1}{2} (\mathbf{c}_{k+1} - \mathbf{c}_{\frac{k}{2}}). \end{aligned} \quad (4.44)$$

□

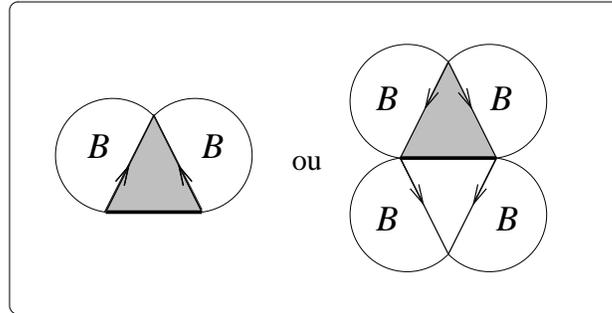
**Théorème 4.3.5** *Le développement moléculaire de l'espèce  $a_p^\Delta$ , des 2-arbres extérieurement planaires pointés en un triangle, est donné par*

$$\begin{aligned} a_p^\Delta(X) &= 1 + \sum_{k \geq 0} a_k^1 X^k + \sum_{k \geq 1} a_k^2 X E_2(X^k) + \sum_{k \geq 2} a_k^3 X^2 E_2(X^k) \\ &\quad + \sum_{k \geq 2} a_k^4 X C_3(X^k) + \sum_{k \geq 2} a_k^5 X P_6^{\text{bic}}(X, X^k), \end{aligned} \quad (4.45)$$

où

$$\begin{aligned} a_k^1 &= \frac{1}{6} (\mathbf{c}_{k+1} - \mathbf{c}_k) - \frac{1}{2} \mathbf{c}_{\frac{k}{2}} - \mathbf{c}_{\frac{k-2}{2}} - \frac{1}{2} \mathbf{c}_{\frac{k-1}{2}} - \frac{1}{6} \mathbf{c}_{\frac{k-1}{3}} + \frac{1}{2} \mathbf{c}_{\frac{k-4}{6}}, \\ a_k^2 &= a_k^5 = \mathbf{c}_k, \\ a_k^3 &= \mathbf{c}_{k+1} - \mathbf{c}_{\frac{k-1}{3}}, \\ a_k^4 &= \frac{1}{2} (\mathbf{c}_k - \mathbf{c}_{\frac{k-1}{2}}). \end{aligned} \quad (4.46)$$

□



**Figure 4.14** L'espèce  $a_p^\Delta$

Pour obtenir le développement moléculaire de l'espèce  $a_p^{\Delta}$ , il suffit d'utiliser les propositions 4.1.2 et 4.2.1

**Théorème 4.3.6** *Le développement moléculaire de l'espèce  $a_p^{\Delta}$ , des 2-arbres extérieurement planaires pointés en un triangle possédant une arête distinguée, est donné par :*

$$a_p^{\Delta}(X) = \sum_{k \geq 0} a_k^1 X^k + \sum_{k \geq 1} a_k^2 X E_2(X^k) + \sum_{k \geq 1} a_k^3 X^2 E_2(X^k), \quad (4.47)$$

où

$$\begin{aligned} a_k^1 &= \frac{1}{2}(\mathbf{c}_{k+1} - \mathbf{c}_k - \mathbf{c}_{\frac{k-1}{2}} - \mathbf{c}_{\frac{k}{2}}), \\ a_k^2 &= \mathbf{c}_k, \\ a_k^3 &= \mathbf{c}_{k+1}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

□

Le théorème de dissymétrie permet alors de combiner les relations (4.43)-(4.45)-(4.47) et mène au développement moléculaire explicite de l'espèce  $a_p$ , des 2-arbres extérieurement planaires, résultat final de cette section.

**Théorème 4.3.7** *L'espèce  $a_p$  des 2-arbres extérieurement planaires possède le développement moléculaire suivant*

$$\begin{aligned} a_p(X) &= 1 + \sum_{k \geq 1} a_k^1 X^k + \sum_{k \geq 1} a_k^2 E_2(X^k) + \sum_{k \geq 1} a_k^3 X E_2(X^k) \\ &\quad + \sum_{k \geq 2} a_k^4 X^2 E_2(X^k) + \sum_{k \geq 2} a_k^5 X C_3(X^k) \\ &\quad + \sum_{k \geq 0} a_k^6 P_4^{\text{bic}}(X, X^k) + \sum_{k \geq 0} a_k^7 X P_6^{\text{bic}}(X, X^k), \end{aligned} \quad (4.49)$$

où

$$\begin{aligned} a_k^1 &= -\frac{1}{12}\mathbf{c}_{k+1} + \frac{1}{3}\mathbf{c}_k - \frac{3}{4}\mathbf{c}_{\frac{k}{2}} - \frac{1}{2}\mathbf{c}_{\frac{k-1}{2}} - \frac{1}{6}\mathbf{c}_{\frac{k-1}{3}} + \frac{1}{2}\mathbf{c}_{\frac{k-2}{4}} + \frac{1}{2}\mathbf{c}_{\frac{k-4}{6}}, \\ a_k^2 &= \mathbf{c}_k - \mathbf{c}_{\frac{k-1}{2}}, \\ a_k^3 &= a_k^6 = a_k^7 = \mathbf{c}_k, \\ a_k^4 &= \frac{1}{2}(\mathbf{c}_{k+1} - \mathbf{c}_{\frac{k}{2}}) - \mathbf{c}_{\frac{k-1}{3}}, \\ a_k^5 &= \frac{1}{2}(\mathbf{c}_k - \mathbf{c}_{\frac{k-1}{2}}). \end{aligned} \quad (4.50)$$

□

#### 4.4 Formules d'énumération

Dans cette partie, nous établissons des formules explicites pour l'énumération des 2-arbres exterplans ainsi qu'exterplanaires dans les cas étiqueté, non étiqueté et non étiqueté asymétrique. Nous donnons également des formules explicites pour toutes les séries que l'on a introduites dans le chapitre premier, notamment pour les séries indicatrices de cycles et d'asymétrie. Nous utilisons ici les équations fonctionnelles que nous avons établies dans la section précédente. Cependant, dans la section suivante, nous proposons une autre méthode d'énumération, inspirée des travaux de (Palmer et Read, 73). On commence par le cas exterplan, le cas exterplanaire suit.

##### 4.4.1 Énumération des 2-arbres exterplans

Avant d'explicitier les formules énumératoires des 2-arbres exterplans, on rappelle quelques formules relatives aux séries indicatrices de cycles et d'asymétrie des espèces  $E_2$ , des ensembles de cardinal deux, et  $C_3$ , des cycles (orientés) de longueur trois :

$$Z_{E_2}(x_1, x_2, \dots) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2), \quad \Gamma_{E_2}(x_1, x_2, \dots) = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2), \quad (4.51)$$

$$Z_{C_3}(x_1, x_2, \dots) = \frac{1}{3}(x_1^3 + 2x_3), \quad \Gamma_{C_3}(x_1, x_2, \dots) = \frac{1}{3}(x_1^3 - x_3). \quad (4.52)$$

Nous faisons également usage des formules de substitution générale de la théorie des espèces, ainsi que de la série indicatrice d'asymétrie translatée (voir chapitre 2). Nous n'utilisons cependant que les formules suivantes, que l'on peut aussi établir via des formules d'addition : si  $G$  est une espèce telle que  $G(0) = g_0 \neq 0$ , nous avons

$$\Gamma_{E_2(G)}(x_1, x_2, \dots) = g_0 + \frac{1}{2}(\Gamma_G^2(x_1, x_2, \dots) - \Gamma_G(x_2, x_4, \dots)), \quad (4.53)$$

$$\Gamma_{C_3(G)}(x_1, x_2, \dots) = g_0 + \frac{1}{3}(\Gamma_G^3(x_1, x_2, \dots) - \Gamma_G(x_3, x_6, \dots)). \quad (4.54)$$

Nous passons maintenant aux formules énumératives concernant les 2-arbres exterplans. Ces formules proviennent directement de la décomposition moléculaire de l'espèce  $\mathbf{a}_\pi$  donnée dans la section précédente.

**Théorème 4.4.1** *Les nombres  $a_{\pi,n}$ ,  $\tilde{a}_{\pi,n}$  et  $\bar{a}_{\pi,n}$  de 2-arbres exterplans respectivement étiquetés, non étiquetés et non étiquetés asymétriques sur  $n$  triangles,  $n \geq 2$ , sont donnés par*

$$a_{\pi,n} = n! \left( \frac{2}{3} \mathbf{c}_n - \frac{1}{6} \mathbf{c}_{n+1} \right), \quad (4.55)$$

$$\tilde{a}_{\pi,n} = \frac{2}{3} \mathbf{c}_n - \frac{1}{6} \mathbf{c}_{n+1} + \frac{1}{2} \mathbf{c}_{\frac{n}{2}} + \frac{2}{3} \mathbf{c}_{\frac{n-1}{3}}, \quad (4.56)$$

$$\bar{a}_{\pi,n} = \frac{2}{3} \mathbf{c}_n - \frac{1}{6} \mathbf{c}_{n+1} - \frac{1}{2} \mathbf{c}_{\frac{n}{3}} - \frac{1}{3} \mathbf{c}_{\frac{n-1}{3}}. \quad (4.57)$$

□

On peut également obtenir ces formules en écrivant explicitement les séries génératrices et indicatrices à partir des relations (4.32)–(4.34) : la série génératrice exponentielle des structures étiquetées,

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_\pi^-(x) &= \frac{1}{2}(1 + B^2(x)), \\ \mathbf{a}_\pi^\Delta(x) &= \frac{x}{3}(2 + B^3(x)), \\ \mathbf{a}_\pi^\Delta(x) &= B^2(x) - B(x), \end{aligned} \quad (4.58)$$

la série génératrice tilde des structures non étiquetées,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{a}}_\pi^-(x) &= \frac{1}{2}(B^2(x) + B(x^2)), \\ \tilde{\mathbf{a}}_\pi^\Delta(x) &= \frac{x}{3}(B^3(x) + 2B(x^3)), \\ \tilde{\mathbf{a}}_\pi^\Delta(x) &= B^2(x) - B(x), \end{aligned} \quad (4.59)$$

la série indicatrice de cycles,

$$\begin{aligned} Z_{\mathbf{a}_\pi^-}(x_1, x_2, \dots) &= \frac{1}{2}(B^2(x_1) + B(x_2)), \\ Z_{\mathbf{a}_\pi^\Delta}(x_1, x_2, \dots) &= \frac{x_1}{3}(B^3(x_1) + 2B(x_3)), \\ Z_{\mathbf{a}_\pi^\Delta}(x_1, x_2, \dots) &= B^2(x_1) - B(x_1), \end{aligned} \quad (4.60)$$

et la série indicatrice d'asymétrie,

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathbf{a}_\pi^-}(x_1, x_2, \dots) &= 1 + \frac{1}{2}(B^2(x_1) - B(x_2)), \\ \Gamma_{\mathbf{a}_\pi^\Delta}(x_1, x_2, \dots) &= x_1 + \frac{x_1}{3}(B^3(x_1) - B(x_3)), \\ \Gamma_{\mathbf{a}_\pi^\Delta}(x_1, x_2, \dots) &= B^2(x_1) - B(x_1). \end{aligned} \quad (4.61)$$

Nous rappelons que nous avons utilisé le fait que l'espèce  $B$  est asymétrique et qu'ainsi

$$B(x) = \tilde{B}(x) = \overline{B}(x) \quad \text{et} \quad Z_B(x_1, x_2, \dots) = B(x_1) = \Gamma_B(x_1, x_2, \dots). \quad (4.62)$$

On déduit alors les expressions des diverses séries formelles associées à l'espèce  $\mathbf{a}_\pi$  grâce au théorème de dissymétrie.

**Proposition 4.4.2** *Les séries associées à l'espèce  $\mathbf{a}_\pi$  des 2-arbres extérplans sont données par*

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_\pi(x) &= \frac{1}{2} + \frac{2}{3}x + B(x) - \frac{1}{2}B^2(x) + \frac{x}{3}B^3(x), \\ \tilde{\mathbf{a}}_\pi(x) &= 1 + x + B(x) + \frac{x}{3}B^3(x) - \frac{1}{2}B(x^2) - \frac{x}{3}B(x^3) - \frac{1}{2}B^2(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{a}_\pi(x) &= B(x) + \frac{x}{3}B^3(x) - B(x^2) - B(x^3) - \frac{1}{2}B^2(x), & (4.63) \\
Z\mathbf{a}_\pi(x_1, x_2, \dots) &= B(x_1) + \frac{1}{2}B(x_2) + \frac{2}{3}x_1B(x_3) - \frac{1}{2}B^2(x_1) + \frac{x_1}{3}B^3(x_1), \\
\Gamma\mathbf{a}_\pi(x_1, x_2, \dots) &= 1 + x_1 + B(x_1) + \frac{x_1}{3}B^3(x_1) - \frac{1}{2}B(x_2) - \frac{x_1}{3}B(x_3) \\
&\quad - \frac{1}{2}B^2(x_1).
\end{aligned}$$

□

On peut alors retrouver les formules (4.56) en utilisant le théorème de dissymétrie et la proposition suivante, donnant des formules explicites pour les coefficients des séries données par les relations (4.58), (4.59) et (4.61).

**Proposition 4.4.3** *Les coefficients  $a_{\pi,n}^-$ ,  $a_{\pi,n}^\Delta$ ,  $a_{\pi,n}^{\hat{\Delta}}$ , donnant les nombres de structures étiquetées sur  $n$  triangles pour les divers pointages,  $\tilde{a}_{\pi,n}^-$ ,  $\tilde{a}_{\pi,n}^\Delta$ ,  $\tilde{a}_{\pi,n}^{\hat{\Delta}}$ , pour le nombre de structures non étiquetées, et  $\bar{a}_{\pi,n}^-$ ,  $\bar{a}_{\pi,n}^\Delta$ ,  $\bar{a}_{\pi,n}^{\hat{\Delta}}$ , pour les structures non étiquetées asymétriques possèdent les expressions suivantes :*

$$\begin{aligned}
a_{\pi,n}^- &= \frac{n!}{2}\mathbf{c}_{n+1}, \\
a_{\pi,n}^\Delta &= \frac{n!}{3}(\mathbf{c}_{n+1} - \mathbf{c}_n), & (4.64) \\
a_{\pi,n}^{\hat{\Delta}} &= n!(\mathbf{c}_{n+1} - \mathbf{c}_n),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_{\pi,n}^- &= \frac{1}{2}(\mathbf{c}_{n+1} + \mathbf{c}_{\frac{n}{2}}), \\
\tilde{a}_{\pi,n}^\Delta &= \frac{1}{3}(\mathbf{c}_{n+1} - \mathbf{c}_n + 2\mathbf{c}_{\frac{n-1}{3}}), & (4.65) \\
\tilde{a}_{\pi,n}^{\hat{\Delta}} &= \mathbf{c}_{n+1} - \mathbf{c}_n,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\bar{a}_{\pi,n}^- &= \frac{1}{2}(\mathbf{c}_{n+1} - \mathbf{c}_{\frac{n}{2}}), \\
\bar{a}_{\pi,n}^\Delta &= \frac{1}{3}(\mathbf{c}_{n+1} - \mathbf{c}_n - \mathbf{c}_{\frac{n-1}{3}}), & (4.66) \\
\bar{a}_{\pi,n}^{\hat{\Delta}} &= \mathbf{c}_{n+1} - \mathbf{c}_n.
\end{aligned}$$

□

Pour les expressions des séries indicatrices de cycles et d'asymétrie de l'espèce  $\mathbf{a}_\pi$ , nous avons :

**Proposition 4.4.4** *Les séries indicatrices de cycles,  $Z_{\mathbf{a}_\pi}$ , et d'asymétrie,  $\Gamma_{\mathbf{a}_\pi}$ , de l'espèce des 2-arbres exterplans sont données par*

$$Z_{\mathbf{a}_\pi}(x_1, x_2, \dots) = 1 + \sum_{n \geq 1} \left( \frac{2}{3} \mathbf{c}_n - \frac{1}{6} \mathbf{c}_{n+1} \right) x_1^n + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \mathbf{c}_n x_2^n + \frac{2}{3} x_1 \sum_{n \geq 0} \mathbf{c}_n x_3^n, \quad (4.67)$$

$$\Gamma_{\mathbf{a}_\pi}(x_1, x_2, \dots) = 1 + x_1 + \sum_{n \geq 1} \left( \frac{2}{3} \mathbf{c}_n - \frac{1}{6} \mathbf{c}_{n+1} \right) x_1^n - \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \mathbf{c}_n x_2^n - \frac{1}{3} x_1 \sum_{n \geq 0} \mathbf{c}_n x_3^n. \quad (4.68)$$

**Preuve.** On commence par écrire les séries indicatrices de cycles données par les relations (4.60),

$$\begin{aligned} Z_{\mathbf{a}_\pi^-}(x_1, x_2, \dots) &= \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} \mathbf{c}_{n+1} x_1^n + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} \mathbf{c}_n x_2^n, \\ Z_{\mathbf{a}_\pi^\Delta}(x_1, x_2, \dots) &= \frac{1}{3} \sum_{n \geq 1} (\mathbf{c}_{n+1} - \mathbf{c}_n) x_1^n + \frac{2}{3} x_1 \sum_{n \geq 0} \mathbf{c}_n x_3^n, \\ Z_{\mathbf{a}_\pi^\hat{\Delta}}(x_1, x_2, \dots) &= \sum_{n \geq 1} (\mathbf{c}_{n+1} - \mathbf{c}_n) x_1^n, \end{aligned} \quad (4.69)$$

et les séries indicatrices d'asymétrie,

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathbf{a}_\pi^-}(x_1, x_2, \dots) &= 1 + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} \mathbf{c}_{n+1} x_1^n - \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} \mathbf{c}_n x_2^n, \\ \Gamma_{\mathbf{a}_\pi^\Delta}(x_1, x_2, \dots) &= x_1 + \frac{1}{3} \sum_{n \geq 1} (\mathbf{c}_{n+1} - \mathbf{c}_n) x_1^n - \frac{1}{3} x_1 \sum_{n \geq 0} \mathbf{c}_n x_3^n, \\ \Gamma_{\mathbf{a}_\pi^\hat{\Delta}}(x_1, x_2, \dots) &= \sum_{n \geq 1} (\mathbf{c}_{n+1} - \mathbf{c}_n) x_1^n. \end{aligned} \quad (4.70)$$

On termine la preuve en utilisant le théorème de dissymétrie ■

#### 4.4.2 Énumération des 2-arbres exterplanaires

Nous nous attachons désormais à donner toutes les séries associées aux espèces  $\mathbf{a}_\pi^-$ ,  $\mathbf{a}_\pi^\Delta$  et  $\mathbf{a}_\pi^\hat{\Delta}$  en utilisant les lois de substitution de la théorie des espèces. On obtient par extraction tous les coefficients apparaissant dans ces séries. Enfin, le théorème de dissymétrie nous permet d'obtenir les nombres de 2-arbres exterplans étiquetés, non étiquetés, non étiquetés asymétriques sur  $n$  triangles, ainsi que les coefficients des séries indicatrices de cycles et d'asymétrie.

**Proposition 4.4.5** *Les séries génératrices exponentielles des espèces  $a_p^-$ ,  $a_p^\Delta$  et  $a_p^{\hat{\Delta}}$  sont données, en terme de l'espèce  $B$ , par*

$$\begin{aligned} a_p^-(x) &= 1 + \frac{x}{2}(1 + B^2(x)) + \frac{1}{4}x^2B^4(x), \\ a_p^\Delta(x) &= x + \frac{x^2}{2}(1 + B^2(x)) + \frac{x}{2}B_+^2(x) + \frac{x^4}{6}B^6(x), \\ a_p^{\hat{\Delta}}(x) &= \frac{x}{2}(1 + B^2(x)) + \frac{x^2}{2}(1 + B^4(x)). \end{aligned} \quad (4.71)$$

De plus, les séries génératrices tildes de ces espèces sont données par

$$\begin{aligned} \tilde{a}_p^-(x) &= 1 + xB(x) + \frac{x}{2}(B^2(x) + B(x^2)) + \frac{x^2}{4}(B^4(x) + 3B^2(x^2)), \\ \tilde{a}_p^\Delta(x) &= x + \frac{x^2}{2}(B^2(x) + B(x^2)) + \frac{x}{2}(B_+^2(x) + B_+(x^2)) \\ &\quad + \frac{x^4}{6}(B^6(x) + 2B^2(x^3) + 3B^3(x^2)), \\ \tilde{a}_p^{\hat{\Delta}}(x) &= \frac{x}{2}(B^2(x) + B(x^2)) + \frac{x^2}{2}(B^4(x) + B^2(x^2)). \end{aligned} \quad (4.72)$$

□

**Corollaire 4.4.6** *Les séries exponentielles et tildes de l'espèce des 2-arbres exterplanaires sont données par*

$$\begin{aligned} a_p(x) &= 1 + x + \frac{x}{2}B_+^2(x) + \frac{x^2}{2}B^2(x) - \frac{x^2}{4}B^4(x) - \frac{x^4}{6}B^6(x), \\ \tilde{a}_p(x) &= 1 + x + \frac{x}{2}(B_+^2(x) + B_+(x^2)) + \frac{x^2}{2}B(x^2) + \frac{x^2}{2}(B^2(x) - B^2(x^2)) \\ &\quad - \frac{x^2}{4}B^4(x) + \frac{x^4}{6}(B^6(x) + 2B^2(x^3) + 3B^3(x^2)). \end{aligned} \quad (4.73)$$

□

En extrayant les coefficients des séries données à la proposition 4.4.5, combiné avec les résultats de la proposition 4.1.2, on obtient facilement le corollaire suivant.

**Corollaire 4.4.7** *Les nombres  $a_{p,n}^-$ ,  $a_{p,n}^\Delta$  et  $a_{p,n}^{\hat{\Delta}}$  de 2-arbres exterplanaires étiquetés sur  $n$  triangles pointés respectivement en une arête, en un triangle et en un triangle possédant lui-même une de ses arêtes distinguée, sont donnés par*

$$\begin{aligned} a_{p,n}^- &= \frac{n!}{4}\mathbf{c}_{n+1}, \\ a_{p,n}^\Delta &= \frac{n!}{6}(\mathbf{c}_{n+1} - \mathbf{c}_n), \\ a_{p,n}^{\hat{\Delta}} &= \frac{n!}{2}(\mathbf{c}_{n+1} - \mathbf{c}_n). \end{aligned} \quad (4.74)$$

De plus, pour les mêmes espèces pointées, les nombres de structures sur  $n$  triangles non étiquetées,  $\tilde{a}_{p,n}^-$ ,  $\tilde{a}_{p,n}^\Delta$  et  $\bar{a}_{p,n}^\Delta$ , sont donnés par

$$\begin{aligned}\tilde{a}_{p,n}^- &= \frac{1}{4}\mathbf{c}_{n+1} + \frac{1}{2}\mathbf{c}_{\frac{n-1}{2}} + \frac{3}{4}\mathbf{c}_{\frac{n}{2}}, \\ \tilde{a}_{p,1}^\Delta &= 1, \tilde{a}_{p,2}^\Delta = 1, \tilde{a}_{p,3}^\Delta = 2, \tilde{a}_{p,4}^\Delta = 6, \\ \tilde{a}_{p,n}^\Delta &= \frac{1}{6}(\mathbf{c}_{n+1} - \mathbf{c}_n) + \frac{1}{2}(\mathbf{c}_{\frac{n-1}{2}} + \mathbf{c}_{\frac{n}{2}}) + \frac{1}{3}\mathbf{c}_{\frac{n-1}{3}}, \quad n \geq 5 \\ \bar{a}_{p,n}^\Delta &= \frac{1}{2}(\mathbf{c}_{n+1} - \mathbf{c}_n) + \mathbf{c}_{\frac{n-1}{2}} + \mathbf{c}_{\frac{n}{2}}.\end{aligned}\tag{4.75}$$

□

Alors, l'utilisation du théorème de dissymétrie conduit de façon directe à des formules d'énumération pour les 2-arbres exterplanaires étiquetés et non étiquetés comme suit. Dans le cas de l'énumération des structures asymétriques non étiquetées, on utilise la décomposition moléculaire de l'espèce  $\mathbf{a}_p$ .

**Théorème 4.4.8** *Les nombres  $a_{p,n}$ ,  $\tilde{a}_{p,n}$  et  $\bar{a}_{p,n}$ , de 2-arbres exterplanaires respectivement étiquetés, non étiquetés et non étiquetés asymétriques sur  $n$  triangles possèdent les expressions suivantes :*

$$\begin{aligned}a_{p,n} &= n! \left( \frac{1}{3}\mathbf{c}_n - \frac{1}{12}\mathbf{c}_{n+1} \right), \\ \tilde{a}_{p,n} &= \frac{1}{3}\mathbf{c}_n - \frac{1}{12}\mathbf{c}_{n+1} + \frac{1}{2}\mathbf{c}_{\frac{n-1}{2}} + \frac{1}{3}\mathbf{c}_{\frac{n-1}{3}} + \frac{3}{4}\mathbf{c}_{\frac{n}{2}}, \\ \bar{a}_{p,n} &= -\frac{1}{12}\mathbf{c}_{n+1} + \frac{1}{3}\mathbf{c}_n - \frac{3}{4}\mathbf{c}_{\frac{n}{2}} - \frac{1}{2}\mathbf{c}_{\frac{n-1}{2}} - \frac{1}{6}\mathbf{c}_{\frac{n-1}{3}} + \frac{1}{2}\mathbf{c}_{\frac{n-2}{4}} + \frac{1}{2}\mathbf{c}_{\frac{n-4}{6}}.\end{aligned}\tag{4.76}$$

□

Nous terminons cette section en donnant l'expression de la série indicatrice d'asymétrie de l'espèce  $\mathbf{a}_p$  qui s'obtient directement du développement moléculaire de l'espèce  $\mathbf{a}_p$ .

**Proposition 4.4.9** *La série indicatrice d'asymétrie de l'espèce  $\mathbf{a}_p$ , des 2-arbres exterplanaires, est donnée par*

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mathbf{a}_p}(x_1, x_2, \dots) &= 1 + x_1 + \sum_n \gamma_n^1 x_1^n + \sum_n \gamma_n^2 x_2^n + \sum_n \gamma_n^3 x_1 x_2^n + \sum_n \gamma_n^4 x_1^2 x_2^n + \\ &\quad + \sum_n \gamma_n^5 x_1 x_3^n + \sum_n \gamma_n^6 x_2 x_4^n + \sum_n \gamma_n^7 x_1 x_3 x_6^n,\end{aligned}\tag{4.77}$$

où

$$\begin{aligned}\gamma_n^1 &= -\frac{1}{12}\mathbf{c}_{n+1} + \frac{1}{3}\mathbf{c}_n, \\ \gamma_n^2 &= \gamma_n^3 = -\frac{1}{2}\mathbf{c}_n,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_n^4 &= -\frac{1}{4}\mathbf{c}_{n+1}, \\
\gamma_n^5 &= -\frac{1}{6}\mathbf{c}_n, \\
\gamma_n^6 &= \gamma_n^7 = \frac{1}{2}\mathbf{c}_n.
\end{aligned} \tag{4.78}$$

□

### 4.4.3 Une autre méthode d'énumération non étiquetée

Dans cette section, nous présentons une autre méthode relative à l'énumération non étiquetée des 2-arbres exterplans et exterplanaires. Cette approche alternative a été introduite dans (Palmer et Read, 73). Celle-ci consiste à remarquer d'abord que, pour chaque espèce  $F$  quelconque, il est toujours possible d'écrire

$$F = \sum_{k \geq 1} F_{(k)}, \tag{4.79}$$

où, pour tout  $k \geq 1$ ,  $F_{(k)}$  désigne la *partie symétrique* de  $F$  d'ordre  $k$ , à savoir, la sous-espèce de  $F$  dont les structures possèdent un stabilisateur d'ordre exactement  $k$ . En particulier, nous avons  $F_{(1)} = \overline{F}$ , la partie asymétrique de l'espèce  $F$ . Il est important de remarquer que si l'on note  $G = F_{(k)}$ ,  $k \geq 1$ , on a  $G(x) = \frac{1}{k}\tilde{G}(x)$ , puisque chaque structure de l'espèce  $F_{(k)}$  sur  $n$  éléments peut être étiquetée de  $n!/k$  façons. Ainsi,

$$\tilde{F}(x) = F(x) + \sum_{k \geq 2} \frac{k-1}{k} \tilde{F}_{(k)}(x). \tag{4.80}$$

Alors, pour les 2-arbres exterplans, nous avons

$$\mathbf{a}_\pi = \overline{\mathbf{a}}_\pi + \mathbf{a}_{\pi,(2)} + \mathbf{a}_{\pi,(3)}, \tag{4.81}$$

et pour les 2-arbres exterplanaires

$$\mathbf{a}_p = \overline{\mathbf{a}}_p + \mathbf{a}_{p,(2)} + \mathbf{a}_{p,(3)} + \mathbf{a}_{p,(4)} + \mathbf{a}_{p,(6)}. \tag{4.82}$$

On peut donc écrire,

$$\tilde{\mathbf{a}}_\pi(x) = \mathbf{a}_\pi(x) + \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{a}}_{\pi,(2)}(x) + \frac{2}{3}\tilde{\mathbf{a}}_{\pi,(3)}(x), \tag{4.83}$$

et

$$\tilde{\mathbf{a}}_p(x) = \mathbf{a}_p(x) + \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{a}}_{p,(2)}(x) + \frac{2}{3}\tilde{\mathbf{a}}_{p,(3)}(x) + \frac{3}{4}\tilde{\mathbf{a}}_{p,(4)}(x) + \frac{5}{6}\tilde{\mathbf{a}}_{p,(6)}(x). \tag{4.84}$$

Après identification des termes apparaissant dans (4.83), il vient

$$\tilde{\mathbf{a}}_\pi(x) = \mathbf{a}_\pi(x) + \frac{1}{2}B(x^2) + \frac{2}{3}xB(x^3), \tag{4.85}$$

pour le cas des 2-arbres exterplans. En ce qui concerne les 2-arbres exterplanaires, nous avons

$$\begin{aligned}
 \tilde{a}_{p,(2)}(x) &= \frac{3}{2}(B(x^2) - x^2B(x^4)) + xB(x^2) - x^4B(x^6), \\
 \tilde{a}_{p,(3)}(x) &= \frac{1}{2}(xB(x^3) - x^4B(x^6)), \\
 \tilde{a}_{p,(4)}(x) &= x^2B(x^4), \quad \tilde{a}_{p,(6)} = x^4B(x^6),
 \end{aligned} \tag{4.86}$$

ce qui conduit à

$$\tilde{a}_p(x) = a_p(x) + \frac{1}{2}xB(x^2) + \frac{1}{3}xB(x^3) + \frac{3}{4}B(x^2). \tag{4.87}$$

Il devient alors aisé d'obtenir les nombres de 2-arbres exterplans et exterplanaires non étiquetés bâtis sur  $n$  triangles (donnés par (4.56) et (4.76)) en extrayant simplement les coefficients de  $x^n$  dans les équations (4.85) et (4.87).



## Chapitre V

### ÉNUMÉRATION DES 2-ARBRES SOLIDES

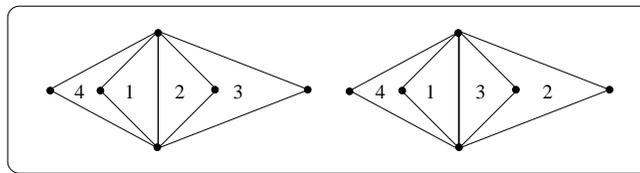
Le but de ce chapitre est le dénombrement des 2-arbres solides selon le nombre d'arêtes (ou de triangles de façon équivalente) ainsi que selon la distribution des degrés des arêtes. Intuitivement, un 2-arbre solide est un 2-arbre plongé dans l'espace. En utilisant les méthodes classiques de la théorie des espèces, nous obtenons d'abord le dénombrement des 2-arbres solides orientés. Pour le dénombrement des 2-arbres solides non orientés, nous utilisons la notion d'espèce quotient avec le groupe à deux éléments  $\mathbb{Z}_2 = \{1, \tau\}$ , dont l'action de  $\tau$  est de renverser l'orientation des 2-arbres.

#### 5.1 Espèces des 2-arbres solides

Commençons par définir les 2-arbres solides de manière topologique.

**Définition 5.1.1** *Un 2-arbre solide est un 2-arbre plongé dans l'espace tridimensionnel (à homéomorphisme près), c'est-à-dire que les triangles incidents à chaque arête ne peuvent s'interpénétrer.*

La différence avec un 2-arbre classique est que les triangles composant un 2-arbre solide sont pleins (ou durs), d'où le vocable solide. Ainsi, il est clair que les 2-arbres solides sont caractérisés par le fait qu'il existe, autour de chaque arête munie d'une orientation, une configuration en cycle de triangles.



**Figure 5.1** Deux 2-arbres solides distincts, mais le même 2-arbre

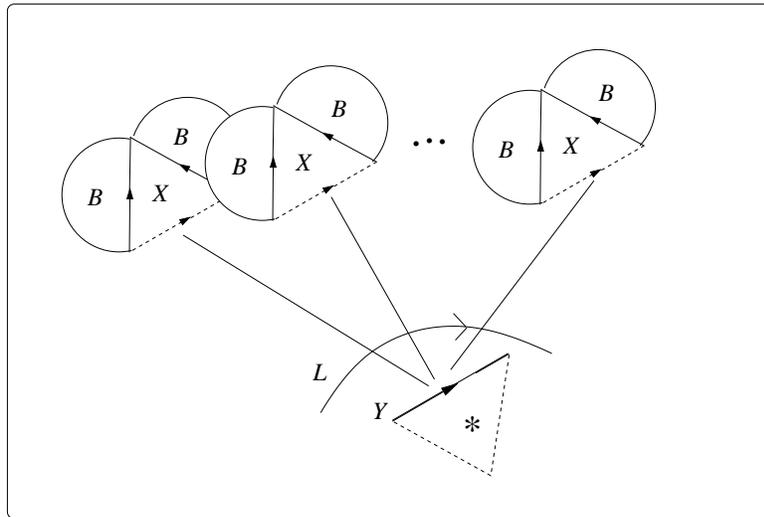
Pour bien illustrer la différence entre 2-arbres classiques et solides, considérons les deux 2-arbres (étiquetés aux triangles) de la figure 5.1. Ces deux 2-arbres sont identiques en tant que 2-arbres libres, étant donné qu'il n'y a pas d'ordre sur les triangles

étiquetés de 1 à 4. Par contre, si l'on regarde ces structures en tant que 2-arbres solides (*i.e.*, plongés dans l'espace), on voit qu'ils sont différents puisque les positions relatives des étiquettes 1, 2, 3 et 4 ne sont pas les mêmes.

On désigne par  $a_o$  et  $a$ , les espèces des 2-arbres solides orientés et non orientés, respectivement. Notons que, dans le cas orienté, on peut toujours canoniquement orienter le cycle de triangles autour de chaque arête orientée en utilisant une règle du tire-bouchon (de la main droite). Nous considérons une nouvelle fois les trois pointages notés  $\dashv$ ,  $\triangle$  et  $\triangleleft$  représentant toujours le pointage en une arête, en un triangle et en un triangle lui-même pointé en une de ses arêtes. Comme dans le chapitre précédent, nous utilisons une espèce fondamentale, notée encore  $B$ , qui est l'espèce des 2-arbres solides orientés plantés en une arête. On peut considérer de manière équivalente que  $B$  est l'espèce des 2-arbres solides non orientés plantés en une arête orientée. On obtient une équation fonctionnelle caractérisant l'espèce à deux sortes  $B = B(X, Y)$ , où  $X$  et  $Y$  représentent les sortes triangles et arêtes :

$$B(X, Y) = YL(XB^2(X, Y)), \quad (5.1)$$

étant donné que, comme illustré par la figure 5.2, une  $B$ -structure consiste en une arête orientée  $Y$  incidente à une liste ( $L$ -structure) de triangles  $X$  qui ont sur leurs deux côtés restants des  $B$ -structures attachées.



**Figure 5.2** Une  $B$ -structure

Puisque le nombre d'arêtes  $n$  et le nombre de triangles  $m$  d'un 2-arbre sont liés par la relation  $n = 2m + 1$  (voir lemme 3.1.3), nous considérons les 2-arbres étiquetés aux arêtes uniquement. Cela implique, que nous posons  $X := 1$  dans la relation (5.1), conduisant ainsi à l'équation

$$B(1, Y) = YL(B^2(1, Y)). \quad (5.2)$$

Cela signifie que l'espèce singleton de base est l'espèce  $Y$  des arêtes, et nous utilisons la forme suivante de (5.2)

$$B(Y) = YL(B^2(Y)).$$

Cependant, certains résultats sont plus compacts en terme du nombre de triangles, et nous les mentionnons.

Il est important de remarquer que nous avons choisi de poser  $X := 1$ , car la relation (5.2) est de type lagrangien et permet ainsi l'utilisation de l'inversion de Lagrange composée; voir section 1.6. On déduit facilement le nombre de  $B$ -structure étiquetées et non étiquetées par inversion de Lagrange en profitant du fait que l'espèce  $B$  est asymétrique, impliquant que les deux séries génératrices exponentielle et tilde coïncident,  $B(x) = \tilde{B}(x)$ .

**Proposition 5.1.2** *Les nombres  $b_n$  et  $\tilde{b}_n$  de  $B$ -structures respectivement étiquetées et non étiquetées sur  $n$  arêtes ( $n$  impair) sont donnés par*

$$\tilde{b}_n = \frac{1}{n} \frac{n^{\langle \frac{n-1}{2} \rangle}}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!} = \frac{1}{n} \binom{\frac{3}{2}(n-1)}{n-1}, \quad (5.3)$$

$$b_n = n! \tilde{b}_n, \quad (5.4)$$

où  $n^{\langle k \rangle} = n(n+1) \dots (n+k-1)$  désigne la  $k^{\text{ième}}$  factorielle montante de  $n$ .

**Preuve.** Il suffit d'appliquer une inversion de Lagrange à partir de la relation  $B = YL(B^2)$ , utilisant le fait que  $L(y) = (1-y)^{-1}$ . Il vient

$$\frac{b_n}{n!} = [y^n]B(y) = \frac{1}{n} [y^{n-1}](L(y^2))^n \quad (5.5)$$

$$= \frac{1}{n} [y^{n-1}] \sum_{k \geq 0} \frac{n^{\langle k \rangle}}{k!} y^{2k} = \frac{1}{n} \frac{n^{\langle \frac{n-1}{2} \rangle}}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}. \quad (5.6)$$

On établit (5.4) en utilisant le fait que l'espèce  $B$  est asymétrique, signifiant que toute  $B$ -structure sur  $n$  arêtes peut être étiquetée de  $n$  façons. ■

Le dénombrement des 2-arbres solides orientés est effectué en premier lieu. Nous donnons d'abord l'énumération par rapport au nombre d'arêtes dans les cas étiqueté et non étiqueté, pour ensuite proposer des formules selon la distribution des degrés des arêtes. On utilise par la suite ces résultats pour déduire le cas général des 2-arbres solides non orientés, en quotientant toutes les espèces pointées apparaissant dans le théorème de dissymétrie par le groupe  $\mathbb{Z}_2$ .

## 5.2 Les 2-arbres solides orientés

Le théorème de dissymétrie nous donne la relation suivante, où l'indice  $o$  indique que les 2-arbres sont orientés :

$$a_o = a_o^- + a_o^\Delta - a_o^{\hat{\Delta}}. \quad (5.7)$$

Notre première tâche consiste à exprimer les espèces pointées  $a_o^-$ ,  $a_o^\Delta$  et  $a_o^{\hat{\Delta}}$  à l'aide d'équations fonctionnelles en termes de l'espèce  $B$ .

**Proposition 5.2.1** *Les espèces  $a_o^-$ ,  $a_o^\Delta$  et  $a_o^{\hat{\Delta}}$  satisfont les isomorphismes d'espèces suivants :*

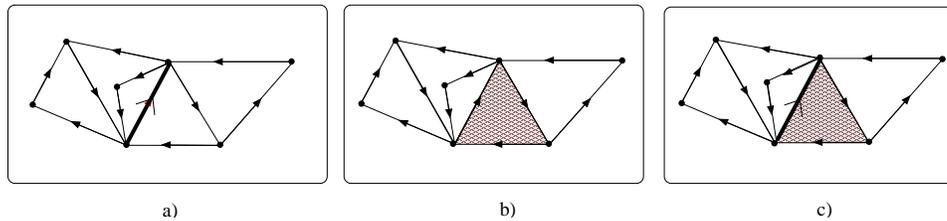
$$a_o^-(Y) = Y + YC(B^2(Y)), \quad (5.8)$$

$$a_o^\Delta(Y) = C_3(B(Y)), \quad (5.9)$$

$$a_o^{\hat{\Delta}}(Y) = B(Y)^3. \quad (5.10)$$

où  $C$  et  $C_3$  sont les espèces des cycles (orientés) et des cycles (orientés) de longueur trois, respectivement.

**Preuve.** Dans la relation (5.8), le terme  $Y$  correspond au cas d'une arête seule. Dans le cas général, l'orientation de l'arête racine permet de définir un ordre cyclique sur les triangles qui lui sont attachés en utilisant la règle du tire-bouchon (main droite); voir figure 5.3 a). Ensuite, chaque triangle dans cette configuration cyclique possède des  $B$ -structures sur ses deux arêtes restantes; cela mène au terme  $YC(B^2(Y))$ . En ce qui concerne l'équation (5.9), il suffit de remarquer qu'étant donné que les structures que l'on considère sont orientées, il y a un cycle de longueur trois sur les arêtes du triangle racine; ces arêtes se trouvant ainsi orientées, on vient y attacher des  $B$ -structures (voir figure 5.3 b)). Finalement, on obtient (5.10) de façon très similaire, voir figure 5.3. ■



**Figure 5.3** Illustration des équations (5.8), (5.9) et (5.10)

### 5.2.1 Enumération selon le nombre d'arêtes

Dans cette section, nous obtenons des formules donnant le nombre de 2-arbres solides orientés étiquetés et non étiquetés, en fonction du nombre  $n$  d'arêtes. Nous proposons aussi ces résultats en fonction du nombre de triangles, noté  $m$ . Le cas étiqueté se fait assez directement comme suit.

#### • Cas étiqueté :

Soit  $a_o[n]$  l'ensemble des 2-arbres solides orientés étiquetés aux arêtes bâtis sur  $n$  arêtes. On définit de manière similaire les ensembles  $a_o^-[n]$ ,  $a_o^\Delta[n]$  et  $a_o^{\hat{\Delta}}[n]$ . La

première étape de notre démarche consiste à calculer  $a_{o,n}^-$ , le cardinal de l'ensemble  $\mathcal{A}_o[n]$ , donnant le nombre de 2-arbres solides orientés étiquetés sur  $n$  arêtes. On utilise l'inversion de Lagrange composée (voir section 1.6) à partir de la relation (5.8), avec  $F(t) = C(t^2) = -\ln(1 - t^2)$  et  $R(t) = L(t^2) = (1 - t^2)^{-1}$ . Il vient, pour  $n > 1$  impair,

$$\begin{aligned}
[y^n]\mathcal{A}_o^-(y) &= [y^n]yC(B^2(y)) \\
&= [y^{n-1}]C(B^2(y)) \\
&= \frac{1}{n-1}[t^{n-2}]F'(t)R^{n-1}(t) \\
&= \frac{1}{n-1}[t^{n-2}]\frac{2t}{1-t^2} \cdot (1-t^2)^{-(n-1)} \\
&= \frac{2}{n-1}[t^{n-3}](1-t^2)^{-n} \\
&= \frac{2}{n-1}[t^{n-3}]\sum_{j \geq 0} \frac{n(n+1) \cdots (n+j-1)}{j!} t^{2j} \\
&= \frac{2}{3(n-1)} \binom{3(n-1)/2}{n-1}.
\end{aligned}$$

Ainsi, on déduit

$$a_{o,n}^- = n![y^n]\mathcal{A}_o^-(y) = \frac{2}{3}n(n-2)! \binom{3(n-1)/2}{n-1}. \quad (5.11)$$

Il est clair que lorsqu'un 2-arbre solide sur  $n$  arêtes est étiqueté, nous disposons de  $n$  choix différents pour l'arête racine. Alors,

$$na_{o,n} = a_{o,n}^-,$$

donnant la proposition suivante.

**Proposition 5.2.2** *Le nombre  $a_{o,n}$  de 2-arbres solides orientés pointés en une arête étiquetés sur  $n$  arêtes,  $n$  impair, est donné par*

$$a_{o,n} = \frac{2}{3}(n-2)! \binom{3(n-1)/2}{n-1}, \quad n > 1. \quad (5.12)$$

□

Cependant, si nous exprimons la relation (5.12) en termes du nombre  $m$  de triangles,  $m = (n-1)/2$ , nous obtenons

$$a_{o,t,m} = \frac{(m-1)!}{3} \frac{1}{2m+1} \binom{3m}{m}, \quad m \geq 2, \quad (5.13)$$

où l'indice  $t$  dans  $a_{o,t,m}$  signifie que les structures sont étiquetées aux triangles à la place des arêtes. Pour obtenir cette formule, il suffit de remarquer que

$$a_{o,t,m} = \frac{m!}{n!} a_{o,n},$$

étant donné que les groupes d'automorphismes relatifs aux étiquetages aux arêtes ou aux triangles sont isomorphes, et ce, quel que soit le 2-arbre considéré.

• **Cas non étiqueté :**

On commence par calculer la fonction génératrice tilde des structures non étiquetées  $\tilde{\alpha}_o^-(y)$  de l'espèce  $\alpha_o^-$ . On rappelle la loi de substitution de la théorie des espèces (voir Chapitre premier ou (Bergeron, Labelle et Leroux, 98)) : si  $F$  et  $G$  sont deux espèces, alors, nous avons :

$$(F(G))^\sim(x) = Z_F(\tilde{G}(x), \tilde{G}(x^2), \tilde{G}(x^3), \dots), \quad (5.14)$$

où  $Z_F(x_1, x_2, \dots)$  est la série indicatrice de cycles de l'espèce  $F$ . Rappelons également la formule donnant la série indicatrice de cycles de l'espèce  $C$  des cycles (orientés) :

$$Z_C(x_1, x_2, \dots) = \sum_{k \geq 1} \frac{\phi(k)}{k} \ln \left( \frac{1}{1 - x_k} \right), \quad (5.15)$$

où  $\phi$  désigne la fonction d'Euler de théorie des nombres.

Nous sommes maintenant prêts à calculer la série  $\tilde{\alpha}_o^-(y)$ ; ensuite, par simple extraction du coefficient en  $y^n$  dans cette série, nous obtenons le nombre de 2-arbres solides pointés en une arête, non étiquetés sur  $n$  arêtes. De l'équation  $\alpha_o^- = Y + YC(\mathcal{B}^2)$ , il vient

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_o^-(y) &= y + yZ_C(\tilde{B}^2(y), \tilde{B}^2(y^2), \tilde{B}^2(y^3), \dots) \\ &= y + y \sum_{k \geq 1} \frac{\phi(k)}{k} \ln \left( \frac{1}{1 - \tilde{B}^2(y^k)} \right). \end{aligned}$$

Il est important de ne pas oublier que l'espèce  $B$  est asymétrique. Ainsi,  $B(x) = \tilde{B}(x)$ . On en déduit, pour  $n \geq 1$ , impair

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{o,n}^- &= [y^n] \tilde{\alpha}_o^-(y) \\ &= [y^{n-1}] \sum_{k \geq 1} \frac{\phi(k)}{k} \ln \left( \frac{1}{1 - B^2(y^k)} \right). \end{aligned}$$

On utilise alors le fait que pour toute série formelle  $H$  en la variable  $y$ , on a

$$[y^n] H(y^k) = [y^{n/k}] H(y).$$

Ceci couplé à l'inversion de Lagrange, conduit à

$$\begin{aligned} [y^{n-1}] \ln \left( \frac{1}{1 - B^2(y^k)} \right) &= \frac{2k}{n-1} [t^{\frac{n-1}{k}-2}] (1-t^2)^{-\frac{n-1}{k}-1} \\ &= \frac{2k}{3(n-1)} \binom{3(n-1)/2k}{(n-1)/k}. \end{aligned}$$

Notons que dans la formule précédente, l'entier  $k$  doit être un diviseur de  $n-1$  et que  $(n-1)/k$  doit être un entier pair. Posons  $d = (n-1)/k$ . On obtient finalement

$$\tilde{a}_{o,n}^- = \frac{2}{3(n-1)} \sum_d \phi\left(\frac{n-1}{d}\right) \binom{3d/2}{d}, \quad (5.16)$$

la somme s'effectuant sur les diviseurs pairs  $d$  de  $n-1$ .

Dans le but de calculer le nombre  $\tilde{a}_{o,n}^\Delta$  de 2-arbres solides orientés non étiquetés pointés en un triangle, sur  $n$  arêtes, on utilise l'équation (5.9) et le fait que

$$Z_{C_3}(y_1, y_2, \dots) = \frac{1}{3}(y_1^3 + 2y_3).$$

On calcule alors successivement

$$[y^n] B^3(y) = \frac{1}{n} \binom{3(n-1)/2}{n-1},$$

et

$$[y^n] B(y^3) = [y^{n/3}] B(y) = \frac{3}{n} \binom{(n-3)/2}{n/3-1},$$

de sorte que

$$\tilde{a}_{o,n}^\Delta = \frac{1}{3n} \binom{3(n-1)/2}{n-1} + \frac{2}{n} \chi(3|n) \binom{(n-3)/2}{n/3-1}, \quad (5.17)$$

où  $\chi(3|n) = 1$  si 3 divise  $n$  et 0, sinon.

De façon très similaire, on obtient le nombre  $\tilde{a}_{o,n}^\Delta$ , de  $a_o^\Delta$ -structures non étiquetées sur  $n$  arêtes,

$$\tilde{a}_{o,n}^\Delta = \frac{1}{n} \binom{3(n-1)/2}{n-1}. \quad (5.18)$$

Alors, une utilisation simple du théorème de dissymétrie, conduit au résultat suivant, donnant le nombre de 2-arbres solides orientés non étiquetés sur  $n$  triangles.

**Proposition 5.2.3** *Le nombre  $\tilde{a}_{o,n}$  de 2-arbres solides orientés non étiquetés sur  $n$  arêtes,  $n \geq 1$  impair, est donné par*

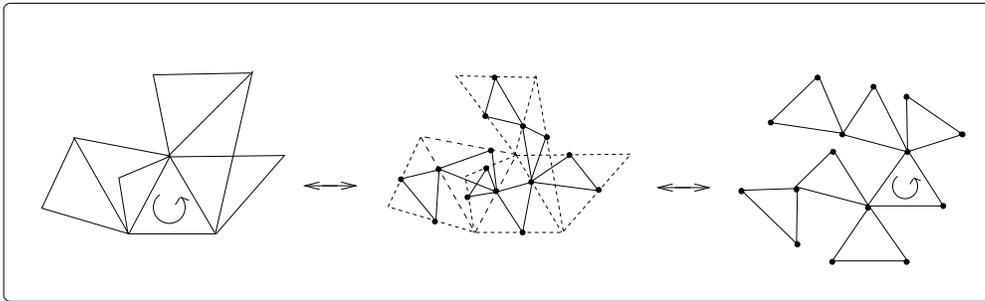
$$\begin{aligned} \tilde{a}_{o,n} &= \frac{2}{3(n-1)} \sum_d \phi\left(\frac{n-1}{d}\right) \binom{3d/2}{d} \\ &\quad + \chi(3|n) \frac{2}{n} \binom{(n-3)/2}{n/3-1} - \frac{2}{3n} \binom{3(n-1)/2}{n-1}, \end{aligned} \quad (5.19)$$

la somme étant prise sur l'ensemble des diviseurs pairs  $d$  de  $n-1$ .  $\square$

On peut également écrire  $\tilde{a}_{o,t,m}$ , donnant le nombre de 2-arbres solides orientés non étiquetés en fonction du nombre  $m$  de triangles de la structure :

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{o,t,m} = & \frac{1}{3m} \sum_{d|m} \phi\left(\frac{m}{d}\right) \binom{3d}{d} + \chi(3|2m+1) \frac{2}{2m+1} \binom{m-1}{\frac{2m-2}{3}} \\ & - \frac{2}{3(2m+1)} \binom{3m}{m}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Notons que l'expression (5.20) donne également le nombre de cactus plans 3-gonaux non étiquetés bâtis sur  $m$  triangles; voir (Bòna, Bousquet, Labelle et Leroux, 00) pour une énumération complète des cactus plans  $k$ -gonaux et planaires,  $k \geq 2$ , étiquetés et non étiquetés. Voir plus précisément les formules (88)–(91) (avec  $m = 3$ ) dans (Bòna, Bousquet, Labelle et Leroux, 00). La suite des nombres donnés par (5.20) est répertoriée comme la suite A054423 dans l'Encyclopédie en-ligne des Suites d'Entiers (Sloane et Plouffe, 95). Il y a une bijection assez directe entre les cactus plans triangulaires et les 2-arbres solides orientés. Cette correspondance est illustrée par la figure 5.4. Pour obtenir un cactus triangulaire plan à partir d'un 2-arbre solide, on place



**Figure 5.4** Bijection entre 2-arbres solides orientés et cactus triangulaires plans

un sommet sur toutes les arêtes de chaque triangle, et on relie ensuite les sommets qui appartiennent au même triangle; voir la figure 5.4, première étape. En conservant l'ordre cyclique qui se trouve autour de chaque arête du 2-arbre, on obtient un cactus triangulaire plan. Cette construction est très proche de celle du *graphe arête* d'un graphe quelconque; voir (Labelle, J., 81).

### 5.2.2 Énumération selon la distribution des degrés

À des fins de dénombrement selon la distribution de degrés des arêtes des 2-arbres solides orientés et non orientés, nous utilisons l'approche de (Labelle et Leroux, 96) introduite dans le cadre de l'énumération selon les degrés des arbres plans. L'idée consiste à introduire une fonction de poids et à considérer des versions pondérées des espèces dont nous disposons. Soit alors  $r = (r_1, r_2, r_3, \dots)$  un vecteur infini de variables formelles. On rappelle que  $\mathcal{A}[n]$  représente l'ensemble des 2-arbres solides sur  $n$

arêtes. Pour tenir compte de la distribution des degrés, on introduit, pour un entier  $n$  fixé, la *fonction de poids* suivante (voir (Labelle et Leroux, 96)) :

$$\begin{aligned} w : \mathbf{a}[n] &\longrightarrow \mathbb{Q}[r_1, r_2, \dots] \\ s &\longmapsto w(s) \end{aligned} \quad (5.21)$$

où  $\mathbb{Q}[r_1, r_2, \dots]$  est l'anneau des polynômes en les variables  $r_1, r_2, \dots$  à coefficients dans le corps des nombres rationnels  $\mathbb{Q}$ , et où le poids d'un 2-arbre solide  $s$  est défini par  $w(s) = r_1^{n_1} r_2^{n_2} \cdots r_i^{n_i}$  donnant le nombre d'arêtes de  $s$  de degré  $i$ ,  $i \geq 1$ . Il est clair que les divers pointages que l'on a considérés, et l'orientation des 2-arbres, n'affectent en rien cette fonction de poids.

Les équations (5.1), (5.8), (5.9) et (5.10) possèdent alors les versions pondérées (par  $w$ ) suivantes :

$$B_r = Y L_{r'}(B_r^2), \quad (5.22)$$

et

$$\mathbf{a}_{o,w}^-(Y) = Y + Y C_r(B_r^2), \quad (5.23)$$

$$\mathbf{a}_{o,w}^\Delta(Y) = C_3(B_r), \quad (5.24)$$

$$\mathbf{a}_{o,w}^{\Delta\Delta}(Y) = B_r^3, \quad (5.25)$$

où  $C_r$  est l'espèce des cycles orientés tels qu'un cycle de longueur  $i$  reçoit le poids  $r_i$ , et où l'espèce  $L_{r'}$  est la dérivée de  $C_r$ , c'est-à-dire l'espèce des listes telles qu'une liste de longueur  $i$  a le poids  $r_{i+1}$ . Les expressions des séries génératrices exponentielles de ces espèces sont bien connues (voir (Bergeron, Labelle et Leroux, 98; Labelle et Leroux, 96)) :

$$C_r(y) = r_1 y + \frac{r_2}{2} y^2 + \frac{r_3}{3} y^3 + \cdots,$$

et

$$L_{r'}(y) = (C_r(y))' = r_1 + r_2 y + r_3 y^2 + \cdots.$$

Soit maintenant  $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3, \dots)$  un vecteur infini d'entiers positifs ou nuls. On rappelle qu'il existe un 2-arbre possédant  $n$  arêtes et ayant  $\vec{n}$  comme distribution des degrés si et seulement si les relations suivantes sont vérifiées (voir lemme 3.1.3) :

$$\sum_i n_i = n \quad \text{et} \quad \sum_i i n_i = 3 \binom{n-1}{2}. \quad (5.26)$$

On commence par donner les résultats énumératifs dans le cas étiqueté; le cas non étiqueté suit.

### • Cas étiqueté :

Soit  $\vec{n}$  une distribution cohérente des degrés (satisfaisant (5.26)). Soit  $|\mathbf{a}_o[\vec{n}]|$ , le nombre de 2-arbres solides orientés ayant  $\vec{n}$  comme distribution des degrés des arêtes. On a le résultat suivant.

**Proposition 5.2.4** *Le nombre de 2-arbres solides (bien) orientés ayant  $\vec{n}$  comme distribution des degrés est donné par*

$$a_{o,\vec{n}} = 2(n-2)! \binom{n}{n_1, n_2, \dots}. \quad (5.27)$$

**Preuve.** Considérons  $a_{o,\vec{n}}^-$ , le nombre de 2-arbres solides orientés pointés en une arête et ayant  $\vec{n}$  comme distribution des degrés. Alors, on a

$$a_{o,\vec{n}}^- = n! [r_1^{n_1} r_2^{n_2} \dots] [y^n] a_{o,w}^-(y). \quad (5.28)$$

Or, en vertu de (5.23), il vient

$$\begin{aligned} [y^n] a_{o,w}^-(y) &= \frac{1}{n-1} [t^{n-2}] \frac{d}{dt} (C_r(t^2)) \cdot L_{r'}^{n-1}(t^2) \\ &= \frac{2}{n-1} [t^{n-3}] (r_1 + r_2 t^2 + r_3 t^4 + \dots)^n \\ &= \frac{2}{n-1} [t^{n-3}] \sum_{\ell_1 + \ell_2 + \dots = n} \binom{n}{\ell_1, \ell_2, \dots} r_1^{\ell_1} r_2^{\ell_2} \dots t^{2\ell_2 + 4\ell_3 + 6\ell_4 + \dots}. \end{aligned}$$

Nous en déduisons donc

$$[y^n] a_{o,w}^-(y) = \sum_{\ell_1, \ell_2, \dots} \binom{n}{\ell_1, \ell_2, \dots} r_1^{\ell_1} r_2^{\ell_2} \dots,$$

la somme étant prise sur l'ensemble des vecteurs  $(\ell_1, \ell_2, \dots)$  satisfaisant

$$\sum_i \ell_i = n \quad \text{et} \quad \sum_i 2(i-1)\ell_i = n-3.$$

Il est facile de voir que cette dernière condition est équivalente à (5.26). Ainsi, en utilisant (5.28), on arrive à

$$a_{o,\vec{n}}^- = 2n(n-2)! \binom{n}{n_1, n_2, \dots}. \quad (5.29)$$

Finalement, en remarquant que, comme dans le cas non pondéré, nous avons

$$a_{o,\vec{n}}^- = n a_{o,\vec{n}},$$

on obtient directement le résultat annoncé. ■

#### • Cas non étiqueté :

Considérons  $\vec{n} = (n_1, n_2, \dots)$  une distribution cohérente des degrés des arêtes. Dans le but de calculer le nombre de 2-arbres solides non étiquetés pointés, on utilise la loi de substitution des espèces pondérées suivante (voir (Bergeron, Labelle et Leroux, 98)) :

soit  $F_v$  et  $G_u$  deux espèces pondérées et  $H = F_v \circ G_u$ ; alors, la série génératrice tilde des  $H$ -structures non étiquetées est donnée par

$$\tilde{H}(y) = Z_{F_w}(\tilde{G}_v(y), \tilde{G}_{v^2}(y^2), \tilde{G}_{v^3}(y^3), \dots), \quad (5.30)$$

avec  $G_{v^k}(y^k) = p_k \circ G_v(y)$  où  $p_k$  désigne la  $k^{\text{ième}}$  somme de puissances, et pour toute structure  $s$ , on a  $v^k(s) = (v(s))^k$ .

Dans le contexte présent, nous avons  $\alpha_{o,w}^-(Y) = Y + Y C_r(B_r^2)$ , et puisque l'espèce  $B$  est asymétrique, à savoir  $\tilde{B}_r(y) = B_r(y)$ , il vient

$$\tilde{\alpha}_{o,\vec{n}}^- = [r_1^{n_1} r_2^{n_2} \dots] [y^{n-1}] Z_{C_r}(B_r^2(y), B_{r^2}^2(y^2), B_{r^3}^2(y^3), \dots). \quad (5.31)$$

Or, la série indicatrice de cycles de l'espèce  $C_r$ ,  $Z_{C_r}(y_1, y_2, \dots)$ , peut être écrite

$$Z_{C_r}(y_1, y_2, \dots) = \sum_{k \geq 1} \frac{r_k}{k} \sum_{d|k} \phi(d) y_d^{k/d}. \quad (5.32)$$

De façon concrète, l'entier  $k$  représente le degré de l'arête racine dans la  $\alpha_o^-$ -structure. Il est alors évident que  $k$  doit nécessairement appartenir au support de  $\vec{n}$ , que l'on a noté  $\text{Supp}(\vec{n})$ . Ainsi, nous avons

$$\tilde{\alpha}_{o,\vec{n}}^- = [r_1^{n_1} r_2^{n_2} \dots] [y^{n-1}] \sum_{k \in \text{Supp}(\vec{n})} \frac{r_k}{k} \sum_{d|k} \phi(d) B_{r^d}^{2k/d}(y^d). \quad (5.33)$$

Nous allons calculer le coefficient

$$[y^{n-1}] B_{r^d}^{2k/d}(y^d) = [y^{(n-1)/d}] B_{r^d}^{2k/d}(y).$$

Mais, avant cela, nous proposons le résultat suivant, qui sera utile à de nombreuses reprises par la suite, et qui s'obtient par une simple application de l'inversion de Lagrange composée.

**Lemme 5.2.5** *Nous avons*

$$[y^m] B_{r^d}^\ell(y) = \frac{\ell}{m} \sum_{\ell_1, \ell_2, \dots} \binom{m}{\ell_1, \ell_2, \dots} r_1^{d\ell_1} r_2^{d\ell_2} \dots, \quad (5.34)$$

où les  $\ell_i$  satisfont les relations  $\sum_i \ell_i = m$  et  $\sum_i 2(i-1)\ell_i = m - \ell$ .  $\square$

Alors, si on pose  $m = (n-1)/d$  et  $\ell = 2k/d$  dans le lemme précédent, il vient

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{o,\vec{n}}^- &= [r_1^{n_1} r_2^{n_2} \dots] \frac{2}{n-1} \sum_{k \in \text{Supp}(\vec{n})} \cdot \\ &\cdot \sum_{d|k} \phi(d) \sum_{\ell_1, \ell_2, \dots} \binom{(n-1)/d}{\ell_1, \ell_2, \dots} r_1^{d\ell_1} r_2^{d\ell_2} \dots r_k^{d\ell_k+1} \dots \end{aligned} \quad (5.35)$$

On a ainsi montré la proposition qui suit.

**Proposition 5.2.6** Soit  $\vec{n}$  une distribution cohérente des degrés des arêtes. Alors, le nombre  $\tilde{a}_{o,\vec{n}}^-$  de 2-arbres solides orientés pointés en une arête non étiquetés et possédant  $\vec{n}$  comme distribution des degrés des arêtes est donné par

$$\tilde{a}_{o,\vec{n}}^- = \frac{2}{n-1} \sum_{k \in \text{Supp}(\vec{n})} \sum_{d | \{k, \vec{n} - \delta_k\}} \phi(d) \binom{\frac{n-1}{d}}{\frac{\vec{n} - \delta_k}{d}}, \quad (5.36)$$

où  $\frac{\vec{n} - \delta_k}{d} = (\frac{n_1}{d}, \frac{n_2}{d}, \dots, \frac{n_k-1}{d}, \dots)$ , pour  $d \geq 1$ ,

$$\binom{\frac{n-1}{d}}{\frac{\vec{n} - \delta_k}{d}} = \binom{\frac{n-1}{d}}{n_1/d, n_2/d, \dots, (n_k-1)/d, \dots},$$

et la notation  $d | \{k, \vec{n} - \delta_k\}$  signifie que l'entier  $d$  doit diviser  $k$  et toutes les composantes du vecteur  $\vec{n} - \delta_k$ .  $\square$

Considérons maintenant les nombres  $\tilde{a}_{o,\vec{n}}^\Delta$  et  $\tilde{a}_{o,\vec{n}}^\triangle$  de 2-arbres solides orientés non étiquetés pointés respectivement en un triangle et en un triangle ayant une de ses arêtes distinguée, et possédant  $\vec{n}$  comme distribution des degrés. Le résultat suivant donne des expressions explicites pour ces nombres.

**Proposition 5.2.7** Soit  $\vec{n}$  une distribution cohérente des degrés des arêtes. Alors, les nombres  $\tilde{a}_{o,\vec{n}}^\Delta$  et  $\tilde{a}_{o,\vec{n}}^\triangle$  sont donnés par

$$\tilde{a}_{o,\vec{n}}^\Delta = \frac{1}{n} \binom{n}{n_1, n_2, \dots} + \frac{\chi(3|\vec{n})}{n} \binom{n/3}{n_1/3, n_2/3, \dots}, \quad (5.37)$$

$$\tilde{a}_{o,\vec{n}}^\triangle = \frac{3}{n} \binom{n}{n_1, n_2, \dots}, \quad (5.38)$$

où

$$\chi(3|\vec{n}) = \begin{cases} 1, & \text{si toutes les composantes de } \vec{n} \text{ sont des multiples de } 3, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Preuve.** Nous avons

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{o,\vec{n}}^\Delta &= [r_1^{n_1} r_2^{n_2} \dots] [y^n] \tilde{a}_{o,w}^\Delta(y) \\ &= [r_1^{n_1} r_2^{n_2} \dots] [y^n] Z_{C_3}(\tilde{B}_r(y) \tilde{B}_{r^2}(y^2), \dots). \end{aligned}$$

Or, puisque  $Z_{C_3}(y_1, y_2, \dots) = (y_1^3 + 2y_2)/3$ , et  $\tilde{B}_r(y) = B_r(y)$ ,

$$\tilde{a}_{o,\vec{n}}^\Delta = \frac{1}{3} [r_1^{n_1} r_2^{n_2} \dots] [y^n] (B_r^3(y) + 2B_{r^3}(y^3)). \quad (5.39)$$

Alors, à partir de la relation (5.34) du lemme 5.2.5, en posant  $m = n$ ,  $\ell = 3$  et  $d = 1$ , il vient

$$[y^n] B_r^3(y) = \frac{3}{n} \sum_{\ell_1, \ell_2, \dots} \binom{n}{\ell_1, \ell_2, \dots} r_1^{\ell_1} r_2^{\ell_2} \dots, \quad (5.40)$$

où les entiers  $\ell_i, i \geq 1$ , satisfont  $\sum_i \ell_i = n$  et  $\sum_i 2(i-1)\ell_i = n-3$ . Une nouvelle fois, posant  $m = n/3, \ell = 1$  et  $d = 3$  dans la relation (5.34), on obtient

$$[y^n]B_{r,3}(y^3) = [y^{n/3}]B_{r,3}(y) = \frac{3}{n} \sum_{\ell_1, \ell_2, \dots} \binom{n/3}{\ell_1, \ell_2, \dots} r_1^{3\ell_1} r_2^{3\ell_2} \dots, \quad (5.41)$$

où les entiers  $\ell_i$  vérifient la relation  $\sum_i \ell_i = n$  et  $\sum_i 2(i-1)\ell_i = n-1$ . Posant maintenant  $\ell_i = n_i$  dans (5.40) et  $\ell_i = n_i/3$  dans (5.41), on arrive à l'équation (5.37). On établit de façon très similaire (5.38). ■

En combinant les équations (5.36), (5.37), (5.38) et le théorème de dissymétrie, on obtient le résultat final de cette section.

**Proposition 5.2.8** *Soit  $\vec{n}$  une distribution cohérente des degrés des arêtes. Alors, le nombre  $\tilde{a}_{o, \vec{n}}$  de 2-arbres solides orientés non étiquetés et ayant  $\vec{n}$  comme distribution des degrés possède l'expression suivante*

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{o, \vec{n}} &= \frac{2}{n-1} \sum_{k \in \text{Supp}(\vec{n})} \sum_{d | \{k, \vec{n} - \delta_k\}} \phi(d) \binom{\frac{n-1}{d}}{\frac{\vec{n} - \delta_k}{d}} + \frac{\chi(3|\vec{n})}{n} \binom{\frac{n}{3}}{\frac{n_1}{3}, \frac{n_2}{3}, \dots} \\ &\quad - \frac{2}{3n} \binom{n}{n_1, n_2, \dots}, \end{aligned} \quad (5.42)$$

où

$$\chi(3|\vec{n}) = \begin{cases} 1, & \text{si toutes les composantes de } \vec{n} \text{ sont multiples de 3,} \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\frac{\vec{n} - \delta_k}{d} = \left( \frac{n_1}{d}, \frac{n_2}{d}, \dots, \frac{n_k - 1}{d}, \dots \right) \text{ pour } d \geq 1,$$

et

$$\binom{\frac{n-1}{d}}{\frac{\vec{n} - \delta_k}{d}} = \binom{\frac{n-1}{d}}{\frac{n_1}{d}, \frac{n_2}{d}, \dots, \frac{n_k - 1}{d}, \dots}.$$

□

Quelques valeurs de  $\tilde{a}_{o, \vec{n}}$  sont présentées dans le tableau B.2 en annexe. Rappelons que ces nombres dénombrent également les cactus plans triangulaires ayant  $\vec{n}$  comme distribution des degrés des *sommets*.

### 5.3 Les 2-arbres solides non orientés

Nous utilisons dans cette partie le lemme de Burnside avec le groupe  $\mathbb{Z}_2 = \{1, \tau\}$ , un groupe à deux éléments consistant en l'identité et  $\tau$ , dont l'action sur les structures orientées est de renverser l'orientation des arêtes. Cela permet de calculer les nombres de 2-arbres solides (non orientés) étiquetés et non étiquetés, en utilisant la notion d'espèces quotients; voir section 3.2.

### 5.3.1 Énumération selon le nombre d'arêtes

Comme nous l'avons fait dans le cadre des 2-arbres solides orientés, nous donnons l'énumération selon le nombre d'arêtes, dans le cas étiqueté, suivi du cas non étiqueté.

#### • Cas étiqueté :

Le cas des 2-arbres solides étiquetés aux arêtes est particulièrement simple étant donné que chaque 2-arbre solide orienté étiqueté possède deux orientations possibles, hormis le 2-arbre réduit à une arête seule. On déduit ainsi directement le nombre  $a[n]$ , de 2-arbres solides étiquetés.

**Proposition 5.3.1** *Le nombre  $a_n$  de 2-arbres solides étiquetés aux arêtes sur  $n$  arêtes ( $n$  impair) est donné par*

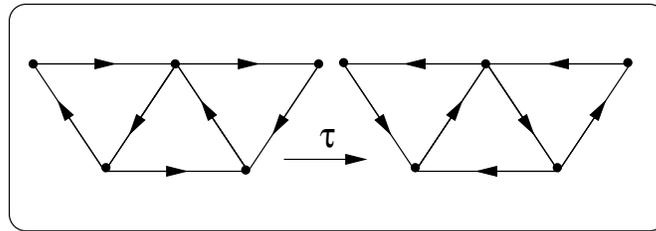
$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2}a_{o,n}, & \text{si } n > 1, \\ 1, & \text{si } n = 1, \end{cases} \quad (5.43)$$

où  $a_{o,n}$  est donné par (5.27). □

Il est clair que le même argument reste valide pour toutes les espèces pointées dont nous avons discuté dans la section précédente. On peut donc également obtenir très aisément le nombre de 2-arbres solides étiquetés pointés.

#### • Cas non étiqueté :

Dans ce cas-ci, l'action de  $\tau \in \mathbb{Z}_2$ , ayant pour effet de renverser l'orientation globale des 2-arbres, n'est plus aussi triviale. En effet, de nombreux 2-arbres solides sont invariants sous le changement d'orientation induit par  $\tau$ . On qualifie ces structures de  $\tau$ -symétriques. Par exemple, en figure 5.5, on peut voir un 2-arbre solide orienté qui est invariant sous l'action de  $\tau$ .



**Figure 5.5** Un 2-arbre non étiqueté  $\tau$ -symétrique

Soit  $a^-$  l'espèce des 2-arbres solides (non orientés) pointés en une arête. On exprime cette espèce en termes d'espèce quotient (voir (Fowler et al., 00; Fowler et al., 02), pour des espèces quotient liées aux 2-arbres)

$$a^- = \frac{a_o^-}{\mathbb{Z}_2} = \frac{Y + YC(B^2(Y))}{\mathbb{Z}_2}. \quad (5.44)$$

Alors, toute  $\mathcal{A}^-$ -structure non étiquetée est en fait une orbite  $\{a, \tau \cdot a\}$  sous l'action de  $\mathbb{Z}_2$ , où  $a$  est une  $\mathcal{A}_o^-$ -structure quelconque (orientée). Cela signifie, de manière informelle, que quotienter par  $\mathbb{Z}_2$ , correspond à oublier l'orientation primitive des structures.

Nous introduisons une nouvelle espèce auxiliaire, notée  $B_{\text{Sym}}$ , qui consiste en la sous-espèce de  $B$  dont les structures sont  $\tau$ -symétriques. Ainsi, les  $B_{\text{Sym}}$ -structures sont des  $B$ -structures qui sont laissées fixes sous le changement d'orientation des arêtes induit par  $\tau$ . La première étape consiste à calculer la série génératrice tilde des structures non étiquetées de l'espèce  $B_{\text{Sym}}$ . Notons  $\tilde{B}_{\text{Sym}}(y)$  cette série. Rappelons l'équation fonctionnelle satisfaite par  $B$  :

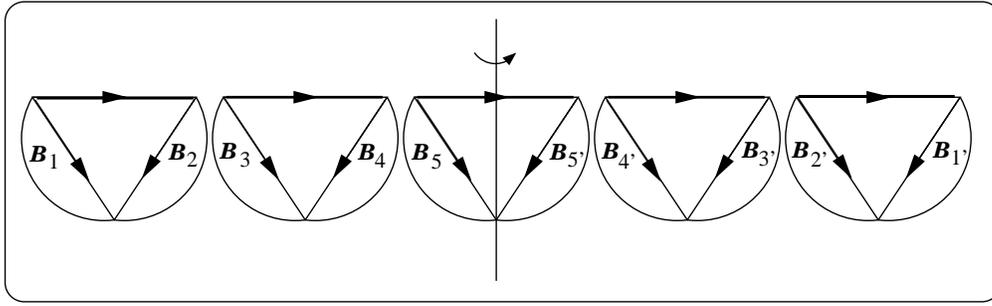
$$B(Y) = YL(B^2(Y)).$$

Pour calculer  $\tilde{B}_{\text{Sym}}(y)$ , il est nécessaire de traiter séparément deux cas selon la parité de l'entier  $i$ , qui correspond à la taille de la liste de  $B^2$ -structures attachées à l'arête racine. On considère d'abord le cas où  $i$  est impair; la figure 5.6 propose un exemple pour  $i = 5$ . Une  $B$ -structure est  $\tau$ -symétrique si elle peut être plongée dans l'espace de telle sorte que l'action de renverser l'orientation de toutes les arêtes corresponde à retourner la structure tout entière en inversant les sommets de l'arête racine, et de retrouver la structure originale. Quand une inversion de l'orientation de l'arête racine est appliquée, sur les deux arêtes restantes (non racine) du triangle central de la liste, les deux  $B$ -structures doivent s'échanger isomorphiquement (les structures  $B_5$  et  $B'_5$ ). Les  $k - 1$  triangles restants sont aussi échangés par paires, portant avec eux les  $B$ -structures attachées sur les arêtes non racine, comme illustré par la figure 5.6, où  $B_j \cong B'_j$ ,  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Cela donne un terme de  $B^i(y^2)$ , que l'on doit sommer sur toutes les valeurs impaires de l'entier  $i \geq 1$ . Le cas où  $i$  est pair est similaire, hormis le fait que l'axe de symétrie doit passer entre deux triangles étant donné qu'il n'y a pas de triangle central dans la liste de longueur paire de triangles; voir figure 5.7. On obtient le même terme  $B^i(y^2)$  dans ce cas là, pour  $i$  pair, et sommant sur les valeurs paires de  $i$ , on a finalement

$$\tilde{B}_{\text{Sym}}(y) = y \sum_{k \geq 0} B^k(y^2) = \frac{y}{1 - B(y^2)}. \quad (5.45)$$

En utilisant l'équation (5.45) et l'inversion de Lagrange composée, on obtient le nombre de  $B_{\text{Sym}}$ -structures non étiquetées. Par souci de concision et d'élégance, les résultats énumératifs sont donnés en fonction du nombre  $m$  de triangles. Il est très facile de donner ensuite ces résultats en fonction du nombre  $n$  d'arêtes, en utilisant la relation  $n = 2m + 1$ .

**Proposition 5.3.2** *Le nombre  $\tilde{B}_{\text{Sym},t,m}$  de  $B$ -structures non étiquetées  $\tau$ -symétriques*



**Figure 5.6** Une  $B_{\text{Sym}}$ -structure,  $k$  impair

sur  $m$  triangles est donné par

$$\tilde{B}_{\text{Sym},t,m} = \begin{cases} \frac{1}{m+1} \binom{3m/2}{m}, & \text{si } m \text{ est pair,} \\ \frac{1}{m} \binom{(3m-1)/2}{m+1} + \frac{1}{3m} \binom{3(m+1)/2}{m+1}, & \text{si } m \text{ est impair.} \end{cases} \quad (5.46)$$

**Preuve.** A partir de la relation (5.45), il vient, pour  $n \geq 1$ , un entier impair,

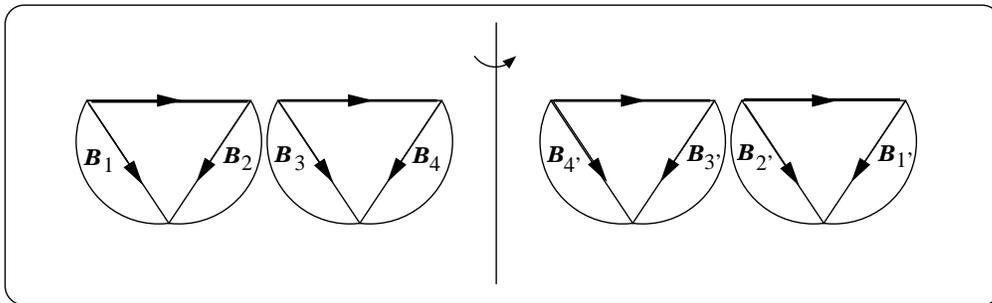
$$[y^n] \tilde{B}_{\text{Sym}}(y) = [y^{n-1}] (1 - B(y^2))^{-1} = \left[ y^{\frac{n-1}{2}} \right] (1 - B(y))^{-1}. \quad (5.47)$$

Alors, en utilisant l'inversion de Lagrange avec  $B = YL(B^2)$ , on obtient

$$\left[ y^{\frac{n-1}{2}} \right] (1 - B(y))^{-1} = \frac{2}{n-1} \left[ y^{\frac{n-1}{2}-1} \right] \left( \frac{1}{1-t} \right)' \left( \frac{1}{1-t^2} \right)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Posant alors  $m = (n-1)/2$ , et puisque

$$\left( \frac{1}{1-t} \right)' = \frac{1}{(1-t)^2} = \frac{(1+t)^2}{(1-t^2)^2},$$



**Figure 5.7** Une  $B_{\text{Sym}}$ -structure,  $k$  pair

on déduit successivement

$$\begin{aligned}
[y^{\frac{n-1}{2}}](1 - B(y))^{-1} &= \frac{1}{m}[y^{m-1}](1 + 2t + t^2) \left( \frac{1}{1-t^2} \right)^m \\
&= \frac{1}{m}[y^{m-1}](1 + 2t + t^2) \sum_{k \geq 0} \frac{m^{\langle k \rangle}}{k!} t^{2k} \\
&= \frac{1}{m}[y^{m-1}](1 + 2t + t^2) \sum_{k \geq 0} \binom{m+k-1}{k} t^{2k}.
\end{aligned}$$

Après extraction des coefficients dans la dernière expression, on arrive au résultat annoncé. ■

On peut également exprimer  $\tilde{B}_{\text{sym},t,m}$  comme suit :

$$\tilde{B}_{\text{sym},t,m} = \begin{cases} \frac{1}{2k+1} \binom{3k}{k}, & \text{si } m = 2k, \\ \frac{1}{2k+1} \binom{3k+1}{k+1}, & \text{si } m = 2k+1. \end{cases} \quad (5.48)$$

C'est d'ailleurs sous cette forme que l'on peut trouver ces nombres dans l'encyclopédie des suites d'entiers (Sloane et Plouffe, 95). La suite de ces nombres y est répertoriée comme la suite A047749. Ces nombres comptent de nombreux objets combinatoires possédant des symétries d'ordre deux, notamment les polyominos diagonalement convexes symétriques, les arbres auto-évitant (non-crossing trees), arbres ternaires symétriques, . . . (voir (Deutsch, Feretic, Noy, 02; Deutsch, 01)).

Nous donnons maintenant les expressions des séries génératrices tildes des espèces quotient que nous considérons. On utilise une version non pondérée de la proposition 3.2.1 avec le groupe  $\mathbb{Z}_2$ , ce qui mène à l'expression suivante :

$$\tilde{a}^-(y) = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} |\text{Fix}_{\tilde{a}_{o,n}^-}(\text{Id})| y^n + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} |\text{Fix}_{\tilde{a}_{o,n}^-}(\tau)| y^n. \quad (5.49)$$

Or, puisque les  $a^-$ -structures  $\tau$ -symétriques possèdent la même série génératrice tilde que les  $B_{\text{Sym}}$ -structures, on a

$$\tilde{a}^-(y) = \frac{1}{2} \tilde{a}_o^-(y) + \frac{1}{2} \tilde{B}_{\text{sym}}(y). \quad (5.50)$$

Il devient alors facile d'extraire le coefficient de  $y^n$  dans la dernière expression, et nous obtenons le nombre  $\tilde{a}_n^-$ , de 2-arbres solides pointés en une arête bâtis sur  $n$  arêtes,

$$\tilde{a}_n^- = \frac{1}{2} \tilde{a}_{o,n}^- + \frac{1}{2} \tilde{B}_{\text{sym},n}, \quad (5.51)$$

ou selon le nombre  $m$  de triangles

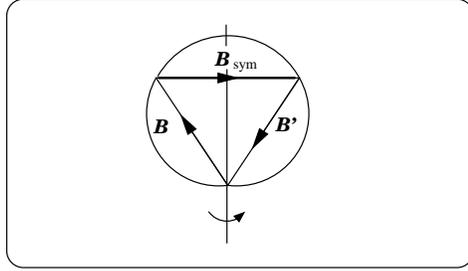
$$\tilde{a}_{t,m}^- = \frac{1}{2}\tilde{a}_{o,t,m}^- + \frac{1}{2}\tilde{B}_{\text{sym},t,m}. \quad (5.52)$$

Considérons maintenant l'espèce  $\mathbf{a}^\Delta$  des 2-arbres solides enracinés en un triangle. Etant donné que  $\mathbf{a}^\Delta = \mathbf{a}_o^\Delta / \mathbb{Z}_2$ , la proposition 3.2.1 conduit à

$$\tilde{\mathbf{a}}^\Delta(y) = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} |\text{Fix}_{\tilde{\mathbf{a}}_{o,n}^\Delta}(\text{Id})| y^n + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} |\text{Fix}_{\tilde{\mathbf{a}}_{o,n}^\Delta}(\tau)| y^n, \quad (5.53)$$

où  $|\text{Fix}_{\tilde{\mathbf{a}}_{o,n}^\Delta}(\tau)|$ , le nombre de  $\mathbf{a}^\Delta$ -structures orientées  $\tau$ -symétriques sur  $n$  arêtes doit être déterminé. Nous calculons les séries génératrices tildes de ces structures. De telles structures, voir figure 5.8, doivent comporter un axe de symétrie qui coïncide avec une des médianes du triangle racine. Mais, puisque la structure est déjà considérée à rotation près, le choix de l'axe est arbitraire. Ensuite, le côté du triangle racine traversé par l'axe doit être une  $B_{\text{Sym}}$ -structure, alors que sur les deux autres côtés, on doit avoir deux  $B$ -structures isomorphes ( $B \cong B'$ ). Ainsi,

$$\tilde{\mathbf{a}}^\Delta(y) = \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{a}}_o^\Delta(y) + \frac{1}{2}\tilde{B}_{\text{Sym}}(y)B(y^2). \quad (5.54)$$



**Figure 5.8** Une  $\mathbf{a}_o^\Delta$ -structure  $\tau$ -symétrique

De manière très similaire, en considérant l'espèce  $\mathbf{a}^\Delta = \mathbf{a}_o^\Delta / \mathbb{Z}_2$ , nous trouvons

$$\tilde{\mathbf{a}}^\Delta(y) = \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{a}}_o^\Delta(y) + \frac{1}{2}\tilde{B}_{\text{Sym}}(y)B(y^2). \quad (5.55)$$

Finalement, en combinant les relations (5.50), (5.54), (5.55) et le théorème de dissymétrie, on obtient le résultat suivant.

**Proposition 5.3.3** *La série tilde des 2-arbres solides non étiquetés possède l'expression suivante*

$$\tilde{\mathbf{a}}(y) = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{a}}_o(y) + \tilde{B}_{\text{Sym}}(y)), \quad (5.56)$$

où  $\tilde{B}_{\text{Sym}}(y)$  est la série tilde des  $B$ -structures  $\tau$ -symétriques. Ainsi, le nombre de 2-arbres solides non orientés  $\tilde{a}_{t,m}$  sur  $m$  triangles est donné par

$$\tilde{a}_{t,m} = \frac{1}{2}(\tilde{a}_{o,t,m} + \tilde{B}_{\text{Sym},t,m}), \quad (5.57)$$

où

$$\tilde{a}_{o,t,m} = \frac{1}{3m} \sum_{d|m} \phi\left(\frac{m}{d}\right) \binom{3d}{d} + \chi(3|2m+1) \frac{2}{2m+1} \binom{m-1}{\frac{2m-2}{3}} - \frac{2}{3(2m+1)} \binom{3m}{m},$$

et

$$\tilde{B}_{\text{Sym},t,m} = \begin{cases} \frac{1}{m+1} \binom{3m/2}{m}, & \text{si } m \text{ est pair,} \\ \frac{1}{m} \binom{(3m-1)/2}{m+1} + \frac{1}{3m} \binom{3(m+1)/2}{m+1}, & \text{si } m \text{ est impair.} \end{cases} \quad (5.58)$$

□

On peut également exprimer  $\tilde{a}_{t,m}$  en termes du nombre d'arêtes  $n$ . Il suffit pour ce faire de remplacer dans les formules de la proposition précédente  $m$  par  $(n-1)/2$ . En annexe, le tableau B.1 donne quelques valeurs de ces nombres en fonction du nombre  $n$  d'arêtes.

### 5.3.2 Énumération selon la distribution des arêtes

On considère à nouveau la fonction de poids  $w$  définie par

$$w : \mathbf{a}[n] \longrightarrow \mathbb{Q}[r_1, r_2, \dots], \quad (5.59)$$

où  $r = (r_1, r_2, r_3, \dots)$  est un vecteur infini de variables formelles et  $n \geq 1$ , un entier positif.

#### • Cas étiqueté :

Comme dans le cas étiqueté non pondéré, on a que seul le 2-arbre solide orienté constitué d'une seule arête est invariant par changement d'orientation. Alors, on déduit directement que le nombre

$$a_{\vec{n}} = [r_1^{n_1} r_2^{n_2} \dots][y^n] \mathbf{a}_w(y)$$

de 2-arbres solides ayant  $\vec{n}$  comme distribution (cohérente) des degrés est donné par

$$a_{\vec{n}} = \begin{cases} \frac{1}{2} a_{o,\vec{n}}, & \text{if } n > 1, \\ 1, & \text{if } n = 1, \end{cases} \quad (5.60)$$

• **Cas non étiqueté :**

Dans ce cas-ci, on commence par écrire les versions pondérées des équations fonctionnelles (5.50), (5.54) et (5.55) :

$$\tilde{a}_w^-(y) = \frac{1}{2}\tilde{a}_{o,w}^-(y) + \frac{1}{2}\tilde{B}_{\text{sym},w}(y), \quad (5.61)$$

$$\tilde{a}_w^\Delta(y) = \frac{1}{2}\tilde{a}_{o,w}^\Delta(y) + \frac{1}{2}\tilde{B}_{\text{sym},w}(y)\mathcal{B}_w(y^2), \quad (5.62)$$

$$\tilde{a}_w^\Delta(y) = \frac{1}{2}\tilde{a}_{o,w}^\Delta(y) + \frac{1}{2}\tilde{B}_{\text{sym},w}(y)B_w(y^2), \quad (5.63)$$

où  $\tilde{B}_{\text{sym},w}(y)$  désigne la série génératrice tilde des  $B$ -structures  $\tau$ -symétriques pondérées par  $w$  non étiquetées. Une application simple du théorème de dissymétrie conduit à la relation

$$\tilde{a}(y) = \frac{1}{2}\tilde{a}_{o,w}(y) + \frac{1}{2}\tilde{B}_{\text{sym},w}(y). \quad (5.64)$$

Le seul terme pour lequel on ne dispose pas de formule explicite est  $\tilde{B}_{\text{sym},w}(y)$ . Avant de le calculer, nous établissons une condition de cohérence supplémentaire sur la distribution des degrés des arêtes pour qu'un 2-arbre solide enraciné en une arête orientée soit  $\tau$ -symétrique : étant donné que l'arête racine doit nécessairement rester fixe sous le changement d'orientation et les autres s'échanger par paires, le vecteur distribution des degrés doit avoir toutes ses composantes paires exceptée une unique qui doit être impaire, correspondant alors au degré de l'arête racine.

Pour une distribution cohérente des degrés  $\vec{n} = (n_1, n_2, \dots)$  satisfaisant la condition précédente, et puisque  $\tilde{B}_{\text{sym},w}(y) = yr_k B^k(y^2)$ , nous avons

$$\tilde{B}_{\text{sym},\vec{n}} = \frac{2k}{n-1} \binom{\frac{n-1}{2}}{\frac{\vec{n}-\delta_k}{2}}, \quad (5.65)$$

où l'entier  $k$  correspond au degré de l'arête racine.

Nous sommes à présent prêts à formuler le résultat final de cette section.

**Proposition 5.3.4** *Soit  $\vec{n}$  un vecteur satisfaisant*

$$\sum_i n_i = n \quad \text{et} \quad \sum_i i n_i = 3m.$$

*Alors, le nombre  $\tilde{a}_{\vec{n}}$  de 2-arbres solides (non orientés) non étiquetés et ayant  $\vec{n}$  comme distribution des degrés des arêtes est donné par*

$$\tilde{a}_{\vec{n}} = \frac{1}{2}\tilde{a}_{o,\vec{n}} + \frac{1}{2}\tilde{B}_{\text{sym},\vec{n}}, \quad (5.66)$$

où

$$\tilde{B}_{\text{sym},\vec{n}} = \begin{cases} \frac{2k}{n-1} \binom{\frac{n-1}{2}}{\frac{\vec{n}-\delta_k}{2}}, & \text{si } \vec{n} \text{ possède une unique composante impair } k, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

$\delta_k$  étant le vecteur ayant 1 à la  $k^{\text{ième}}$  composante et 0 ailleurs, et

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{a}}_{o, \vec{n}} &= \frac{2}{n-1} \sum_{k \in \text{Supp}(\vec{n})} \sum_{d \mid \{k, \vec{n} - \delta_k\}} \phi(d) \binom{\frac{n-1}{d}}{\frac{\vec{n} - \delta_k}{d}} \\ &+ \frac{\chi(3|\vec{n})}{n} \binom{n/3}{n_1/3, n_2/3, \dots} - \frac{2}{3n} \binom{n}{n_1, n_2, \dots}. \end{aligned}$$

□

Nous présentons, en annexe, deux tableaux donnant les nombres de 2-arbres solides non étiquetés orientés et non orientés, ainsi que le nombre de  $B$ -structures  $\tau$ -symétriques. Le premier de ces tableaux (tableau B.1) donne ces nombres selon le nombre  $n$  d'arêtes, pour les valeurs impaires de  $n$  entre 1 et 21; le second (tableau B.2), selon la distribution des degrés des arêtes pour quelques vecteurs  $\vec{n}$ . Nous utilisons alors la notation  $1^{n_1} 2^{n_2} \dots$ , où  $i^{n_i}$  signifie qu'il y a  $n_i$  arêtes de degré  $i$ .



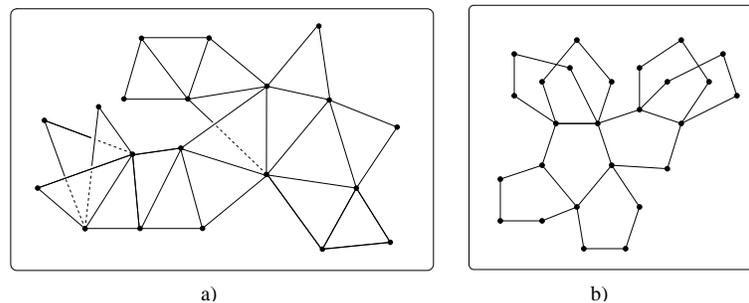
## Chapitre VI

### ÉNUMÉRATION DES 2-ARBRES $k$ -GONAUX

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au dénombrement étiqueté et non étiqueté des 2-arbres  $k$ -gonaux. Cette famille de 2-arbres est une variante des 2-arbres (libres) dans lesquels on a remplacé les triangles par des polygones à  $k$ -côtés, aussi appelés  $k$ -gones. On s'attache à donner des formules énumératives explicites dans le cas étiqueté et des formules de récurrence ainsi que des formules asymptotiques, pour le cas non étiqueté. Une section de ce chapitre est également consacrée à l'énumération de ces structures par rapport à leur périmètre, à savoir le nombre d'arêtes externes (de degré 1) du 2-arbre.

#### 6.1 Introduction

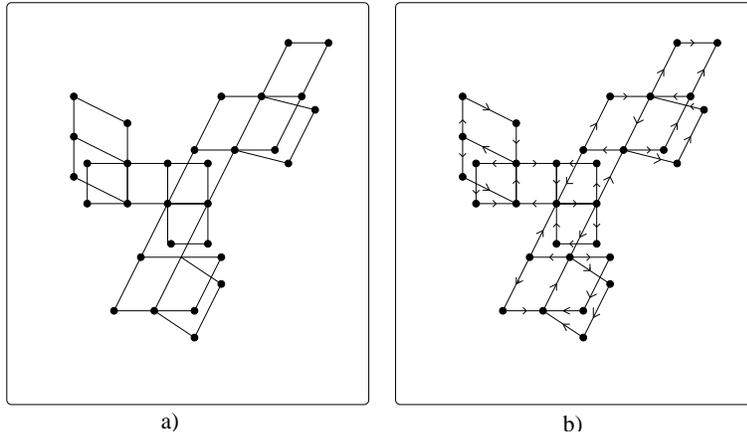
Dans (Harary, Palmer et Read, 75), les auteurs ont énuméré les 2-arbres  $k$ -gonaux exterplanaires, c'est-à-dire, les 2-arbres  $k$ -gonaux plongeables dans le plan de telle sorte que les faces non infinies sont des  $k$ -gones. Ces objets sont une généralisation assez naturelle des 2-arbres exterplanaires dont nous avons effectué une classification au chapitre 4. On s'intéresse ici au même type d'objets, hormis le fait que nous considérons des 2-arbres  $k$ -gonaux *libres* (sans réelle structure ajoutée) dans l'espace. Cela signifie que l'on considère ces structures comme des graphes simples, *i.e.*, sans aucune condition de planarité. Les figures 6.1, a) et b), et 6.2 a), montrent des exemples de 2-arbres  $k$ -gonaux, pour  $k = 3, 5$  et 4, respectivement.



**Figure 6.1** Des 2-arbres  $k$ -gonaux pour  $k = 3$  et  $k = 5$

Nous étudions d'abord les 2-arbres  $k$ -gonaux orientés, pour ensuite utiliser à nouveau

le concept d'espèces quotient pour se défaire de l'orientation. On dit qu'un 2-arbre  $k$ -gonal est *orienté* si ses arêtes sont orientées de telle sorte que tous les  $k$ -gones forment un cycle. Cependant, on peut considérer que l'orientation de n'importe quelle arête peut être étendue de façon unique à l'ensemble de la structure, en orientant tout d'abord le polygone contenant l'arête orientée, pour ensuite transmettre cette orientation aux polygones adjacents, et ainsi de suite. Cette orientation est cohérente par la nature arborescente des 2-arbres  $k$ -gonaux, c'est-à-dire, par le fait que la structure ne possède pas de cycle de  $k$ -gones. La figure 6.2 b) montre un 2-arbre 4-gonal orienté.



**Figure 6.2** Un 2-arbre 4-gonal non orienté et orienté

On suit, dans ce chapitre, l'approche de Fowler et al., introduite dans (Fowler et al., 00; Fowler et al., 02), qui correspond au cas  $k = 3$ . Cela signifie que les 2-arbres sont étiquetés aux triangles. On désigne par  $a$  et  $a_o$ , les espèces des 2-arbres  $k$ -gonaux, respectivement non orientés et orientés. On introduit aussi trois types de pointages, similaires à ceux des trois chapitres précédents :

1. — indiquant le pointage en une arête,
2.  $\diamond$  indiquant le pointage en un  $k$ -gone,
3.  $\diamond$  indiquant le pointage en un  $k$ -gone possédant lui-même une de ses arêtes distinguée.

Nous utilisons à nouveau un théorème de dissymétrie dans les cas orientés et non orientés, permettant d'exprimer les espèces  $a_o$  et  $a$  en fonction des diverses espèces pointées :

$$a_o = a_o^- + a_o^\diamond - a_o^{\diamond}, \quad (6.1)$$

$$a = a^- + a^\diamond - a^{\diamond}. \quad (6.2)$$

Il faut alors exprimer à l'aide d'équations fonctionnelles les espèces pointées dans les cas orienté et non orienté, ce qui mène à des formules d'énumération. L'idée est

d'obtenir ces équations fonctionnelles en termes d'une espèce fondamentale, notée  $B$ . Cette espèce est l'espèce  $B = \mathcal{A}^\rightarrow$ , des 2-arbres  $k$ -gonaux pointés en une arête orientée. Cela revient à dire que l'on choisit une arête quelconque d'un 2-arbre, que l'on oriente par la suite. De manière équivalente, comme mentionné précédemment, l'orientation de l'arête racine peut être étendue à l'ensemble de la structure. Ainsi, on écrit  $B = \mathcal{A}_o^-$ , ce qui est utilisé à des fins d'énumération. Cependant, on n'oriente pas toujours globalement les  $B$ -structures, permettant ainsi de prouver de manière plus élégante et naturelle certaines relations.

Nous allons distinguer deux cas dans notre démarche selon la parité de l'entier  $k$ , représentant la taille des polygones que nous considérons. Le cas où  $k$  est impair, est une généralisation assez directe des résultats de Fowler et al. (Fowler et al., 00; Fowler et al., 02). Cependant, la difficulté principale provient du cas pair, où la méthode du cas impair doit être adaptée au contexte.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. Dans la prochaine section, nous caractérisons l'espèce  $B = \mathcal{A}^\rightarrow$ , en donnant une équation combinatoire qu'elle vérifie. Nous obtenons alors quelques propriétés de cette espèce et proposons des formules d'énumération. Le but est alors d'exprimer les différentes espèces pointées apparaissant dans le théorème de dissymétrie en fonction de l'espèce de base  $B$  et d'en déduire les résultats énumératifs que nous désirons établir. Le cas des 2-arbres orientés est conduit dans la section 6.3. Ensuite, le cas non orienté est traité en section 6.3, en distinguant deux cas suivant la parité de l'entier  $k$ . La section 6.5 a pour but de généraliser les résultats des deux sections précédentes en tenant compte du périmètre des 2-arbres. On introduit une fonction de poids sur les 2-arbres agissant comme compteur d'arêtes externes. Finalement, la dernière section de ce chapitre propose une étude asymptotique des 2-arbres solides  $k$ -gonaux non étiquetés.

## 6.2 L'espèce $B$ des 2-arbres $k$ -gonaux pointés en une arête orientée

L'espèce  $B$ , des 2-arbres  $k$ -gonaux pointés en une arête orientée, joue un rôle important dans notre démarche. En effet, toutes les autres espèces pointées liées aux espèces  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}_o$  vont être exprimées par des équations fonctionnelles en termes de  $B$ . Nous commençons par caractériser  $B$  par une relation, qui est une généralisation directe du cas  $k = 3$ . On utilise ici le fait que cette relation est une spécialisation de la formule (3.7) où seuls les triangles sont étiquetés (cela signifie que l'on a posé  $Y := 1$ ). Nous avons

$$B(X) = E(XB^{k-1}(X)), \quad (6.3)$$

où  $E$  est l'espèce des ensembles et  $X$  représente la sorte des triangles.

Il est intéressant de noter que la formule (6.3) a également du sens pour  $k = 2$ , correspondant alors aux arborescences (arbres enracinés) ordinaires étiquetées aux arêtes. De plus, on peut relier l'espèce  $B = \mathcal{A}^\rightarrow$  avec l'espèce  $\mathcal{A}$  des arborescences caractérisée par la relation  $\mathcal{A} = XE(\mathcal{A})$ , où  $X$  représente alors la sorte des sommets. En effet, à

partir de (6.3), on déduit successivement

$$(k-1)XB^{k-1} = (k-1)XE((k-1)XB^{k-1}), \quad (6.4)$$

sachant que l'on a  $E^m(X) = E(mX)$ , et par unicité,

$$(k-1)XB^{k-1} = \mathcal{A}((k-1)X). \quad (6.5)$$

On obtient alors une expression pour l'espèce  $B$  en termes de celle des arborescences.

**Proposition 6.2.1** *L'espèce  $B = \mathcal{A}^\rightarrow$  des 2-arbres  $k$ -gonaux pointés en une arête orientée satisfait la relation*

$$B = \sqrt[k-1]{\frac{\mathcal{A}((k-1)X)}{(k-1)X}}. \quad (6.6)$$

□

On déduit immédiatement un corollaire de la proposition précédente, fournissant des formules énumératives relatives à l'espèce  $B$ .

**Corollaire 6.2.2** *Les nombres  $a_n^\rightarrow$ ,  $a_{n_1, n_2, \dots}^\rightarrow$  et  $b_n = \tilde{a}_n^\rightarrow$  de 2-arbres  $k$ -gonaux pointés en une arête orientée possédant  $n$   $k$ -gones, respectivement étiquetés, laissés fixes par une permutation de type cyclique  $1^{n_1} 2^{n_2} \dots$  et non étiquetés, vérifient les formules et la récurrence qui suivent :*

$$a_n^\rightarrow = ((k-1)n+1)^{n-1} = m^{n-1}, \quad (6.7)$$

où  $m = (k-1)n+1$  donne le nombre d'arêtes,

$$a_{n_1, n_2, \dots}^\rightarrow = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + (k-1) \sum_{d|i} (dn_d)^{n_i-1} (1 + (k-1) \sum_{d|i, d<i} dn_d), \quad (6.8)$$

et

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq j \leq n} \sum_{\alpha} (|\alpha|+1) b_{\alpha_1} b_{\alpha_2} \dots b_{\alpha_{k-1}} b_{n-j}, \quad b_0 = 1, \quad (6.9)$$

la deuxième somme étant prise sur les  $(k-1)$ -uplets d'entiers  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1})$  tels que  $|\alpha|+1$  divise l'entier  $j$ , avec  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{k-1}$ .

**Preuve.** Les formules (6.7) et (6.8) sont obtenues en spécialisant avec  $\mu = (k-1)^{-1}$  les formules suivantes, données et prouvées dans (Fowler et al., 00; Fowler et al., 02),

$$\left(\frac{\mathcal{A}(x)}{x}\right)^\mu = \sum_{n \geq 0} \mu(\mu+n)^{n-1} \frac{x^n}{n!}, \quad (6.10)$$

$$Z\left(\frac{A(X/\mu)}{X/\mu}\right)^\mu = \sum_{n_1, n_2, \dots} \frac{x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots}{1^{n_1} n_1! 2^{n_2} n_2! \dots} \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{\mu} \sum_{d|i} dn_d\right)^{n_i-1} \left(1 + \frac{1}{\mu} \sum_{d|i, d<i} dn_d\right). \quad (6.11)$$

En ce qui concerne la récurrence (6.9), il suffit de prendre la dérivée logarithmique de l'expression

$$\tilde{B}(x) = \exp\left(\sum_{i \geq 1} \frac{x^i \tilde{B}^{k-1}(x^i)}{i}\right), \quad (6.12)$$

où  $\tilde{B}(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n$  est la série tilde de l'espèce  $B$ , que l'on obtient à partir de la relation (6.3) et de l'utilisation des lois de substitution de la théorie des espèces. On commence par écrire

$$\tilde{B}(x) = \exp\left(\sum_{i \geq 1} \frac{1}{i} \Omega(x^i)\right), \quad (6.13)$$

où l'on a posé  $\Omega(x) = x \tilde{B}^{k-1}(x) = \sum_{n \geq 0} \omega_n x^n$ . On a alors

$$x \frac{\tilde{B}'(x)}{\tilde{B}(x)} = x \sum_{i \geq 1} \frac{1}{i} \Omega'(x^i) x^{i-1} \quad (6.14)$$

$$= \sum_{i \geq 1} \sum_{n \geq 0} n \omega_n x^{in} \quad (6.15)$$

$$= \sum_{\nu \geq 1} \left(\sum_{d|\nu} d \omega_d\right) x^\nu. \quad (6.16)$$

Alors,

$$x \tilde{B}'(x) = \sum_{n \geq 1} n b_n x^n = \left(\left(\sum_{d|\nu} d \omega_d\right) x^\nu\right) \cdot \left(\sum_{n \geq 0} b_n x^n\right).$$

On obtient la formule (6.12) en explicitant  $\omega_n$ . ■

Notons que les suites d'entiers  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , pour  $k = 2, 3, 4, 5$ , sont répertoriées dans l'encyclopédie en ligne des suites d'entiers (Sloane et Plouffe, 95), et l'équation (6.3) dans l'encyclopédie des structures combinatoires (Inria, projet Algo).

**Remarque 6.2.3** La formule (6.7) peut également être établie en adaptant le codage de Prüfer des arborescences (étiquetées) sur  $[n]$  dont le nombre est  $n^{n-1}$ .

**Remarque 6.2.4** Il est facile de voir que, pour tout  $n \geq 1$ ,  $b_n$  est un polynôme de degré  $n - 1$  en  $k$ . Cela provient de la relation (6.8) et de la formule explicite pour  $b_n$

$$b_n = \sum_{n_1 + 2n_2 + \dots = n} \frac{a_{\vec{n}_1, n_2, \dots}}{1^{n_1} n_1! 2^{n_2} n_2! \dots}, \quad (6.17)$$

qui suit de la proposition 1.4.4. En particulier, dans la section finale de ce chapitre, nous étudions le comportement asymptotique des nombres  $b_n$  comme fonction de  $k$ .

**Remarque 6.2.5** On peut également utiliser la formule (6.6) afin de calculer la décomposition moléculaire de  $B$  à partir de celle de l'espèce  $\mathcal{A}$ , via le théorème du binôme. Pour de plus amples détails, le lecteur est renvoyé à (Auger, Labelle et Leroux, 02).

### 6.3 Cas orienté

Notre première tâche consiste à déterminer les équations fonctionnelles que satisfont les diverses espèces pointées liées à  $\mathbf{a}_o$ , apparaissant dans le théorème de dissymétrie.

**Proposition 6.3.1** *Les espèces  $\mathbf{a}_o^-$ ,  $\mathbf{a}_o^\diamond$ , et  $\mathbf{a}_o^{\diamond\circ}$  sont caractérisées par les isomorphismes d'espèces suivants :*

$$\mathbf{a}_o^- = B, \quad (6.18)$$

$$\mathbf{a}_o^\diamond = XC_k(B), \quad (6.19)$$

$$\mathbf{a}_o^{\diamond\circ} = XB^k, \quad (6.20)$$

où  $B = \mathbf{a}^\rightarrow$  et  $C_k$  est l'espèce des cycles orientés de longueur  $k$ .

**Preuve.** La relation (6.18) est triviale par définition de l'espèce  $B$ . En ce qui concerne (6.19) et (6.20), il suffit de voir qu'étant donné que les arêtes autour du triangle racine sont orientées, on peut venir y attacher des  $B$ -structures. Dans le cas de  $\mathbf{a}_o^\diamond$ , l'orientation de ces arêtes est cyclique par convention; pour  $\mathbf{a}_o^{\diamond\circ}$ , il suffit de remarquer que l'arête pointée induit un ordre total sur les arêtes. ■

Utilisant le théorème de dissymétrie, on obtient l'expression de la série tilde  $\tilde{\mathbf{a}}_o(x)$  des 2-arbres  $k$ -gonaux orientés non étiquetés, en termes des séries des espèces pointées correspondantes :

$$\tilde{\mathbf{a}}_o(x) = \tilde{\mathbf{a}}_o^-(x) + \tilde{\mathbf{a}}_o^\diamond(x) - \tilde{\mathbf{a}}_o^{\diamond\circ}(x). \quad (6.21)$$

Alors, la proposition 6.3.1 nous permet d'obtenir une forme explicite de la série  $\tilde{\mathbf{a}}_o(x)$  comme fonction de la série  $\tilde{B}(x) = \tilde{\mathbf{a}}^\rightarrow(x)$ .

**Proposition 6.3.2** *La série tilde  $\tilde{\mathbf{a}}_o(x)$  des 2-arbres  $k$ -gonaux orientés non étiquetés est donnée par*

$$\tilde{\mathbf{a}}_o(x) = \tilde{B}(x) + \frac{x}{k} \sum_{\substack{d|k \\ d>1}} \phi(d) \tilde{B}^{\frac{k}{d}}(x^d) - \frac{k-1}{k} x \tilde{B}^k(x). \quad (6.22)$$

□

**Corollaire 6.3.3** *Les nombres  $a_{o,n}$  et  $\tilde{a}_{o,n}$ , de 2-arbres  $k$ -gonaux orientés étiquetés et non étiquetés, respectivement, possèdent les expressions suivantes :*

$$a_{o,n} = ((k-1)n+1)^{n-2} = m^{n-2}, \quad n \geq 2, \quad (6.23)$$

$$\tilde{a}_{o,n} = b_n - \frac{k-1}{k} b_{n-1} + \frac{1}{k} \sum_{\substack{d|k \\ d>1}} \phi(d) b_{\frac{n-1}{d}}, \quad (6.24)$$

où

$$b_i^{(j)} = [x^i] \tilde{B}^j(x) = \sum_{i_1+\dots+i_j=i} b_{i_1} b_{i_2} \dots b_{i_j},$$

désigne le coefficient de  $x^i$  dans le série  $\tilde{B}^j(x)$ , avec la convention que  $b_r^{(j)} = 0$  si  $r$  n'est pas un entier positif ou nul.

**Preuve.** Dans le cas étiqueté, il suffit de remarquer que l'on a  $b_n^- = m a_{o,n}$ . En ce qui concerne le cas non étiqueté, on obtient directement la relation (6.24) de (6.22) en extrayant simplement le coefficient en  $x^n$ . ■

Passons maintenant au cas des 2-arbres  $k$ -gonaux non orientés.

#### 6.4 Cas non orienté

Dans le cas non orienté, nous devons utiliser la notion d'espace quotient avec le groupe  $\mathbb{Z}_2 = \{1, \tau\}$ , où l'action de  $\tau$  est toujours de renverser l'orientation de toutes les arêtes, voir section 3.2 et le chapitre précédent. On exprime alors les espèces pointées liées à l'espace  $\mathcal{a}$  de la manière qui suit :

$$\mathcal{a}^- = \frac{\mathcal{a}^-}{\mathbb{Z}_2}, \quad \mathcal{a}^\diamond = \frac{\mathcal{a}^\diamond}{\mathbb{Z}_2} = \frac{XC_k(B)}{\mathbb{Z}_2}, \quad \mathcal{a}^\circ = \frac{\mathcal{a}^\circ}{\mathbb{Z}_2} = \frac{XB^k}{\mathbb{Z}_2}. \quad (6.25)$$

On rappelle les formules caractérisant les séries génératrices associées à une espace quotient  $F/\mathbb{Z}_2$ , (voir (3.10))

$$(F/\mathbb{Z}_2)(x) = \frac{1}{2} (F(x) + F_\tau(x)), \quad (6.26)$$

$$(F/\mathbb{Z}_2)^\sim(x) = \frac{1}{2} (\tilde{F}(x) + \tilde{F}_\tau(x)), \quad (6.27)$$

où  $F_\tau(x)$  est la série génératrice exponentielle des  $F$ -structures étiquetées fixées sous l'action de  $\tau$  et  $\tilde{F}_\tau(x) = \sum_{n \geq 0} |\text{Fix}_{\tilde{F}_n}(\tau)| x^n$  est la série génératrice tilde (des  $F$ -structures non étiquetées)  $\tau$ -symétriques.

Cependant, d'importantes différences apparaissent durant le raisonnement suivant la parité de  $k$ . La différence principale provient de l'existence d'arêtes *opposées* dans les  $k$ -gones lorsque  $k$  est pair. Alors, nous traitons séparément les deux cas de parité de l'entier  $k$ .

### 6.4.1 Cas impair

On s'intéresse ici aux 2-arbres  $k$ -gonaux non orientés où  $k$ , représentant la taille des polygones, est un entier impair. L'énumération étiquetée des 2-arbres  $k$ -gonaux (non

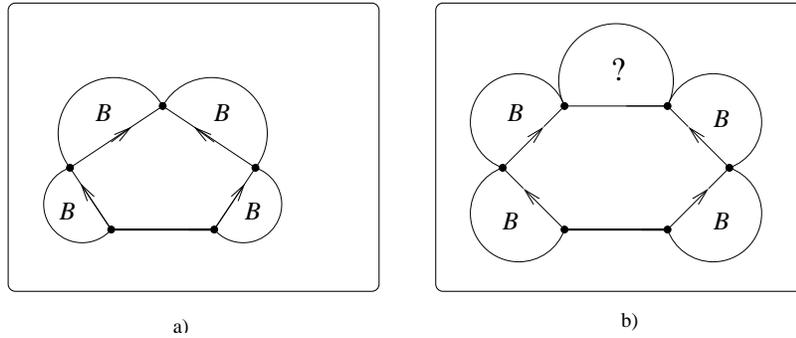


Figure 6.3 Pages dans le cas non orienté pour a)  $k = 5$ , b)  $k = 6$

orientés) est assez directe. En effet, il suffit de remarquer que le seul 2-arbre  $k$ -gonal orienté invariant lorsque l'on applique une inversion de l'orientation des arêtes, pour un nombre fixé de polygones, est celui dont tous les triangles partagent une arête commune. Alors, on dispose de la relation simple

$$2a_n = a_{o,n} + 1,$$

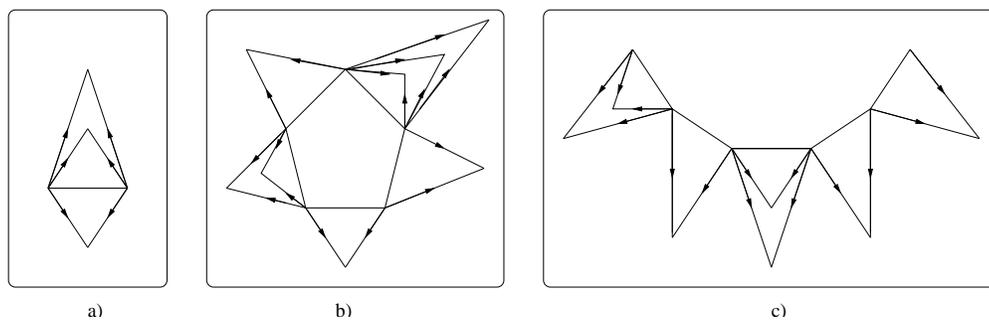
où  $a_n$  est le nombre de 2-arbres  $k$ -gonaux étiquetés sur  $n$  polygones, conduisant à la proposition suivante.

**Proposition 6.4.1** *Le nombre  $a_n$  de 2-arbres  $k$ -gonaux,  $k$  impair, étiquetés sur  $n$   $k$ -gones est donné par*

$$a_n = \frac{1}{2} (m^{n-2} + 1), \quad n \geq 2, \quad (6.28)$$

où  $m = (k - 1)n + 1$  donne le nombre d'arêtes.  $\square$

Le cas non étiqueté est bien évidemment plus ardu. Nous partons du fait que chaque  $\mathcal{A}^-$ -structure (non orientée), voir figure 6.3, est composée d'un ensemble de pages (voir chapitre 3). Or, pour chaque page, dans le triangle contenant l'arête pointée, on peut définir une orientation canonique "fuyante" (s'éloignant de l'arête pointée) des  $k - 1$  arêtes non pointées ; voir figure 6.3 a), dans le cas où la taille des polygones est impaire. Lorsque  $k$  est pair, il reste une ambiguïté pour l'arête faisant face à l'arête racine; voir figure 6.3 b). Cette remarque nous conduit à introduire des espèces *squelettes* lorsque  $k$  est impair, par analogie avec la démarche de Fowler et al. dans (Fowler et al., 00; Fowler et al., 02), pour le cas  $k = 3$ . Ce sont des espèces à deux sortes, notées  $Q(X, Y)$ ,  $S(X, Y)$  et  $U(X, Y)$ , où  $X$  désigne la sorte des  $k$ -gones et  $Y$  celle des arêtes orientées. Ces trois espèces squelettes sont définies par les figures 6.4 a), b) et c), pour  $k = 5$ , respectivement.



**Figure 6.4** Espèces squelette a)  $Q(X, Y)$ , b)  $S(X, Y)$  et c)  $U(X, Y)$

De manière analogue au cas  $k = 3$ , on obtient des équations fonctionnelles caractérisant les trois espèces  $Q$ ,  $S$  et  $U$  en termes d'espèces quotient à l'aide du groupe  $\mathbb{Z}_2$ .

**Proposition 6.4.2** *Les espèces squelettes  $Q$ ,  $S$  et  $U$  possèdent les expressions suivantes :*

$$Q(X, Y) = E(XY^2)/\mathbb{Z}_2, \quad (6.29)$$

$$S(X, Y) = C_k(E(XY^2))/\mathbb{Z}_2, \quad (6.30)$$

$$U(X, Y) = (E(XY^2))^k/\mathbb{Z}_2. \quad (6.31)$$

□

On utilise les équations de la proposition précédente pour obtenir des relations en termes des espèces squelettes pour les espèces pointées  $a^-$ ,  $a^\diamond$  et  $a^\diamondsuit$ .

**Proposition 6.4.3** *Pour  $k \geq 3$  un entier impair, les espèces  $a^-$ ,  $a^\diamond$  et  $a^\diamondsuit$  satisfont les équations fonctionnelles suivantes en termes de l'espèce  $B$  :*

$$a^- = Q(X, B^{\frac{k-1}{2}}), \quad (6.32)$$

$$a^\diamond = X \cdot S(X, B^{\frac{k-1}{2}}), \quad (6.33)$$

$$a^\diamondsuit = X \cdot U(X, B^{\frac{k-1}{2}}). \quad (6.34)$$

□

Dans le but d'obtenir la série génératrice des  $a$ -structures non étiquetées, on calcule d'abord les séries indicatrices de cycles des espèces  $Q$ ,  $S$  et  $U$ , en utilisant la méthode de (Fowler et al., 00; Fowler et al., 02).

**Proposition 6.4.4** *Les séries indicatrices de cycles des espèces à deux sortes  $Q(X, Y)$ ,  $S(X, Y)$  et  $U(X, Y)$  sont données par*

$$Z_Q = \frac{1}{2} \left( Z_{E(XY^2)} + q \right), \quad (6.35)$$

$$Z_S = \frac{1}{2} \left( Z_{C_k(E(XY^2))} + q \cdot (p_2 \circ Z_{E(XY^2)})^{\frac{k-1}{2}} \right), \quad (6.36)$$

$$Z_U = \frac{1}{2} \left( Z_{(E(XY^2))^k} + q \cdot (p_2 \circ Z_{E(XY^2)})^{\frac{k-1}{2}} \right), \quad (6.37)$$

où  $q = h \circ (x_1 y_2 + p_2 \circ (x_1 \frac{y_1^2 - y_2}{2}))$ ,  $p_2$  représente la somme de puissances d'ordre deux,  $h$  la fonction symétrique homogène, et  $\circ$  la composition pléthystique.

**Preuve.** La méthode générale de calcul ainsi que la formule (6.35) proviennent de (Fowler et al., 00; Fowler et al., 02). Pour une espèce quelconque  $F = F(X, Y)$ , l'idée consiste à compter les  $F(X, Y)$ -structures non étiquetées colorées avec deux jeux de couleurs différentes, un pour les  $k$ -gones et l'autre pour les arêtes. Considérons l'espèce  $S$ . Pour laisser fixe une  $C_k(E(XY^2))$ -structure, le cycle de longueur  $k$  de base doit nécessairement comporter (au moins) un axe de symétrie passant à travers le milieu d'un des côtés. Une nouvelle fois, le choix de l'axe est arbitraire, dans le cas où la structure aurait plusieurs axes de symétrie. De part et d'autre de l'axe, chaque  $E(XY^2)$ -structure colorée doit avoir son image miroir; cela donne le terme  $(p_2 \circ Z_{E(XY^2)})^{\frac{k-1}{2}}$ . Enfin, la  $E(XY^2)$ -structure attachée à l'arête distinguée par l'axe doit être globalement laissée fixe, donnant le facteur  $q$ . Dans le cas de l'espèce  $U$ , le raisonnement est très similaire, excepté le fait que l'axe de symétrie passe par l'arête déjà distinguée. ■

Nous sommes alors prêts à donner l'expression de la série tilde des 2-arbres  $k$ -gonaux non orientés.

**Proposition 6.4.5** *Soit  $k \geq 3$  un entier impair. Alors, la série tilde des 2-arbres  $k$ -gonaux (non orientés) non étiquetés est donnée par*

$$\tilde{a}(x) = \frac{1}{2} \left( \tilde{a}_o(x) + \exp \left( \sum_{i \geq 1} \frac{1}{2i} (2x^i \tilde{B}^{\frac{k-1}{2}}(x^{2i}) + x^{2i} \tilde{B}^{k-1}(x^{2i}) - x^{2i} \tilde{B}^{\frac{k-1}{2}}(x^{4i})) \right) \right). \quad (6.38)$$

**Preuve.** On utilise le théorème de dissymétrie, combiné aux équations (6.35), (6.36) et (6.37), pour obtenir dans un premier temps la série indicatrice de cycles de l'espèce  $a$  :

$$Za(x_1, x_2, \dots) = \frac{1}{2} Za_o + \frac{1}{2} q|_{y_i := p_i \circ Z_{B^{(k-1)/2}}}.$$

A partir des lois de substitution de l'énumération non étiquetée, la relation (6.38) suit naturellement. ■

On déduit alors de la proposition précédente, le dénombrement non étiquetée des 2-arbres  $k$ -gonaux non orientés.

**Corollaire 6.4.6** *Pour  $k \geq 3$ , un entier impair, le nombre  $\tilde{a}_n$  de 2-arbres  $k$ -gonaux non étiquetés bâtis sur  $n$   $k$ -gones, satisfait la récurrence suivante*

$$\tilde{a}_n = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n \left( \sum_{l|j} l \omega_l \right) \left( \tilde{a}_{n-j} - \frac{1}{2} \tilde{a}_{o,n-j} \right) + \frac{1}{2} \tilde{a}_{o,n}, \quad \tilde{a}_0 = 1, \quad (6.39)$$

où, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\omega_n = 2b_{\frac{n-1}{2}}^{\binom{k-1}{2}} + b_{\frac{n-2}{2}}^{(k-1)} - b_{\frac{n-2}{4}}^{\binom{k-1}{2}}, \quad (6.40)$$

et  $b_i^{(j)}$  est défini dans le corollaire 6.3.3.

**Preuve.** Il suffit de prendre la dérivée logarithmique de l'expression

$$\tilde{a}(x) - \frac{1}{2} \tilde{a}_o(x) = \frac{1}{2} \exp \left( \sum_{i \geq 1} \frac{1}{2i} (2x^i \tilde{B}^{\frac{k-1}{2}}(x^{2i}) + x^{2i} \tilde{B}^{k-1}(x^{2i}) - x^{2i} \tilde{B}^{\frac{k-1}{2}}(x^{4i})) \right),$$

de façon similaire à la preuve du corollaire 6.2.2. ■

## 6.4.2 Cas pair

Le cas pair est beaucoup plus délicat. Par exemple, il existe plusieurs 2-arbres  $k$ -gonaux orientés étiquetés invariants par changement d'orientation. Ces structures s'obtiennent à partir d'un arbre ordinaire étiquetée aux arêtes, en remplaçant les arêtes par des  $k$ -gones attachés entre eux selon leurs arêtes opposées. Il est bien connu que le nombre d'arbres étiquetés aux arêtes possédant  $n$  arêtes est  $(n+1)^{n-2}$ . Ainsi, nous avons le résultat suivant.

**Proposition 6.4.7** *Le nombre  $a_n$  de 2-arbres  $k$ -gonaux,  $k$  pair, étiquetés sur  $n$   $k$ -gones est donné par*

$$a_n = \frac{1}{2} (m^{n-2} + (n+1)^{n-2}), \quad n \geq 2, \quad (6.41)$$

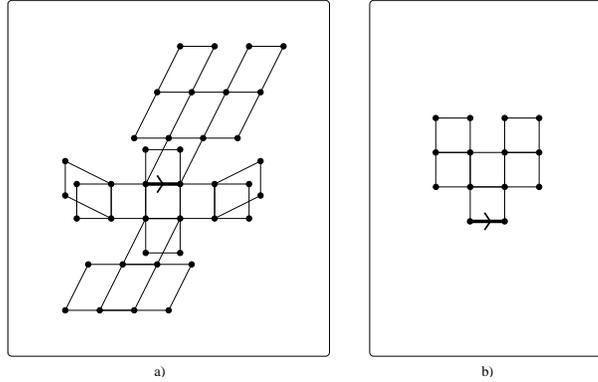
où  $m = (k-1)n + 1$  donne le nombre d'arêtes. □

Pour le cas non étiqueté, on ne peut notamment pas utiliser les espèces squelettes à l'image du cas impair. Pour calculer les séries génératrices tildes des espèces  $\mathbf{a}^-$ ,  $\mathbf{a}^\diamond$  et  $\mathbf{a}^\circ$ , on applique la relation (6.27) aux formules (6.25). Par exemple, pour l'espèce  $\mathbf{a}^-$ , cela se traduit par

$$\tilde{\mathbf{a}}^-(x) = \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{a}}^{\rightarrow}(x) + \tilde{\mathbf{a}}_{\tau}^{\rightarrow}(x)), \quad (6.42)$$

où  $\tilde{\mathbf{a}}_{\tau}^{\rightarrow}(x) = \sum_{n \geq 0} |\text{Fix}_{\tilde{\mathbf{a}}_n^{\rightarrow}}(\tau)| x^n$  désigne la série tilde des 2-arbres  $k$ -gonaux orientés pointés en une arête non étiquetés  $\tau$ -symétriques. On note alors  $\mathbf{a}_S$ , l'espèce des  $\mathbf{a}^{\rightarrow}$ -structures  $s$  qui sont isomorphes à leur image  $\tau \cdot s$  sous le changement d'orientation.

Ces structures sont précisément celles que nous cherchons et nous devons ainsi calculer la série  $\tilde{a}_S(x) = \tilde{a}_\tau^{\rightarrow}(x)$ . Cette partie est la plus difficile de ce chapitre. En effet, pour calculer  $\tilde{a}_S(x)$ , il est nécessaire d'introduire plusieurs espèces auxiliaires, afin d'analyser les  $a_S$ -structures. La première d'entre elles, notée  $a_{TS}$ , consiste en la classe des  $a_S$ -structures pour lesquelles chaque page attachée à l'arête racine est symétrique verticalement, sans symétries croisées (voir plus loin); on parle alors de pages *totalemt symétriques*.



**Figure 6.5** a) Une structure de l'espèce  $a_{TS}$ , et b) une des pages totalement symétriques qui la composent

Cette espèce est caractérisée par l'équation fonctionnelle suivante (voir figure 6.5, pour une illustration d'une page totalement symétrique) :

$$a_{TS} = E(X \cdot X_{\equiv}^2 < B^{\frac{k-2}{2}} > \cdot a_{TS}) = E(P_{TS}), \quad (6.43)$$

où  $X_{\equiv}^2 < F >$  désigne l'espèce des couples (ordonnés) de  $F$ -structures isomorphes, et  $P_{TS}$  est l'espèce des *pages totalement symétriques*. Au niveau des séries tildes, cela se traduit par la relation

$$\tilde{a}_{TS}(x) = \exp \left( \sum_{i \geq 1} \frac{1}{i} x^i \tilde{B}^{\frac{k-2}{2}}(x^{2i}) \tilde{a}_{TS}(x^i) \right). \quad (6.44)$$

On en déduit alors le dénombrement non étiqueté des  $a_{TS}$ -structures.

**Proposition 6.4.8** *Le nombre  $\beta_n$  de  $a_{TS}$ -structures non étiquetées sur  $n$  polygones satisfait la récurrence*

$$\beta_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \sum_{d|i} d \pi_d \right) \beta_{n-i}, \quad n \geq 1 \quad \beta_0 = 1, \quad (6.45)$$

où

$$\pi_n = \tilde{P}_{TS,n} = \sum_{\substack{i+j=n-1 \\ i \text{ pair}}} b_{\frac{i}{2}}^{\binom{k-2}{2}} \beta_j. \quad (6.46)$$

**Preuve.** Il suffit de prendre la dérivée logarithmique de l'équation (6.44), à savoir

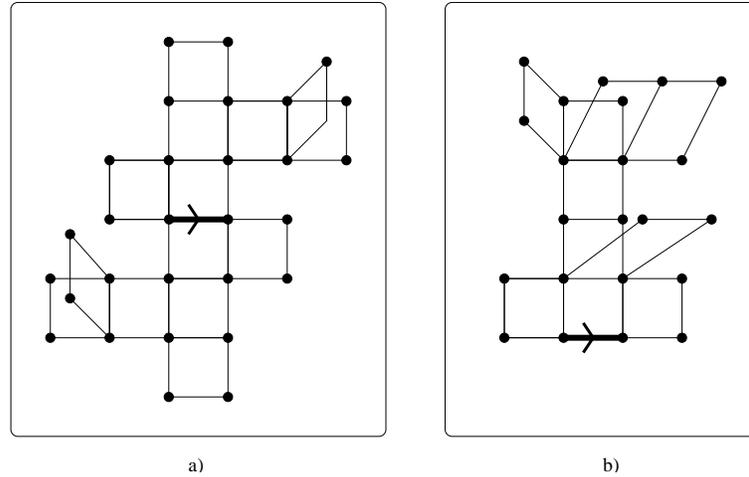
$$x \frac{(\tilde{\mathbf{a}}_{\text{TS}})'(x)}{\tilde{\mathbf{a}}_{\text{TS}}(x)} = x \cdot \sum_{i \geq 1} \Omega'(x^i) x^{i-1}, \quad (6.47)$$

où  $\Omega(x) = \sum_{n \geq 1} \omega_n x^n = x \tilde{B}^{\frac{k-2}{2}}(x^2) \tilde{\mathbf{a}}_{\text{TS}}(x)$ . Ensuite, l'extraction du coefficient de  $x^n$  dans les deux membres de

$$x(\tilde{\mathbf{a}}_{\text{TS}})'(x) = \left( \sum_{i \geq 1} \Omega'(x^i) x^i \right) \tilde{\mathbf{a}}_{\text{TS}}(x) \quad (6.48)$$

conduit à (6.45) après avoir utilisé la relation (6.43), puisque  $\Omega(x) = \tilde{P}_{\text{TS}}(x)$ . ■

Nous introduisons maintenant deux autres espèces auxiliaires, à savoir  $P_{\text{AL}}$  et  $P_{\text{M}}$ , des *paires de pages alternées* et des *pages mixtes*. Par définition, une paire de *pages alternées* est une paire (non ordonnée) de pages orientées (des  $\mathbf{a}^{\rightarrow}$ -structures composées d'une seule page) de la forme  $\{s, \tau \cdot s\}$ , où  $s$  et  $\tau \cdot s$  ne sont pas isomorphes. La figure 6.6 a) propose un exemple de telle structure. Une *page mixte* est une page symétrique, possédant *au moins* une symétrie alternée; voir la figure 6.6 b) pour une illustration d'une page mixte.



**Figure 6.6** Une paire de pages alternées et une page mixte

On peut alors exprimer les deux espèces précédentes l'une en fonction de l'autre, comme suit :

$$P_{\text{AL}} = \Phi_2 \langle X B^{k-1} - (P_{\text{TS}} + P_{\text{M}}) \rangle, \quad (6.49)$$

$$P_{\text{M}} = X \cdot X_{\equiv}^2 \langle B^{\frac{k-2}{2}} \rangle \cdot (\mathbf{a}_{\text{S}} - \mathbf{a}_{\text{TS}}), \quad (6.50)$$

où  $\Phi_2 < F >$  représente l'espèce des paires de  $F$ -structures de la forme  $\{s, \tau \cdot s\}$  et  $E_+ = E - 1$  est l'espèce des ensembles non vides. Passant au niveau des séries génératrices tildes, il vient

$$\tilde{P}_{AL}(x) = \frac{1}{2}(x^2 \tilde{B}^{k-1}(x^2) - \tilde{P}_{TS}(x^2) - \tilde{P}_M(x^2)), \quad (6.51)$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_M(x) &= \left( XX^2 < B^{\frac{k-2}{2}} > \cdot \mathbf{a}_{TS} \cdot E_+(P_{AL} + P_M) \right)^\sim(x) \\ &= x \tilde{B}^{\frac{k-2}{2}}(x^2) \tilde{\mathbf{a}}_{TS}(x). \end{aligned} \quad (6.52)$$

$$\cdot \left( \exp \left( \sum_{i \geq 1} \frac{1}{i} (\tilde{P}_{AL}(x^i) + \tilde{P}_M(x^i)) \right) - 1 \right) \quad (6.53)$$

$$= x \tilde{B}^{\frac{k-2}{2}}(x^2) (\tilde{\mathbf{a}}_S(x) - \tilde{\mathbf{a}}_{TS}(x)). \quad (6.54)$$

Si on désigne par  $\tilde{\mathbf{a}}_S(x)$  la série génératrice tilde des  $\mathbf{a}^-$ -structures  $\tau$ -symétriques non étiquetées, alors, on a (voir figure 6.7)

$$\tilde{\mathbf{a}}_S(x) = E(P_{TS} + P_{AL} + P_M)^\sim(x) \quad (6.55)$$

$$= \exp \left( \sum_{i \geq 1} \frac{1}{i} (\tilde{P}_{TS}(x^i) + \tilde{P}_{AL}(x^i) + \tilde{P}_M(x^i)) \right). \quad (6.56)$$

À partir de cette dernière relation, on peut déduire une récurrence pour le nombre  $\alpha_n = \tilde{\mathbf{a}}_{S,n}$  de 2-arbres  $k$ -gonaux pointés en une arête non étiquetés  $\tau$ -symétriques,  $\tilde{P}_{AL,n}$  et  $\tilde{P}_{M,n}$  de pages alternées et mixtes, respectivement, bâties sur  $n$  polygones :

$$\alpha_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \sum_{d|i} d \omega_d \right) \alpha_{n-i}, \quad \alpha_0 = 1, \quad (6.57)$$

$$\tilde{P}_{M,n} = \sum_{i=0}^{n-1} b_i^{\binom{k-2}{2}} \alpha_{n-1-i} - \tilde{P}_{TS,n}, \quad (6.58)$$

$$\tilde{P}_{AL,n} = \frac{1}{2} \left( b_{\frac{n-2}{2}}^{\binom{k-1}{2}} - \tilde{P}_{TS,n/2} - \tilde{P}_{M,n/2} \right), \quad (6.59)$$

où

$$\omega_k = \tilde{P}_{TS,k} + \tilde{P}_{AL,k} + \tilde{P}_{M,k},$$

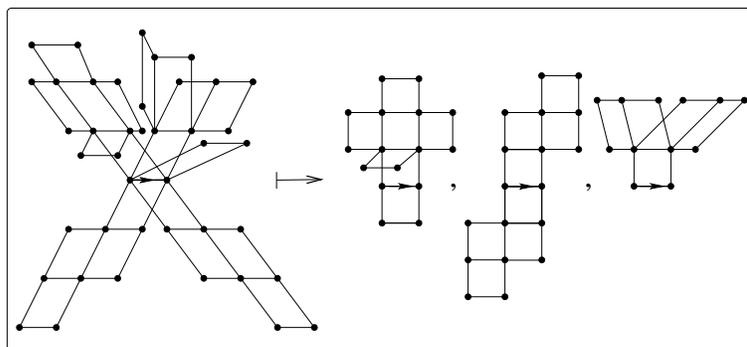
et  $\tilde{P}_{TS,n} = \pi_n$  est donné par (6.46).

On obtient alors le dénombrement non étiqueté de l'espèce  $\mathbf{a}^-$ , des 2-arbres  $k$ -gonaux (non orientés) pointés en une arête.

**Proposition 6.4.9** *Soit  $k$  un entier pair. Alors, le nombre de 2-arbres  $k$ -gonaux pointés en une arête non étiquetés sur  $n$   $k$ -gones est donné par*

$$\tilde{\mathbf{a}}_n^- = \frac{1}{2}(b_n + \alpha_n). \quad (6.60)$$

□



**Figure 6.7** Décomposition d'une  $\tilde{a}^{\circlearrowleft}$ -structure  $\tau$ -symétrique

Calculons maintenant la série génératrice tilde de l'espèce  $a^{\circlearrowleft}$  des 2-arbres  $k$ -gonaux enracinés en un  $k$ -gone possédant lui-même une de ses arêtes pointée.

**Proposition 6.4.10** *Nous avons*

$$\tilde{a}^{\circlearrowleft}(x) = \frac{1}{2} \left( \tilde{a}_o^{\circlearrowleft}(x) + \tilde{a}_{o,\tau}^{\circlearrowleft}(x) \right), \quad (6.61)$$

où

$$\tilde{a}_{o,\tau}^{\circlearrowleft}(x) = x \tilde{a}_S^2(x) \tilde{B}^{\frac{k-2}{2}}(x^2).$$

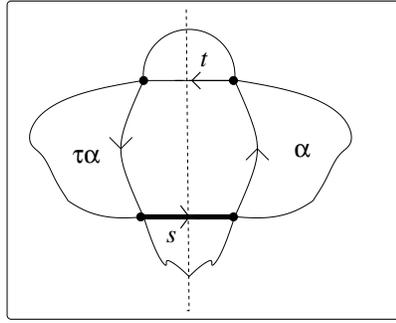
**Preuve.** Une  $a^{\circlearrowleft}$ -structure  $\tau$ -symétrique non étiquetée doit nécessairement comporter un axe de symétrie qui coïncide avec la médiatrice de l'arête pointée du polygone racine et donc également avec la médiatrice du côté opposé à cette arête distinguée; voir figure 6.8. Les deux structures  $s$  et  $t$  attachées sur ces deux arêtes sont donc symétriques, menant ainsi au terme  $(\tilde{a}_S(x))^2$  puisque l'on peut canoniquement orienter l'axe de symétrie de l'arête pointée à celle lui faisant face. Enfin, les  $B^{\frac{k-2}{2}}$ -structures se trouvant de part et d'autre de l'axe de symétrie, notées  $\alpha$  et  $\beta$ , satisfont  $\beta = \tau \cdot \alpha$ , en raison de l'axe de symétrie. Ceci contribue pour un facteur de  $\tilde{B}^{\frac{k-2}{2}}(x^2)$ , ce qui achève la preuve. ■

Par extraction du coefficient de  $x^n$  dans la relation (6.61), on obtient le résultat suivant.

**Corollaire 6.4.11** *Le nombre  $\tilde{a}_n^{\circlearrowleft}$  de  $a^{\circlearrowleft}$ -structures non étiquetées est donné par*

$$\tilde{a}_n^{\circlearrowleft} = \frac{1}{2} \left( \tilde{a}_{o,n}^{\circlearrowleft} + \sum_{i+j=n-1} \alpha_i^{(2)} \cdot b_{\frac{i}{2}}^{\binom{k-2}{2}} \right), \quad (6.62)$$

où  $\alpha_i^{(2)} = [x^i] \tilde{a}_S^2(x)$ . □



**Figure 6.8** Une  $a_o^\Delta$   $\tau$ -symétrique non étiquetée

Procédons de manière similaire pour l'espèce  $a^\diamond$ , des 2-arbres  $k$ -gonaux pointés en un  $k$ -gone. On écrit

$$\tilde{a}^\diamond(x) = \frac{1}{2} \left( \tilde{a}_o^\diamond(x) + \tilde{a}_{o,\tau}^\diamond(x) \right). \quad (6.63)$$

Il s'agit alors de calculer la série génératrice tilde  $\tilde{a}_{o,\tau}^\diamond(x)$ , des  $a^\diamond$ -structures non étiquetées  $\tau$ -symétriques.

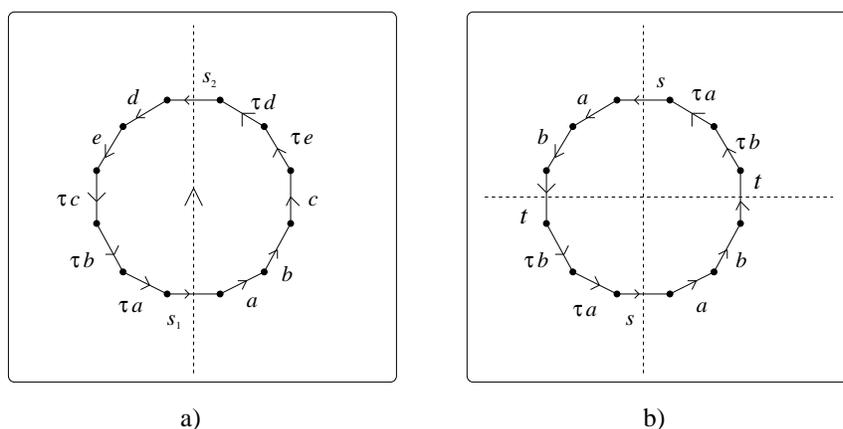
**Proposition 6.4.12** *La série génératrice tilde  $\tilde{a}_{o,\tau}^\diamond(x)$  possède l'expression suivante :*

$$\tilde{a}_{o,\tau}^\diamond(x) = \frac{x}{2} \tilde{a}_S^2(x) \tilde{B}^{\frac{k-2}{2}}(x^2) + \frac{x}{2} \tilde{B}^{\frac{k}{2}}(x^2). \quad (6.64)$$

**Preuve.** Remarquons que pour qu'une  $a_o^\diamond$ -structure soit laissée fixe par l'inversion de l'orientation, celle-ci doit nécessairement admettre (au moins) un axe de symétrie pouvant être de deux types différents :

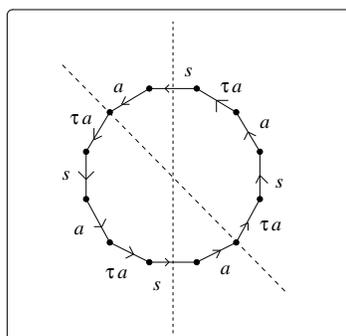
1. un axe passant par les milieux de deux côtés opposés, ou
2. un axe passant par deux arêtes opposées,

du polygone distingué. Pour obtenir l'expression de la série cherchée, la première étape consiste à orienter l'axe de symétrie. Ainsi, le premier terme de (6.64) correspond à une symétrie de la première sorte, et le deuxième terme, à une symétrie de seconde sorte. De plus, les structures possédant les deux types de symétrie sont précisément celles qui sont comptées une demi fois dans chacun de ces deux termes. Pour établir ceci en toute généralité, pour  $k$  un entier pair quelconque, on considère la plus grande puissance de 2, notée  $2^m$ , telle que  $k/2^m$  soit impair. Cependant, nous allons illustrer le raisonnement avec le cas particulier  $k = 12$ ; le lecteur peut facilement se convaincre de la validité des arguments pour le cas général. Pour le cas particulier  $k = 12$ , un 2-arbre  $k$ -gonal orienté non étiqueté pointé en un polygone possédant un axe de symétrie arête-arête est de la forme illustrée en figure 6.9 a), où  $s_1$  et  $s_2$  représentent deux  $a_S$ -structures,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  et  $e$  sont des  $B$ -structures générales non étiquetées et  $\tau \cdot x$  désigne l'image



**Figure 6.9** Deux  $\tilde{a}_{o,\tau}^\diamond$ -structures avec axes de symétrie arête–arête

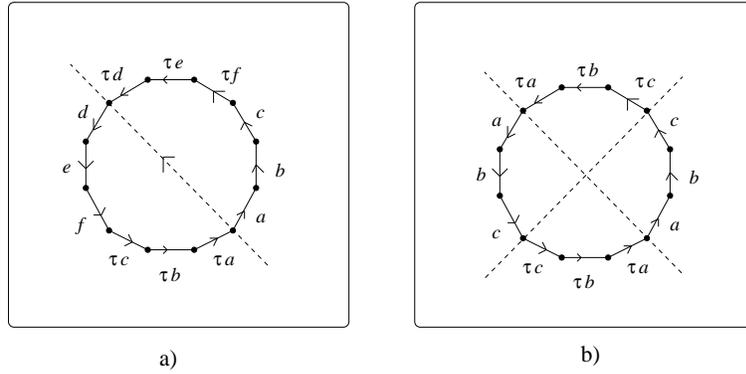
de la  $B$ -structure  $x$  sous l'action de  $\tau \in \mathbb{Z}_2$ . La plupart de ces types de structures sont dénombrées exactement par le terme  $\frac{1}{2}x\tilde{a}_S^2(x)\tilde{B}^5(x^2)$ . En effet, on obtient le facteur  $x\tilde{a}_S^2(x)\tilde{B}^5(x^2)$  de la même manière que pour le cas des  $a_{o,\tau}^\diamond$ -structures et la division par deux est justifiée dans les cas suivants :



**Figure 6.10** Une  $\tilde{a}_{o,\tau}^\diamond$ -structure avec des symétries arête–arête et sommet–sommet

1.  $s_1 \neq s_2$  (deux orientations possibles de l'axe de symétrie),
2.  $s_1 = s_2 = s$ ,  $(a, b, c) \neq (d, e, \tau \cdot c)$  (deux orientations),
3.  $s_1 = s_2 = s$ ,  $(a, b, c) = (d, e, \tau \cdot c)$ , de sorte que  $c = \tau \cdot c = t \in \tilde{a}_S$ , et ou bien
  - i)  $s \neq t$ , ou bien
  - ii)  $s = t$  et  $(a, b) \neq (\tau \cdot b, \tau \cdot a)$  (deux choix distincts pour l'axe de symétrie, voir figure 6.9 b)),

Cependant, les structures telles que  $s = t$  et  $b = \tau \cdot a$  (voir figure 6.10) n'apparaissent qu'une fois et sont comptées uniquement une demi fois dans la formule. Or, il faut



**Figure 6.11** Une  $\tilde{a}_{o,\tau}^\diamond$ -structure avec axes de symétrie sommet–sommet

noter que ces structures admettent un axe de symétrie sommet–sommet et, comme on le verra, sont comptées également une demi fois dans le second terme de (6.64).

De façon similaire, une  $a_{o,\tau}^\diamond$ -structure non étiquetée avec un axe de symétrie sommet–sommet orienté est de la forme illustrée en figure 6.11 a), où  $a, b, \dots, f$  sont des  $B$ -structures non étiquetées arbitraires. La plupart de ces structures sont énumérées par le terme  $\frac{1}{2}x\tilde{B}^6(x^2)$ , la division par 2 étant justifiée dans les cas suivants :

1.  $(a, b, c) \neq (d, e, f)$  (deux orientations de l'axe de symétrie),
2.  $(a, b, c) = (d, e, f)$  et  $(a, b, c) \neq (\tau \cdot c, \tau \cdot b, \tau \cdot a)$  (deux choix distincts pour l'axe de symétrie, voir figure 6.11 b)).

Toutefois, les structures vérifiant  $(a, b, c) = (d, e, f)$ ,  $c = \tau \cdot a$  et  $b = \tau \cdot b = s \in \tilde{\alpha}_S$  n'apparaissent qu'une fois et sont comptées une demi fois dans notre dénombrement. Mais, elles possèdent aussi un axe de symétrie arête–arête et sont donc également comptées une demi fois dans le premier terme de (6.64) (il faut échanger  $a$  et  $\tau \cdot a$  dans la figure 6.10). Ceci termine la preuve. ■

Le théorème de dissymétrie implique alors, pour  $k \geq 4$  un entier pair,

$$\tilde{a}(x) = \frac{1}{2}\tilde{a}_o(x) + \frac{1}{2}\tilde{a}_S(x) + \frac{1}{2}\tilde{a}_{o,\tau}^\diamond(x) - \frac{1}{2}\tilde{a}_{o,\tau}^\diamond(x), \quad (6.65)$$

et nous obtenons le résultat suivant :

**Proposition 6.4.13** *Soit  $k$  un entier pair,  $k \geq 4$ . Alors, la série génératrice tilde  $\tilde{a}(x)$  possède l'expression suivante*

$$\tilde{a}(x) = \frac{1}{2}\tilde{a}_o(x) + \frac{1}{2}\tilde{a}_S(x) + \frac{x}{4}(\tilde{B}^{\frac{k}{2}}(x^2) - \tilde{a}_S^2(x)\tilde{B}^{\frac{k-2}{2}}(x^2)), \quad (6.66)$$

où  $\tilde{a}_o(x)$  est donnée par (6.22) et  $\tilde{a}_S(x)$  par (6.56). □

**Corollaire 6.4.14** *Si  $k \geq 4$ , est un entier pair, alors le nombre de 2-arbres  $k$ -gonaux non étiquetés sur  $n$   $k$ -gones est donné par*

$$\tilde{a}_n = \frac{1}{2}\tilde{a}_{o,n} + \frac{1}{2}\alpha_n + \frac{1}{4}b_{\frac{n-1}{2}}^{(\frac{k}{2})} - \frac{1}{4} \sum_{i+j=n-1} \alpha_i^{(2)} \cdot b_j^{(\frac{k-2}{2})}, \quad (6.67)$$

avec

$$b_l^{(m)} = [x^l]\tilde{B}^m(x), \quad \alpha_i^{(2)} = [x^i]\tilde{a}_S^2(x).$$

□

## 6.5 Enumération selon le périmètre

Dans cette section, nous nous intéressons au dénombrement des 2-arbres  $k$ -gonaux en fonction de leur périmètre (voir (Labelle, Lamathe et Leroux, Accepté)). Le *périmètre* d'un 2-arbre  $k$ -gonal est par définition le nombre d'arêtes externes de la structure (le nombre d'arêtes de degré au plus un). En particulier, si la structure consiste en une arête seule, le périmètre est 1. Dans le but de tenir compte du périmètre, nous introduisons une fonction de poids  $w$ , définie comme suit :

$$\begin{aligned} w : \mathbf{a} &\longrightarrow \mathbb{Q}[t] \\ s &\longmapsto w(s) = t^{p(s)}, \end{aligned} \quad (6.68)$$

où  $p(s)$  désigne le périmètre de la structure  $s \in \mathbf{a}$ . Par exemple, le 2-arbre de la figure 6.1 a) possède un périmètre de 22.

### 6.5.1 Un version pondérée de l'espèce $B$

La première étape consiste à déterminer l'équation fonctionnelle que satisfait l'espèce  $B_w$  des 2-arbres  $k$ -gonaux pointés en une arête orientée et pondérés par le compteur de périmètre  $t$ , avec la précision que dans le cas de l'arête seule, le poids est de  $t$ . On dispose alors du résultat suivant.

**Proposition 6.5.1** *L'espèce pondérée  $B_w$  est caractérisée par l'équation fonctionnelle suivante*

$$B_w(X) = t + E_+(XB_w^{k-1}(X)), \quad (6.69)$$

où  $E_+$  est l'espèce des ensembles non vides.

**Preuve.** L'espèce non pondérée  $B$  satisfait la relation

$$B = E(XB^{k-1}) = 1 + E_+(XB^{k-1}(X)),$$

où le terme 1 correspond au cas de l'arête seule. En tenant compte du poids  $w$  et du fait que l'arête seule possède le poids  $t$ , on obtient directement (6.69). ■

Notons que la relation (6.69) est également valide pour le cas  $k = 2$ . L'espèce  $B_w$  représente alors l'espèce des arborescences étiquetées aux feuilles où la variable  $t$  agit comme un compteur de feuilles.

On écrit les séries génératrices associées à l'espèce pondérée  $B_w$  :

$$B_w(x) = B(x, t) = \sum_{\substack{n \geq 0 \\ \ell \geq 1}} a_{n,\ell}^{\rightarrow} t^{\ell} \frac{x^n}{n!}, = \sum_{n \geq 0} a_n^{\rightarrow}(t) \frac{x^n}{n!}, \quad (6.70)$$

$$\tilde{B}_w(x) = \tilde{B}(x, t) = \sum_{\substack{n \geq 0 \\ \ell \geq 1}} b_{n,\ell} t^{\ell} x^n = \sum_{n \geq 0} b_n(t) x^n, \quad (6.71)$$

où  $a_{n,\ell}^{\rightarrow}$  et  $b_{n,\ell}$  désignent les nombres de 2-arbres  $k$ -gonaux étiquetés et non étiquetés pointés en une arête orientée possédant  $n$   $k$ -gones. De l'équation (6.69), on déduit des formules explicites pour les nombres  $a_n^{\rightarrow}(t)$  et  $a_{n,\ell}^{\rightarrow}$  ainsi qu'une formule de récurrence pour  $b_n(t)$  et  $b_{n,\ell}$ . Il est important de remarquer qu'à cause de la nature des objets que nous considérons, l'entier  $\ell$  est borné :

$$(k-2)n+1 \leq \ell \leq (k-1)n.$$

**Proposition 6.5.2** *Les polynômes  $a_n^{\rightarrow}(t)$ , donnant le dénombrement pondéré des  $B_w$ -structures sur  $n$   $k$ -gones, est donné par  $a_0^{\rightarrow}(t) = t$  et, pour  $n \geq 1$ ,*

$$a_n^{\rightarrow}(t) = \frac{n!}{m} \sum_{\ell=m-n}^{m-1} \sum_{i+j=m-\ell} (-1)^j i^n \binom{m}{\ell, i, j} t^{\ell} \quad (6.72)$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \frac{m!}{(m-i)!} S(n, i) t^{m-i}, \quad (6.73)$$

où  $m = (k-1)n+1$  est le nombre d'arêtes et  $S(n, j)$  désigne les nombres de Stirling de seconde sorte, donnant le nombre de partitions d'un ensemble de  $n$  éléments en  $j$  blocs,  $n, j \geq 1$ .  $\square$

**Preuve.** De la relation (6.69), nous avons  $B(x, t) = t + \exp(xB^{k-1}(x, t)) - 1$ . Alors, on en déduit

$$xB^{k-1}(x, t) = x(t + \exp(xB^{k-1}(x, t)) - 1)^{k-1}.$$

On pose  $\mathcal{B}(x, t) = xB^{k-1}(x, t)$ . Alors, la série  $\mathcal{B}(x, t)$  satisfait l'équation fonctionnelle  $\mathcal{B}(x, t) = xR(\mathcal{B}(x, t))$ , où  $R(y) = (t + \exp(y) - 1)^{k-1}$ . De plus,

$$B(x, t) = \left( \frac{\mathcal{B}(x, t)}{x} \right)^{\frac{1}{k-1}}. \quad (6.74)$$

Alors, la version composée de l'inversion de Lagrange, appliquée à (6.74) conduit à (6.72). Pour établir maintenant (6.73), nous appliquons la même méthode, mais en utilisant la relation bien connue suivante

$$\frac{(e^x - 1)^j}{j!} = \sum_{n \geq j} S(n, j) \frac{x^n}{n!},$$

voir (Comtet, 70) page 63. ■

On établit alors de façon directe, des expressions pour  $a_{n,\ell}^{\rightarrow}$ .

**Corollaire 6.5.3** *Le nombre  $a_{n,\ell}^{\rightarrow}$  de  $B_w$ -structures étiquetées sur  $n$   $k$ -gones possédant un périmètre de  $\ell$ , pour  $(k-2)n+1 \leq \ell \leq (k-1)n$  (un poids de  $t^\ell$ ), est donné par*

$$a_{n,\ell}^{\rightarrow} = \frac{n!}{m} \sum_{i+j=m-\ell} (-1)^j i^n \binom{m}{\ell, i, j} \quad (6.75)$$

$$= \frac{(m-1)!}{\ell!} S(n, m-\ell), \quad (6.76)$$

où  $m = (k-1)n+1$  est le nombre d'arêtes. □

**Remarque 6.5.4** *On peut donner une preuve bijective de la formule (6.76) en adaptant la correspondance de Prüfer comme suit. On sait que le nombre total de  $\mathcal{A}^{\rightarrow}$ -structures, c'est-à-dire de 2-arbres  $k$ -gonaux pointés en une arête orientée, sur un ensemble de  $n$   $k$ -gones, est donné par*

$$a_n^{\rightarrow}(1) = m^{n-1}. \quad (6.77)$$

où  $m = n(k-1)+1$  est le nombre d'arêtes. Étant donnée une  $\mathcal{A}^{\rightarrow}$ -structure  $\alpha$  sur  $[n]$ , on étiquette 0 l'arête pointée et pour tout  $k$ -gone étiqueté  $j$  de  $\alpha$ , on étiquette  $j_1, j_2, \dots, j_{k-1}$  ses arêtes dans l'ordre circulaire, à partir de (et excluant) celle qui rattache le  $k$ -gone au 2-arbre en direction de la racine. Toutes les arêtes de  $\alpha$  se retrouvent ainsi étiquetées dans un ensemble  $M$ . Une suite d'éléments de  $M$  de longueur  $n-1$  est alors construite récursivement en émondant le  $k$ -gone de plus petite étiquette parmi les  $k$ -gones pendants et en notant à quelle arête il était attaché. Ceci est la bijection recherchée, établissant (6.77). On remarque de plus que l'image de la suite construite est précisément l'ensemble des arêtes internes de  $\alpha$ , au détail suivant près : l'arête interne racine, d'étiquette 0, apparaît dans l'image seulement si son degré est  $\geq 2$ . On doit donc prévoir aussi le cas où elle est de degré 1. La bijection montre donc également que

$$a_{n,\ell}^{\rightarrow} = \binom{m-1}{\ell} (\text{surj}(n-1, m-\ell-1) + \text{surj}(n-1, m-\ell)), \quad (6.78)$$

où le coefficient binomial correspond au choix des arêtes internes et où  $\text{surj}(n, h)$  désigne le nombre de suites surjectives de longueur  $n$  dans un ensemble de  $h$  éléments. Un simple calcul montre que (6.76) est équivalente à (6.78), sachant que  $\text{surj}(n, h) = h!S(n, h)$  et que

$$S(n, h) = S(n-1, h-1) + hS(n-1, h).$$

De plus, on voit que les nombres  $a_{n,\ell}^{\rightarrow(1)}$  et  $a_{n,\ell}^{\rightarrow(2)}$  de  $B_w$ -structures étiquetées sur  $n$  triangles, ayant  $\ell$  arêtes externes, et dont l'arête pointée est de degré  $d=1$  et  $d \geq 2$ ,

respectivement, sont donnés par

$$a_{n,\ell}^{\rightarrow(1)} = \binom{m-1}{\ell} \text{surj}(n-1, m-\ell-1) = \frac{(m-1)!}{\ell!} S(n-1, m-\ell-1), \quad (6.79)$$

$$a_{n,\ell}^{\rightarrow(2)} = \binom{m-1}{\ell} \text{surj}(n-1, m-\ell) = (m-\ell) \frac{(m-1)!}{\ell!} S(n-1, m-\ell). \quad (6.80)$$

De plus, nous remarquons que, lorsque  $k = 3$ ,  $\ell = n + 1$  représente le périmètre minimal, et  $a_{n,n+1}^{\rightarrow} = n!c_n$ , où les  $c_n$  désignent les nombres de Catalan, puisque, dans ce cas, les  $B_w$ -structures obtenues sont extérplanaires; voir (Labelle, Lamathe et Leroux, 03) et chapitre 4. De plus, pour un  $k$  général,  $a_{n,(k-2)n+1}^{\rightarrow} = n!C_{k,n}$ , où  $C_{k,n} = \frac{1}{n} \binom{n(k-1)}{n-1}$  sont les nombres de Catalan généralisés; voir (Lamathe, en préparation).

Comme dans le cas non pondéré, on ne peut obtenir de formules explicites pour les nombres  $b_{n,\ell}$ . Il en va de même pour les polynômes  $b_n(t)$ . Toutefois, nous proposons des formules de récurrence.

**Proposition 6.5.5** *Les polynômes  $b_n(t)$ ,  $n \geq 1$ , satisfont la récurrence suivante :*

$$b_0(t) = t, \quad (6.81)$$

$$b_n(t) = \frac{1}{n} \left( \sum_{d|n} d \cdot b_{d-1}^{(k-1)}(t^{\frac{n}{d}}) + \sum_{i=1}^{n-1} \left( \sum_{d|i} d \cdot b_{d-1}^{(k-1)}(t^{\frac{i}{d}}) \right) b_{n-i}(t) \right),$$

où les sommations sont prises sur les entiers  $i, d \geq 1$ , et où

$$b_n^{(k-1)}(t) = [x^n] \tilde{B}^{k-1}(x, t) = \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{k-1}=n} b_{i_1}(t) b_{i_2}(t) \dots b_{i_{k-1}}(t). \quad (6.82)$$

**Preuve.** On établit la récurrence (6.81) en prenant la dérivée logarithmique (par rapport à  $x$ ) de l'expression

$$\tilde{B}(x, t) = t + \exp \left( \sum_{i \geq 1} \frac{1}{i} x^i \tilde{B}^{k-1}(x^i, t^i) \right) - 1,$$

obtenue à partir de la relation (6.69) par passage aux séries génératrices tildes. ■

Le résultat suivant découle immédiatement du précédent.

**Corollaire 6.5.6** *Le nombre  $b_{n,\ell}$  de  $B_w$ -structures non étiquetées sur  $n$   $k$ -gones possédant un périmètre de  $\ell$  satisfait la récurrence suivante*

$$b_{0,\ell} = \delta_{1,\ell}, \quad b_{n,\ell} = \frac{1}{n}\omega_{n,\ell} + \frac{1}{n} \sum_{\substack{\nu+\mu=n \\ \nu,\mu \geq 1}} \sum_{\substack{p+q=\ell \\ p,q \geq 1}} \omega_{\nu,p} \cdot b_{\mu,q}, \quad (6.83)$$

où  $\delta_{i,j}$  désigne le symbole de Kronecker et

$$\omega_{n,\ell} = \sum_{d|(n,\ell)} \frac{n}{d} b_{\frac{n}{d}-1, \frac{\ell}{d}}^{(k-1)}. \quad (6.84)$$

□

Comme pour le cas non pondéré, nous exprimons les espèces pointées pondérées du théorème de dissymétrie en fonction de l'espèce  $B_w$ . On commence par le cas orienté, plus simple.

### 6.5.2 Cas orienté

On désigne par  $\mathbf{a}_w^- = (\mathbf{a}_w)^-$ ,  $\mathbf{a}_w^\diamond = (\mathbf{a}_w)^\diamond$ ,  $\mathbf{a}_w^\circledast = (\mathbf{a}_w)^\circledast$ , et  $\mathbf{a}_{o,w}^- = (\mathbf{a}_{o,w})^-$ ,  $\mathbf{a}_{o,w}^\diamond = (\mathbf{a}_{o,w})^\diamond$ ,  $\mathbf{a}_{o,w}^\circledast = (\mathbf{a}_{o,w})^\circledast$ , où  $w$  est définie par (6.68). En particulier, on a  $\mathbf{a}_{o,w}^- \neq B_w$ . Le théorème de dissymétrie reste valide dans le contexte pondéré, pour les cas orienté et non orienté :

$$\mathbf{a}_{o,w}^- + \mathbf{a}_{o,w}^\diamond = \mathbf{a}_{o,w} + \mathbf{a}_{o,w}^\circledast, \quad (6.85)$$

$$\mathbf{a}_w^- + \mathbf{a}_w^\diamond = \mathbf{a}_w + \mathbf{a}_w^\circledast. \quad (6.86)$$

Nous devons alors exprimer ces espèces en termes de l'espèce pondérée de base  $B_w$ . Le passage au cas pondéré étant simple, la preuve de la proposition suivante est omise.

**Proposition 6.5.7** *Les espèces pointées pondérées  $\mathbf{a}_{o,w}^-$ ,  $\mathbf{a}_{o,w}^\diamond$  et  $\mathbf{a}_{o,w}^\circledast$  sont caractérisées par*

$$\mathbf{a}_{o,w}^- = B_w + (t-1)XB_w^{k-1}, \quad (6.87)$$

$$\mathbf{a}_{o,w}^\diamond = XC_k(B_w), \quad (6.88)$$

$$\mathbf{a}_{o,w}^\circledast = XB_w^k, \quad (6.89)$$

où  $B_w = \mathbf{a}_w^\rightarrow$  et  $C_k$  est l'espèce des cycles (orientés) de taille  $k$ . □

On déduit ainsi facilement les séries génératrices associées à ces trois espèces,

$$\mathbf{a}_o^-(x, t) = B(x, t) + (t-1)xB^{k-1}(x, t), \quad (6.90)$$

et

$$\tilde{a}_o^-(x, t) = \tilde{B}(x, t) + (t-1)x\tilde{B}^{k-1}(x, t), \quad (6.91)$$

$$\tilde{a}_o^\diamond(x, t) = \frac{x}{k} \sum_{d|k} \phi(d) \tilde{B}^{\frac{k}{d}}(x^d, t^d), \quad (6.92)$$

$$\tilde{a}_o^\diamond(x, t) = x(\tilde{B}^k(x, t) + (t-1)\tilde{B}^{k-1}(x, t)), \quad (6.93)$$

expressions à partir desquelles il vient

$$a_{o,n}^-(t) = n![x^n]a_o^-(x, t) = a_n^{\rightarrow}(t) + (t-1)na_{n-1}^{\rightarrow(k-1)}(t), \quad (6.94)$$

et, en utilisant le théorème de dissymétrie,

$$\begin{aligned} \tilde{a}_o(x, t) &= \tilde{B}(x, t) + \frac{x}{k} \sum_{d|k} \phi(d) \tilde{B}^{\frac{k}{d}}(x^d, t^d) \\ &\quad - x\tilde{B}^k(x, t) + (t-1)x\tilde{B}^{k-1}(x, t). \end{aligned} \quad (6.95)$$

On a donc obtenu :

**Proposition 6.5.8** *On a, pour  $n \geq 2$ ,*

$$a_{o,n}(t) = \frac{a_{o,n}^-(t)}{m}, \quad (6.96)$$

$$\tilde{a}_{o,n}(t) = [x^n]\tilde{a}_o(x, t) \quad (6.97)$$

$$\begin{aligned} &= b_n(t) - b_{n-1}^{(k)}(t) + \frac{1}{k} \sum_{\substack{d|k \\ d \geq 1}} \phi(d) b_{\frac{n-1}{d}}^{(\frac{k}{d})}(t^d) \\ &\quad + (t-1)b_{n-1}^{(k-1)}(t), \end{aligned} \quad (6.98)$$

où  $m = (k-1)n + 1$  donne le nombre d'arêtes et  $b_n^{(i)}(t)$  est défini par (6.82).  $\square$

Pour le dénombrement étiqueté, on obtient directement, à partir de (6.79) et (6.80),

$$a_o^-(n, \ell) = a_{n, \ell-1}^{\rightarrow(1)} + a_{n, \ell}^{\rightarrow(2)} = \frac{m!}{\ell!} S(n-1, m-\ell), \quad (6.99)$$

où  $m = (k-1)n + 1$  est le nombre d'arêtes.

**Corollaire 6.5.9** *Les nombres  $a_o(n, \ell)$  et  $\tilde{a}_o(n, \ell)$  de 2-arbres  $k$ -gonaux orientés étiquetés et non étiquetés, respectivement, sur  $n$   $k$ -gones possédant un périmètre de  $\ell$ , sont donnés par*

$$a_o(n, \ell) = \frac{1}{m} a_o^-(n, \ell) = \frac{(m-1)!}{\ell!} S(n-1, m-\ell), \quad (6.100)$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_o(n, \ell) &= b_{n, \ell} - b_{n-1, \ell}^{(k)} + \frac{1}{k} \sum_{d|(k, \ell)} \phi(d) b_{\frac{n-1}{d}, \frac{\ell}{d}}^{(\frac{k}{d})} \\ &\quad + b_{n-1, \ell-1}^{(k-1)} - b_{n-1, \ell}^{(k-1)}. \end{aligned} \quad (6.101)$$

$\square$

### 6.5.3 Cas non orienté

Comme dans le cas non pondéré, les espèces non orientées liées aux 2-arbres  $k$ -gonaux peuvent être exprimées comme espèces quotient, de la manière suivante, où les notations utilisées sont évidentes :

$$a_w^- = \frac{a_{o,w}^-}{\mathbb{Z}_2}, \quad a_w^\diamond = \frac{a_{o,w}^\diamond}{\mathbb{Z}_2}, \quad a_w^{\hat{\diamond}} = \frac{a_{o,w}^{\hat{\diamond}}}{\mathbb{Z}_2}. \quad (6.102)$$

Dans ce cas-ci, on traite également deux cas séparément selon la parité de  $k$ .

#### • $k$ impair.

Lorsque  $k$  est impair, on étend assez directement les résultats précédents. Par exemple, on obtient le nombre  $a_{n,\ell}$  de 2-arbres  $k$ -gonaux étiquetés sur  $n$   $k$ -gones possédant un périmètre de  $\ell$ ,

$$a(n, \ell) = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_o(n, \ell) + 1), & \text{si } \ell = (k-1)n, \\ \frac{1}{2}a_o(n, \ell), & \text{sinon,} \end{cases} \quad (6.103)$$

étant donné que le seul 2-arbre  $k$ -gonal ( $k$  impair) étiqueté laissé fixe par changement d'orientation, pour un nombre de polygones et un périmètre donnés, est celui dans lequel tous les polygones partagent une arête commune, ayant ainsi  $(k-1)n$  arêtes externes. Un tel 2-arbre est dit  $\tau$ -symétrique. Donc, le polynôme  $a_n(t)$ , donnant le dénombrement pondéré des 2-arbres  $k$ -gonaux étiquetés, possède l'expression suivante :

$$a_n(t) = \sum a_{n,\ell} t^\ell = \frac{1}{2}(a_{o,n}(t) + t^{(k-1)n}). \quad (6.104)$$

Pour le dénombrement non étiqueté, on peut voir que les espèces  $a_w^-$ ,  $a_w^\diamond$  et  $a_w^{\hat{\diamond}}$  satisfont les expressions suivantes en termes des espèces quotient pondérées  $Q_w$ ,  $S_w$  et  $U_w$ , que nous avons adaptées à partir de la section 4.1 :

$$a_w^- = Q_w(X, B_w^{\frac{k-1}{2}}), \quad (6.105)$$

$$a_w^\diamond = X \cdot S_w(X, B_w^{\frac{k-1}{2}}), \quad (6.106)$$

$$a_w^{\hat{\diamond}} = X \cdot U_w(X, B_w^{\frac{k-1}{2}}), \quad (6.107)$$

avec

$$Q_w(X, Y) = (t + tXY^2 + E_{\geq 2}(XY^2)) / \mathbb{Z}_2, \quad (6.108)$$

$$S_w(X, Y) = C_k(t + E_+(XY^2)) / \mathbb{Z}_2, \quad (6.109)$$

$$U_w(X, Y) = \left( (t + E_+(XY^2))^k \right) / \mathbb{Z}_2, \quad (6.110)$$

où  $E_{\geq 2}$  représente l'espèce des ensembles de cardinal au moins 2. Les séries indicatrices de cycles de ces espèces sont données par

$$Z_{Q_w} = \frac{1}{2}(Z_{E_w(XY^2)} + q_w), \quad (6.111)$$

$$Z_{S_w} = \frac{1}{2} \left( Z_{C_k(t+E_+(XY^2))} + q_w \cdot (p_2 \circ (t + Z_{E_+(XY^2)})^{\frac{k-1}{2}}) \right), \quad (6.112)$$

$$Z_{U_w} = \frac{1}{2} \left( Z_{(t+E_+(XY^2))^k} + q_w \cdot (p_2 \circ (t + Z_{E_+(XY^2)})^{\frac{k-1}{2}}) \right), \quad (6.113)$$

où  $q_w(x_1, x_2, \dots; y_1, y_2, \dots) = (t-1)(1+x_1y_2) + h \circ (x_1y_2 + p_2 \circ (x_1 \frac{y_1^2 - y_2}{2})) = q + (t-1)(1+x_1y_2)$ ,  $h$  étant la fonction symétrique homogène,  $p_i$ ,  $i \geq 1$ , désigne la  $i^{\text{ième}}$  somme de puissances, et

$$E_w(XY^2) = t + tXY^2 + E_{\geq 2}(XY^2) = E(XY^2) + (t-1)(1+XY^2).$$

Une nouvelle application du théorème de dissymétrie donne la série génératrice tilde des 2-arbres  $k$ -gonaux pondérés par leur périmètre.

**Proposition 6.5.10** *La série génératrice tilde des 2-arbres  $k$ -gonaux non étiquetés pondérés par leur périmètre est donnée par :*

$$\tilde{a}(x, t) = \frac{1}{2} \left( \tilde{a}_o(x, t) + q_w[x, \tilde{B}^{\frac{k-1}{2}}(x, t)] + (t-1)(1+x\tilde{B}^{\frac{k-2}{2}}(x^2, t^2)) \right), \quad (6.114)$$

où

$$q_w[x, \tilde{B}^{\frac{k-1}{2}}(x, t)] := q_w(x, x^2, \dots; \tilde{B}^{\frac{k-1}{2}}(x, t), \tilde{B}^{\frac{k-1}{2}}(x^2, t^2), \dots).$$

□

**Corollaire 6.5.11** *Pour  $k \geq 3$ , un entier impair, le polynôme  $\tilde{a}_n(t)$  donnant l'énumération pondérée des 2-arbres  $k$ -gonaux ( $k$  impair) ayant  $n$   $k$ -gones satisfait la récurrence suivante :*

$$\begin{aligned} \tilde{a}_n(t) &= \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n \left( \sum_{l|j} l\omega_l(t) \right) \left( \tilde{a}_{n-j}(t) - \frac{1}{2}\tilde{c}_{n-j}(t) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\tilde{a}_{o,n}(t) + \frac{1}{2}(t-1)b_{\frac{n-1}{2}}^{\left(\frac{k-2}{2}\right)}(t^2), \end{aligned} \quad (6.115)$$

avec  $\tilde{a}_0(t) = t$  et, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\omega_n = 2b_{\frac{n-1}{2}}^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}(t^2) + b_{\frac{n-2}{2}}^{(k-1)}(t^2) - b_{\frac{n-2}{4}}^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}(t^4), \quad (6.116)$$

$$\tilde{c}_n(t) = \tilde{a}_{o,n}(t) + (t-1) \left( \chi(n=0) + b_{\frac{n-1}{2}}^{\left(\frac{k-2}{2}\right)}(t^2) \right), \quad (6.117)$$

$b_i^{(j)}(t)$  est défini par (6.82) et  $\chi(n=0)$  vaut 1 si  $n=0$  et 0 autrement.

**Preuve.** Passant au niveau des séries tildes à partir de l'équation (6.114), il vient

$$\begin{aligned} & \tilde{a}(x, t) \\ &= \frac{1}{2} \left( \tilde{a}_o(x, t) + (t-1)(1 + x\tilde{B}^{\frac{k-1}{2}}(x^2, t^2)) \right. \\ & \quad \left. + \exp\left(\sum_{i \geq 1} \frac{1}{2i} (2x^i \tilde{B}^{\frac{k-1}{2}}(x^{2i}, t^{2i}) + x^{2i} \tilde{B}^{k-1}(x^{2i}, t^{2i}) - x^i \tilde{B}^{\frac{k-1}{2}}(x^{4i}, t^{4i}))\right) \right). \end{aligned}$$

Maintenant, en prenant  $x$  fois la dérivée logarithmique de la dernière relation, on obtient le résultat annoncé. ■

•  **$k$  pair.**

A l'image du cas non pondéré, lorsque  $k$  est un entier pair, les 2-arbres  $k$ -gonaux orientés étiquetés invariants par changement d'orientation s'obtiennent à partir des arbres ordinaires étiquetés aux arêtes. Remarquons que si l'arbre possède  $h$  feuilles, alors le 2-arbre ainsi obtenu possède  $n(k-2) + h$  arêtes externes. Pour obtenir le nombre  $\alpha(n, h)$  d'arbres étiquetés aux arêtes avec  $n$  arêtes et  $m := n + 1$  sommets, dont  $h$  feuilles, on peut appliquer la formule (6.100) avec  $k = 2$  et  $\ell = h$ , ce qui donne

$$\alpha(n, h) = \frac{n!}{h!} S(n-1, n-h+1). \quad (6.118)$$

Cette formule est cohérente avec le dénombrement des arbres étiquetés aux sommets, avec  $m$  sommets, dont  $h$  feuilles, donné dans Moon (Moon, J. W., 69). On obtient donc :

**Proposition 6.5.12** *Soit  $n \geq 2$ ,  $h$  un entier compris entre 2 et  $n$ , et  $\ell = n(k-2) + h$ . Alors le nombre  $a(n, \ell)$  de 2-arbres  $k$ -gonaux étiquetés sur  $n$   $k$ -gones de périmètre  $\ell$ , est donné par*

$$\begin{aligned} & a(n, \ell) \\ &= \frac{1}{2} (a_o(n, \ell) + \alpha(n, h)) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{(m-1)!}{\ell!} S(n-1, m-\ell) + \frac{n!}{h!} S(n-1, n-h+1) \right). \quad (6.119) \end{aligned}$$

□

Pour le cas non étiqueté, il nous suffit d'adapter toutes les espèces introduites en section 6.6 dans le contexte pondéré. Ceci est facile à faire comme suit, où l'indice  $w$  indique que l'espèce considérée est pondérée selon le périmètre de ses structures. Notons également que l'espèce  $a_{S,w}$  est par définition une sous-espèce de  $a_{o,w}^-$ . On a donc :

$$\tilde{\mathbf{a}}_S(x, t) = \left( E(P_{TS,w} + P_{M,w} + P_{AL,w}) + (t-1)(1 + P_{TS,w} + P_{M,w}) \right) \tilde{\phantom{a}}(x), \quad (6.120)$$

où

$$\mathbf{a}_{TS,w} = t + t \cdot P_{TS,w} + E_{\geq 2}(P_{TS,w}) \quad (6.121)$$

$$= (t-1)(1 + P_{TS,w}) + E(P_{TS,w}), \quad (6.122)$$

$$P_{TS,w} = X \cdot X_{\leq}^2 < B^{\frac{k-2}{2}} > \cdot (\mathbf{a}_{TS,w} + (1-t)P_{TS,w}), \quad (6.123)$$

$$P_{AL,w} = \Phi_2 < X B_w^{k-1} - (P_{TS,w} + P_{M,w}) >, \quad (6.124)$$

$$P_{M,w} = X \cdot X_{\leq}^2 < B^{\frac{k-2}{2}} > \cdot (\mathbf{a}_{S,w} + (1-t)P_{M,w} - \mathbf{a}_{TS,w}). \quad (6.125)$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{a}}_S(x, t) &= \exp\left(\sum_{i \geq 1} \frac{1}{i} (\tilde{P}_{TS}(x^i, t^i) + \tilde{P}_M(x^i, t^i) + \tilde{P}_{AL}(x^i, t^i))\right) \\ &\quad + (t-1)(1 + \tilde{P}_{TS}(x, t) + \tilde{P}_M(x, t)), \end{aligned} \quad (6.126)$$

avec

$$\tilde{\mathbf{a}}_{TS}(x, t) = (t-1)(1 + \tilde{P}_{TS}(x, t)) + \exp\left(\sum_{i \geq 1} \frac{1}{i} \tilde{P}_{TS}(x^i, t^i)\right), \quad (6.127)$$

$$\tilde{P}_{TS}(x, t) = x \tilde{B}^{\frac{k-2}{2}}(x^2, t^2) \left( \tilde{\mathbf{a}}_{TS}(x, t) + (1-t)\tilde{P}_{TS}(x, t) \right), \quad (6.128)$$

$$\tilde{P}_{AL}(x, t) = \frac{1}{2}(x^2 \tilde{B}^{k-1}(x^2, t^2) - \tilde{P}_{TS}(x^2, t^2) - \tilde{P}_M(x^2, t^2)), \quad (6.129)$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{P}_M(x, t) &= \left( X X_{\leq}^2 < B_w^{\frac{k-2}{2}} > \cdot (\mathbf{a}_{TS,w} + (1-t)(1 + P_{TS,w})) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot E_+(P_{AL,w} + P_{M,w}) \right) \tilde{\phantom{a}}(x) \\ &= x \tilde{B}^{\frac{k-2}{2}}(x^2, t^2) \left( \tilde{\mathbf{a}}_S(x, t) + (1-t)\tilde{P}_M(x, t) - \tilde{\mathbf{a}}_{TS}(x, t) \right). \end{aligned} \quad (6.130)$$

Il devient ainsi possible de calculer les séries génératrices tildes associées aux espèces données par (6.102) :

$$\tilde{\mathbf{a}}_{o,\tau}^-(x, t) = \tilde{\mathbf{a}}_S(x, t),$$

$$\tilde{\mathbf{a}}_{o,\tau}^\diamond(x, t) = x \left( \tilde{\mathbf{a}}_S(x, t) + (1-t)(\tilde{P}_{TS}(x, t) + \tilde{P}_M(x, t)) \right)^2 \cdot \tilde{B}^{\frac{k-2}{2}}(x^2, t^2),$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{a}}_{o,\tau}^\circ(x, t) &= \frac{x}{2} \left( \tilde{\mathbf{a}}_S(x, t) + (1-t)(\tilde{P}_{TS}(x, t) + \tilde{P}_M(x, t)) \right)^2 \cdot \tilde{B}^{\frac{k-2}{2}}(x^2, t^2) \\ &\quad + \frac{x}{2} \tilde{B}^{\frac{k}{2}}(x^2, t^2). \end{aligned}$$

Finalement, nous obtenons

$$\begin{aligned} \tilde{a}(x, t) &= \frac{1}{2}\tilde{a}_o(x, t) + \frac{1}{2}\tilde{a}_S(x, t) + \frac{x}{4}\tilde{B}^{\frac{k}{2}}(x^2, t^2) \\ &\quad - \frac{x}{4}\left(\tilde{a}_S(x, t) + (1-t)(\tilde{P}_{TS}(x, t) + \tilde{P}_M(x, t))\right)^2 \cdot \tilde{B}^{\frac{k-2}{2}}(x^2, t^2). \end{aligned} \quad (6.131)$$

## 6.6 Dénombrement asymptotique

Grâce au théorème de dissymétrie et aux diverses équations combinatoires qui lui sont rattachées, le dénombrement asymptotique des 2-arbres  $k$ -gonaux, étiquetés et non étiquetés, dépend essentiellement du dénombrement asymptotique des  $B$ -structures, où  $B$  est l'espèce de base caractérisée par l'équation fonctionnelle (6.3). Dans le cas étiqueté, les résultats asymptotiques sont triviaux car nous disposons des formules explicites simples (6.7), (6.23) et (6.28). Le cas non étiqueté est plus délicat et nécessite d'utiliser la relation (6.12) que satisfait la série génératrice tilde  $\tilde{B}(x)$ .

On doit d'abord prouver le résultat suivant, qui est une conséquence du théorème classique de Bender (voir (Bender, 74)). Noter que l'on s'inspire ici encore de l'approche de (Fowler et al., 00; Fowler et al., 02), pour les 2-arbres classiques.

**Proposition 6.6.1** *Soient  $p = k - 1$  et  $\tilde{B}(x) = \sum b_n(p)x^n$ . Alors, il existe des constantes  $\alpha_p$  et  $\beta_p$  telles que*

$$b_n(p) \sim \alpha_p \beta_p^n n^{-3/2}, \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty. \quad (6.132)$$

De plus,

$$\alpha_p = \alpha(\xi_p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{p^{1+\frac{1}{p}}} \xi_p^{-\frac{1}{p}} \left(1 + \frac{p\xi_p \omega'(\xi_p)}{\omega(\xi_p)}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (6.133)$$

et

$$\beta_p = \frac{1}{\xi_p}, \quad (6.134)$$

où  $\xi_p$  est la plus petite racine de l'équation

$$\xi = \frac{1}{ep} \omega^{-p}(\xi), \quad (6.135)$$

$\omega(x)$  étant la série donnée par

$$\omega(x) = e^{\frac{1}{2}x^2 b^p(x^2) + \frac{1}{3}x^3 b^p(x^3) + \dots}. \quad (6.136)$$

**Preuve.** Écrivons, pour simplifier  $b(x) = \tilde{B}(x)$ . Alors, grâce à (6.12),  $y = b(x)$  satisfait la relation

$$y = e^{xy^p} \omega(x), \quad \text{où } \omega(x) = e^{\frac{1}{2}x^2 b^p(x^2) + \frac{1}{3}x^3 b^p(x^3) + \dots}. \quad (6.137)$$

Par le théorème de Bender, appliqué à la fonction  $f(x, y) = y - e^{xy^p} \omega(x)$ , il faut que nous trouvions la solution  $(\xi_p, \tau_p)$  du système

$$f(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad f_y(x, y) = 0. \quad (6.138)$$

Il est équivalent de dire que  $\xi_p$  est une solution de (6.135) et que  $p\xi_p\tau_p^p = 1$ . Puisque  $f_{yy}(\xi_p, \tau_p) \neq 0$ ,  $\xi_p$  est une singularité algébrique d'ordre deux de la série  $b(x)$  et, pour  $x$  proche  $\xi_p$ , nous trouvons une expression de la forme

$$b(x) = \tau_{p,0} + \tau_{p,1}\left(1 - \frac{x}{\xi_p}\right)^{\frac{1}{2}} + \tau_{p,2}\left(1 - \frac{x}{\xi_p}\right) + \tau_{p,3}\left(1 - \frac{x}{\xi_p}\right)^{\frac{3}{2}} + \dots, \quad (6.139)$$

où

$$\tau_{p,0} = \tau_p = b(\xi_p) = \left(\frac{1}{p\xi_p}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad (6.140)$$

$$\tau_{p,1} = -\frac{\sqrt{2}}{p^{1+\frac{1}{p}}}\xi_p^{-\frac{1}{p}}\left(1 + \frac{p\xi_p\omega'(\xi_p)}{\omega(\xi_p)}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (6.141)$$

$$\tau_{p,2} = \frac{1}{3p^{2+\frac{1}{p}}}\xi_p^{-\frac{1}{p}}\left((2p+3) - p(p-3)\frac{\xi_p\omega'(\xi_p)}{\omega(\xi_p)}\right). \quad (6.142)$$

La formule asymptotique (6.132) avec  $\alpha_p$  et  $\beta_p$  donnée par (6.133) et (6.134), suit alors du fait que le terme dominant du comportement asymptotique des coefficients  $b_n(p)$  de  $x^n$  dans (6.139) dépend uniquement du terme  $\tau_{p,1}\left(1 - \frac{x}{\xi_p}\right)^{\frac{1}{2}}$  dans (6.139), et est donné par

$$b_n(p) \sim \binom{\frac{1}{2}}{n} \tau_{p,1} (-1)^n \frac{1}{\xi_p^n} \sim \alpha_p \beta_p^n n^{-\frac{3}{2}} \quad \text{quand } n \rightarrow \infty. \quad (6.143)$$

■

Notons que  $\xi_p$  est le rayon de convergence de  $b(x)$  et que le rayon de convergence de  $\omega(x)$  est  $\sqrt{\xi_p}$ . On peut montrer que  $0 < \xi_p < \sqrt{\xi_p} < 1$ . Cela permet de calculer des approximations numériques de  $\xi_p$ , pour  $p$  fixé, par itération, en utilisant (6.135), et des approximations polynomiales (tronquées) convenables.

Nous proposons maintenant le résultat principal de cette section.

**Proposition 6.6.2** *Soit  $p = k - 1$ . Alors, le nombre  $\tilde{a}_n$  de 2-arbres  $k$ -gonaux sur  $n$   $k$ -gones non étiquetés satisfait*

$$\tilde{a}_n \sim \frac{1}{2} \tilde{a}_{o,n}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (6.144)$$

où  $\tilde{a}_{o,n}$  est le nombre de 2-arbres  $k$ -gonaux orientés sur  $n$  polygones non étiquetés. De plus,

$$\tilde{a}_{o,n} \sim \bar{\alpha}_p \beta_p^n n^{-5/2}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (6.145)$$

où

$$\overline{\alpha}_p = 2\pi p^{1+\frac{2}{p}} \xi_p^{\frac{2}{p}} \alpha_p^3 \quad (6.146)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{p^{2+\frac{1}{p}}} \xi_p^{-\frac{1}{p}} \left( 1 + p \frac{\omega'(\xi_p)}{\omega(\xi_p)} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad (6.147)$$

et  $\beta_p = \frac{1}{\xi_p}$  est la même constante de croissance qu'à la proposition 6.6.1.

**Preuve.** La formule asymptotique (6.145) suit en remarquant que la rayon de convergence,  $\xi_p$ , de la série  $\tilde{a}(x)$ , donnée par (6.38) pour les valeurs impaires de  $k$  et par (6.66) pour les valeurs paires, égale celui du terme dominant  $\frac{1}{2}\tilde{a}_o(x)$ . Cela provient du fait, que l'on peut facilement vérifier, que tous les termes de (6.38) et (6.66), hormis le terme  $\frac{1}{2}\tilde{a}_o(x)$ , possèdent un rayon de convergence supérieur ou égal à  $\sqrt{\xi_p} > \xi_p$ . Pour établir (6.145), remarquons tout d'abord que, grâce à l'équation (6.22), le rayon de convergence de  $\tilde{a}_o(x)$  est égal au rayon de convergence,  $\xi_p$ , de

$$b(x) - \frac{k-1}{k} x b^k(x), \quad (6.148)$$

où  $b(x) = \tilde{B}(x)$  et  $k = p+1$ . Cela implique que le comportement asymptotique des coefficients  $\tilde{a}_{o,n}$  de  $\tilde{a}_o(x)$  est entièrement déterminé par celui de (6.148). Alors, en substituant (6.139) dans (6.148) et en utilisant (6.142), on obtient le développement suivant

$$\begin{aligned} b(x) - \frac{k-1}{k} x b^k(x) &= \bar{\tau}_{p,0} + \bar{\tau}_{p,1} \left( 1 - \frac{x}{\xi_p} \right)^{\frac{1}{2}} + \bar{\tau}_{p,2} \left( 1 - \frac{x}{\xi_p} \right) \\ &\quad + \bar{\tau}_{p,3} \left( 1 - \frac{x}{\xi_p} \right)^{\frac{3}{2}} + \dots, \end{aligned} \quad (6.149)$$

où

$$\bar{\tau}_{p,0} = \frac{p}{p+1} \tau_{p,0}, \quad (6.150)$$

$$\bar{\tau}_{p,1} = 0, \quad (6.151)$$

$$\bar{\tau}_{p,2} = -\frac{1}{2} \frac{p(p+1)\tau_{p,1}^2 - 2\tau_{p,0}^2}{(p+1)\tau_{p,0}}, \quad (6.152)$$

$$\bar{\tau}_{p,3} = -\frac{1}{6} \frac{\tau_{p,1}(6p\tau_{p,0}\tau_{p,2} + p(p-1)\tau_{p,1}^2 - 6\tau_{p,0}^2)}{\tau_{p,0}^2} \quad (6.153)$$

$$= -\frac{p}{3} \frac{\tau_{p,1}^3}{\tau_{p,0}^2}. \quad (6.154)$$

On en déduit que le terme dominant du comportement asymptotique des coefficients  $\tilde{a}_{n,o}$  de  $x^n$  dans  $\tilde{a}_o(x)$ , dépend uniquement du terme  $\bar{\tau}_{p,3} \left( 1 - \frac{x}{\xi_p} \right)^{\frac{3}{2}}$  de (6.149) et est

donné par

$$\tilde{a}_{n,o} \sim \left(\frac{3}{2}\right) \bar{r}_{p,3} (-1)^n \frac{1}{\xi_p^n} \sim \bar{\alpha}_p \beta_p n^{-\frac{5}{2}}, \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty. \quad (6.155)$$

On montre alors que  $\bar{\alpha}_p$  est bien donné par (6.146) et (6.147), par des calculs utilisant les relations (6.154), (6.140) et (6.141). ■

Le résultat final de cette section propose une formule explicite, en termes de partages d'entiers, pour le rayon de convergence  $\xi_p$  commun aux séries  $\tilde{B}(x)$ ,  $\tilde{a}(x)$  et  $\tilde{a}_o(x)$ , à partir de laquelle on déduit la constante de croissance  $\beta_p = \frac{1}{\xi_p}$ . On utilise ici des notations spéciales. Si  $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_\nu)$  est un partage d'un entier  $n$  en  $\nu$  parts, alors, on écrit  $\lambda \vdash n$ ,  $n = |\lambda|$ ,  $\nu = l(\lambda)$ , et  $m_i(\lambda) = |\{j : \lambda_j = i\}|$  représente le nombre de parts de taille  $i$  dans  $\lambda$ . De plus, posons

$$\sigma_i(\lambda) = \sum_{d|i} dm_d(\lambda), \quad \sigma_i^*(\lambda) = \sum_{d|i, d < i} dm_d(\lambda), \quad (6.156)$$

$$\hat{\lambda} = 1 + |\lambda| + l(\lambda), \quad \hat{z}(\lambda) = 2^{m_1(\lambda)} m_1(\lambda)! 3^{m_2(\lambda)} m_2(\lambda)! \dots \quad (6.157)$$

**Proposition 6.6.3** *Nous disposons du développement convergent suivant*

$$\xi_p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{p^n}, \quad (6.158)$$

où les coefficients  $c_n$  sont des constantes indépendantes de  $p$ , données explicitement par

$$c_n = \sum_{\lambda \vdash n} \frac{e^{-\hat{\lambda}}}{\hat{\lambda} \hat{z}(\lambda)} \prod_{i \geq 1} (\sigma_i(\lambda) - \hat{\lambda})^{m_i(\lambda) - 1} (\sigma_i^*(\lambda) - \hat{\lambda}), \quad (6.159)$$

où  $\lambda$  parcourt l'ensemble des partages d'entiers  $n$ .

**Preuve.** On établit les formules explicites (6.158) et (6.159) en appliquant d'abord une inversion de Lagrange à l'équation  $\xi = zR(\xi)$  où  $z = \frac{1}{ep}$  et  $R(t) = \omega^{-np}(t)$ . On obtient ainsi

$$\xi_p = \xi = \sum_{n \geq 1} \gamma_n \left(\frac{1}{ep}\right)^n, \quad \text{et} \quad \gamma_n = \frac{1}{n} [t^{n-1}] \omega^{-np}(t). \quad (6.160)$$

Ensuite, pour évaluer explicitement  $\omega^{-np}(x)$ , on utilise la version de l'inversion de Lagrange de Labelle (Labelle, G., 86) adaptée au contexte des séries indicatrices de cycles. Il vient

$$\omega^p(x) = \exp\left(\frac{1}{2}px^2b^p(x^2) + \frac{1}{3}px^3b^p(x^3) + \dots\right) \quad (6.161)$$

$$= \exp\left(\frac{1}{2}px_2 + \frac{1}{3}px_3 + \dots\right) \circ Z_{XB^p(X)} \Big|_{x_i := x^i}. \quad (6.162)$$

Utilisant maintenant (6.5), on écrit  $XB^p(X) = \frac{A(pX)}{p}$ . Cela mène à

$$\omega^p(x) = \exp\left(\frac{1}{2}px_2 + \frac{1}{3}px_3 + \dots\right) \circ \frac{Z_A(px_1, px_2, \dots)}{p} \Big|_{x_i:=x^i}, \quad (6.163)$$

et nous obtenons

$$\omega^{-np}(x) = \exp\left(-\frac{n}{2}px_2 - \frac{n}{3}px_3 - \dots\right) \circ \left(\frac{1}{p}Z_A(px_1, px_2, \dots)\right) \Big|_{x_i:=x^i} \quad (6.164)$$

$$= \exp\left(-\frac{n}{2}x_2 - \frac{n}{3}x_3 - \dots\right) \circ Z_A(x_1, x_2, \dots) \Big|_{x_i:=px^i}. \quad (6.165)$$

Alors, en utilisant la version de Labelle de l'inversion de Lagrange, nous avons, pour toute série indicatrice de cycles  $g(x_1, x_2, \dots)$ ,

$$[x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots] g \circ Z_A(x_1, x_2, \dots) = [t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots] g(t_1, t_2, \dots) \prod_{i=1}^{\infty} (1 - t_i) \exp\left(n_i \left(t_i + \frac{1}{2}t_{2i} + \dots\right)\right), \quad (6.166)$$

et

$$\prod_{j=1}^{\infty} \exp\left(n_j \left(t_j + \frac{1}{2}t_{2j} + \dots\right)\right) = \prod_{i=1}^{\infty} \exp\left(\sum_{d|i} dn_d \frac{t_i}{i}\right). \quad (6.167)$$

En prenant  $g(x_1, x_2, \dots) = \exp\left(-\frac{\nu}{2}px_2 - \frac{\nu}{3}px_3 - \dots\right)$ , on obtient, après calculs

$$[x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots] \left( \exp\left(-\frac{\nu}{2}x_2 - \frac{\nu}{3}x_3 - \dots\right) \circ Z_A \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n_1 > 0, \\ \left( \frac{\prod_{i \geq 2} (-\nu + \sum_{d|i} dn_d)^{n_i-1} (-\nu + \sum_{d|i, d < i} dn_d)}{2^{n_2} n_2! 3^{n_3} n_3! \dots} \right) & \text{si } n_1 = 0. \end{cases} \quad (6.168)$$

En faisant la substitution  $x_i := px^i$ , pour  $i = 1, 2, 3, \dots$ , il vient

$$\omega^{-\nu p}(x) = \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{2n_2 + 3n_3 + \dots = n} p^{n_2 + n_3 + \dots} \frac{\prod_{i \geq 2} (-\nu + \sum_{d|i} dn_d)^{n_i-1} (-\nu + \sum_{d|i, d < i} dn_d)}{2^{n_2} n_2! 3^{n_3} n_3! \dots} \right) x^n.$$

Cela implique, en posant  $\nu = n$  et en utilisant (6.160), que

$$\begin{aligned}\xi_p &= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \left( \sum_{2n_2+3n_3+\dots=n-1} \left( \frac{\prod_{i \geq 2} (1-n + \sum_{d|i} dn_d)^{n_i-1} (1-n + \sum_{d|i, d < i} dn_d)}{(p^{n_2+n_3+\dots})^{n-1} 2^{n_2} n_2! 3^{n_3} n_3! \dots} \right) \right) \left( \frac{1}{ep} \right)^n \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{c_n}{p^n},\end{aligned}$$

où les coefficients  $c_n$ ,  $n \geq 1$ , sont donnés par (6.159).  $\blacksquare$

Le tableau C.1, en annexe, donne à 20 décimales près, les constantes  $\xi_p$ ,  $\alpha_p$ ,  $\bar{\alpha}_p$  et  $\beta_p = \frac{1}{\xi_p}$  pour  $p = 1, \dots, 5$ . Le tableau C.2 donne quant à lui les valeurs exactes des nombres  $\tilde{a}_n$ , pour  $k$  allant de 2 à 12 et pour  $n = 0, 1, \dots, 20$ , de 2-arbres  $k$ -gonaux non étiquetés sur  $n$   $k$ -gones. Nous donnons ici les premières valeurs des constantes universelles  $c_n$  apparaissant dans (6.158), pour  $n = 1, \dots, 5$  :

$$\begin{aligned}c_1 &= \frac{1}{e} = 0.36787944117144232160, \\ c_2 &= -\frac{1}{2} \frac{1}{e^3} = -0.02489353418393197149, \\ c_3 &= \frac{1}{8} \frac{1}{e^5} - \frac{1}{3} \frac{1}{e^4} = -0.00526296958802571004, \\ c_4 &= -\frac{1}{48} \frac{1}{e^7} + \frac{1}{e^6} - \frac{1}{4} \frac{1}{e^5} = 0.00077526788594593923, \\ c_5 &= \frac{1}{384} \frac{1}{e^9} - \frac{4}{3} \frac{1}{e^8} + \frac{49}{72} \frac{1}{e^7} - \frac{1}{5} \frac{1}{e^6} = 0.00032212622183609932.\end{aligned}\tag{6.169}$$

**Remarque 6.6.4** Il est à noter que tous les calculs de cette section restent valides lorsque  $k = 2$  ( $p = 1$ ), correspondant au cas des arborescences classiques. Dans ce cas, la constante de croissance  $\beta = \beta_1$ , de (6.132), est connue sous le nom de constante d'Otter (voir (Otter, 48)). De plus, cette constante prend la forme explicite  $\beta = \frac{1}{\xi_1}$ , avec

$$\xi_1 = \sum_{n \geq 1} c_n.\tag{6.170}$$

Finalement, lorsque  $k = 3$ , nous retrouvons les résultats asymptotiques de Fowler et al. dans (Fowler et al., 00; Fowler et al., 02).

## Conclusion

L'essentiel des résultats de cette thèse a été obtenu via la théorie des espèces. Nous avons d'ailleurs utilisé les développements récents de cette théorie sur les espèces quotients. Cette théorie offre en effet un cadre mathématique solide et complet pour les problèmes relatifs à la combinatoire énumérative des structures discrètes arborescentes. Nous avons contribué à ce domaine en introduisant une nouvelle série formelle, la série d'asymétrie translatée, pour tenir compte de la substitution d'espèces à terme constant non nul, dans le cadre du dénombrement de structures discrètes asymétriques. Cette série et les résultats qui l'accompagnent établissent les bases de l'étude des sous-structures asymétriques, structures partiellement étiquetées sans symétrie.

Nous avons également prolongé l'approche de Fowler et al. (Fowler et al., 00; Fowler et al., 02), basée sur un théorème de dissymétrie pour les 2-arbres, pour étudier diverses spécialisations des 2-arbres : spécialisations topologiques avec les 2-arbres extéplanaires (2-arbres plongeables dans le plan de sorte que les faces soient des triangles) et les 2-arbres solides (2-arbres plongés dans l'espace), ainsi qu'une généralisation des 2-arbres à la famille infinie de graphes simples, les 2-arbres  $k$ -gonaux (2-arbres dans lesquels les triangles sont remplacés par des polygones de taille  $k$ ).

Pour la classification par rapport aux symétries des 2-arbres extéplans, nous avons introduit et étudié les propriétés de deux nouvelles espèces moléculaires à deux sortes,  $P_4^{\text{bic}}(X, Y)$  et  $P_6^{\text{bic}}(X, Y)$ , généralisant la famille d'espèces à une sorte  $P_{2n}^{\text{bic}}$ ,  $n \geq 1$ , des  $2n$ -gones bicolorés de J. Labelle (Labelle, J., 85). Nous avons notamment établi deux formules d'addition nouvelles relatives à ces espèces, en utilisant une méthode nouvelle de dérivation-intégration au niveau des espèces.

Lors du dénombrement non étiqueté des 2-arbres solides et des 2-arbres  $k$ -gonaux, nous avons largement utilisé le concept d'espèces quotient en considérant le groupe à deux éléments  $\mathbb{Z}_2 = \{1, \tau\}$ . Ce concept est puissant et a nécessité une analyse précise des symétries des structures invariantes sous l'action de  $\tau$ , à savoir, fixées par changement d'orientation. Nous avons de plus remarqué que les 2-arbres solides sont en correspondance avec les cactus triangulaires plans pris à réflexion près. Dans un sens, on peut considérer que les 2-arbres solides forment un type de cartes topologiques.

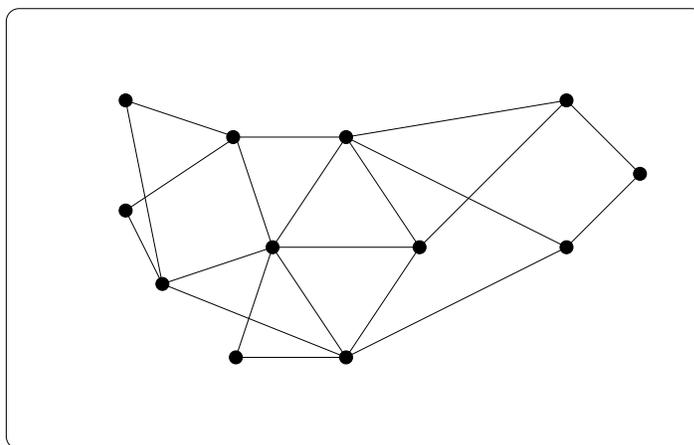
En outre, nous avons proposé une approche de mécanique statistique à l'étude des 2-arbres  $k$ -gonaux en les énumérant selon leur périmètre. Une étude du comportement asymptotique a également été réalisée dans le cas non étiqueté, en se basant sur le théorème classique de Bender, outil fondamental d'analyse asymptotique.

Les sujets abordés dans cette thèse ouvrent de nombreux horizons de recherche. Le premier axe de recherche possible consiste à généraliser les espèces  $P_4^{\text{bic}}(X, Y)$  et

$P_6^{\text{bic}}(X, Y)$  à la famille infinie des  $P_{2n}^{\text{bic}}(X, Y)$ ,  $n \geq 2$ . Alors, en obtenant des formules d'addition pour cette famille, nous pouvons proposer le développement moléculaire de l'espèce des 2-arbres  $k$ -gonaux extérieurement. De la même façon, on peut également généraliser les 2-arbres solides en remplaçant les triangles par des  $k$ -gones. On pourra ainsi les énumérer dans les cas étiqueté et non étiqueté, selon le nombre d'arêtes et la distribution des degrés des arêtes.

De plus, on pourra obtenir le même type de résultats que pour les 2-arbres solides et  $k$ -gonaux pour la classe des  $k$ -arbres. Les  $k$ -arbres sont l'analogue des arbres en dimension  $k$ . On peut voir que ce sont des arbres bâtis à partir de  $k$ -simplexes, avec la condition que les structures ne possèdent pas de cycle de  $k$ -simplexes. Lorsque  $k = 2$ , on retrouve naturellement les 2-arbres. On ne dispose à ce jour que de très peu de résultats à propos du dénombrement des  $k$ -arbres. En fait, seule l'énumération dans le cas étiqueté a été faite. Il est possible d'établir un théorème de dissymétrie pour les  $k$ -arbres et une généralisation des méthodes utilisées dans le cadre des 2-arbres, pourrait permettre de déduire le dénombrement non étiqueté des  $k$ -arbres.

Il existe également d'autres objets construits de façon similaire aux  $k$ -arbres. Ce sont les  $k$ -graphes d'arches. Ces objets sont définis de la façon récursive suivante, où l'on considère, pour simplifier, que l'entier  $k$  vaut deux. Dans ce cas, on parle de graphes d'arches. On commence avec une arête seule et on construit récursivement un graphe d'arche en ajoutant, à chaque étape, un sommet que l'on joint avec deux sommets quelconques du graphe. La différence essentielle avec un 2-arbre est que l'on n'impose pas que les deux sommets que l'on relie au nouveau soient adjacents. La figure 6.12 donne un exemple de graphes d'arches ( $k = 2$ ). Un  $k$ -graphe d'arches s'obtient de façon similaire en commençant avec un  $k$ -simplexe, et à chaque étape un nouveau sommet est relié à  $k - 1$  sommets du graphe, non nécessairement adjacents. Bruno Leclerc (Leclerc, 02) a proposé le problème du dénombrement de ces objets. Aucun résultat



**Figure 6.12** Un graphe d'arche à 12 sommets

dans ce sens n'est publié. Cependant, j'ai déjà montré que le nombre de  $k$ -graphes

d'arches étiquetés à  $n$  sommets est donné par  $\binom{n}{k}^{n-k-1}$  ; voir (Lamathe, 04). Ceci s'obtient en adaptant la bijection de Prüfer pour les arbres (de Cayley). Notons que, pour  $k = 1$ , les  $k$ -graphes d'arches correspondent naturellement aux arbres classiques et on retrouve la formule de Cayley,  $n^{n-2}$  donnant le nombre d'arbres sur  $n$  sommets étiquetés.

Mentionnons également que T. Kloks (Kloks, 90; Kloks, 93) a résolu certains problèmes relatifs au dénombrement des 2-arbres partiels 2-connexes, 2-arbres dans lesquels certaines arêtes ont été enlevées, sans toutefois briser la 2-connexité des structures. Cela soulève des questions nouvelles, par exemple le dénombrement des 2-arbres où la taille des polygones peut varier.



## Appendice A

### STATISTIQUES SUR LES ESPÈCES MOLÉCULAIRES

**Tableau A.1**

Espèces élémentaires et leurs séries indicatrices de cycles et d'asymétrie.

Espèces : $F$	$Z_F$	$\Gamma_F$
Ensembles : $E$	$\exp(\frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + \dots)$	$\exp(\frac{x_1}{1} - \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} - \dots)$
Listes : $L$	$(1 - x_1)^{-1}$	$(1 - x_1)^{-1}$
Permutations : $S$	$\prod_{k \geq 1} (1 - x_k)^{-1}$	$(1 - x_2)(1 - x_1)^{-1}$
Cycles orientés : $C$	$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\phi(k)}{k} \ln(1 - x_k)$	$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} \ln(1 - x_k)$





**Tableau A.4**

Séries indicatrices d'asymétrie classiques et translitées pour les espèces moléculaires jusqu'au degré 4.

$M$	$\Gamma_M$	$\Gamma_{M,\xi}$
1	1	$\Gamma_1$
$X$	$x_1$	$\Gamma_X$
$E_2$	$\frac{1}{2}(x_1^2 - x_2)$	$\Gamma_{E_2} + \xi_2$
$X^2$	$x_1^2$	$\Gamma_{X^2}$
$\Gamma_{E_3}$	$\frac{1}{6}(x_1^3 - 3x_1x_2 + 2x_3)$	$\Gamma_{E_3} + \xi_2x_1$
$C_3$	$\frac{1}{3}(x_1^3 - x_3)$	$\Gamma_{C_3} + \xi_3$
$XE_2$	$\frac{x_1}{2}(x_1^2 - x_2)$	$\Gamma_{XE_2} + \xi_2x_1$
$X^3$	$x_1^3$	$\Gamma_{X^3}$
$E_4$	$\frac{x_1^4}{24} - \frac{x_1^2x_2}{4} + \frac{x_1x_3}{3} + \frac{x_2^2}{8} - \frac{x_4}{4}$	$\Gamma_{E_4} + \frac{1}{2}\xi_2(x_1^2 - x_2) + \frac{1}{2}(\xi_2^2 + \xi_4)$
$E_4^\pm$	$\frac{x_1^4}{12} - \frac{x_1x_3}{3} - \frac{x_2^2}{4} + \frac{x_4}{2}$	$\Gamma_{E_4^\pm} + \xi_3x_1 + \frac{1}{2}(\xi_2^2 - \xi_4)$
$E_2 \circ E_2$	$\frac{x_1^4}{8} - \frac{x_1^2x_2}{4} - \frac{x_2^2}{8} + \frac{x_4}{2}$	$\Gamma_{E_2 \circ E_2} + \frac{1}{2}\xi_2(x_1^2 - x_2) + \xi_2^2$
$XE_3$	$\frac{x_1}{6}(x_1^3 - 3x_1x_2 + 2x_3)$	$\Gamma_{XE_3} + \xi_2x_1^2$
$E_2^2$	$\frac{1}{4}(x_1^2 - x_2)^2$	$\Gamma_{E_2^2} + \xi_2(x_1^2 - x_2) + \xi_2^2$
$P_4^{\text{bic}}$	$\frac{x_1^4}{4} - \frac{3}{4}x_2^2 + \frac{x_4}{2}$	$\Gamma_{P_4^{\text{bic}}} + \frac{1}{2}(3\xi_2^2 - \xi_4)$
$C_4$	$\frac{1}{4}(x_1^4 - x_2^2)$	$\Gamma_{C_4} + \frac{1}{2}(\xi_2^2 + \xi_4)$
$XC_3$	$\frac{x_1}{3}(x_1^3 - x_3)$	$\Gamma_{XC_3} + \xi_3x_1$
$X^2E_2$	$\frac{x_1^2}{2}(x_1^2 - x_2)$	$\Gamma_{X^2E_2} + \xi_2x_1^2$
$E_2(X^2)$	$\frac{1}{2}(x_1^4 - x_2^2)$	$\Gamma_{E_2(X^2)} + \xi_2^2$
$X^4$	$x_1^4$	$\Gamma_{X^4}$

**Tableau A.5**Les séries  $\Gamma_{E_n^\pm}$  et  $\Gamma_{E_{n,\xi}^\pm}$  pour  $n \leq 6$ .

$n$	$\Gamma_{E_n^\pm}$	$\Gamma_{E_{n,\xi}^\pm}$
0	1	1
1	$x_1$	$x_1$
2	$x_1^2$	$x_1^2$
3	$\frac{1}{3}(x_1^3 - x_3)$	$\Gamma_{E_3^\pm} + \xi_3$
4	$\frac{x_1^4}{12} - \frac{x_1 x_3}{3} - \frac{x_2^2}{4} + \frac{x_4}{2}$	$\Gamma_{E_4^\pm} + \xi_3 x_1 + \frac{1}{2}(\xi_2^2 - \xi_4)$
5	$\frac{x_1^5}{60} - \frac{x_1 x_2^2}{4} - \frac{x_1^2 x_3}{6} + \frac{x_1 x_4}{2} + \frac{x_2 x_3}{2} - \frac{3x_5}{5}$	$\Gamma_{E_5^\pm} + \frac{1}{2}(\xi_2^2 - \xi_4)x_1 + \frac{\xi_3}{2}(x_1^2 - x_2) + \xi_5$
6	$\frac{x_1^6}{360} - \frac{x_1^3 x_3}{18} - \frac{x_1^2 x_2^2}{8} + \frac{x_1^2 x_4}{4} - \frac{3x_1 x_5}{5} + \frac{x_1 x_2 x_3}{2} + \frac{x_2^3}{12} - \frac{x_2 x_4}{2} - \frac{2x_3^2}{9} + \frac{2x_6}{3}$	$\Gamma_{E_6^\pm} + \frac{1}{4}(\xi_2^2 - \xi_4)(x_1^2 - x_2) + \frac{\xi_4}{6}(2x_3 - 3x_1 x_2 + x_3^2) + \xi_5 x_1 + \frac{1}{6}(\xi_3^2 + 3\xi_2 \xi_4 - 4\xi_6)$



## Appendice B

### STATISTIQUES SUR LES 2-ARBRES SOLIDES

**Tableau B.1**

Nombre de 2-arbres solides selon le nombre d'arêtes.

$n$	$\tilde{a}_{o,n}$	$\tilde{\mathcal{B}}_{\text{sym},n}$	$\tilde{a}_n$
1	1	1	1
3	1	1	1
5	1	1	1
7	2	2	2
9	7	3	5
11	19	7	13
13	86	12	49
15	372	30	201
17	1825	55	940
19	9143	143	4643
21	47801	273	24037

**Tableau B.2**

Nombre de 2-arbres solides selon la distribution des degrés des arêtes.

$\vec{n}$	$\tilde{a}_{o,\vec{n}}$	$\tilde{\mathcal{B}}_{\text{sym},\vec{n}}$	$\tilde{a}_{\vec{n}}$
$1^7 2^1 3^1$	2	0	1
$1^8 2^2 3^1$	9	3	6
$1^{12} 2^1 3^1 4^1$	46	0	23
$1^{10} 5^1$	3	1	2
$1^{15} 4^1 5^1$	2	0	1
$1^{16} 3^2 5^1$	17	5	11
$1^{15} 2^2 7^1$	34	0	17



## Appendice C

### STATISTIQUES SUR LES 2-ARBRES $K$ -GONAUX

**Tableau C.1**

Ce tableau donne à 12 décimales près les constantes  $\xi_p$ ,  $\alpha_p$ ,  $\bar{\alpha}_p$  et  $\beta_p = \frac{1}{\xi_p}$  pour  $p = 1, \dots, 11$ .

$p$	$\xi_p$	$\alpha_p$	$\bar{\alpha}_p$	$\beta_p$
1	0.338321856899	1.300312124682	1.581185475409	2.955765285652
2	0.177099522303	0.349261381742	0.349261381742	5.646542616233
3	0.119674100436	0.191997258650	0.067390781222	8.356026879296
4	0.090334539604	0.131073637349	0.034020667269	11.069962877759
5	0.072539192528	0.099178841365	0.020427915489	13.785651110085
6	0.060597948397	0.079660456931	0.013601784466	16.502208844693
7	0.052031135998	0.066517090385	0.009699566188	19.219261329064
8	0.045585869619	0.057075912245	0.007262873797	21.936622211299
9	0.040561059517	0.049970993036	0.005640546218	24.654188324989
10	0.036533820306	0.044433135893	0.004506504206	27.371897918664
11	0.033233950789	0.039996691773	0.003682863427	30.089711763681

**Tableau C.2**

Ce tableau donne les valeurs exactes des nombres des nombres  $\tilde{a}_n$ , pour  $k$  entre 2 et 12 et pour  $n = 0, 1, \dots, 20$ , le nombre de 2-arbres  $k$ -gonaux non étiquetés sur  $n$   $k$ -gones.

**$k = 2$**

1, 1, 1, 2, 3, 6, 11, 23, 47, 106, 235, 551, 1301, 3159, 7741, 19320, 48629, 123867, 317955, 823065, 2144505

**$k = 3$**

1, 1, 1, 2, 5, 12, 39, 136, 529, 2171, 9368, 41534, 188942, 874906, 4115060, 19602156, 94419351, 459183768, 2252217207, 11130545494, 55382155396

**$k = 4$**

1, 1, 1, 3, 8, 32, 141, 749, 4304, 26492, 169263, 1115015, 7507211, 51466500, 358100288, 2523472751, 17978488711, 129325796854, 938234533024, 6858551493579, 50478955083341

**$k = 5$** 

1, 1, 1, 3, 11, 56, 359, 2597, 20386, 167819, 1429815, 12500748, 111595289, 1013544057,  
9340950309, 87176935700, 822559721606, 7836316493485, 75293711520236,  
728968295958626, 7105984356424859

 **$k = 6$** 

1, 1, 1, 4, 16, 103, 799, 7286, 71094, 729974, 7743818, 84307887, 937002302, 10595117272,  
121568251909, 1412555701804, 16594126114458, 196829590326284, 2354703777373055,  
28385225424840078, 344524656398655124

 **$k = 7$** 

1, 1, 1, 4, 20, 158, 1539, 16970, 199879, 2460350, 31266165, 407461893, 5420228329,  
73352481577, 1007312969202, 14008437540003, 196963172193733, 2796235114720116,  
40038505601111596, 577693117173844307, 8392528734991449808

 **$k = 8$** 

1, 1, 1, 5, 26, 245, 2737, 35291, 483819, 6937913, 102666626, 1558022255, 24133790815,  
380320794122, 6081804068869, 98490990290897, 1612634990857755,  
26660840123167203, 444560998431678554, 7469779489114328514,  
126375763235359105446

 **$k = 9$** 

1, 1, 1, 5, 32, 343, 4505, 66603, 1045335, 17115162, 289107854, 5007144433, 88516438360,  
1591949961503, 29053438148676, 536972307386326, 10034276171127780,  
189331187319203010, 3603141751525175854, 69097496637591215442,  
1334213677527481808220

 **$k = 10$** 

1, 1, 1, 6, 39, 482, 7053, 117399, 2070289, 38097139, 723169329, 14074851642,  
279609377638, 5651139037570, 115901006038377, 2407291353219949,  
50553753543016719, 1071971262516091572, 22926544048209731554,  
494103705426160765546, 10722146465907412669810

 **$k = 11$** 

1, 1, 1, 6, 46, 636, 10527, 194997, 3823327, 78118107, 1646300388, 35570427615,  
784467060622, 17601062294302, 400750115756742, 9240636709048733,  
215435023547580882, 5071520482516388865, 120417032326341878672,  
2881134828445365441407, 69410468220307148620226

 **$k = 12$** 

1, 1, 1, 7, 55, 840, 15189, 309607, 6671842, 149850849, 3471296793, 82442359291,  
1998559329142, 49290785442796, 1233639304644946, 31268489727956101,  
801335133177932829, 20736286803363051714, 541224489038545084067,  
14234799536039481373552, 376974819516101224941091

**Tableaux C.3**

Ces tableaux donnent les polynômes  $b_n(t)$ , pour  $n = 0, 1, \dots, 9$  et pour  $k$  allant de 2 à 9, des 2-arbres  $k$ -gonaux pointés en une arête orientée pondérés (par leur périmètre) non étiquetés sur  $n$   $k$ -gones.

$k = 2$	
$n$	$b_n(t)$
0	$t$
1	$t$
2	$t + t^2$
3	$t + 2t^2 + t^3$
4	$t + 4t^2 + 3t^3 + t^4$
5	$t + 6t^2 + 8t^3 + 4t^4 + t^5$
6	$t + 9t^2 + 18t^3 + 14t^4 + 5t^5 + t^6$
7	$t + 12t^2 + 35t^3 + 39t^4 + 21t^5 + 6t^6 + t^7$
8	$t + 16t^2 + 62t^3 + 97t^4 + 72t^5 + 30t^6 + 7t^7 + t^8$
9	$t + 20t^2 + 103t^3 + 212t^4 + 214t^5 + 120t^6 + 40t^7 + 8t^8 + t^9$

$k = 3$	
$n$	$b_n(t)$
0	$t$
1	$t^2$
2	$2t^3 + t^4$
3	$5t^4 + 4t^5 + t^6$
4	$14t^5 + 18t^6 + 6t^7 + t^8$
5	$42t^6 + 72t^7 + 37t^8 + 8t^9 + t^{10}$
6	$132t^7 + 291t^8 + 204t^9 + 64t^{10} + 10t^{11} + t^{12}$
7	$429t^8 + 1152t^9 + 1048t^{10} + 438t^{11} + 97t^{12} + 12t^{13} + t^{14}$
8	$1430t^9 + 4558t^{10} + 5128t^{11} + 2757t^{12} + 804t^{13} + 138t^{14} + 14t^{15} + t^{16}$
9	$4862t^{10} + 17944t^{11} + 24249t^{12} + 16108t^{13} + 5981t^{14} + 1332t^{15} + 185t^{16} + 16t^{17} + t^{18}$

$k = 4$	
$n$	$b_n(t)$
0	$t$
1	$t^3$
2	$3t^5 + t^6$
3	$12t^7 + 6t^8 + t^9$
4	$55t^9 + 42t^{10} + 9t^{11} + t^{12}$
5	$273t^{11} + 274t^{12} + 87t^{13} + 12t^{14} + t^{15}$
6	$1428t^{13} + 1806t^{14} + 767t^{15} + 150t^{16} + 15t^{17} + t^{18}$
7	$7752t^{15} + 11820t^{16} + 6387t^{17} + 1641t^{18} + 228t^{19} + 18t^{20} + t^{21}$
8	$43263t^{17} + 77440t^{18} + 51078t^{19} + 16614t^{20} + 3006t^{21} + 324t^{22} + 21t^{23} + t^{24}$
9	$246675t^{19} + 507246t^{20} + 396905t^{21} + 157638t^{22} + 35847t^{23} + 4972t^{24} + 435t^{25} + 24t^{26} + t^{27}$

<b><math>k = 5</math></b>	
$n$	$b_n(t)$
0	$t$
1	$t^4$
2	$4t^7 + t^8$
3	$22t^{10} + 8t^{11} + t^{12}$
4	$140t^{13} + 76t^{14} + 12t^{15} + t^{16}$
5	$969t^{16} + 688t^{17} + 158t^{18} + 16t^{19} + t^{20}$
6	$7084t^{19} + 6290t^{20} + 1916t^{21} + 272t^{22} + 20t^{23} + t^{24}$
7	$53820t^{22} + 57376t^{23} + 22064t^{24} + 4092t^{25} + 414t^{26} + 24t^{27} + t^{28}$
8	$420732t^{25} + 524412t^{26} + 244840t^{27} + 57113t^{28} + 7488t^{29} + 588t^{30}$ $+ 28t^{31} + t^{32}$
9	$3362260t^{28} + 4799568t^{29} + 2645854t^{30} + 749908t^{31} + 122908t^{32}$ $+ 12376t^{33} + 790t^{34} + 32t^{35} + t^{36}$

<b><math>k = 6</math></b>	
$n$	$b_n(t)$
0	$t$
1	$t^5$
2	$5t^9 + t^{10}$
3	$35t^{13} + 10t^{14} + t^{15}$
4	$285t^{17} + 120t^{18} + 15t^{19} + t^{20}$
5	$2530t^{21} + 1390t^{22} + 250t^{23} + 20t^{24} + t^{25}$
6	$23751t^{25} + 16255t^{26} + 3860t^{27} + 430t^{28} + 25t^{29} + t^{30}$
7	$231880t^{29} + 190106t^{30} + 56755t^{31} + 8235t^{32} + 655t^{33} + 30t^{34} + t^{35}$
8	$2330445t^{33} + 2229120t^{34} + 805621t^{35} + 146510t^{36} + 15060t^{37}$ $+ 930t^{38} + 35t^{39} + t^{40}$
9	$23950355t^{37} + 26193570t^{38} + 11149900t^{39} + 2457081t^{40}$ $+ 314810t^{41} + 24880t^{42} + 1250t^{43} + 40t^{44} + t^{45}$

<b><math>k = 7</math></b>	
$n$	$b_n(t)$
0	$t$
1	$t^6$
2	$6t^{11} + t^{12}$
3	$51t^{16} + 12t^{17} + t^{18}$
4	$506t^{21} + 174t^{22} + 18t^{23} + t^{24}$
5	$5481t^{26} + 2456t^{27} + 363t^{28} + 24t^{29} + t^{30}$
6	$62832t^{31} + 34989t^{32} + 6808t^{33} + 624t^{34} + 30t^{35} + t^{36}$
7	$749398t^{36} + 499188t^{37} + 121800t^{38} + 14514t^{39} + 951t^{40}$ $+ 36t^{41} + t^{42}$
8	$9203634t^{41} + 7143466t^{42} + 2106138t^{43} + 313872t^{44} + 26532t^{45}$ $+ 1350t^{46} + 42t^{47} + t^{48}$
9	$115607310t^{46} + 102489288t^{47} + 35536296t^{48} + 6406278t^{49}$ $+ 673749t^{50} + 43820t^{51} + 1815t^{52} + 48t^{53} + t^{54}$

$k = 8$	
$n$	$b_n(t)$
0	$t$
1	$t^7$
2	$7t^{13} + t^{14}$
3	$70t^{19} + 14t^{20} + t^{21}$
4	$819t^{25} + 238t^{26} + 21t^{27} + t^{28}$
5	$10472t^{31} + 3962t^{32} + 497t^{33} + 28t^{34} + t^{35}$
6	$141778t^{37} + 66556t^{38} + 10969t^{39} + 854t^{40} + 35t^{41} + t^{42}$
7	$1997688t^{43} + 1120658t^{44} + 231203t^{45} + 23373t^{46} + 1302t^{47}$ $+ 42t^{48} + t^{49}$
8	$28989675t^{49} + 18932368t^{50} + 4713849t^{51} + 595077t^{52} + 42714t^{53}$ $+ 1848t^{54} + 49t^{55} + t^{56}$
9	$430321633t^{55} + 320771256t^{56} + 93827895t^{57} + 14311479t^{58}$ $+ 1276471t^{59} + 70532t^{60} + 2485t^{61} + 56t^{62} + t^{63}$

$k = 9$	
$n$	$b_n(t)$
0	$t$
1	$t^8$
2	$8t^{15} + t^{16}$
3	$92t^{22} + 16t^{23} + t^{24}$
4	$1240t^{29} + 312t^{30} + 24t^{31} + t^{32}$
5	$18278t^{36} + 5984t^{37} + 652t^{38} + 32t^{39} + t^{40}$
6	$285384t^{43} + 115796t^{44} + 16552t^{45} + 1120t^{46} + 40t^{47} + t^{48}$
7	$4638348t^{50} + 2247376t^{51} + 401632t^{52} + 35256t^{53} + 1708t^{54}$ $+ 48t^{55} + t^{56}$
8	$77652024t^{57} + 43772920t^{58} + 9432184t^{59} + 1032814t^{60} + 64416t^{61}$ $+ 2424t^{62} + 56t^{63} + t^{64}$
9	$1329890705t^{64} + 855243648t^{65} + 216340024t^{66} + 28597424t^{67}$ $+ 2214272t^{68} + 106352t^{69} + 3260t^{70} + 64t^{71} + t^{72}$

**Tableaux C.4**

Ces tableaux donnent les coefficients de  $\tilde{a}_o(x, t)$  pour  $k = 2, \dots, 9$  et  $n = 0, \dots, 10$ , pour des 2-arbres  $k$ -gonaux pointés en une arête orientée pondérés (par leur périmètre) non étiquetés sur  $n$   $k$ -gones.

$k = 2$	
$n$	
0	$t$
1	$t^2$
2	$t^2$
3	$t^2 + t^3$
4	$t^2 + t^3 + t^4$
5	$t^2 + 2t^3 + 2t^4 + t^5$
6	$t^2 + 3t^3 + 4t^4 + 2t^5 + t^6$
7	$t^2 + 4t^3 + 8t^4 + 6t^5 + 3t^6 + t^7$
8	$t^2 + 5t^3 + 14t^4 + 14t^5 + 9t^6 + 3t^7 + t^8$
9	$t^2 + 7t^3 + 23t^4 + 32t^5 + 26t^6 + 12t^7 + 4t^8 + t^9$
10	$t^2 + 8t^3 + 36t^4 + 64t^5 + 66t^6 + 39t^7 + 16t^8 + 4t^9 + t^{10}$

$k = 3$	
$n$	
0	$t$
1	$t^3$
2	$t^4$
3	$t^5 + t^6$
4	$3t^6 + t^7 + t^8$
5	$4t^7 + 5t^8 + 2t^9 + t^{10}$
6	$12t^8 + 14t^9 + 10t^{10} + 2t^{11} + t^{12}$
7	$27t^9 + 53t^{10} + 37t^{11} + 15t^{12} + 3t^{13} + t^{14}$
8	$82t^{10} + 179t^{11} + 171t^{12} + 71t^{13} + 22t^{14} + 3t^{15} + t^{16}$
9	$228t^{11} + 664t^{12} + 716t^{13} + 401t^{14} + 128t^{15} + 29t^{16} + 4t^{17} + t^{18}$
10	$733t^{12} + 2386t^{13} + 3128t^{14} + 2051t^{15} + 825t^{16} + 201t^{17} + 39t^{18} + 4t^{19} + t^{20}$

$k = 4$	
$n$	
0	$t$
1	$t^4$
2	$t^6$
3	$2t^8 + t^9$
4	$7t^{10} + 3t^{11} + t^{12}$
5	$25t^{12} + 18t^{13} + 5t^{14} + t^{15}$
6	$108t^{14} + 101t^{15} + 36t^{16} + 6t^{17} + t^{18}$
7	$492t^{16} + 588t^{17} + 259t^{18} + 58t^{19} + 8t^{20} + t^{21}$
8	$2431t^{18} + 3471t^{19} + 1887t^{20} + 519t^{21} + 87t^{22} + 9t^{23} + t^{24}$
9	$12371t^{20} + 20834t^{21} + 13521t^{22} + 4569t^{23} + 921t^{24} + 120t^{25} + 11t^{26} + t^{27}$
10	$65169t^{22} + 125976t^{23} + 96096t^{24} + 38730t^{25} + 9411t^{26} + 1474t^{27} + 160t^{28} + 12t^{29} + t^{30}$

$k = 5$	
$n$	
0	$t$
1	$t^5$
2	$t^8$
3	$2t^{11} + t^{12}$
4	$8t^{14} + 2t^{15} + t^{16}$
5	$33t^{17} + 18t^{18} + 4t^{19} + t^{20}$
6	$194t^{20} + 124t^{21} + 36t^{22} + 4t^{23} + t^{24}$
7	$1196t^{23} + 1014t^{24} + 324t^{25} + 56t^{26} + 6t^{27} + t^{28}$
8	$8196t^{26} + 8226t^{27} + 3233t^{28} + 640t^{29} + 84t^{30} + 6t^{31} + t^{32}$
9	$58140t^{29} + 68780t^{30} + 31846t^{31} + 7787t^{32} + 1143t^{33} + 114t^{34}$ $+ 8t^{35} + t^{36}$
10	$427975t^{32} + 579266t^{33} + 313832t^{34} + 90742t^{35} + 16019t^{36} + 1820t^{37}$ $+ 152t^{38} + 8t^{39} + t^{40}$

$k = 6$	
$n$	
0	$t$
1	$t^6$
2	$t^{10}$
3	$3t^{14} + t^{15}$
4	$19t^{18} + 5t^{19} + t^{20}$
5	$118t^{22} + 50t^{23} + 8t^{24} + t^{25}$
6	$931t^{26} + 495t^{27} + 100t^{28} + 10t^{29} + t^{30}$
7	$7756t^{30} + 5110t^{31} + 1266t^{32} + 164t^{33} + 13t^{34} + t^{35}$
8	$68685t^{34} + 53801t^{35} + 16275t^{36} + 2560t^{37} + 245t^{38} + 15t^{39} + t^{40}$
9	$630465t^{38} + 575535t^{39} + 206954t^{40} + 39445t^{41} + 4529t^{42} + 340t^{43}$ $+ 18t^{44} + t^{45}$
10	$5966610t^{42} + 6224520t^{43} + 2611405t^{44} + 589676t^{45} + 81145t^{46}$ $+ 7285t^{47} + 454t^{48} + 20t^{49} + t^{50}$

$k = 7$	
$n$	
0	$t$
1	$t^7$
2	$t^{12}$
3	$3t^{17} + t^{18}$
4	$16t^{22} + 3t^{23} + t^{24}$
5	$112t^{27} + 39t^{28} + 6t^{29} + t^{30}$
6	$1020t^{32} + 434t^{33} + 78t^{34} + 6t^{35} + t^{36}$
7	$10222t^{37} + 5487t^{38} + 1127t^{39} + 124t^{40} + 9t^{41} + t^{42}$
8	$109947t^{42} + 70053t^{43} + 17436t^{44} + 2247t^{45} + 186t^{46} + 9t^{47} + t^{48}$
9	$1230840t^{47} + 914103t^{48} + 268995t^{49} + 42144t^{50} + 4000t^{51} + 255t^{52}$ $+ 12t^{53} + t^{54}$
10	$14218671t^{52} + 12057540t^{53} + 4131929t^{54} + 764623t^{55} + 86652t^{56}$ $+ 6397t^{57} + 340t^{58} + 12t^{59} + t^{60}$

$k = 8$	
$n$	
0	$t$
1	$t^8$
2	$t^{14}$
3	$4t^{20} + t^{21}$
4	$35t^{26} + 7t^{27} + t^{28}$
5	$332t^{32} + 98t^{33} + 11t^{34} + t^{35}$
6	$3766t^{38} + 1393t^{39} + 196t^{40} + 14t^{41} + t^{42}$
7	$45448t^{44} + 20650t^{45} + 3561t^{46} + 322t^{47} + 18t^{48} + t^{49}$
8	$580203t^{50} + 312739t^{51} + 65590t^{52} + 7217t^{53} + 483t^{54} + 21t^{55} + t^{56}$
9	$7684881t^{56} + 4813130t^{57} + 1197467t^{58} + 158928t^{59} + 12762t^{60}$ $+ 672t^{61} + 25t^{62} + t^{63}$
10	$104898024t^{62} + 74961328t^{63} + 21701960t^{64} + 3403708t^{65} + 326760t^{66}$ $+ 20552t^{67} + 896t^{68} + 28t^{69} + t^{70}$

$k = 9$	
$n$	
0	$t$
1	$t^9$
2	$t^{16}$
3	$4t^{23} + t^{24}$
4	$27t^{30} + 4t^{31} + t^{32}$
5	$266t^{37} + 68t^{38} + 8t^{39} + t^{40}$
6	$3312t^{44} + 1048t^{45} + 136t^{46} + 8t^{47} + t^{48}$
7	$45711t^{51} + 17948t^{52} + 2712t^{53} + 219t^{54} + 12t^{55} + t^{56}$
8	$670344t^{58} + 312276t^{59} + 56942t^{60} + 5432t^{61} + 328t^{62} + 12t^{63} + t^{64}$
9	$10233201t^{65} + 5539348t^{66} + 1194736t^{67} + 137754t^{68} + 9654t^{69} + 452t^{70}$ $+ 16t^{71} + t^{72}$
10	$161055618t^{72} + 99432684t^{73} + 24928832t^{74} + 3391482t^{75} + 283146t^{76}$ $+ 15472t^{77} + 603t^{78} + 16t^{79} + t^{80}$

**Tableaux C.5**

Ces tableaux donnent les coefficients de  $\tilde{a}(x, t)$  pour  $k = 2, \dots, 9$  et  $n = 0, \dots, 10$ , pour des 2-arbres  $k$ -gonaux pointés en une arête orientée pondérés (par leur périmètre) non étiquetés sur  $n$   $k$ -gones.

$k = 2$	
$n$	
0	$t$
1	$t^2$
2	$t^2$
3	$t^2 + t^3$
4	$t^2 + t^3 + t^4$
5	$t^2 + 2t^3 + 2t^4 + t^5$
6	$t^2 + 3t^3 + 4t^4 + 2t^5 + t^6$
7	$t^2 + 4t^3 + 8t^4 + 6t^5 + 3t^6 + t^7$
8	$t^2 + 5t^3 + 14t^4 + 14t^5 + 9t^6 + 3t^7 + t^8$
9	$t^2 + 7t^3 + 23t^4 + 32t^5 + 26t^6 + 12t^7 + 4t^8 + t^9$
10	$t^2 + 8t^3 + 36t^4 + 64t^5 + 66t^6 + 39t^7 + 16t^8 + 4t^9 + t^{10}$

$k = 3$	
$n$	
0	$t$
1	$t^3$
2	$t^4$
3	$t^5 + t^6$
4	$4t^6 + 2t^7 + t^8$
5	$6t^7 + 8t^8 + 3t^9 + t^{10}$
6	$19t^8 + 28t^9 + 16t^{10} + 4t^{11} + t^{12}$
7	$49t^9 + 100t^{10} + 70t^{11} + 26t^{12} + 5t^{13} + t^{14}$
8	$150t^{10} + 358t^{11} + 325t^{12} + 142t^{13} + 38t^{14} + 6t^{15} + t^{16}$
9	$442t^{11} + 1309t^{12} + 1414t^{13} + 783t^{14} + 250t^{15} + 52t^{16} + 7t^{17} + t^{18}$
10	$1424t^{12} + 4772t^{13} + 6186t^{14} + 4102t^{15} + 1615t^{16} + 402t^{17} + 70t^{18} + 8t^{19} + t^{20}$

$k = 4$	
$n$	
0	$t$
1	$t^4$
2	$t^6$
3	$2t^8 + t^9$
4	$5t^{10} + 2t^{11} + t^{12}$
5	$16t^{12} + 11t^{13} + 4t^{14} + t^{15}$
6	$60t^{14} + 54t^{15} + 22t^{16} + 4t^{17} + t^{18}$
7	$261t^{16} + 305t^{17} + 142t^{18} + 34t^{19} + 6t^{20} + t^{21}$
8	$1243t^{18} + 1755t^{19} + 975t^{20} + 273t^{21} + 51t^{22} + 6t^{23} + t^{24}$
9	$6257t^{20} + 10478t^{21} + 6853t^{22} + 2336t^{23} + 490t^{24} + 69t^{25} + 8t^{26} + t^{27}$
10	$32721t^{22} + 63100t^{23} + 48271t^{24} + 19497t^{25} + 4803t^{26} + 770t^{27} + 92t^{28} + 8t^{29} + t^{30}$

<b><math>k = 5</math></b>	
$n$	
0	$t$
1	$t^5$
2	$t^8$
3	$2t^{11} + t^{12}$
4	$12t^{14} + 4t^{15} + t^{16}$
5	$57t^{17} + 32t^{18} + 6t^{19} + t^{20}$
6	$366t^{20} + 248t^{21} + 64t^{22} + 8t^{23} + t^{24}$
7	$2340t^{23} + 2002t^{24} + 630t^{25} + 104t^{26} + 10t^{27} + t^{28}$
8	$16252t^{26} + 16452t^{27} + 6393t^{28} + 1280t^{29} + 156t^{30} + 12t^{31} + t^{32}$
9	$115940t^{29} + 137378t^{30} + 63516t^{31} + 15493t^{32} + 2259t^{33} + 216t^{34} + 14t^{35} + t^{36}$
10	$854981t^{32} + 1158532t^{33} + 626996t^{34} + 181484t^{35} + 31887t^{36} + 3640t^{37} + 288t^{38} + 16t^{39} + t^{40}$

<b><math>k = 6</math></b>	
$n$	
0	$t$
1	$t^6$
2	$t^{10}$
3	$3t^{14} + t^{15}$
4	$12t^{18} + 3t^{19} + t^{20}$
5	$68t^{22} + 28t^{23} + 6t^{24} + t^{25}$
6	$483t^{26} + 253t^{27} + 56t^{28} + 6t^{29} + t^{30}$
7	$3946t^{30} + 2582t^{31} + 659t^{32} + 89t^{33} + 9t^{34} + t^{35}$
8	$34485t^{34} + 26953t^{35} + 8213t^{36} + 1300t^{37} + 133t^{38} + 9t^{39} + t^{40}$
9	$315810t^{38} + 288021t^{39} + 103799t^{40} + 19831t^{41} + 2318t^{42} + 182t^{43} + 12t^{44} + t^{45}$
10	$2984570t^{42} + 3112780t^{43} + 1306605t^{44} + 295143t^{45} + 40775t^{46} + 3689t^{47} + 243t^{48} + 12t^{49} + t^{50}$

<b><math>k = 7</math></b>	
$n$	
0	$t$
1	$t^7$
2	$t^{12}$
3	$3t^{17} + t^{18}$
4	$26t^{22} + 6t^{23} + t^{24}$
5	$203t^{27} + 72t^{28} + 9t^{29} + t^{30}$
6	$41989t^{32} + 868t^{33} + 144t^{34} + 12t^{35} + t^{36}$
7	$20254t^{37} + 10914t^{38} + 2212t^{39} + 236t^{40} + 15t^{41} + t^{42}$
8	$219388t^{42} + 140106t^{43} + 34704t^{44} + 4494t^{45} + 354t^{46} + 18t^{47} + t^{48}$
9	$2459730t^{47} + 1827555t^{48} + 537357t^{49} + 84102t^{50} + 7937t^{51} + 492t^{52} + 21t^{53} + t^{54}$
10	$28431861t^{52} + 24115080t^{53} + 8261473t^{54} + 1529246t^{55} + 172956t^{56} + 12794t^{57} + 656t^{58} + 24t^{59} + t^{60}$

$k = 8$	
$n$	
0	$t$
1	$t^8$
2	$t^{14}$
3	$4t^{20} + t^{21}$
4	$21t^{26} + 4t^{27} + t^{28}$
5	$183t^{32} + 53t^{33} + 8t^{34} + t^{35}$
6	$1918t^{38} + 704t^{39} + 106t^{40} + 8t^{41} + t^{42}$
7	$22908t^{44} + 10375t^{45} + 1825t^{46} + 170t^{47} + 12t^{48} + t^{49}$
8	$290511t^{50} + 156471t^{51} + 32934t^{52} + 3635t^{53} + 255t^{54}$ $+ 12t^{55} + t^{56}$
9	$3844688t^{56} + 2407227t^{57} + 599513t^{58} + 79651t^{59} + 6466t^{60}$ $+ 351t^{61} + 16t^{62} + t^{63}$
10	$52454248t^{62} + 37482092t^{63} + 10853332t^{64} + 1702405t^{65}$ $+ 163728t^{66} + 10336t^{67} + 468t^{68} + 16t^{69} + t^{70}$

$k = 9$	
$n$	
0	$t$
1	$t^9$
2	$t^{16}$
3	$4t^{23} + t^{24}$
4	$46t^{30} + 8t^{31} + t^{32}$
5	$494t^{37} + 128t^{38} + 12t^{39} + t^{40}$
6	$6532t^{44} + 2096t^{45} + 256t^{46} + 16t^{47} + t^{48}$
7	$90954t^{51} + 35788t^{52} + 5348t^{53} + 422t^{54} + 20t^{55} + t^{56}$
8	$1339448t^{58} + 624552t^{59} + 113582t^{60} + 10864t^{61} + 632t^{62}$ $+ 24t^{63} + t^{64}$
9	$20459857t^{65} + 11077108t^{66} + 2387924t^{67} + 275174t^{68} + 19194t^{69}$ $+ 880t^{70} + 28t^{71} + t^{72}$
10	$322092958t^{72} + 198865368t^{73} + 49851852t^{74} + 6782964t^{75} + 565666t^{76}$ $+ 30944t^{77} + 1174t^{78} + 32t^{79} + t^{80}$



## RÉFÉRENCES

- P. AUGER, G. LABELLE et P. LEROUX, *Generalized Binomial Coefficients for Molecular Species*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, **91**, 15–48, (2000).
- P. AUGER, G. LABELLE et P. LEROUX, *Combinatorial addition formulas*, Proceedings FPSAC'01, Tempe, Arizona, mai 2001, 19–26, (2001).
- P. AUGER, G. LABELLE et P. LEROUX, *Combinatorial addition formulas and applications*, Advances in Applied Mathematics, **28**, 302–342, (2002)
- P. AUGER, G. LABELLE et P. LEROUX, *Computing the molecular expansion of species with the Maple package Devmol*, 49<sup>ème</sup> Séminaire Lotharingien de Combinatoire.
- L. BEINEKE et R. PIPPERT, *The Number of Labeled  $k$ -Dimensional Trees*, Journal of Combinatorial Theory, **6**, 200–205, (1969).
- E. A. BENDER, *Asymptotic methods in enumeration*, SIAM Review, **16**, 485–515, (1974).
- F. BERGERON, G. LABELLE et P. LEROUX, *Combinatorial species and tree-like structures*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. **67**, Cambridge University Press, (1997).
- M. BÒNA, M. BOUSQUET, G. LABELLE et P. LEROUX, *Enumeration of  $m$ -ary cacti*, Advances in Applied Mathematics, **24**, 22–56, (2000).
- M. BOUSQUET, *Espèces de structures et applications au dénombrement de cartes et de cactus planaires*, Thèse de doctorat, UQÀM, Publications du LaCIM, Vol. **24**, (1999).
- M. BOUSQUET et C. LAMATHE, *Enumeration of solid 2-trees*, Proceedings FPSAC'02, Melbourne, Australie, 133-147, (2002).
- M. BOUSQUET et C. LAMATHE, *Enumeration of solid 2-trees according to edge number and edge degree distribution*, soumis au journal Discrete Mathematics.
- W. G. BROWN, *Enumeration of triangulations of the disk*, Proceedings of the London Mathematical Society, **14**, 746–768, (1964).
- Y. CHIRICOTA, *Classification des espèces moléculaires*, Annales des Sciences Mathématiques du Québec, **17**, 11–37, (1993).

- Y. CHIRICOTA, *Structures combinatoires et calcul symbolique*, Thèse de doctorat, UQAM, Publications du LaCIM, Vol. **12**, (1993).
- L. COMTET, *Analyse Combinatoire*, tome premier, Presses Universitaires de France, (1970).
- S. J. CYVIN, J. BRUNVOLL, E. BRENSDAL, B. N. CYVIN et E. K. LLOYD, *Enumeration of Polyene Hydrocarbons : A Complete Mathematical Solution*, Journal of Chemical Information and Computer Sciences, **35**, 743–751, (1995).
- E. DEUTSCH, *Problem 10751*, American Mathematical Monthly, **108**, 872–873, (Nov, 2001).
- E. DEUTSCH, S. FERETIC, M. NOY, *Diagonally convex directed polyominoes and even trees: a bijection and related issues*, Discrete Mathematics, **256**, 645–654, (2002).
- T. FOWLER, I. GESSEL, G. LABELLE, P. LEROUX, *Specifying 2-trees*, Proceedings FPSAC'00, Moscou, Russie, juin 2000, 202–213, (2000).
- T. FOWLER, I. GESSEL, G. LABELLE, P. LEROUX, *The Specification of 2-trees*, Advances in Applied Mathematics, **28**, 145–168, (2002).
- I. GESSEL et G. LABELLE, *Lagrange Inversion for Species*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, **72**, 95–117, (1995).
- F. HARARY et E. PALMER, *Graphical Enumeration*, Academic Press, New York, (1973).
- F. HARARY, E. PALMER et R. READ, *On the cell-growth problem for arbitrary polygons*, Discrete Mathematics, **11**, 371–389, (1975).
- INRIA, PROJET ALGO, *Encyclopedia of combinatorial structures*, <http://algo.inria.fr/encyclopedia/index.html>.
- A. JOYAL. *Une théorie combinatoire des séries formelles*, Advances in Mathematics, **42**, 1–82, (1981).
- A. JOYAL. *Foncteurs analytiques et espèces de structures*, dans Combinatoire Énumérative, Lecture Notes in Mathematics, **1234**, Springer–Verlag, 126–159, (1986).
- A. KERBER, *Enumeration under Finite Group Action : Symmetry Classes of Mappings*, dans Combinatoire Énumérative, Lecture Notes in Mathematics, **1234**, Springer–Verlag, 160–176, (1986).
- T. Kloks, *Enumeration of biconnected partial 2-trees*, 26<sup>th</sup> Dutch Mathematical Conference, 1990.
- T. Kloks, *Treewidth*, Thèse de doctorat, Royal University of Utrecht, Holland, (1993).

- G. LABELLE, *Une nouvelle démonstration combinatoire des formules d'inversion de Lagrange*, *Advances in Mathematics*, **42**, 217–247, (1981).
- G. LABELLE, *Some new computational methods in the theory of species*, dans *Combinatoire Énumérative*, *Lectures Notes in Mathematics*, **1234**, 160–176, (1986).
- G. LABELLE. *On asymmetric structures*, *Discrete Mathematics*, **99**, 141–164, (1989).
- G. LABELLE, *Dérivées directionnelles et développements de Taylor combinatoires*, *Discrete Mathematics*, **79**, 235–258, (1989).
- G. LABELLE, *Counting Asymmetric Enriched Trees*, *Journal of Symbolic Computations*, **14**, 211–242, (1992).
- G. LABELLE, *Sur la symétrie et l'asymétrie des structures combinatoires*, *Theoretical Computer Science*, **117**, 3–22, (1993).
- G. LABELLE, J. LABELLE et K. PINEAU, *Sur une généralisation des séries indicatrices d'espèces*, *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **69**, No. 1, 17–35, (1995).
- G. LABELLE et C. LAMATHE, *A shifted asymmetry index series*, *Advances in Applied Mathematics*, vol. **32**, Issue 3, 576–608, (2004).
- G. LABELLE, C. LAMATHE et P. LEROUX, *Développement moléculaire de l'espèce des 2-arbres planaires*, *Proceedings GASCom'01*, Sienne, Italie, novembre 2002, 41–46, (2001).
- G. LABELLE, C. LAMATHE et P. LEROUX, *Énumération des 2-arbres  $k$ -gonaux*, *Second Colloquium on Mathematics and Computer Science*, Versailles, France, septembre 2002, *Trends in Mathematics*, Éd. B. Chauvin, P. Flajolet et al., Birkhauser Verlag Basel Switserland, 95–109, (2002).
- G. LABELLE, C. LAMATHE et P. LEROUX, *Labelled and unlabelled enumeration of  $k$ -gonal 2-trees*, *Journal of Combinatorial Theory Series A*, vol. **106**, Issue 2, 193–219, (2004).
- G. LABELLE, C. LAMATHE et P. LEROUX, *A classification of plane and planar 2-trees*, *Theoretical Computer Science*, vol. **307**, Issue 2, 337–363, (2003).
- G. LABELLE, C. LAMATHE et P. LEROUX, *Dénombrement des 2-arbres  $k$ -gonaux selon la taille et le périmètre*, accepté pour publication dans les *Annales des Sciences Mathématiques du Québec*.
- G. LABELLE et P. LEROUX, *Enumeration of (uni- or bicolored) plane trees according to their degree distribution*, *Discrete Mathematics*, **157**, 227–240, (1996).
- G. LABELLE et K. PINEAU, *Ensembles orientés et permutations paires : Séries indicatrices d'asymétrie et  $q$ -séries*, *Advances in Applied Mathematics*, **15**, 452–475,

(1994).

- J. LABELLE, *Quelques espèces sur des ensembles de petites cardinalités*, Annales des Sciences Mathématiques du Québec, **11**, 31–58, (1985).
- J. LABELLE, *Théorie des graphes*, Modulo, (1981).
- C. LAMATHE, *The number of labelled  $k$ -arch graphs*, Journal of Integer Sequences, vol. **7**, Issue 3, article 04.3.1, (2004).
- C. LAMATHE, *Molecular expansion of the species of outerplanar  $k$ -gonal 2-trees*, en préparation.
- P. LEROUX, *Methoden der Anzahlbestimmung für Einige Klassen von Graphen*, Bayreuther Mathematische Schriften, **26**, 1–36, (1988).
- P. LEROUX et B. MILOUDI, *Généralisations de la formule d’Otter*, Annales des Sciences Mathématiques du Québec, **16**, 53–80, (1992).
- B. LECLERC, *Graphes d’arches*, Mathématiques & Sciences humaines, **157**, 27–48, (2002).
- B. LECLERC et V. MAKARENKOV, *On some relations between 2-trees and tree metrics*, Discrete Mathematics, **192**, 223–249, (1998).
- I. MACDONALD, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Clarendon Press, Oxford, 2<sup>ème</sup> édition, (1995).
- A. MEIR et J. W. MOON, *Hereditary finite sets and identity trees*, Journal of Combinatorial Theory, Series B, **35**, 142–155, (1983).
- J. W. MOON, *The Number of Labeled  $k$ -trees*, Journal of Combinatorial Theory, **6**, 196–199, (1969).
- R. OTTER, *The number of trees*, Annals of Mathematics, **49**, 583–599, (1948).
- E. PALMER, *On the Number of Labeled 2-trees*, Journal of Combinatorial Theory, **6**, 206–207, (1969).
- E. PALMER et R. READ, *On the Number of Plane 2-trees*, Journal of London Mathematical Society, **6**, 583–592, (1973).
- K. PINEAU, *Généralisation des séries indicatrices d’espèces de structures*, Thèse de doctorat, UQÀM, Publications du LaCIM, Vol. **21**, (1995).
- G. PÓLYA, *Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen*, Acta Mathematica, **68**, 145–254, (1937).
- G. PÓLYA et R. C. READ, *Combinatorial Enumeration of Groups, Graphs and Chemical Compounds*, Springer-Verlag, (1987).

- N. J. A. SLOANE et S. PLOUFFE, *The Encyclopedia of Integer Sequences*, Academic Press, San Diego, (1995).  
<http://www.research.att.com/~njas/sequences>
- P. K. STOCKMEIER, *Enumeration of graphs with prescribed automorphism group*, Thèse de Doctorat, Université du Michigan, Ann Arbor, (1971).
- Y. N. YEH, *The calculus of virtual species and  $\mathbb{K}$ -species*, dans *Combinatoire Énumérative*, Lecture Notes in Mathematics, **1234**, Springer-Verlag, 351–369, (1986).



## Publications du **Laboratoire de Combinatoire** et d'Informatique **Mathématique**

---

..... suite de la page couverture 2

- 18 *Hyperbinomiales: doubles suites satisfaisant à des équations aux différences partielles de dimension et d'ordre deux de la forme  $H(n, k) = p(n, k)H(n - 1, k) + q(n, k)H(n - 1, k - 1)$* , P. Théoret, **1994**
  - 19 *Théorie des espèces et combinatoire des structures arborescentes*, F. Bergeron, G. Labelle, P. Leroux, **1994**
  - 20 *Axel Thue's papers on repetitions in words: a translation*, J. Berstel, **1995**
  - 21 *Une généralisation des séries indicatrices d'espèces de structures*, K. Pineau, **1996**
  - 22 *Fonctions symétriques, ensembles de descentes et classes de conjugaison dans les produits en couronne*, S. Poirier, **1996**
  - 23 *Combinatoire des systèmes d'équations différentielles et aux dérivées partielles*, B. Randrianirina, **1998**
  - 24 *Espèces de structures et applications au dénombrement de cartes et de cactus planaires*, M. Bousquet, **1998**
  - 25 *Contribution à l'étude des mots sturmiens*, B. Parvaix, **1998**
  - 26 *Analyse d'équations combinatoires en théorie des espèces*, P. Auger, **1999**
  - 27 *Colloque LaCIM 2000 — Combinatoire, Informatique et Applications*, P. Leroux (éd.), Septembre 2000, Actes, **2000**
  - 28 *Fonctions de Bessel et combinatoire*, F. Gascon, **2001**
  - 29 *The Saga of Reduced Factorizations of Elements of the Symmetric Group*, A. Garsia, **2002**
  - 30 *Variétés de carquois et homologie d'intersection*, R. Schiffler, **2003**
  - 31 *Algorithmes vectoriels et bioinformatique*, S. Hamel, **2003**
  - 32 *Conjecture  $n!$  et généralisations*, J.-C. Aval, **2004**
  - 33 *Spécification de classes de structures arborescentes*, C. Lamathe, **2004**
-

## SPÉCIFICATION DE CLASSES DE STRUCTURES ARBORESCENTES

Le principal sujet abordé dans cette thèse est la spécification et l'énumération de classes de 2-arbres. L'outil principal utilisé est la théorie des espèces de structures. Divisée en six chapitres, cette thèse comporte deux parties.

La première partie est consacrée à la théorie des espèces. On y introduit sommairement les différentes notions de cette théorie que nous utilisons par la suite. Nous nous attardons particulièrement aux concepts d'espèce et de développement moléculaire ainsi que de substitution généralisée. Nous y introduisons aussi en détail les séries indicatrices associées à ce contexte, ainsi que deux nouvelles espèces à deux sortes,  $P_4^{\text{bic}}(X, Y)$  et  $P_6^{\text{bic}}(X, Y)$ . Ensuite, nous étudions une nouvelle série formelle : la série indicatrice d'asymétrie translaturée. Nous présentons une définition de cette série après avoir motivé son introduction. Ensuite, nous établissons le comportement de cette série face aux opérations combinatoires classiques. Nous en déduisons alors une méthode inédite pour l'énumération des sous-structures asymétriques, ainsi que des expressions explicites pour la série indicatrice d'asymétrie translaturée des espèces usuelles. Finalement, nous introduisons une généralisation au cas pondéré du triangle de Pascal.

La deuxième partie est entièrement dédiée à l'étude des 2-arbres. Nous y définissons l'espèce des 2-arbres ainsi que certaines de ses variations, pour ensuite présenter l'outil fondamental de cette partie, le théorème de dissymétrie. Nous y proposons aussi la méthode générale d'énumération des 2-arbres basée sur la notion d'espèce quotient. Nous étudions alors la classification par rapport aux symétries des 2-arbres exterplans et exterplanaires. Nous prouvons quatre nouvelles formules d'addition conduisant, après utilisation du théorème de dissymétrie et d'équations fonctionnelles, au développement moléculaire des espèces des 2-arbres exterplans et exterplanaires. Nous en déduisons aisément l'énumération complète de ces structures. Enfin, dans les deux derniers chapitres, nous traitons du dénombrement des 2-arbres solides et  $k$ -gonaux, respectivement. Dans les deux cas, nous obtenons préalablement l'énumération des structures orientées. Par la suite, en utilisant les espèces quotients, nous déduisons l'énumération dans le cas non orienté. Pour les 2-arbres solides, nous obtenons des formules explicites, tandis que pour les 2-arbres  $k$ -gonaux, nous établissons des formules de récurrence pour le dénombrement non étiqueté, ainsi qu'une étude asymptotique.

### TABLE DES MATIÈRES

1. Espèces de structures .....	9
2. Série indicatrice d'asymétrie translaturée .....	31
3. Espèce des 2-arbres .....	75
4. Classification des espèces des 2-arbres exterplans et exterplanaires .....	87
5. Énumération des 2-arbres solides .....	113
6. Énumération des 2-arbres $k$ -gonaux .....	135

Laboratoire de combinatoire et d'informatique mathématique  
Université du Québec à Montréal  
C.P. 8888, Succ. Centre-Ville  
Montréal (Québec) Canada  
H3C 3P8

isbn 2-89276-348-7

