

Publications du **Laboratoire de  
Combinatoire et d'  
Informatique  
Mathématique**

**30**

---

Ralf Schiffler

**Variétés de carquois et  
homologie d'intersection**

---



Université du Québec à Montréal

# Publications du Laboratoire de Combinatoire et d'Informatique Mathématique

---

## Responsable des Publications du LaCIM

Srecko Brlek

courriel: brlek@lacim.uqam.ca

LaCIM, Université du Québec à Montréal

C.P. 8888, Succ. Centre-Ville

Montréal (Québec) Canada

H3C 3P8

## Éditeur technique

André Lauzon

## Comité éditorial

|             |                       |               |                        |
|-------------|-----------------------|---------------|------------------------|
| A. ARNOLD   | <i>Bordeaux I</i>     | J. LABELLE    | <i>UQAM</i>            |
| F. BERGERON | <i>UQAM</i>           | C. LAM        | <i>Concordia</i>       |
| J. BERSTEL  | <i>Marne-la-Valle</i> | A. LASCOUX    | <i>Marne-la-Valle</i>  |
| S. BRLEK    | <i>UQAM</i>           | P. LEROUX     | <i>UQAM</i>            |
| R. CORI     | <i>Bordeaux I</i>     | C. REUTENAUER | <i>UQAM</i>            |
| P. FLAJOLET | <i>INRIA</i>          | R. STANLEY    | <i>MIT</i>             |
| D. FOATA    | <i>Strasbourg</i>     | V. STREHL     | <i>Erlangen</i>        |
| A. GARSIA   | <i>UCSD</i>           | D. THÉRIEN    | <i>McGill</i>          |
| I. GESSEL   | <i>Brandeis</i>       | G.X. VIENNOT  | <i>Bordeaux I</i>      |
| I. GOULDEN  | <i>Waterloo</i>       | T. WALSH      | <i>UQAM</i>            |
| G. LABELLE  | <i>UQAM</i>           | Y. YEH        | <i>Academia Sinica</i> |

---

## Volumes parus

- 1 *Parallélisme: modèles et complexité*, S. Brlek (éd.), ACFAS'89, Actes, **1990**
- 2 *Séries indicatrices d'espèces pondérées et  $q$ -analogues*, H. Décoste, **1990**
- 3 *Étude des arbres hyperquaternaires*, L. Laforest, **1990**
- 4 *Contribution à l'étude des empilements*, P. Lalonde, **1991**
- 5 *Calcul combinatoire de séries indicatrices de cycles*, I. Constantineau, **1991**
- 6 *Notes On Schubert Polynomials*, I. G. Macdonald, **1991**
- 7 *Combinatoire des tableaux oscillants et des polynômes de Bessel*, L. Favreau, **1991**
- 8 *Réécritures dans l'algèbre de Lie libre, le groupe libre et l'algèbre associative libre*, G. Melançon, **1991**
- 9  *$q$ -énumération de polyominoes convexes*, M. Bousquet-Mélou, **1991**
- 10 *Atelier de Combinatoire franco-québécois*, J. Labelle, J.-G. Penaud (éd.), Mai 1991, Actes, **1992**
- 11 *Séries formelles et combinatoire algébrique*, P. Leroux, C. Reutenauer (éd.), Juin 1992, Actes, **1992**
- 12 *Structures combinatoires et calcul symbolique*, Y. Chiricota, **1993**
- 13 *Aspects combinatoires des nombres de Stirling, des polynômes orthogonaux de Sheffer et de leurs  $q$ -analogues*, A. de Médicis, **1993**
- 14 *A theory of noncommutative determinants and characteristic functions of graphs I*, I. M. Gelfand and V. S. Rethak; *Matroids on chamber systems*, I. M. Gelfand and A. V. Borovik, **1993**
- 15 *Modèles mathématiques pour la synthèse des systèmes informatiques*, S. Brlek (éd.), ACFAS'94, Actes, **1994**
- 16 *Produits et coproduits des fonctions quasi-symétriques et de l'algèbre des descentes*, C. Malvenuto, **1994**
- 17 *Une interprétation combinatoire des approximants de Padé*, Emmanuel Roblet, **1994**

..... suite en fin de volume

---

Publications du **Laboratoire de  
Combinatoire et d'  
Informatique  
Mathématique**

**30**

---

Ralf Schiffler

**Variétés de carquois et  
homologie d'intersection**

---



Université du Québec à Montréal

Dépôt légal, deuxième trimestre 2003, Bibliothèque nationale du Québec

ISBN 2-89276-302-9 LaCIM Montréal

©LaCIM, Montréal, Avril 2003.

Laboratoire de combinatoire et d'informatique mathématique  
Université du Québec à Montréal  
C.P. 8888, Succ. Centre-Ville  
Montréal (Québec) Canada  
H3C 3P8



UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

VARIÉTÉS DE CARQUOIS ET HOMOLOGIE D'INTERSECTION

THÈSE  
PRÉSENTÉE  
COMME EXIGENCE PARTIELLE  
DU DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES

PAR  
RALF SCHIFFLER

JUILLET 2002

Je remercie Robert Bédard pour son excellent travail de directeur de thèse. C'est lui qui m'a enseigné toute la théorie des algèbres enveloppantes quantiques et des représentations de carquois et qui m'a souvent mis sur des pistes de recherches qui par la suite s'avéraient fructueuses. Merci aussi à ma femme Céline et ma fille Ella pour leur support.

## TABLE DES MATIÈRES

|  |     |
|--|-----|
| LISTE DES FIGURES . . . . .  | v   |
| LISTE DES TABLEAUX . . . . .   | vii |
| RÉSUMÉ . . . . .   | vii |
| INTRODUCTION . . . . .   | 1   |
| CHAPITRE I   |     |
| NOTATIONS ET RAPPELS . . . . .   | 3   |
| 1.1 L’algèbre enveloppante quantique $\mathbf{U}$ . . . . .  | 3   |
| 1.2 Les modules de carquois . . . . .  | 6   |
| 1.3 La cohomologie d’intersection locale des variétés de carquois . . . . .                          | 12  |
| 1.4 Le carquois d’Auslander-Reiten . . . . .   | 13  |
| 1.5 Les $\alpha$ -partages . . . . .   | 17  |
| CHAPITRE II  |     |
| RÉSULTATS DE R. BÉDARD . . . . .   | 23  |
| 2.1 L’effet de l’involution $\overline{(\ )}$ sur un vecteur de racine . . . . .                     | 23  |
| 2.2 Relations de commutation entre les vecteurs de racine . . . . .                                  | 30  |
| CHAPITRE III   |     |
| LE CALCUL DES POLYNÔMES $\Omega_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}}$ . . . . .                                 | 39  |
| 3.1 Multiplication par un vecteur de racine . . . . .  | 39  |
| 3.2 Formule récursive pour $\Omega_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}}$ dans le cas $A_n$ . . . . .            | 44  |
| CHAPITRE IV  |     |
| LES SINGULARITÉS DES VARIÉTÉS DE CARQUOIS DE TYPE $\mathbf{A}_n$ . . . . .                           | 53  |
| 4.1 Analyse de $\Omega_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}}$ pour $\mathbf{c}$ proche de $\mathbf{a}$ . . . . . | 53  |
| 4.2 Lissité rationnelle . . . . .  | 61  |
| 4.3 Lissité rationnelle projective . . . . .   | 67  |
| CONCLUSION . . . . .   | 93  |
| RÉFÉRENCES . . . . .   | 97  |





## LISTE DES FIGURES

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 1.1 | Un carquois $\mathcal{Q}$ avec carquois d'Auslander-Reiten correspondant $\Gamma$                    | 15 |
| 1.2 | Un carquois d'Auslander-Reiten de type $A_6$ .   | 16 |
| 1.3 | Un $\alpha^r$ -partage $\lambda$   | 21 |
| 4.1 | Deux schémas du carquois d'Auslander-Reiten dans le cas $i \rightarrow j \rightarrow k$ .            | 71 |
| 4.2 | Deux schémas du carquois d'Auslander-Reiten dans le cas $i \rightarrow j \leftarrow k$ .             | 75 |
| 4.3 | Le schéma d'un carquois d'Auslander-Reiten dans le cas $h \rightarrow i \rightarrow j \rightarrow k$ | 81 |
| 4.4 | Le carquois d'Auslander-Reiten $\Gamma_{\mathcal{Q}_1}$  | 82 |
| 4.5 | Le carquois d'Auslander-Reiten $\Gamma_{\mathcal{Q}_2}$  | 82 |
| 4.6 | Le carquois d'Auslander-Reiten $\Gamma_{\mathcal{Q}_3}$  | 83 |
| 4.7 | Le carquois d'Auslander-Reiten $\Gamma_{\mathcal{Q}_4}$  | 83 |



## LISTE DES TABLEAUX

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 4.1 | Résultats de calcul dans le cas $\mathcal{Q}_1$ . . . . . | 86 |
| 4.2 | Résultats de calcul dans le cas $\mathcal{Q}_2$ . . . . . | 86 |
| 4.3 | Résultats de calcul dans le cas $\mathcal{Q}_3$ . . . . . | 87 |
| 4.4 | Résultats de calcul dans le cas $\mathcal{Q}_4$ . . . . . | 87 |
| 4.5 | Résultats de calcul dans le cas $Q_1, n = 3$ . . . . .    | 88 |
| 4.6 | Résultats de calcul dans le cas $Q_2, n = 3$ . . . . .    | 88 |



## RÉSUMÉ

Il existe une correspondance entre les représentations d'un carquois de type  $A, D$  ou  $E$  et l'algèbre enveloppante quantique  $\mathbf{U}$  associée à ce carquois sur  $\mathbf{Z}[v, v^{-1}]$ , voir (Ringel, 1990).

Les représentations de dimension  $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n)$  d'un carquois peuvent être vues comme des points d'un espace vectoriel  $E_{\mathbf{d}}$  muni d'une action d'un groupe algébrique  $G_{\mathbf{d}}$  tels que deux points sont dans la même orbite si et seulement si les représentations correspondantes sont isomorphes. Par le théorème de Gabriel, les classes d'isomorphismes des représentations sont en bijection avec les  $\mathbf{c} \in \mathbf{N}^{\nu}$ , où  $\nu$  est le nombre de racines positives. On note  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}}$  la  $G_{\mathbf{d}}$ -orbite qui est la classe correspondante à  $\mathbf{c}$ . Son adhérence  $\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{c}}}$  pour la topologie de Zariski est appelée *variété de carquois*. L'étude de ces variétés est le sujet de cette thèse. Il existe un ordre partiel sur  $\mathbf{N}^{\nu}$  défini par  $\mathbf{c}' \preceq \mathbf{c}$  si et seulement si les représentations dans  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}}$  et  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}'}$  ont la même dimension et  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}'} \subset \overline{\mathcal{O}_{\mathbf{c}}}$ .

D'autre part, la base canonique donnée par Lusztig de l'algèbre enveloppante quantique est définie à partir d'une base  $\{E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{c}}\}_{\mathbf{c} \in \mathbf{N}^{\nu}}$  de type Poincaré-Birkhoff-Witt (Lusztig, 1990a) et la correspondance mentionnée ci-dessus associée à  $E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{c}}$  la  $G_{\mathbf{d}}$ -orbite  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}}$ . Il existe une involution  $(\overline{\quad})$  de l'algèbre enveloppante quantique qui fixe chaque élément de la base canonique et dont l'image  $\overline{E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{c}}}$  d'un élément  $E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{c}}$  de la base de type PBW est donné par une somme

$$\overline{E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{c}}} = \sum_{\mathbf{c}' \preceq \mathbf{c}} \omega_{\mathbf{c}'} E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{c}'} \tag{1}$$

avec  $\omega_{\mathbf{c}'} \in \mathbf{Z}[v, v^{-1}]$ . Les polynômes  $\omega_{\mathbf{c}''}$ ,  $\mathbf{c}' \preceq \mathbf{c}'' \preceq \mathbf{c}$  déterminent complètement la cohomologie d'intersection locale de  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}}$ . La formule (1) est centrale dans la théorie. Elle décrit le lien entre la base canonique, la base de type PBW et la topologie des variétés de carquois.

Dans le troisième chapitre, nous établissons une formule récursive pour les polynômes  $\omega_{\mathbf{c}'}$  dans le cas  $A$ . Pour y parvenir nous utilisons entre autre des résultats non-publiés de R.Bédard que nous présentons dans le chapitre II. Le chapitre I quant à lui contient des rappels sur les objets mathématiques que nous étudions par la suite ainsi que leur définition. Nous présentons dans le quatrième chapitre deux applications géométriques de notre formule récursive pour  $\omega_{\mathbf{c}'}$ : D'une part, nous prouvons le résultat intéressant qu'une variété de carquois de type  $A$  est lisse si et seulement si elle est rationnellement lisse et nous dressons la liste

complète de ces variétés (rationnellement) lisses. D'autre part, nous donnons la liste complète des variétés de carquois de type  $A$  qui sont projectivement rationnellement lisses, c'est-à-dire dont la projectivisation est rationnellement lisse.

Cette recherche est intéressante de plusieurs points de vue. Les algèbres enveloppantes quantiques sont en soi un sujet fort intéressant. Elles sont des exemples importants d'algèbres non-commutatives. De plus, elles ont des applications dans plusieurs branches des sciences, notamment en physique théorique, dans la théorie des noeuds et des représentations des algèbres.

Les variétés de carquois forment une classe très riche de variétés algébriques affines. Elles ressemblent en plusieurs aspects aux variétés de Schubert, des variétés algébriques projectives qui ont été le sujet de nombreuses études et qui sont aujourd'hui parmi les variétés les mieux comprises. La cohomologie d'intersection est un des outils-clés dans l'étude des variétés de Schubert et la notion de lissité rationnelle  $y$  est une approximation utile de la notion de lissité.

Mots clés: algèbre enveloppante quantique (groupe quantique), théorie des représentations de carquois, variété de carquois, cohomologie d'intersection.

## INTRODUCTION

Cette recherche porte sur la géométrie des variétés de carquois de type  $A$  et en particulier sur la question de savoir quand est-ce qu'une telle variété est rationnellement lisse. Pour pouvoir donner une réponse à cette question, il faut étudier la cohomologie d'intersection locale de la variété ce qui revient au calcul de certains polynômes qui apparaissent dans un changement de bases dans l'algèbre enveloppante quantique associée au carquois.

Ce document est divisé en quatre chapitres; le premier sert à introduire les objets mathématiques sur lesquels nous allons travailler, dans le deuxième, nous présentons des résultats non-publiés de R.Bédard sur des propriétés de l'algèbre enveloppante quantique et dans les chapitres III et IV, nous présentons les résultats de notre propre recherche. Il s'agit là d'une part, dans le chapitre III, d'une formule récursive pour les polynômes mentionnés ci-dessus et d'autre part, dans le chapitre IV, des applications géométriques de cette formule qui nous permettent entre autres de fournir une réponse complète à la question formulée ci-dessus, à savoir quand est-ce qu'une variété de carquois de type  $A$  est rationnellement lisse et projectivement rationnellement lisse.





# CHAPITRE I

## NOTATIONS ET RAPPELS

Dans ce chapitre, nous introduisons les objets mathématiques que nous allons étudier dans les chapitres postérieures, nous fixons les notations et nous expliquons plusieurs résultats qui ont été obtenus par d'autres personnes.

### 1.1 L'algèbre enveloppante quantique $\mathbf{U}$

Soient  $v$  une indéterminée et  $\mathbf{U}$  l'algèbre enveloppante quantique de Drinfeld-Jimbo sur le corps  $\mathbf{Q}(v)$  des fonctions rationnelles correspondante à l'algèbre de Lie complexe simple  $sl_{n+1}(\mathbf{C})$ .  $\mathbf{U}$  est une algèbre sur  $\mathbf{Q}(v)$  donnée par les générateurs:  $E_i, F_i, K_i, K_i^{-1}$

( $1 \leq i \leq n$ ) et les relations:

$$(r.1) \quad K_i K_i^{-1} = K_i^{-1} K_i = 1, \quad K_i K_j = K_j K_i;$$

$$(r.2) \quad K_i E_j = \begin{cases} v^2 E_j K_i, & \text{si } i = j; \\ v^{-1} E_j K_i, & \text{si } |i - j| = 1; \\ E_j K_i, & \text{si } |i - j| > 1. \end{cases}$$

$$(r.3) \quad K_i F_j = \begin{cases} v^{-2} F_j K_i, & \text{si } i = j; \\ v F_j K_i, & \text{si } |i - j| = 1; \\ F_j K_i, & \text{si } |i - j| > 1. \end{cases}$$

$$(r.4) \quad E_i F_j - F_j E_i = \delta_{ij} \frac{(K_i - K_i^{-1})}{(v - v^{-1})} \quad \text{où } \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j; \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

$$(r.5) \quad \begin{cases} E_i^2 E_j - (v + v^{-1}) E_i E_j E_i + E_j E_i^2 = 0, & \text{si } |i - j| = 1; \\ E_i E_j - E_j E_i = 0, & \text{si } |i - j| > 1. \end{cases}$$

$$(r.6) \quad \begin{cases} F_i^2 F_j - (v + v^{-1}) F_i F_j F_i + F_j F_i^2 = 0, & \text{si } |i - j| = 1; \\ F_i F_j - F_j F_i = 0, & \text{si } |i - j| > 1. \end{cases}$$

Soit  $\mathbf{U}^+$  la  $\mathbf{Q}(v)$ -sous-algèbre engendrée par les  $E_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ). Soit  $\overline{(\ )} : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{U}$  l'involution de  $\mathbf{Q}$ -algèbres définie par

$$E_i \mapsto E_i, \quad F_i \mapsto F_i, \quad K_i \mapsto K_i^{-1} \quad \text{pour tout } 1 \leq i \leq n \quad \text{et} \quad v \mapsto v^{-1}.$$

Noter que  $\overline{\mathbf{U}^+} = \mathbf{U}^+$ .

Soit  $Q$  le groupe abélien libre avec base  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ . On définit un produit scalaire  $(\ , \ )$  sur  $Q$  par

$$(\alpha_i, \alpha_j) = \begin{cases} 2, & \text{si } i = j; \\ -1, & \text{si } |i - j| = 1; \\ 0, & \text{si } |i - j| > 1. \end{cases}$$

Soit  $R = \{\alpha \in Q \mid (\alpha, \alpha) = 2\}$ .  $R$  est un système de racines de type  $A_n$  dont l'ensemble des racines simples est  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ . Soit  $R^+ = \{\alpha \in R \mid \alpha = \sum_j c_j \alpha_j \text{ avec } c_j \in \mathbf{N}\}$  le sous-ensemble des racines positives. Dans notre cas, nous avons  $R = \{\pm(\alpha_a + \alpha_{a+1} + \dots + \alpha_b) \mid 1 \leq a \leq b \leq n\}$  et  $R^+ = \{(\alpha_a + \alpha_{a+1} + \dots + \alpha_b) \mid 1 \leq a \leq b \leq n\}$ . Le support de la racine  $\alpha = \sum_j c_j \alpha_j$  est par définition  $\{1 \leq j \leq n \mid c_j \neq 0\}$  et nous le notons  $\text{Supp}(\alpha)$ . Le support d'une racine est un sous-ensemble connexe de  $\{1, \dots, n\}$ , i.e.  $\text{Supp}(\alpha) = \{a, a+1, \dots, b\}$  avec  $1 \leq a \leq b \leq n$ .

Chaque  $\alpha \in R$  définit une réflexion  $s_\alpha : Q \rightarrow Q$ ,  $z \mapsto z - (z, \alpha) \alpha$ . Par la suite, nous écrirons  $s_i$  au lieu de  $s_{\alpha_i}$ . Soit  $W$  le groupe de Weyl de  $R$ .  $W$  est le sous-groupe de  $\text{Aut}(Q)$  engendré par les réflexions  $s_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) et  $W$  est isomorphe au groupe symétrique  $\mathcal{S}_{n+1}$ . Soient  $\ell(w)$  la longueur de  $w$  par rapport aux générateurs  $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  et  $w_0$  l'unique élément de  $W$  de longueur maximale. Il est bien connu que  $\ell(w_0) = \nu = n(n+1)/2 = \#(R^+)$ .

Lusztig a défini une action du groupe des tresses sur  $\mathbf{U}$  (Lusztig, 1990a) et il l'a utilisée pour définir une base de type PBW (Poincaré, Birkhoff, Witt) de  $\mathbf{U}^+$ . Nous rappelons maintenant ces définitions.

Pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ , soit  $\tilde{T}_i : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{U}$  l'automorphisme de  $\mathbf{Q}(v)$ -algèbres défini par

$$\begin{aligned} E_i &\mapsto -K_i^{-1} F_i, & F_i &\mapsto -E_i K_i, & K_i &\mapsto K_i^{-1}, \\ E_j &\mapsto E_j, & F_j &\mapsto F_j, & K_j &\mapsto K_j, & \text{si } |i - j| > 1, \\ E_j &\mapsto (E_j E_i - v^{-1} E_i E_j), & F_j &\mapsto (F_i F_j - v F_j F_i), & K_j &\mapsto K_i K_j, & \text{si } |i - j| = 1. \end{aligned}$$

Nous avons  $\tilde{T}_i \tilde{T}_j \tilde{T}_i = \tilde{T}_j \tilde{T}_i \tilde{T}_j$  si  $|i - j| = 1$  et  $\tilde{T}_i \tilde{T}_j = \tilde{T}_j \tilde{T}_i$  si  $|i - j| > 1$ . Ceci nous donne une action du groupe des tresses. De plus nous avons  $\tilde{T}_i(E_j) = \tilde{T}_j^{-1}(E_i)$  si  $|i - j| = 1$ .

Étant donné des entiers  $M, N \geq 0$ , définissons

$$[N]! = \prod_{h=1}^N \frac{(v^h - v^{-h})}{(v - v^{-1})} \in \mathbf{Z}[v, v^{-1}],$$

$$\begin{bmatrix} M+N \\ N \end{bmatrix} = \frac{[M+N]!}{[M]![N]!} \in \mathbf{Z}[v, v^{-1}]$$

et  $E_i^{(N)} = \frac{E_i^N}{[N]!}$  pour  $1 \leq i \leq n$ .

Notons par  $U$  (respectivement  $U^+$ ) la  $\mathbf{Z}[v, v^{-1}]$ -sous-algèbre de  $\mathbf{U}$  (respectivement  $\mathbf{U}^+$ ) engendré par les éléments  $E_i^{(N)}$ ,  $F_i^{(N)}$ ,  $K_i$  et  $K_i^{-1}$  (respectivement  $E_i^{(N)}$ ) pour  $1 \leq i \leq n$ ,  $N \geq 0$ .

Soit  $\mathcal{I}$  l'ensemble des suites  $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_\nu)$  d'éléments de  $\{1, 2, \dots, n\}$  telles que  $s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_\nu}$  est une expression réduite de  $w_0$ . Chaque  $\mathbf{i} \in \mathcal{I}$  donne lieu à un ordre total sur  $R^+ = \{\alpha(\mathbf{i}, 1), \alpha(\mathbf{i}, 2), \dots, \alpha(\mathbf{i}, \nu)\}$ , où  $\alpha(\mathbf{i}, t) = s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_{t-1}}(\alpha_{i_t})$  pour  $t = 1, \dots, \nu$ . Souvent, nous écrirons  $\alpha^t$  au lieu de  $\alpha(\mathbf{i}, t)$  s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le choix de  $\mathbf{i}$ . On dit qu'un élément  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_\nu) \in \mathbf{N}^\nu$  est de  $\mathbf{i}$ -homogénéité  $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_n) \in \mathbf{N}^n$  si et seulement si

$$\sum_{t=1}^{\nu} c_t \alpha(\mathbf{i}, t) = \sum_{k=1}^n d_k \alpha_k.$$

Pour  $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_\nu) \in \mathcal{I}$  et  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_\nu) \in \mathbf{N}^\nu$ , posons

$$E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{c}} = E_{i_1}^{(c_1)} \tilde{T}_{i_1} \left( E_{i_2}^{(c_2)} \right) \tilde{T}_{i_1} \tilde{T}_{i_2} \left( E_{i_3}^{(c_3)} \right) \dots \tilde{T}_{i_1} \tilde{T}_{i_2} \dots \tilde{T}_{i_{(\nu-1)}} \left( E_{i_\nu}^{(c_\nu)} \right).$$

**Proposition 1.1.1** *Soit  $\mathbf{i} \in \mathcal{I}$ . Alors  $B_{\mathbf{i}} = \{E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{c}} \mid \mathbf{c} \in \mathbf{N}^\nu\}$  est une  $\mathbf{Q}(v)$ -base de  $\mathbf{U}^+$ . On dit que  $B_{\mathbf{i}}$  est une base de type PBW.*

*Preuve.* (Lusztig, 1990b, sect. 1.8 et 1.13) □

Nous rappelons maintenant la construction de Lusztig de la base canonique de  $\mathbf{U}^+$ .

**Théorème 1.1.2** *Soient  $\mathbf{i} \in \mathcal{I}$  et  $\mathcal{L}_{\mathbf{i}}$  le  $\mathbf{Z}[v^{-1}]$ -sous-module de  $\mathbf{U}^+$  engendré par  $B_{\mathbf{i}}$ .*

1.  $\mathcal{L}_{\mathbf{i}}$  est indépendant de  $\mathbf{i}$ . Par la suite, nous écrirons  $\mathcal{L}$  au lieu de  $\mathcal{L}_{\mathbf{i}}$ .

2.  $\pi(B_{\mathbf{i}})$  est une  $\mathbf{Z}$ -base de  $\mathcal{L}/v^{-1}\mathcal{L}$  qui est indépendante de  $\mathbf{i}$ . Ici  $\pi : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}/v^{-1}\mathcal{L}$  est la projection canonique. Nous écrivons  $B$  plutôt que  $\pi(B_{\mathbf{i}})$ .
3. La restriction de  $\pi : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}/v^{-1}\mathcal{L}$  définit un isomorphisme de  $\mathbf{Z}$ -modules  $\pi' : \mathcal{L} \cap \overline{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{L}/v^{-1}\mathcal{L}$  où  $\overline{\mathcal{L}}$  est l'image de  $\mathcal{L}$  par  $\overline{(\ )}$ . En particulier,  $\mathbf{B} = \pi'^{-1}(B)$  est une  $\mathbf{Z}$ -base de  $\mathcal{L} \cap \overline{\mathcal{L}}$ .
4.  $\mathbf{B}$  est une  $\mathbf{Z}[v^{-1}]$ -base de  $\mathcal{L}$  et une  $\mathbf{Q}(v)$ -base de  $\mathbf{U}^+$ .  $\mathbf{B}$  est appelé la base canonique de  $\mathbf{U}^+$ .
5. Chaque élément de  $\mathbf{B}$  est fixé par  $\overline{(\ )} : \mathbf{U}^+ \rightarrow \mathbf{U}^+$ .

*Preuve.* (Lusztig, 1990a)

Pour certains éléments  $\mathbf{i} \in \mathcal{I}$ , dits *adaptés au carquois*, Lusztig a donné une description géométrique des entrées de la matrice de transition entre les bases  $\mathbf{B}$  et  $B_{\mathbf{i}}$ . Nous décrivons ces éléments de  $\mathcal{I}$  et l'interprétation géométrique de ces entrées dans les sections suivantes.

## 1.2 Les modules de carquois

Rappelons que l'ensemble des sommets du graphe de Dynkin  $\Delta$  du système de racines  $R$  est l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$  et que  $\{i, j\}$  forme une arête si et seulement si  $|i - j| = 1$ . Donc  $\Delta$  est le graphe:

$$1 \text{ --- } 2 \text{ --- } \cdots \text{ --- } (n-1) \text{ --- } n$$

Soit  $\mathcal{Q} = (\mathcal{Q}^0, \mathcal{Q}^1)$  un carquois dont le graphe sous-jacent est le graphe de Dynkin  $\Delta$  de  $R$ , i.e. pour chaque arête  $\{i, j\}$  de  $\Delta$  nous fixons une orientation. (Nous utilisons la notation  $G^0$  pour l'ensemble des sommets du carquois  $G$  et  $G^1$  pour l'ensemble des flèches.) Un sommet  $i$  est un puits (respectivement une source) de  $\mathcal{Q}$  s'il n'y a pas de flèche  $i \rightarrow j$  (respectivement  $i \leftarrow j$ ) dans  $\mathcal{Q}$ . Pour  $i \in \mathcal{Q}^0$ , soit  $\mathcal{Q}_+(i)$  (respectivement  $\mathcal{Q}_-(i)$ ) le sous-carquois complet de  $\mathcal{Q}$  formé de tous les sommets  $h \in \mathcal{Q}^0$  pour lesquels il existe un chemin orienté dans  $\mathcal{Q}$  de  $h$  jusqu'à  $i$  (respectivement de  $i$  jusqu'à  $h$ ), et soit  $\mathcal{Q}_{\rightarrow}(i)$  (respectivement  $\mathcal{Q}_{\leftarrow}(i)$ ) le sous-carquois complet maximal de  $\mathcal{Q}$  contenant  $i$  et n'ayant que des flèches  $h \rightarrow k$  (respectivement  $h \leftarrow k$ ) avec  $h < k$ .

Un élément  $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_{\nu}) \in \mathcal{I}$  est *adapté au carquois*  $\mathcal{Q}$  si  $i_1$  est un puits de  $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}$ ,  $i_2$  est un puits du carquois  $\mathcal{Q}_2 = s_{i_1}(\mathcal{Q})$  obtenu de  $\mathcal{Q}$  en renversant l'orientation de toutes les flèches qui ont  $i_1$  comme but, et  $i_k$  est un puits du carquois  $\mathcal{Q}_k = s_{i_{k-1}}(\mathcal{Q}_{k-1})$  obtenu de  $\mathcal{Q}_{k-1}$  en renversant l'orientation de toutes les flèches qui ont  $i_{k-1}$  comme but, avec  $2 \leq k \leq \nu$ .

**Proposition 1.2.1** 1. Il existe  $\mathbf{i} \in \mathcal{I}$  qui est adapté à  $\mathcal{Q}$ .

2. Un élément  $\mathbf{i}$  de  $\mathcal{I}$  peut être adapté à au plus un carquois.
3. Si  $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_\nu) \in \mathcal{I}$  est adapté au carquois  $\mathcal{Q}$  et  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  est défini par  $w_0(\alpha_{i_1}) = -\alpha_j$  alors  $\mathbf{i}' = (i_2, i_3, \dots, i_\nu, j)$  est un élément de  $\mathcal{I}$  adapté au carquois  $s_{i_1}(\mathcal{Q})$ .

*Preuve.* (Lusztig, 1990a, sect. 4.12 – 4.15) □

Soit  $F$  un corps. Un module (ou représentation)  $\mathbf{V} = (V_i, f_{ij})$  de  $\mathcal{Q}$  est une collection de  $n$   $F$ -espaces vectoriels  $V_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) de dimension finie, et de  $(n-1)$  applications  $F$ -linéaires  $f_{ij} : V_i \rightarrow V_j$  ( $i \rightarrow j \in \mathcal{Q}^1$ ). Un morphisme du module  $\mathbf{V} = (V_i, f_{ij})$  vers le module  $\mathbf{V}' = (V'_i, f'_{ij})$  est une famille d'applications  $F$ -linéaires  $g_i : V_i \rightarrow V'_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  telles que  $f'_{ij} \circ g_i = g_j \circ f_{ij}$  pour chaque  $i \rightarrow j \in \mathcal{Q}^1$ . Ces modules et morphismes forment une catégorie abélienne  $\text{Mod}(\mathcal{Q})$ . Pour un module  $\mathbf{V}$  de  $\mathcal{Q}$ , notons par  $[\mathbf{V}]$  sa classe d'isomorphisme dans  $\text{Mod}(\mathcal{Q})$ .

La dimension du module  $\mathbf{V} = (V_i, f_{ij})$  est le  $n$ -tuple

$$\dim(\mathbf{V}) = (\dim_F(V_1), \dim_F(V_2), \dots, \dim_F(V_n)) \in \mathbf{N}^n.$$

Si  $i$  est une source (respectivement un puits) de  $\mathcal{Q}$ , soit  $\text{Mod}^-(\mathcal{Q}, i)$  (respectivement  $\text{Mod}^+(\mathcal{Q}, i)$ ) la sous-catégorie complète de  $\text{Mod}(\mathcal{Q})$  dont les objets sont les modules  $\mathbf{V} = (V_h, f_{hh'})$  tels que  $\oplus_j f_{ij} : V_i \rightarrow \oplus_j V_j$  est injectif (respectivement  $\oplus_j f_{ji} : \oplus_j V_j \rightarrow V_i$  est surjectif) et nous définissons le foncteur de réflexion  $\Phi_i^- : \text{Mod}(\mathcal{Q}) \rightarrow \text{Mod}^+(s_i(\mathcal{Q}), i)$  (respectivement  $\Phi_i^+ : \text{Mod}(\mathcal{Q}) \rightarrow \text{Mod}^-(s_i(\mathcal{Q}), i)$ ) comme suit: Un objet  $\mathbf{V} = (V_h, f_{hh'})$  de  $\text{Mod}(\mathcal{Q})$  est envoyé sur l'objet  $\mathbf{V}' = (V'_h, f'_{hh'})$  de  $\text{Mod}^+(s_i(\mathcal{Q}), i)$  (respectivement  $\text{Mod}^-(s_i(\mathcal{Q}), i)$ ) où

$$V'_h = \begin{cases} V_h, & \text{if } h \neq i; \\ \text{Coker}(\oplus_j f_{ij} : V_i \rightarrow \oplus_j V_j), & \text{if } h = i, \end{cases}$$

$$\left( \text{respectivement } V'_h = \begin{cases} V_h, & \text{if } h \neq i; \\ \ker(\oplus_j f_{ji} : \oplus_j V_j \rightarrow V_i), & \text{if } h = i. \end{cases} \right)$$

et les  $f'_{hh'}$  sont les applications évidentes. Sur les morphismes,  $\Phi_i^-$  et  $\Phi_i^+$  sont les foncteurs évidents.

On sait que la restriction de  $\Phi_i^+$  à la sous-catégorie  $\text{Mod}^+(\mathcal{Q}, i)$  définit une équivalence de

$$\text{Mod}^+(\mathcal{Q}, i) \cong \text{Mod}^-(s_i(\mathcal{Q}), i)$$

dont l'inverse est donné par la restriction de  $\Phi_i^-$  à  $\text{Mod}^-(s_i(\mathcal{Q}), i)$ . De plus, si un module  $\mathbf{V}$  dans  $\text{Mod}^+(\mathcal{Q}, i)$  correspond sous  $\Phi_i^+$  à  $\mathbf{V}'$  dans  $\text{Mod}^-(s_i(\mathcal{Q}), i)$ , alors  $\dim(\mathbf{V}) = (d_1, d_2, \dots, d_n)$  et  $\dim(\mathbf{V}') = (d'_1, d'_2, \dots, d'_n)$  satisfont

$$d'_1 \alpha_1 + d'_2 \alpha_2 + \dots + d'_n \alpha_n = s_i(d_1 \alpha_1 + d_2 \alpha_2 + \dots + d_n \alpha_n).$$

On dit qu'un module  $\mathbf{V}$  de  $\mathcal{Q}$  est indécomposable si  $\mathbf{V}$  ne peut être écrit comme la somme directe de sous-modules propres de  $\mathcal{Q}$ .

Pour  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , soit  $\mathbf{P}(k)$  le module suivant de  $\mathcal{Q}$ :  $\mathbf{P}(k)_i$  est l'espace vectoriel sur  $F$  ayant comme base l'ensemble des chemins  $k = k_0 \rightarrow k_1 \rightarrow k_2 \rightarrow \dots \rightarrow k_m = i$  de  $k$  jusqu'à  $i$  dans  $\mathcal{Q}$  et pour chaque  $i \rightarrow j \in \mathcal{Q}^1$ , soit  $f_{ij}: \mathbf{P}(k)_i \rightarrow \mathbf{P}(k)_j$  l'unique application  $F$ -linéaire qui envoie l'élément de la base  $k = k_0 \rightarrow k_1 \rightarrow k_2 \rightarrow \dots \rightarrow k_m = i$  sur  $k = k_0 \rightarrow k_1 \rightarrow k_2 \rightarrow \dots \rightarrow k_m = i \rightarrow j$ . Il est facile de montrer que  $\mathbf{P}(k) = (\mathbf{P}(k)_i, (f_{ij})_{i \rightarrow j})$  est un module indécomposable projectif de  $\mathcal{Q}$  et que chaque module indécomposable projectif est isomorphe à  $\mathbf{P}(k)$  pour un  $k \in \{1, \dots, n\}$ . De façon analogue, pour  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , soit  $\mathbf{I}(k)$  le module suivant de  $\mathcal{Q}$ :  $\mathbf{I}(k)_i$  est l'espace vectoriel sur  $F$  ayant comme base l'ensemble des chemins  $i = k_0 \rightarrow k_1 \rightarrow k_2 \rightarrow \dots \rightarrow k_m = k$  de  $i$  jusqu'à  $k$  dans  $\mathcal{Q}$  et pour chaque  $i \rightarrow j \in \mathcal{Q}^1$  tel que  $\mathbf{I}(k)_i \neq 0$  et  $\mathbf{I}(k)_j \neq 0$ , soit  $f_{ij}: \mathbf{I}(k)_i \rightarrow \mathbf{I}(k)_j$  l'unique application  $F$ -linéaire qui envoie l'élément de la base  $i = k_0 \rightarrow j = k_1 \rightarrow k_2 \rightarrow \dots \rightarrow k_m = k$  sur  $j = k_1 \rightarrow k_2 \rightarrow \dots \rightarrow k_m = k$ . Il est facile de montrer que  $\mathbf{I}(k) = (\mathbf{I}(k)_i, (f_{ij})_{i \rightarrow j})$  est un module indécomposable injectif de  $\mathcal{Q}$  et que chaque module indécomposable injectif est isomorphe à  $\mathbf{I}(k)$  pour un  $k \in \{1, \dots, n\}$ .

**Théorème 1.2.2** *Soit  $\mathcal{Q}$  un carquois et  $\mathbf{i} \in \mathcal{I}$  adapté à  $\mathcal{Q}$ .*

1. *Pour tout  $\alpha \in R^+$ , il y a un unique module indécomposable (à isomorphisme près), noté  $\mathbf{e}_\alpha \in \text{Mod}(\mathcal{Q})$ , tel que  $\dim(\mathbf{e}_\alpha) = (d_1, \dots, d_n)$  et  $\alpha = \sum_{i=1}^n d_i \alpha_i$ ; chaque module indécomposable est isomorphe à  $\mathbf{e}_\alpha$  pour un unique  $\alpha \in R^+$ . Si  $\alpha = \alpha(\mathbf{i}, k) = s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_{k-1}} (\alpha_{i_k})$  alors  $\mathbf{e}_\alpha = \Phi_{i_1}^- \Phi_{i_2}^- \dots \Phi_{i_{k-1}}^- (\mathbf{e}_{i_k})$  où  $\mathbf{e}_{i_k}$  est le module simple  $(V_i, f_{ij})$  dans  $\text{Mod}(\mathcal{Q}_k)$  défini par  $V_{i_k} = F$ ,  $V_j = 0$  pour  $j \neq i_k$  et  $f_{ij} = 0$  pour toute flèche  $i \rightarrow j \in \mathcal{Q}^1$ . Ceci est le théorème de Gabriel. En particulier, la classification des modules indécomposables est indépendante du corps de base.*
2. *Il y a une bijection  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_\nu) \mapsto [\mathbf{e}(\mathbf{c})]$  entre  $\mathbf{N}^\nu$  et l'ensemble des classes d'isomorphisme de modules de  $\mathcal{Q}$ , où  $\mathbf{e}(\mathbf{c}) = \bigoplus_{t=1}^\nu c_t \mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i}, t)}$ . Dans ce cas, nous avons  $\dim(\mathbf{e}(\mathbf{c})) = (d_1, \dots, d_n)$ , où  $\sum_{t=1}^\nu c_t \alpha(\mathbf{i}, t) = \sum_{i=1}^n d_i \alpha_i$ , i.e.  $\mathbf{c}$  est de  $\mathbf{i}$ -homogénéité  $\mathbf{d}$ .*
3. *Si  $\alpha = \alpha_a + \alpha_{a+1} + \dots + \alpha_b$ ,  $1 \leq a \leq b \leq n$ , alors  $\mathbf{e}_\alpha$  est isomorphe au module  $(V_i, f_{ij})$  avec*

$$V_i = \begin{cases} F, & \text{si } a \leq i \leq b; \\ 0, & \text{sinon;} \end{cases} \quad \text{et } \forall i \rightarrow j \in \mathcal{Q}^1, \quad f_{ij} = \begin{cases} \text{Id}_F, & \text{si } a \leq i, j \leq b; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

*Preuve.* (Lusztig, 1990a, sect. 4.12 – 4.15) □

Soit  $\mathbf{i}$  adapté au carquois  $\mathcal{Q}$ . Soient  $\mathcal{S}$  l'ensemble des suites exactes courtes non-scindées de modules de  $\mathcal{Q}$  et  $\mathcal{S}_{op}$  l'ensemble des suites de  $\mathcal{S}$  dont les extrémités sont des modules indécomposables. Donc si  $\Upsilon \in \mathcal{S}_{op}$  alors il existe  $s_1, s_2 \in \{1, 2, \dots, \nu\}$  tels que

$$\Upsilon : 0 \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^{s_1}} \rightarrow \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^{s_2}} \rightarrow 0.$$

Un élément  $\Upsilon$  de  $\mathcal{S}_{op}$  est appelé *opération élémentaire* et nous notons  $\mathbf{op}^\Upsilon$  le vecteur  $(op_1^\Upsilon, \dots, op_\nu^\Upsilon) \in \mathbf{Z}^\nu$  donné par

$$op_t^\Upsilon = \begin{cases} -1 & \text{si } t = s_1, s_2 \\ 1 & \text{si } \mathbf{e}_{\alpha^t} \text{ est un facteur direct de } \mathbf{V} \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Pour tout  $\mathbf{c} \in \mathbf{N}^\nu$  soit  $\mathcal{S}_{op}(\mathbf{c}) = \{\Upsilon \in \mathcal{S}_{op} \mid \mathbf{c} + \mathbf{op}^\Upsilon \in \mathbf{N}^\nu\}$ .

Pour chaque suite exacte non-scindée  $\Upsilon : 0 \rightarrow \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W} \rightarrow 0$ , nous définissons les suites homologiques associées Hom-Ext  $(\mathbf{X}, \Upsilon)$  et Hom-Ext  $(\Upsilon, \mathbf{X})$  par

$$\begin{aligned} \text{Hom-Ext}(\mathbf{X}, \Upsilon) & : 0 \rightarrow \text{Hom}(\mathbf{X}, \mathbf{U}) \rightarrow \text{Hom}(\mathbf{X}, \mathbf{V}) \rightarrow \text{Hom}(\mathbf{X}, \mathbf{W}) \rightarrow \\ & \rightarrow \text{Ext}(\mathbf{X}, \mathbf{U}) \rightarrow \text{Ext}(\mathbf{X}, \mathbf{V}) \rightarrow \text{Ext}(\mathbf{X}, \mathbf{W}) \rightarrow 0 \\ \text{Hom-Ext}(\Upsilon, \mathbf{X}) & : 0 \rightarrow \text{Hom}(\mathbf{W}, \mathbf{X}) \rightarrow \text{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{X}) \rightarrow \text{Hom}(\mathbf{U}, \mathbf{X}) \rightarrow \\ & \rightarrow \text{Ext}(\mathbf{W}, \mathbf{X}) \rightarrow \text{Ext}(\mathbf{V}, \mathbf{X}) \rightarrow \text{Ext}(\mathbf{U}, \mathbf{X}) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Noter que  $\text{Ext}^2(\ , \ )$  est toujours nul car l'algèbre des chemins dans  $\mathcal{Q}$  est héréditaire. Ainsi ces suites sont exactes.

Posons  $[\mathbf{V}, \mathbf{V}']_{\mathcal{Q}} = \dim_F \text{Hom}_{\mathcal{Q}}(\mathbf{V}, \mathbf{V}')$  et  $[\mathbf{V}, \mathbf{V}']_{\mathcal{Q}}^1 = \dim_F \text{Ext}_{\mathcal{Q}}^1(\mathbf{V}, \mathbf{V}')$ . Nous écrirons souvent  $[\mathbf{V}, \mathbf{V}']$  (respectivement  $[\mathbf{V}, \mathbf{V}']^1$ ) au lieu de  $[\mathbf{V}, \mathbf{V}']_{\mathcal{Q}}$  (respectivement  $[\mathbf{V}, \mathbf{V}']_{\mathcal{Q}}^1$ ) si le choix du carquois  $\mathcal{Q}$  est clair. Noter que  $\text{Hom}_{\mathcal{Q}}(\mathbf{V}, \mathbf{V}')$  est le  $F$ -espace vectoriel des morphismes  $g : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}'$  dans  $\text{Mod}(\mathcal{Q})$  et  $\text{Ext}_{\mathcal{Q}}^1(\mathbf{V}, \mathbf{V}')$  est le  $F$ -espace vectoriel des extensions  $0 \rightarrow \mathbf{V}' \rightarrow \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{V} \rightarrow 0$  dans  $\text{Mod}(\mathcal{Q})$ . Nous étendons  $[\ , \ ]_{\mathcal{Q}}$  et  $[\ , \ ]_{\mathcal{Q}}^1$  par linéarité à tout le groupe de Grothendieck (le groupe abélien libre ayant comme base les classes d'isomorphisme des modules indécomposables dans  $\text{Mod}(\mathcal{Q})$ ) et nous définissons la forme bilinéaire  $\varphi(\ , \ )$  sur  $\mathbf{Z}^\nu$  par  $\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = [\mathbf{e}(\mathbf{a}), \mathbf{e}(\mathbf{b})]_{\mathcal{Q}} - [\mathbf{e}(\mathbf{b}), \mathbf{e}(\mathbf{a})]_{\mathcal{Q}}^1$ , pour  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{Z}^\nu$ .

**Lemme 1.2.3** *Soit  $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_\nu) \in \mathcal{I}$  adapté au carquois  $\mathcal{Q}$  et  $\mathbf{i}' = (i_2, i_3, \dots, i_\nu, j) \in \mathcal{I}$  adapté au carquois  $s_{i_1}(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}'$  où  $j$  est défini par  $w_0(\alpha_{i_1}) = -\alpha_j$ . Soit  $\mathbf{e}_\beta$  (respectivement  $\mathbf{e}'_\beta$ ) un module indécomposable de  $\mathcal{Q}$  (respectivement  $\mathcal{Q}'$ ) de dimension  $\beta \in R^+$ .*

1. Si  $[\mathbf{e}_{\alpha(i,h)}, \mathbf{e}_{\alpha(i,k)}]_{\mathcal{Q}} \neq 0$  pour  $1 \leq h, k \leq \nu$ , alors  $h \leq k$ .

2. Pour  $1 < h < k \leq \nu$ , nous avons  $[\mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i},h)}, \mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i},k)}]_{\mathcal{Q}} \neq 0$  si et seulement si  $[\mathbf{e}'_{\alpha(\mathbf{i}',h-1)}, \mathbf{e}'_{\alpha(\mathbf{i}',k-1)}]_{\mathcal{Q}'} \neq 0$ .
3. Pour  $1 < h < k \leq \nu$ , nous avons  $[\mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i},k)}, \mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i},h)}]_{\mathcal{Q}}^1 \neq 0$  si et seulement si  $[\mathbf{e}'_{\alpha(\mathbf{i}',k-1)}, \mathbf{e}'_{\alpha(\mathbf{i}',h-1)}]_{\mathcal{Q}'}^1 \neq 0$ .

*Preuve.* 1. est montré dans (Lusztig, 1990a, sect. 4.12).

2. Comme  $h, k > 1$ , nous avons  $\alpha(\mathbf{i}, h) \neq \alpha_{i_1}$  et  $\alpha(\mathbf{i}, k) \neq \alpha_{i_1}$  et par conséquent, les modules indécomposables  $\mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i},h)}$  et  $\mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i},k)}$  sont dans  $\text{Mod}^+(\mathcal{Q}, i_1)$ . Comme  $h, k \leq \nu$ , nous avons  $\alpha(\mathbf{i}', h-1) \neq \alpha_{i_1}$  et  $\alpha(\mathbf{i}', k-1) \neq \alpha_{i_1}$  et par conséquent, les modules indécomposables  $\mathbf{e}'_{\alpha(\mathbf{i}',h-1)}$  et  $\mathbf{e}'_{\alpha(\mathbf{i}',k-1)}$  sont dans  $\text{Mod}^-(\mathcal{Q}', i_1)$ . Dans (Lusztig, 1990a), il est montré que  $\Phi_{i_1}^+(\mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i},h)})$  est isomorphe à  $\mathbf{e}'_{\alpha(\mathbf{i}',h-1)}$  et que  $\Phi_{i_1}^+(\mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i},k)})$  est isomorphe à  $\mathbf{e}'_{\alpha(\mathbf{i}',k-1)}$  si  $h, k > 1$ . Comme  $\Phi_{i_1}^+$  est une équivalence de  $\text{Mod}^+(\mathcal{Q}, i_1) \cong \text{Mod}^-(s_{i_1}(\mathcal{Q}), i_1)$ , nous pouvons conclure que  $\text{Hom}_{\mathcal{Q}}(\mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i},h)}, \mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i},k)}) \neq 0$  si et seulement si  $\text{Hom}_{\mathcal{Q}'}(\mathbf{e}'_{\alpha(\mathbf{i}',h-1)}, \mathbf{e}'_{\alpha(\mathbf{i}',k-1)}) \neq 0$ . Ceci montre 2.

3. Notons d'abord que si les modules  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{V}'$  de  $\mathcal{Q}$  sont dans  $\text{Mod}^+(\mathcal{Q}, i_1)$  et  $0 \rightarrow \mathbf{V}' \rightarrow \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{V} \rightarrow 0$  est une suite exacte courte dans  $\text{Mod}(\mathcal{Q})$ , alors  $\mathbf{E}$  est aussi dans  $\text{Mod}^+(\mathcal{Q}, i_1)$ . Ceci peut être montré ou bien en utilisant la définition de  $\text{Mod}^+(\mathcal{Q}, i_1)$  ou bien en utilisant le fait qu'un module  $\mathbf{M}$  appartient à  $\text{Mod}^+(\mathcal{Q}, i_1)$  si et seulement si  $\text{Hom}_{\mathcal{Q}}(\mathbf{M}, \mathbf{e}_{\alpha_{i_1}}) = 0$  et en appliquant le foncteur  $\text{Hom}_{\mathcal{Q}}(\cdot, \mathbf{e}_{\alpha_{i_1}})$  à la suite exacte  $0 \rightarrow \mathbf{V}' \rightarrow \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{V} \rightarrow 0$  pour montrer que  $\text{Hom}_{\mathcal{Q}}(\mathbf{E}, \mathbf{e}_{\alpha_{i_1}}) = 0$ .

De façon similaire, on montre que si les modules  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{V}'$  de  $\mathcal{Q}'$  sont dans  $\text{Mod}^-(\mathcal{Q}', i_1)$  et  $0 \rightarrow \mathbf{V}' \rightarrow \mathbf{E}' \rightarrow \mathbf{V} \rightarrow 0$  est une suite exacte courte dans  $\text{Mod}(\mathcal{Q}')$ , alors  $\mathbf{E}'$  est aussi dans  $\text{Mod}^-(\mathcal{Q}', i_1)$ . Ceci est montré en utilisant le fait qu'un module  $\mathbf{M}$  appartient à  $\text{Mod}^-(\mathcal{Q}', i_1)$  si et seulement si  $\text{Hom}_{\mathcal{Q}'}(\mathbf{e}_{\alpha_{i_1}}, \mathbf{M}) = 0$  et en appliquant le foncteur  $\text{Hom}_{\mathcal{Q}'}(\mathbf{e}_{\alpha_{i_1}}, \cdot)$  à la suite exacte  $0 \rightarrow \mathbf{V}' \rightarrow \mathbf{E}' \rightarrow \mathbf{V} \rightarrow 0$  pour montrer que  $\text{Hom}_{\mathcal{Q}'}(\mathbf{e}_{\alpha_{i_1}}, \mathbf{E}') = 0$ .

Or comme nous l'avons vu dans la preuve de 2., pour  $1 < h < k \leq \nu$ , les modules indécomposables  $\mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i},h)}$  et  $\mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i},k)}$  sont dans  $\text{Mod}^+(\mathcal{Q}, i_1)$  et par conséquent, si  $0 \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i},h)} \rightarrow \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i},k)} \rightarrow 0$  est une suite exacte courte dans  $\text{Mod}(\mathcal{Q})$ , alors  $\mathbf{E}$  est dans  $\text{Mod}^+(\mathcal{Q}, i_1)$ . En appliquant le foncteur de réflexion  $\Phi_{i_1}^+$  à une telle suite exacte et en utilisant le fait que  $\Phi_{i_1}^+(\mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i},h)})$  (respectivement  $\Phi_{i_1}^+(\mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i},k)})$ ) est isomorphe au module  $\mathbf{e}'_{\alpha(\mathbf{i}',h-1)}$  (respectivement  $\mathbf{e}'_{\alpha(\mathbf{i}',k-1)}$ ) de  $\mathcal{Q}'$ , nous obtenons une suite exacte courte  $0 \rightarrow \mathbf{e}'_{\alpha(\mathbf{i}',h-1)} \rightarrow \Phi_{i_1}^+(\mathbf{E}) \rightarrow \mathbf{e}'_{\alpha(\mathbf{i}',k-1)} \rightarrow 0$  dans  $\text{Mod}(\mathcal{Q}')$ . Ceci est une conséquence facile du lemme du serpent. De plus, il est facile de voir que si la suite  $0 \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i},h)} \rightarrow \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i},k)} \rightarrow 0$  est scindée, alors la suite  $0 \rightarrow \mathbf{e}'_{\alpha(\mathbf{i}',h-1)} \rightarrow \Phi_{i_1}^+(\mathbf{E}) \rightarrow \mathbf{e}'_{\alpha(\mathbf{i}',k-1)} \rightarrow 0$  l'est aussi.



De façon similaire, si  $1 < h < k \leq \nu$ , alors les modules indécomposables  $\mathbf{e}'_{\alpha(i',h-1)}$  et  $\mathbf{e}'_{\alpha(i',k-1)}$  sont dans  $\text{Mod}^-(\mathcal{Q}', i_1)$  et par conséquent, si  $0 \rightarrow \mathbf{e}'_{\alpha(i',h-1)} \rightarrow \mathbf{E}' \rightarrow \mathbf{e}'_{\alpha(i',k-1)} \rightarrow 0$  est une suite exacte courte dans  $\text{Mod}(\mathcal{Q}')$ , alors  $\mathbf{E}'$  est dans  $\text{Mod}^-(\mathcal{Q}', i_1)$ . En appliquant le foncteur de réflexion  $\Phi_{i_1}^-$  à une telle suite exacte et en utilisant le fait que  $\Phi_{i_1}^-(\mathbf{e}'_{\alpha(i',h-1)})$  (respectivement  $\Phi_{i_1}^-(\mathbf{e}'_{\alpha(i',k-1)})$ ) est isomorphe au module  $\mathbf{e}_{\alpha(i,h)}$  (respectivement  $\mathbf{e}_{\alpha(i,k)}$ ) de  $\mathcal{Q}$ , nous obtenons une suite exacte courte  $0 \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha(i,h)} \rightarrow \Phi_{i_1}^-(\mathbf{E}') \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha(i,k)} \rightarrow 0$  dans  $\text{Mod}(\mathcal{Q})$ . Ceci est une conséquence du lemme du serpent aussi. De plus, il est facile de voir que si la suite  $0 \rightarrow \mathbf{e}'_{\alpha(i',h-1)} \rightarrow \mathbf{E}' \rightarrow \mathbf{e}'_{\alpha(i',k-1)} \rightarrow 0$  est scindée, alors la suite  $0 \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha(i,h)} \rightarrow \Phi_{i_1}^-(\mathbf{E}') \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha(i,k)} \rightarrow 0$  l'est aussi.

Si  $[\mathbf{e}_{\alpha(i,k)}, \mathbf{e}_{\alpha(i,h)}]_{\mathcal{Q}}^1 \neq 0$ , alors il y a une suite exacte non-scindée  $0 \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha(i,h)} \rightarrow \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha(i,k)} \rightarrow 0$  de modules de  $\mathcal{Q}$ . En appliquant le foncteur de réflexion  $\Phi_{i_1}^+$ , nous obtenons une suite exacte non-scindée  $0 \rightarrow \mathbf{e}'_{\alpha(i',h-1)} \rightarrow \Phi_{i_1}^+(\mathbf{E}) \rightarrow \mathbf{e}'_{\alpha(i',k-1)} \rightarrow 0$ . Elle est non-scindée, car sinon, en appliquant  $\Phi_{i_1}^-$ , nous aurions que  $0 \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha(i,h)} \rightarrow \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha(i,k)} \rightarrow 0$  est scindée, ce qui contredit notre hypothèse. Alors  $[\mathbf{e}'_{\alpha(i',k-1)}, \mathbf{e}'_{\alpha(i',h-1)}]_{\mathcal{Q}'}^1 \neq 0$ .

De façon similaire, si  $[\mathbf{e}'_{\alpha(i',k-1)}, \mathbf{e}'_{\alpha(i',h-1)}]_{\mathcal{Q}'}^1 \neq 0$ , alors il y a une suite exacte non-scindée  $0 \rightarrow \mathbf{e}'_{\alpha(i',h-1)} \rightarrow \mathbf{E}' \rightarrow \mathbf{e}'_{\alpha(i',k-1)} \rightarrow 0$  de modules de  $\mathcal{Q}'$ . En appliquant le foncteur de réflexion  $\Phi_{i_1}^-$ , nous obtenons une suite exacte non-scindée  $0 \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha(i,h)} \rightarrow \Phi_{i_1}^-(\mathbf{E}') \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha(i,k)} \rightarrow 0$ . Elle est non-scindée, car sinon, en appliquant  $\Phi_{i_1}^+$ , nous aurions que  $0 \rightarrow \mathbf{e}'_{\alpha(i',h-1)} \rightarrow \mathbf{E}' \rightarrow \mathbf{e}'_{\alpha(i',k-1)} \rightarrow 0$  est scindée, ce qui contredit notre hypothèse. Alors  $[\mathbf{e}_{\alpha(i,k)}, \mathbf{e}_{\alpha(i,h)}]_{\mathcal{Q}}^1 \neq 0$ . Ceci termine la preuve.  $\square$

Soit  $\mathbf{i} \in \mathcal{I}$  adapté au carquois  $\mathcal{Q}$ . Soit  $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_n) \in \mathbf{N}^n$ ,

$$E_{\mathbf{d}} = \bigoplus_{i \rightarrow j \in \mathcal{Q}^1} \text{Hom}_F(F^{d_i}, F^{d_j})$$

et  $G_{\mathbf{d}} = \prod_{i=1}^n GL_{d_i}(F)$ . Le groupe  $G_{\mathbf{d}}$  agit sur  $E_{\mathbf{d}}$  par

$$(g \cdot f)_{i \rightarrow j} = (g_j f_{ij} g_i^{-1})_{i \rightarrow j}.$$

Un élément de  $E_{\mathbf{d}}$  peut être vu comme un module dans  $\text{Mod}(\mathcal{Q})$  de dimension  $\mathbf{d}$ . Deux éléments de  $E_{\mathbf{d}}$  définissent des modules isomorphes si et seulement s'ils sont dans la même  $G_{\mathbf{d}}$ -orbite. Par le théorème 1.2.2, il existe une bijection entre l'ensemble des  $\nu$ -tuples  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_\nu)$  de  $\mathbf{i}$ -homogénéité  $\mathbf{d}$  et l'ensemble des  $G_{\mathbf{d}}$ -orbites dans  $E_{\mathbf{d}}$ , où  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_\nu)$  correspond à l'orbite  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}}$  dont les éléments sont isomorphes à  $\mathbf{V}_{\mathbf{c}}$ .

Pour le reste de cette section, soit  $F$  une clôture algébrique d'un corps fini  $F_q$  ayant  $q = p^e$  éléments, où  $p$  est un nombre premier, et soit  $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_n) \in \mathbf{N}^n$ .

Il y a un ordre partiel sur  $\mathbf{N}^\nu$  donné par  $\mathbf{c}' \preceq \mathbf{c}$  si  $\mathbf{c}'$  et  $\mathbf{c}$  sont de la même  $\mathbf{i}$ -homogénéité et l'orbite  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}'}$  est contenue dans l'adhérence de Zariski  $\overline{\mathcal{O}}_{\mathbf{c}}$  de  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}}$ . Soit  $d(\mathbf{c}) = \dim(\mathcal{O}_{\mathbf{c}})$ .

Le théorème suivant est démontré dans (Bongartz, 1995).

**Théorème 1.2.4** *Soient  $\mathbf{c}, \mathbf{c}' \in \mathbf{N}^\nu$ . Alors les quatre énoncés suivants sont équivalents:*

1.  $\mathbf{c}' \preceq \mathbf{c}$
2. *Il existe une série d'opérations élémentaires  $\Upsilon_1, \Upsilon_2, \dots, \Upsilon_k$  telle que  $\Upsilon_l \in \mathcal{S}_{op}(\mathbf{c} + \sum_{i=1}^{l-1} \mathbf{op}^{\Upsilon_i})$  et  $\mathbf{c}' + \sum_{i=1}^k \mathbf{op}^{\Upsilon_i} = \mathbf{c}$*
3.  $[\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}(\mathbf{c}')] \geq [\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}(\mathbf{c})]$  pour tout module indécomposable  $\mathbf{e}_\alpha$ .
4.  $[\mathbf{e}(\mathbf{c}'), \mathbf{e}_\alpha] \geq [\mathbf{e}(\mathbf{c}), \mathbf{e}_\alpha]$  pour tout module indécomposable  $\mathbf{e}_\alpha$ .

**Définition 1.2.5** *Soit  $\mathbf{c} \in \mathbf{N}^\nu$ . Une variété de carquois est l'adhérence de Zariski  $\overline{\mathcal{O}}_{\mathbf{c}}$  d'une orbite  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}}$ .*

### 1.3 La cohomologie d'intersection locale des variétés de carquois

Les résultats de cette section sont démontrés dans (Lusztig, 1990a, chap. 9 – 10).

Soit  $F$  une clôture algébrique d'un corps fini  $F_q$  ayant  $q = p^e$  éléments, où  $p$  est un nombre premier.

**Proposition 1.3.1** *Soit  $\mathbf{c} \in \mathbf{N}^\nu$  de  $\mathbf{i}$ -homogénéité  $\mathbf{d}$ . Alors pour chaque  $\mathbf{c}' \preceq \mathbf{c}$ , il existe  $\omega_{\mathbf{c}'}^{\mathbf{c}} \in \mathbf{Z}[v, v^{-1}]$  tel que*

$$\overline{E}_1^{\mathbf{c}} = \sum_{\mathbf{c}' \preceq \mathbf{c}} \omega_{\mathbf{c}'}^{\mathbf{c}} E_1^{\mathbf{c}'}$$

*De plus  $\omega_{\mathbf{c}}^{\mathbf{c}} = 1$  et pour tout  $\mathbf{c}' \preceq \mathbf{c}$ ,  $\Omega_{\mathbf{c}'}^{\mathbf{c}} \stackrel{\text{déf}}{=} v^{d(\mathbf{c})-d(\mathbf{c}')} \omega_{\mathbf{c}'}^{\mathbf{c}}$  est un élément de  $\mathbf{Z}[v^2, v^{-2}]$ .*

Nous donnerons une formule récursive pour les  $\Omega_{\mathbf{c}'}^{\mathbf{c}}$  dans la section 3.2.

**Théorème 1.3.2** *Soit  $\mathbf{c} \in \mathbf{N}^\nu$  de  $\mathbf{i}$ -homogénéité  $\mathbf{d}$  et soit  $\mathcal{E}^{\mathbf{c}}$  l'unique élément de  $\mathbf{B}$  tel que  $\pi(\mathcal{E}^{\mathbf{c}}) = \pi(E_1^{\mathbf{c}})$ . Alors*

1.  $\mathcal{E}^{\mathbf{c}} = \sum_{\mathbf{c}'} \zeta_{\mathbf{c}'}^{\mathbf{c}} E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{c}'}$ , où  $\mathbf{c}'$  parcourt l'ensemble des éléments de  $\mathbf{N}^{\nu}$  qui sont de  $\mathbf{i}$ -homogénéité  $\mathbf{d}$ ,  $\zeta_{\mathbf{c}}^{\mathbf{c}} = 1$  et  $\zeta_{\mathbf{c}'}^{\mathbf{c}} \in v^{-1}\mathbf{Z}[v^{-1}]$  pour  $\mathbf{c}' \neq \mathbf{c}$ .
2. Si  $\mathbf{c}' \not\preceq \mathbf{c}$ , alors  $\zeta_{\mathbf{c}'}^{\mathbf{c}} = 0$ .
3. Si  $\overline{(\ )}$  est l'involution  $\mathbf{Z}$ -linéaire de  $\mathbf{Z}[v, v^{-1}]$  qui envoie  $v$  sur  $v^{-1}$ , alors

$$\zeta_{\mathbf{c}'}^{\mathbf{c}} = \sum_{\mathbf{c}' \preceq \mathbf{c}'' \preceq \mathbf{c}} \omega_{\mathbf{c}'}^{\mathbf{c}''} \overline{\zeta_{\mathbf{c}''}^{\mathbf{c}}}.$$

4. Soient  $\mathbf{c}' \preceq \mathbf{c}$ ,  $f$  un point  $F_q$ -rationnel de l'orbite  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}'}$  dans  $E_{\mathbf{d}}$  et  $\mathcal{H}_f^a$  la fibre en  $f$  du  $a$ -ième faisceau de cohomologie du complexe de cohomologie d'intersection de l'adhérence  $\overline{\mathcal{O}}_{\mathbf{c}}$  de  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}}$  avec coefficients dans  $\overline{\mathbf{Q}}_{\ell}$  (prolongé par zéro sur le complément de l'adhérence), où  $\ell$  est un nombre premier  $\neq p$ , et avec la structure  $F_q$  telle que l'application de Frobenius est l'identité sur les fibres de son 0-ième faisceau de cohomologie aux points rationnels de l'orbite  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}}$ . Alors

$$\mathcal{H}_f^{2a+1} = 0 \quad \text{pour tout } a \quad \text{et} \quad v^{d(\mathbf{c})-d(\mathbf{c}')} \zeta_{\mathbf{c}'}^{\mathbf{c}} = \sum_a \dim(\mathcal{H}_f^{2a}) v^{2a}.$$

En particulier,  $v^{d(\mathbf{c})-d(\mathbf{c}')} \zeta_{\mathbf{c}'}^{\mathbf{c}}$  est un polynôme en  $v^2$  avec coefficients dans  $\mathbf{N}$ .

**Définition 1.3.3** On dit que la variété de carquois  $\overline{\mathcal{O}}_{\mathbf{c}}$  est rationnellement lisse en  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}'} \subset \overline{\mathcal{O}}_{\mathbf{c}}$  si pour tous  $\mathbf{c}''$  tel que  $\mathbf{c}' \preceq \mathbf{c}'' \preceq \mathbf{c}$  nous avons  $\sum_a \dim(\mathcal{H}_f^{2a}) v^{2a} = 1$  pour un point  $F_q$ -rationnel  $f \in \mathcal{O}_{\mathbf{c}''}$ , i.e. si  $\zeta_{\mathbf{c}''}^{\mathbf{c}} = v^{d(\mathbf{c}'')-d(\mathbf{c})}$  pour tous  $\mathbf{c}''$  tel que  $\mathbf{c}' \preceq \mathbf{c}'' \preceq \mathbf{c}$ .

La variété de carquois  $\overline{\mathcal{O}}_{\mathbf{c}}$  est rationnellement lisse si elle est rationnellement lisse en chaque  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}'} \subset \overline{\mathcal{O}}_{\mathbf{c}}$ , i.e. si  $\zeta_{\mathbf{c}'}^{\mathbf{c}} = v^{d(\mathbf{c}')-d(\mathbf{c})}$  pour tout  $\mathbf{c}' \preceq \mathbf{c}$ .

## 1.4 Le carquois d'Auslander-Reiten

Nous donnons quelques rappels sur le carquois d'Auslander-Reiten  $\Gamma = (\Gamma^0, \Gamma^1)$  de  $\mathcal{Q}$ . Pour plus de détails sur cette théorie, nous référons le lecteur à (Gabriel, 1980). Nous ne traitons ici que le cas  $A_n$ .

Soit  $F$  un corps algébriquement clos. Les sommets du carquois d'Auslander-Reiten sont les classes d'isomorphisme de modules indécomposables du carquois  $\mathcal{Q}$  sur  $F$  et pour deux sommets  $[\mathbf{V}], [\mathbf{W}] \in \Gamma^0$  il y a une flèche  $[\mathbf{V}] \rightarrow [\mathbf{W}] \in \Gamma^1$  si et seulement s'il existe un morphisme irréductible  $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W} \in \text{Mod}_F(\mathcal{Q})$ . (Par définition, un morphisme  $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$  de  $\text{Mod}_F(\mathcal{Q})$  est irréductible si  $f$  n'est pas inversible et si pour toute paire de morphismes  $g, h \in \text{Mod}_F(\mathcal{Q})$  telle que  $f = hg$ , ou  $g$  est une section ou  $h$  est une rétraction.)

Par le théorème de Gabriel, il y a une bijection entre  $\Gamma^0$  et l'ensemble des racines positives  $\{\alpha^1, \dots, \alpha^\nu\}$  et nous noterons chaque sommet  $[\mathbf{e}_\alpha] \in \Gamma^0$  simplement par la racine positive  $\alpha$  correspondante. Nous n'aurons pas besoin de déterminer explicitement les morphismes irréductibles de  $\Gamma^1$ , nous nous contenterons de leur existence. Soit  $P[i] \in \{1, \dots, \nu\}$  tel que  $\mathbf{P}(i) = \mathbf{e}_{\alpha^{P[i]}}$  est le  $i$ -ième module indécomposable projectif.

Le carquois d'Auslander-Reiten peut être calculé par une procédure combinatoire en utilisant la dimension des modules indécomposables projectifs et la propriété d'additivité des dimensions pour les suites d'Auslander-Reiten (relations de maille).

Soit  $\mathbf{NQ} = (\mathbf{NQ}^0, \mathbf{NQ}^1)$  le carquois suivant:  $\mathbf{NQ}^0 \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{N} \times \{1, \dots, n\}$  et  $\mathbf{NQ}^1 = \cup_{i \leftarrow j \in \mathcal{Q}^1} \{(z, i) \rightarrow (z, j), (z, j) \rightarrow (z+1, i) \mid z \in \mathbf{N}\}$ . Soit  $A(\mathcal{Q})$  le sous-carquois complet de  $\mathbf{NQ}$  formé de tous les sommets  $(z, i)$  tels que  $1 \leq z \leq (n+1+a_i+b_i)/2$  où, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $a_i$  (respectivement  $b_i$ ) est le nombre de flèches dans le chemin non-orienté de  $i$  à  $(n+1-i)$  qui pointent vers  $i$  (respectivement vers  $(n+1-i)$ ).

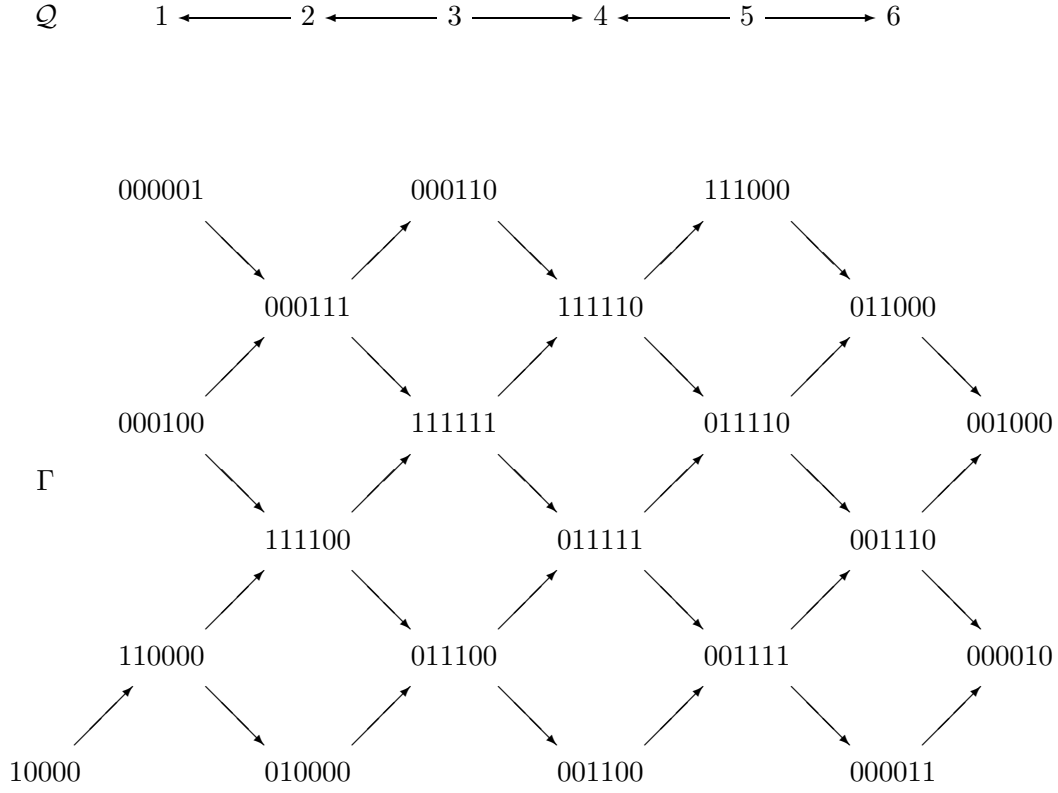
Il y a un unique isomorphisme de carquois  $\Psi : \Gamma \rightarrow A(\mathcal{Q})$  tel que  $\Psi(P[k]) = (1, k)$  pour chaque  $k \in \{1, \dots, n\}$ . À partir des dimensions des modules indécomposables projectifs nous pouvons facilement calculer  $\Gamma$  en utilisant cet isomorphisme  $\Psi$  et les relations de maille.

Soit  $\mathbf{Z}\Delta$  le carquois de translation associé au diagramme de Dynkin  $\Delta$  (Gabriel, 1980, sect. 6.5, fig. 13). Noter que ceci implique un choix d'indices sur les sommets de  $\Delta$ . Rappelons que  $\mathbf{Z}\Delta^0 = \mathbf{Z} \times \{1, \dots, n\}$  et  $\mathbf{Z}\Delta^1 = \{(z, i) \rightarrow (z, i+1) \mid z \in \mathbf{Z}, 1 \leq i < n\} \cup \{(z, i) \rightarrow (z+1, i-1) \mid z \in \mathbf{Z}, 1 < i \leq n\}$ . On appelle translation la fonction  $\tau : \mathbf{Z}\Delta^0 \rightarrow \mathbf{Z}\Delta^0, \tau(z, i) = (z-1, i)$ . Il existe un plongement unique  $\Theta$  de  $\Gamma$  dans  $\mathbf{Z}\Delta$  tel que  $\Theta(\alpha^{P[1]}) = (1, 1) \in \mathbf{Z}\Delta$ . En particulier  $\Theta(\alpha^{P[k]}) = (1 - b'_k, k)$  où  $b'_k$  est le nombre de flèches dans le chemin non-orienté de  $1$  à  $k$  qui pointent vers  $k$ . Dans l'exemple montré dans la figure 1.1 nous notons la racine  $\alpha = \sum_{i=1}^n d_i \alpha_i$  simplement par la dimension  $(d_1, \dots, d_n)$  du module indécomposable  $\mathbf{e}_\alpha$  correspondant.

Soit  $I[i] \in \{1, \dots, \nu\}$  tel que  $\mathbf{I}(i) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{e}_{\alpha^{I[i]}}$  est le  $i$ -ième module indécomposable injectif. Nous avons  $\alpha^{P[i]} = \sum_{h \in \mathcal{Q}^0_{\rightarrow}(i)} \alpha_h$  et  $\alpha^{I[i]} = \sum_{h \in \mathcal{Q}^0_{\leftarrow}(i)} \alpha_h$ . Soit  $R_{\rightarrow}[i]$  tel que  $\alpha^{R_{\rightarrow}[i]} = \sum_{h \in \mathcal{Q}^0_{\rightarrow}(i)} \alpha_h$  et  $R_{\leftarrow}[i]$  tel que  $\alpha^{R_{\leftarrow}[i]} = \sum_{h \in \mathcal{Q}^0_{\leftarrow}(i)} \alpha_h$ . Les  $P[i], i = 1, \dots, n$  forment le bord gauche de  $\Gamma$  et les  $I[i]$  le bord droite. Tandis que les  $R_{\rightarrow}[i]$  forment le bord en bas et les  $R_{\leftarrow}[i]$  le bord en haut de  $\Gamma$ . La figure 1.2 montre un exemple de type  $A_6$ . Pour chaque  $i = 2, \dots, n-1$  il y a l'opération élémentaire  $\Upsilon_i \in \mathcal{S}_{op}$  suivante:

$$\Upsilon_i : 0 \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^{P[i]}} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^{R_{\rightarrow}[i]}} \oplus \mathbf{e}_{\alpha^{R_{\leftarrow}[i]}} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^{I[i]}} \rightarrow 0.$$

Pour  $i, j, k \in \mathcal{Q}^0$ , soient  $R(i) = \{t \mid 1 \leq t \leq \nu \text{ et } i \in \text{Supp}(\alpha^t)\}$ ,  $R(i, j) = R(i) \cap R(j)$  et  $R(i, j, k) = R(i) \cap R(j) \cap R(k)$ . Souvent nous identifierons  $R(i)$



**Figure 1.1** Un carquois  $\mathcal{Q}$  avec carquois d'Auslander-Reiten correspondant  $\Gamma$

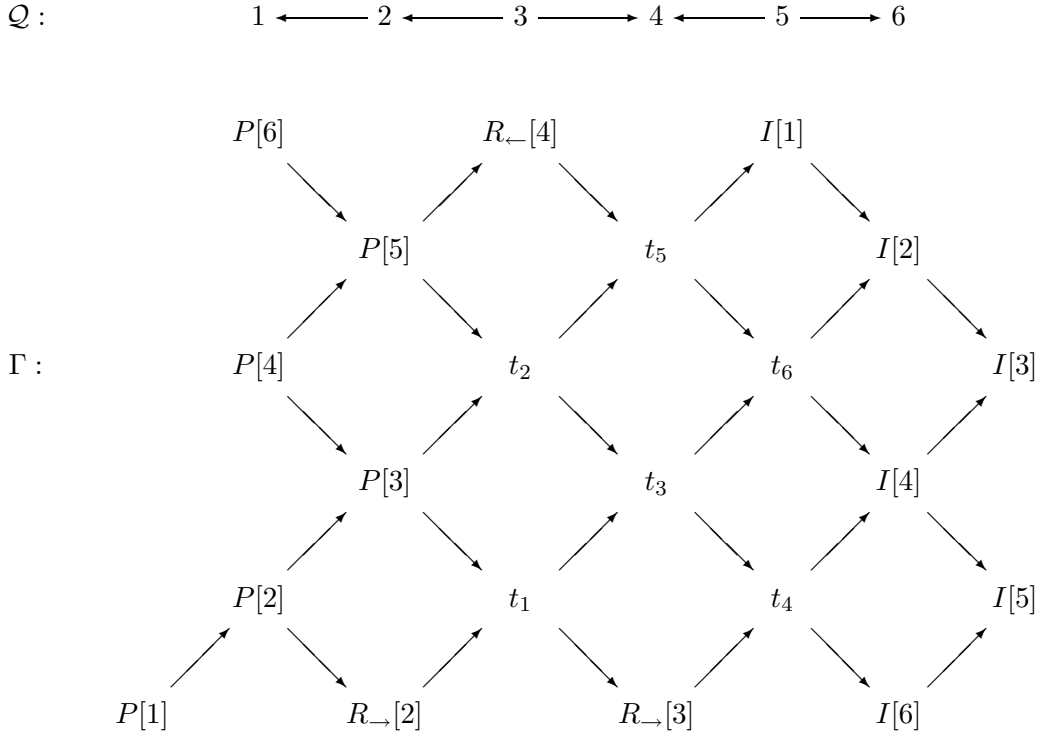
(respectivement  $R(i, j), R(i, j, k)$ ) avec l'ensemble des racines positives  $\alpha^t$  avec  $t \in R(i)$  (respectivement  $R(i, j), R(i, j, k)$ ). Ainsi, dans le carquois d'Auslander-Reiten,  $R(i)$  "est" l'ensemble des sommets inclus dans le rectangle dont les coins sont  $P[i], R_{\rightarrow}[i], I[i], R_{\leftarrow}[i]$ .

Soient  $\alpha, \beta \in R^+$ , disons que  $\Theta(\alpha) = (x, i)$  et  $\Theta(\beta) = (y, j)$  avec  $x, y \in \mathbf{Z}$  et  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Les faits suivants sont bien connus.

**Proposition 1.4.1**    1.  $[\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta] \in \{0, 1\}$  et  $[\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta] = 1$  ssi  $x \leq y \leq x + i - 1$  et  $x + i \leq y + j \leq x + n$ .

2.  $[\mathbf{e}_\beta, \mathbf{e}_\alpha]^1 \in \{0, 1\}$  et  $[\mathbf{e}_\beta, \mathbf{e}_\alpha]^1 = 1$  ssi  $x + 1 \leq y \leq x + i$  et  $x + i + 1 \leq y + j \leq x + n + 1$ .

3. Si  $[\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta] = 0$  et  $[\mathbf{e}_\beta, \mathbf{e}_\alpha]^1 = 1$ , i.e. soit  $y = x + i$  et  $x + i + 1 \leq y + j < x + n + 1$  ou encore soit  $y + j = x + n + 1$  et  $x + 1 \leq y < x + i$ , alors  $\alpha + \beta \in R^+$  et il existe une suite exacte courte  $0 \rightarrow \mathbf{e}_\alpha \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha+\beta} \rightarrow \mathbf{e}_\beta \rightarrow 0$



**Figure 1.2** Un carquois d'Auslander-Reiten de type  $A_6$ .  $P[1] = R_{\rightarrow}[1]$ ,  $R_{\rightarrow}[3] = R_{\rightarrow}[4]$ ,  $R_{\rightarrow}[5] = R_{\rightarrow}[6] = I[6]$ ,  $P[6] = R_{\leftarrow}[6]$ ,  $R_{\leftarrow}[4] = R_{\leftarrow}[5]$ ,  $R_{\leftarrow}[1] = R_{\leftarrow}[2] = R_{\leftarrow}[3] = I[1]$ .

qui est une base de  $\text{Ext}_{\mathcal{Q}}^1(\mathbf{e}_\beta, \mathbf{e}_\alpha)$ . De plus

$$\Theta(\alpha + \beta) = \begin{cases} (x, y - x + j), \\ \quad \text{si } y = x + i \quad \text{et } x + i + 1 \leq y + j < x + n + 1; \\ (y, x + i - y), \\ \quad \text{si } y + j = x + n + 1 \quad \text{et } x + 1 \leq y < x + i. \end{cases}$$

et si  $0 \rightarrow \mathbf{e}_\alpha \rightarrow \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{e}_\beta \rightarrow 0$  est une suite exacte courte non-scindée alors  $\mathbf{V}$  est isomorphe à  $\mathbf{e}_{\alpha+\beta}$ .

4. Si  $[\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta] = 1$  et  $[\mathbf{e}_\beta, \mathbf{e}_\alpha]^1 = 1$ , i.e.  $x + 1 \leq y < x + i$  et  $x + i + 1 \leq y + j < x + n + 1$ , alors il existe une unique paire de racines positives distinctes  $\gamma, \gamma'$  telle que  $\alpha + \beta = \gamma + \gamma'$  et qu'il existe une suite exacte courte  $0 \rightarrow \mathbf{e}_\alpha \rightarrow \mathbf{e}_\gamma \oplus \mathbf{e}_{\gamma'} \rightarrow \mathbf{e}_\beta \rightarrow 0$  qui est une base de  $\text{Ext}_{\mathcal{Q}}^1(\mathbf{e}_\beta, \mathbf{e}_\alpha)$ . De plus  $\Theta(\gamma) = (y, x + i - y)$  et  $\Theta(\gamma') = (x, y - x + j)$  et si  $0 \rightarrow \mathbf{e}_\alpha \rightarrow \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{e}_\beta \rightarrow 0$  est une suite exacte courte non-scindée alors  $\mathbf{V}$  est isomorphe à  $\mathbf{e}_\gamma \oplus \mathbf{e}_{\gamma'}$ .
5. Soit  $k \in \{1, \dots, n\}$ ; alors  $[\mathbf{P}(k), \mathbf{e}_\alpha] = 1$  ssi  $k \in \text{Supp}(\alpha)$ . Par conséquent, si  $\mathbf{c} \in \mathbf{N}^\nu$  est de  $\mathbf{i}$ -homogénéité  $\mathbf{d}$  alors  $[\mathbf{P}(k), \mathbf{e}(\mathbf{c})] = d_k$ .

6. Soit  $\mathbf{c}$  de  $\mathbf{i}$ -homogénéité  $\mathbf{d}$ . Avec la notation  $c_A = \sum_{t \in A} c_t$ , pour tout sous-ensemble  $A$  de  $\{1, 2, \dots, \nu\}$ , nous avons

$$\begin{aligned} [\mathbf{e}_{\alpha_{R \rightarrow [i]}}, \mathbf{e}(\mathbf{c})] &= c_{R(i) \setminus R(i,j)} = d_i - c_{R(i,j)} & \text{si } i \rightarrow j, i > j \\ \text{et } [\mathbf{e}_{\alpha_{R \leftarrow [i]}}, \mathbf{e}(\mathbf{c})] &= c_{R(i) \setminus R(i,j)} = d_i - c_{R(i,j)} & \text{si } i \rightarrow j, i < j \end{aligned}$$

## 1.5 Les $\alpha$ -partages

**Définition 1.5.1** Soit  $\alpha$  une racine positive et  $\Theta(\alpha) = (x, i)$  sa position dans le carquois d'Auslander-Reiten. Soit  $\lambda$  un partage, i.e.  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ ,  $l \geq 0$ ,  $\lambda_i \in \mathbf{N}$ ,  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_l > 0$ . Noter que si  $l = 0$  alors  $\lambda = \emptyset$  est le partage vide. Nous disons que  $\lambda$  est un  $\alpha$ -partage si pour tout  $a \in \{1, \dots, l\}$ ,  $b \in \{1, \dots, \lambda_a\}$ , il existe une racine positive  $\beta$  tel que

1. le module indécomposable  $\mathbf{e}_\beta$  n'est pas projectif et
2.  $(x - b + 1, i + b - a) = \Theta(\beta)$ .

**Exemple 1.5.2** Soit  $\alpha = \alpha^{I[3]}$  dans l'exemple de la figure 1.2. Alors  $\Theta(\alpha) = (3, 4)$ . Dans ce cas  $\lambda = (3, 3, 1)$  est un  $\alpha$ -partage. On associe à  $\lambda$  son diagramme:

$$\lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3, 2 & & & \\ \hline 3, 3 & 2, 4 & 1, 5 & \\ \hline 3, 4 & 2, 5 & 1, 6 & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline t_4 & & \\ \hline I[4] & t_6 & t_5 \\ \hline I[3] & I[2] & I[1] \\ \hline \end{array}$$

La forme du diagramme de  $\lambda$  est celle du diagramme de Ferrer associé au partage  $\lambda$ . Chaque case du diagramme correspond à un sommet de  $\Gamma^0$  en plaçant l'origine du diagramme à  $\alpha$  et en faisant une rotation anti-horaire de  $3\pi/4$  autour de  $\alpha$ .

Parfois, on voit le  $\alpha$ -partage  $\lambda$  comme l'ensemble des sommets correspondant à son diagramme  $\{(x - b + 1, i + b - a) \mid 1 \leq a \leq l, 1 \leq b \leq \lambda_a\}$ . Ainsi, la notation  $\alpha \in \lambda$  signifie que  $\alpha$  correspond à un des sommets dans le diagramme de  $\lambda$ .

Pour le reste de cette section, fixons  $\mathbf{i}$  adapté au carquois  $\mathcal{Q}$  et écrivons  $\alpha^t$  au lieu de  $\alpha(\mathbf{i}, t)$  pour  $1 \leq t \leq \nu$ . Alors  $\mathbf{i}$  induit un ordre total  $\alpha^1 < \alpha^2 < \dots < \alpha^\nu$  sur les racines positives par  $\alpha^t = s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_{t-1}}(\alpha_{i_t})$ . Étant donné un  $\alpha^r$ -partage  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$ , nous définissons son *poids*  $\boldsymbol{\pi}^\lambda = (\pi_1^\lambda, \dots, \pi_\nu^\lambda) \in \mathbf{Z}^\nu$  de la façon suivante:

$$\begin{aligned} \pi_s^\lambda &= -1 & \text{si } \Theta(\alpha^s) \in \left\{ \begin{array}{l} \{(x - \lambda_k, i + \lambda_k - k) \mid (1 \leq k < l \text{ et } \lambda_k \neq \lambda_{k+1})\} \\ \cup \{(x - \lambda_l, i + \lambda_l - l)\} \end{array} \right\} \\ \pi_s^\lambda &= +1 & \text{si } \Theta(\alpha^s) \in \left\{ \begin{array}{l} \{(x - \lambda_{k+1}, i + \lambda_{k+1} - k) \mid 1 \leq k < l \text{ et } \lambda_k \neq \lambda_{k+1}\} \\ \cup \{(x, i - l), (x - \lambda_1, i + \lambda_1)\} \end{array} \right\} \\ \pi_s^\lambda &\equiv 0 & \text{ailleurs,} \end{aligned}$$

où  $(x, i) = \Theta(\alpha^r)$ .

Soit  $\pi_-^\lambda = \{s \mid \pi_s^\lambda = -1\}$ , et  $\pi_+^\lambda = \{s \mid \pi_s^\lambda = 1\}$ . Notons par  $\pi^{\emptyset, r}$  le poids du  $\alpha^r$ -partage vide  $\lambda = \emptyset$ . Par définition  $\pi^{\emptyset, r}$  est le vecteur qui vaut 1 à la  $r$ -ième position et 0 ailleurs. Pour  $\mathbf{c} \in \mathbf{N}^\nu$  et  $1 \leq r \leq \nu$  soit  $\Lambda(r, \mathbf{c})$  l'ensemble des  $\alpha^r$ -partages tels que  $\mathbf{c} + \pi^\lambda \in \mathbf{N}^\nu$ .

Les faits suivants sont des conséquences directes des définitions et de la proposition 1.4.1: Soit  $\lambda$  un  $\alpha^r$ -partage. Alors pour tous  $s, s' \in \pi_-^\lambda$ ,  $t, t' \in \pi_+^\lambda$  nous avons

$$\begin{array}{lll} [\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}_{\alpha^r}] = 1, & [\mathbf{e}_{\alpha^r}, \mathbf{e}_{\alpha^s}] = 0, & [\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}_{\alpha^s}] = 0 \\ [\mathbf{e}_{\alpha^r}, \mathbf{e}_{\alpha^s}]^1 = 1, & [\mathbf{e}_{\alpha^r}, \mathbf{e}_{\alpha^t}] = 0 \text{ si } t \neq r & [\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}_{\alpha^s}]^1 = 0 \\ & [\mathbf{e}_{\alpha^s}, \mathbf{e}_{\alpha^r}]^1 = 0, & [\mathbf{e}_{\alpha^s}, \mathbf{e}_{\alpha^t}]^1 = 0 \\ & [\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}_{\alpha^r}]^1 = 0, & [\mathbf{e}_{\alpha^s}, \mathbf{e}_{\alpha^{s'}}]^1 = 0 \\ & & [\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}_{\alpha^{t'}}]^1 = 0. \end{array}$$

Noter que par conséquent,  $[\mathbf{e}(\pi^\lambda), \mathbf{e}(\pi^\lambda)]^1 = 0$ ,  $[\mathbf{e}(\pi^\lambda), \mathbf{e}_{\alpha^r}]^1 = 0$  et si  $\lambda \neq \emptyset$  alors  $[\mathbf{e}_{\alpha^r}, \mathbf{e}(\pi^\lambda)] = 0$ .

Soient  $\alpha^r$  la  $r$ -ième racine positive et  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$  un  $\alpha^r$ -partage,  $\lambda \neq \emptyset$ . Soit  $\{k_1 < k_2 < \dots < k_m\}$  l'ensemble des entiers  $k < l$  tels que  $\lambda_k \neq \lambda_{k+1}$ . Nous définissons les partages à parts égales suivants:

$$\begin{array}{ll} \lambda^1 &= (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k_1}) \\ \lambda^h &= (\lambda^{(k_{(h-1)+1}), \lambda^{(k_{(h-1)+2}), \dots, \lambda_{k_h}}) \quad 2 \leq h \leq m \\ \lambda^{m+1} &= (\lambda^{(k_m+1), \lambda^{(k_m+2), \dots, \lambda_l}) \end{array}$$

Disons que  $\Theta(\alpha^r) = (x, i)$  est la position de  $\alpha^r$  dans le carquois d'Auslander-Reiten et définissons une suite de racines positives  $\alpha^{s_1}, \alpha^{s_2}, \dots, \alpha^{s_{m+1}}$  par

$$\alpha^{s_1} = \alpha^r \quad \text{et} \quad \Theta(\alpha^{s_h}) = (x, i - k_{h-1}) \quad \text{pour } 2 \leq h \leq m+1$$

Considérons chaque  $\lambda^h$  comme un  $\alpha^{s_h}$ -partage,  $1 \leq h \leq m+1$ . Alors

$$\pi^\lambda - \pi^{\emptyset, r} = \sum_{h=1}^{m+1} (\pi^{\lambda^h} - \pi^{\emptyset, s_h}), \quad \pi_-^\lambda = \bigsqcup_{h=1}^{m+1} \pi_-^{\lambda^h}, \quad \pi_+^\lambda \sqcup \left( \bigsqcup_{h=2}^{m+1} \{s_h\} \right) = \bigsqcup_{h=1}^{m+1} \pi_+^{\lambda^h} \quad (1.1)$$

De plus, pour chaque  $h$ ,  $\lambda^h$  est un  $\alpha^{s_h}$ -partage à parts égales. Donc  $|\pi_-^{\lambda^h}| = 1$  et par un résultat de (Brown, 1998) il y a une suite exacte non-scindée

$$\Upsilon_h : 0 \rightarrow \bigoplus_{t \in \pi_-^{\lambda^h}} \mathbf{e}_{\alpha^t} \rightarrow \bigoplus_{t \in \pi_+^{\lambda^h}} \mathbf{e}_{\alpha^t} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^{s_h}} \rightarrow 0.$$

Ce fait a plusieurs conséquences importantes et nous les présentons dans les quatre lemmes suivants.



**Lemme 1.5.3** Soient  $\lambda \neq \emptyset$  un  $\alpha^r$ -partage et  $s \in \pi_+^\lambda$ , alors il existe un  $s' < s$  tel que  $s' \in \pi_-^\lambda$ .

*Preuve.* Il existe  $h$  tel que  $s \in \pi_+^{\lambda^h}$  et alors il existe  $s' \in \pi_-^{\lambda^h} \subset \pi_-^\lambda$  tel que  $[\mathbf{e}_{\alpha^{s'}}, \mathbf{e}_{\alpha^s}] = 1$  parce que  $\Upsilon_h$  est exacte. Ainsi  $s' < s$  par le lemme 1.2.3, d'où  $s' < s$ .  $\square$

**Lemme 1.5.4** Soit  $\lambda$  un  $\alpha^r$ -partage. Alors

$$\alpha^r + \sum_{s \in \pi_-^\lambda} \alpha^s = \sum_{s \in \pi_+^\lambda} \alpha^s$$

*Preuve.* Si  $\lambda = \emptyset$  alors le résultat est évident. Sinon pour tout  $h \in \{1, 2, \dots, m+1\}$ , nous avons  $\alpha^{s_h} + \sum_{s \in \pi_-^{\lambda^h}} \alpha^s = \sum_{s \in \pi_+^{\lambda^h}} \alpha^s$  parce que  $\Upsilon_h$  est exacte. En utilisant (1.1), nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum_{(s \in \pi_-^\lambda)} \alpha^s + \sum_{h=1}^{m+1} \alpha^{s_h} &= \sum_{h=1}^{m+1} \left( \sum_{(s \in \pi_-^{\lambda^h})} \alpha^s + \alpha^{s_h} \right) \\ &= \sum_{h=1}^{m+1} \sum_{(s \in \pi_+^{\lambda^h})} \alpha^s \\ &= \sum_{(s \in \pi_+^\lambda)} \alpha^s + \sum_{h=2}^{m+1} \alpha^{s_h} \end{aligned}$$

et le lemme est prouvé parce que  $s_1 = r$ .  $\square$

**Lemme 1.5.5** Soit  $\lambda \neq \emptyset$  un  $\alpha^r$ -partage. Alors pour chaque module  $\mathbf{X}$  de  $\mathcal{Q}$ ,

$$\begin{aligned} [\mathbf{X}, \mathbf{e}(\pi^\lambda)] - [\mathbf{X}, \mathbf{e}_{\alpha^r}] &= [\mathbf{X}, \mathbf{e}(\pi^\lambda)]^1 - [\mathbf{X}, \mathbf{e}_{\alpha^r}]^1 \\ \text{et } [\mathbf{e}(\pi^\lambda), \mathbf{X}] - [\mathbf{e}_{\alpha^r}, \mathbf{X}] &= [\mathbf{e}(\pi^\lambda), \mathbf{X}]^1 - [\mathbf{e}_{\alpha^r}, \mathbf{X}]^1. \end{aligned}$$

*Preuve.* Comme  $\Upsilon_h$  est exacte, nous avons

$$\begin{aligned} [\mathbf{X}, \mathbf{e}(\pi^{\lambda^h})] - [\mathbf{X}, \mathbf{e}_{\alpha^{s_h}}] &= [\mathbf{X}, \mathbf{e}(\pi^{\lambda^h})]^1 - [\mathbf{X}, \mathbf{e}_{\alpha^{s_h}}]^1 \\ \text{et } [\mathbf{e}(\pi^{\lambda^h}), \mathbf{X}] - [\mathbf{e}_{\alpha^{s_h}}, \mathbf{X}] &= [\mathbf{e}(\pi^{\lambda^h}), \mathbf{X}]^1 - [\mathbf{e}_{\alpha^{s_h}}, \mathbf{X}]^1, \end{aligned}$$

parce que les suites Hom-Ext  $(\mathbf{X}, \Upsilon_h)$  et Hom-Ext  $(\Upsilon_h, \mathbf{X})$  sont exactes. Mais  $\pi^\lambda - \pi^{\emptyset, r} = \sum_{h=1}^{m+1} (\pi^{\lambda^h} - \pi^{\emptyset, s_h})$  et ainsi

$$\begin{aligned} [\mathbf{X}, \mathbf{e}(\pi^\lambda)] - [\mathbf{X}, \mathbf{e}_{\alpha^r}] &= \sum_{h=1}^{m+1} \left( [\mathbf{X}, \mathbf{e}(\pi^{\lambda^h})] - [\mathbf{X}, \mathbf{e}_{\alpha^{s_h}}] \right) \\ &= \sum_{h=1}^{m+1} \left( [\mathbf{X}, \mathbf{e}(\pi^{\lambda^h})]^1 - [\mathbf{X}, \mathbf{e}_{\alpha^{s_h}}]^1 \right) \\ &= [\mathbf{X}, \mathbf{e}(\pi^\lambda)]^1 - [\mathbf{X}, \mathbf{e}_{\alpha^r}]^1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} [\mathbf{e}(\pi^\lambda), \mathbf{X}] - [\mathbf{e}_{\alpha^r}, \mathbf{X}] &= \sum_{h=1}^{m+1} \left( [\mathbf{e}(\pi^{\lambda^h}), \mathbf{X}] - [\mathbf{e}_{\alpha^{s_h}}, \mathbf{X}] \right) \\ &= \sum_{h=1}^{m+1} \left( [\mathbf{e}(\pi^{\lambda^h}), \mathbf{X}]^1 - [\mathbf{e}_{\alpha^{s_h}}, \mathbf{X}]^1 \right) \\ &= [\mathbf{e}(\pi^\lambda), \mathbf{X}]^1 - [\mathbf{e}_{\alpha^r}, \mathbf{X}]^1 \end{aligned}$$

$\square$

**Lemme 1.5.6** *Soit  $\lambda \neq \emptyset$  un  $\alpha^r$ -partage. Alors*

$$[\mathbf{e}_{\alpha^r}, \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^\lambda)]^1 = -1, \quad [\mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^\lambda), \mathbf{e}_{\alpha^r}] = 1 \quad \text{et} \quad [\mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^\lambda), \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^\lambda)] = 1$$

*Preuve.* En évaluant les deux équations du lemme précédent en  $\mathbf{X} = \mathbf{e}_{\alpha^r}$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} [\mathbf{e}_{\alpha^r}, \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^\lambda)] - [\mathbf{e}_{\alpha^r}, \mathbf{e}_{\alpha^r}] &= [\mathbf{e}_{\alpha^r}, \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^\lambda)]^1 - [\mathbf{e}_{\alpha^r}, \mathbf{e}_{\alpha^r}]^1 \\ \text{et} \quad [\mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^\lambda), \mathbf{e}_{\alpha^r}] - [\mathbf{e}_{\alpha^r}, \mathbf{e}_{\alpha^r}] &= [\mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^\lambda), \mathbf{e}_{\alpha^r}]^1 - [\mathbf{e}_{\alpha^r}, \mathbf{e}_{\alpha^r}]^1. \end{aligned}$$

De plus  $[\mathbf{e}_{\alpha^r}, \mathbf{e}_{\alpha^r}] = 1$ ,  $[\mathbf{e}_{\alpha^r}, \mathbf{e}_{\alpha^r}]^1 = 0$ ,  $[\mathbf{e}_{\alpha^r}, \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^\lambda)] = 0$ ,  $[\mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^\lambda), \mathbf{e}_{\alpha^r}]^1 = 0$  et alors

$$[\mathbf{e}_{\alpha^r}, \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^\lambda)]^1 = -1, \quad \text{et} \quad [\mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^\lambda), \mathbf{e}_{\alpha^r}] = 1.$$

En évaluant la première équation du lemme précédent en  $\mathbf{X} = \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^\lambda)$ , nous obtenons

$$[\mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^\lambda), \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^\lambda)] - [\mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^\lambda), \mathbf{e}_{\alpha^r}] = [\mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^\lambda), \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^\lambda)]^1 - [\mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^\lambda), \mathbf{e}_{\alpha^r}]^1.$$

Mais  $[\mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^\lambda), \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^\lambda)]^1 = 0$ ,  $[\mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^\lambda), \mathbf{e}_{\alpha^r}]^1 = 0$ , et nous avons montré ci-dessus que  $[\mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^\lambda), \mathbf{e}_{\alpha^r}] = 1$ , donc  $[\mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^\lambda), \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^\lambda)] = 1$ .  $\square$

**Proposition 1.5.7** *Soit  $\lambda$  un  $\alpha^r$ -partage. Si  $|\boldsymbol{\pi}_+^\lambda| = 1$  alors*

*ou  $\lambda = \emptyset$  et  $|\boldsymbol{\pi}_-^\lambda| = 0$*

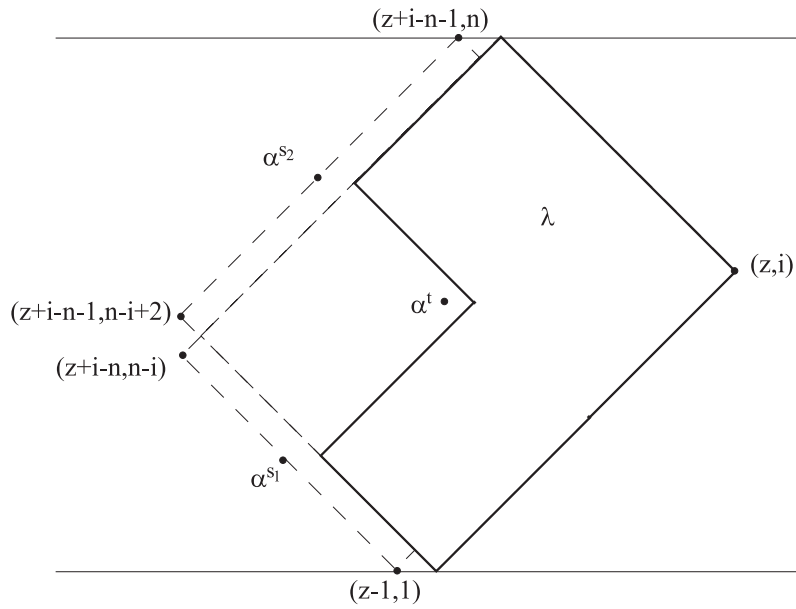
*ou  $\boldsymbol{\pi}_-^\lambda = \{s\}$  et  $[\mathbf{e}_{\alpha^s}, \mathbf{e}_{\alpha^r}] = 0$  et les supports  $\text{Supp}(\alpha^s)$ ,  $\text{Supp}(\alpha^r)$  sont disjoints.*

*ou  $\boldsymbol{\pi}_-^\lambda = \{s, s'\}$  et  $[\mathbf{e}_{\alpha^s}, \mathbf{e}_{\alpha^r}] = [\mathbf{e}_{\alpha^{s'}}, \mathbf{e}_{\alpha^r}] = 0$  et les supports  $\text{Supp}(\alpha^s)$ ,  $\text{Supp}(\alpha^{s'})$ ,  $\text{Supp}(\alpha^r)$  sont deux à deux disjoints. En particulier*

$$[\mathbf{e}_{\alpha^s}, \mathbf{e}_{\alpha^{s'}}] = [\mathbf{e}_{\alpha^{s'}}, \mathbf{e}_{\alpha^s}] = 0.$$

*Preuve.* Soit  $\boldsymbol{\pi}_+^\lambda = \{t\}$ . Par le lemme 1.5.4, nous avons  $\alpha^t = \alpha^r + \sum_{s \in \boldsymbol{\pi}_-^\lambda} \alpha^s$  et alors les supports  $\text{Supp}(\alpha^r)$ ,  $\text{Supp}(\alpha^s)$ ,  $\text{Supp}(\alpha^{s'})$  sont deux à deux disjoints pour tout  $s, s' \in \boldsymbol{\pi}_-^\lambda$ . Ceci implique  $[\mathbf{e}_{\alpha^s}, \mathbf{e}_{\alpha^r}] = 0$  pour tous  $s \in \boldsymbol{\pi}_-^\lambda$ . Il ne reste qu'à voir que  $|\boldsymbol{\pi}_-^\lambda| \leq 2$ . Disons  $\alpha^t = \alpha_a + \alpha_{a+1} + \dots + \alpha_{b-1} + \alpha_b$  et  $\alpha^r = \alpha_c + \alpha_{c+1} + \dots + \alpha_{d-1} + \alpha_d$ . Alors  $a \leq c \leq d \leq b$ . Comme nous avons  $[\mathbf{e}_{\alpha^r}, \mathbf{e}_{\alpha^s}]^1 = 1$  et  $[\mathbf{e}_{\alpha^s}, \mathbf{e}_{\alpha^r}] = 0$  pour tout  $s \in \boldsymbol{\pi}_-^\lambda$ , la somme  $\alpha^r + \alpha^s$  est une racine positive par la proposition 1.4.1. Ainsi, ou  $c-1 \in \text{Supp}(\alpha^s)$  ou  $d+1 \in \text{Supp}(\alpha^s)$  pour tout  $s \in \boldsymbol{\pi}_-^\lambda$ , et alors  $|\boldsymbol{\pi}_-^\lambda| \leq 2$ .  $\square$

**Corollaire 1.5.8** *Soient  $\boldsymbol{\pi}_+^\lambda = \{t\}$  et  $\boldsymbol{\pi}_-^\lambda = \{s_1, s_2\}$  et  $\Theta(\alpha^r) = (z, i)$  la position de  $\alpha^r$  dans le carquois d'Auslander-Reiten. Alors dans le carquois d'Auslander-Reiten, un des deux  $\alpha^{s_1}, \alpha^{s_2}$  se trouve sur la diagonale  $(z-k, k)$ ,  $1 \leq k \leq n-i$  et l'autre sur la diagonale  $(z+i-n-1, k)$ ,  $n-i+2 \leq k \leq n$ ; (cf. figure 1.3).*



**Figure 1.3** Un  $\alpha^r$ -partage  $\lambda$  avec  $\Theta(\alpha^r) = (z, i)$ ,  $\pi_+^\lambda = \{t\}$  et  $\pi_-^\lambda = \{s_1, s_2\}$

*Preuve.* Par la définition de  $\pi^\lambda$ , nous avons  $[e_{\alpha^r}, e_{\alpha^{s_j}}]^1 = 1$  et par la proposition,  $[e_{\alpha^{s_j}}, e_{\alpha^r}] = 0$ ,  $j = 1, 2$ . Par conséquent  $\alpha^{s_1}$  et  $\alpha^{s_2}$  se trouvent sur les deux diagonales en question. Ils ne peuvent pas être sur la même diagonale parce que leurs supports sont disjoints.  $\square$



## CHAPITRE II

### RÉSULTATS DE R. BÉDARD

Nous présentons dans ce chapitre des résultats non-publiés de Robert Bédard avec des preuves détaillées.

#### 2.1 L'effet de l'involution $(\overline{\phantom{x}})$ sur un vecteur de racine

Soit  $\Delta$  le graphe de Dynkin de type  $A_n$ . Dans cette section, nous allons exprimer l'effet de l'involution  $(\overline{\phantom{x}})$  sur un élément  $\tilde{T}_{i_1}\tilde{T}_{i_2}\cdots\tilde{T}_{i_{k-1}}(E_{i_k})$  de  $\mathbf{U}^+$  par rapport à la base de type PBW  $B_{\mathbf{i}}$ . Ici  $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_\nu) \in \mathcal{I}$  est adapté à un carquois  $\mathcal{Q}$  de  $\Delta$ .

Un élément de  $\mathbf{U}^+$  de la forme  $\tilde{T}_{i_1}\tilde{T}_{i_2}\cdots\tilde{T}_{i_{k-1}}(E_{i_k}) = E_{\mathbf{i}}^{\pi^{\theta, k}}$  est appelé vecteur de racine par rapport à  $\mathbf{i}$ . Dans la proposition suivante, nous exprimons d'abord le vecteur de racine comme une somme de monômes dans les générateurs  $E_1, E_2, \dots, E_n$  de  $\mathbf{U}^+$ .

**Proposition 2.1.1** *Soient  $\mathcal{Q}$  un carquois de  $\Delta$  et  $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_\nu) \in \mathcal{I}$  adapté à  $\mathcal{Q}$ . Pour  $1 \leq a \leq b \leq n$ , soient  $\Delta[a, b]$  le sous-graphe complet de  $\Delta$  dont l'ensemble des sommets est  $\{a, a+1, \dots, b\}$  et  $\mathcal{Q}[a, b]$  le sous-carquois de  $\mathcal{Q}$  dont le graphe est  $\Delta[a, b]$ . Si  $\alpha(\mathbf{i}, k) = s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k}) = \alpha_a + \alpha_{a+1} + \dots + \alpha_b$ , alors*

$$\tilde{T}_{i_1}\tilde{T}_{i_2}\cdots\tilde{T}_{i_{k-1}}(E_{i_k}) = \sum_{\mathcal{Q}'} (-v)^{-\delta(\mathcal{Q}[a, b], \mathcal{Q}')} E_{\mathcal{Q}'},$$

où la somme est sur tous les carquois  $\mathcal{Q}'$  dont le graphe est  $\Delta[a, b]$ ,  $\delta(\mathcal{Q}[a, b], \mathcal{Q}')$  est le nombre d'arêtes de  $\Delta[a, b]$  dont l'orientation dans  $\mathcal{Q}[a, b]$  et  $\mathcal{Q}'$  est opposée et  $E_{\mathcal{Q}'} = E_a$  si  $a = b$  et

$$E_{\mathcal{Q}'} = \begin{cases} E_b E_{\mathcal{Q}'[a, b-1]}, & \text{si } (b-1) \leftarrow b \text{ dans } \mathcal{Q}'; \\ E_{\mathcal{Q}'[a, b-1]} E_b, & \text{si } (b-1) \rightarrow b \text{ dans } \mathcal{Q}'; \end{cases} \quad \text{si } a < b.$$

*Preuve.* Nous procédons par récurrence sur  $k$ . Si  $k = 1$ , alors  $\alpha(\mathbf{i}, 1) = \alpha_{i_1}$  et le résultat est évident. Supposons maintenant que le résultat est vrai pour

$k < m$  pour toutes les suites  $\mathbf{j} = (j_1, j_2, \dots, j_\nu) \in \mathcal{I}$  adaptées à un carquois, et considérons le cas où  $k = m$ .

Soit  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  tel que  $w_0(\alpha_{i_1}) = -\alpha_j$ . Alors nous savons par la proposition 1.2.1.3. que  $\mathbf{j} = (i_2, i_3, \dots, i_\nu, j)$  est un élément de  $\mathcal{I}$  et que  $\mathbf{j}$  est adapté au carquois  $s_{i_1}(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}_1$ . Nous obtenons

$$\alpha(\mathbf{j}, m-1) = s_{i_2} s_{i_3} \dots s_{i_{m-1}}(\alpha_{i_m}) = s_{i_1}(\alpha(\mathbf{i}, m)) = \begin{cases} \sum_{i=a}^b \alpha_i, & \text{si } a < i_1 < b; \\ \sum_{i=a+1}^b \alpha_i, & \text{si } i_1 = a; \\ \sum_{i=a}^{b-1} \alpha_i, & \text{si } i_1 = b; \\ \sum_{i=a-1}^b \alpha_i, & \text{si } i_1 = (a-1); \\ \sum_{i=a}^{b+1} \alpha_i, & \text{si } i_1 = (b+1); \\ \sum_{i=a}^b \alpha_i, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par hypothèse de récurrence, nous avons

$$\tilde{T}_{i_2} \tilde{T}_{i_3} \dots \tilde{T}_{i_{m-1}}(E_{i_m}) = \sum_{\mathcal{Q}'_1} (-v)^{-\delta(\mathcal{Q}_1[a', b'], \mathcal{Q}'_1)} E_{\mathcal{Q}'_1}$$

où  $a' \leq b'$  sont définis par  $\alpha(\mathbf{j}, m-1) = \sum_{i=a'}^{b'} \alpha_i$  et la somme est sur tous les carquois  $\mathcal{Q}'_1$  du graphe  $\Delta[a', b']$ . Nous voulons calculer

$$\tilde{T}_{i_1} \tilde{T}_{i_2} \tilde{T}_{i_3} \dots \tilde{T}_{i_{m-1}}(E_{i_m}) = \sum_{\mathcal{Q}'_1} (-v)^{-\delta(\mathcal{Q}_1[a', b'], \mathcal{Q}'_1)} \tilde{T}_{i_1}(E_{\mathcal{Q}'_1}).$$

Noter que  $i_1$  est un puits de  $\mathcal{Q}$  et une source de  $\mathcal{Q}_1 = s_{i_1}(\mathcal{Q})$ . Il y a six cas à considérer:

- (1)  $a < i_1 < b$  (2)  $i_1 = a$  (3)  $i_1 = b$  (4)  $i_1 = (a-1)$  (5)  $i_1 = (b+1)$  et (6)  $i_1 < (a-1)$  ou  $i_1 > (b+1)$ . Par la suite, nous écrirons  $c$  au lieu de  $i_1$ .

Nous considérons d'abord le cas (1):  $a < i_1 < b$ . Dans ce cas,  $a' = a$  et  $b' = b$ . Si  $\mathcal{P}_{< c}$  est un carquois dont le graphe est  $\Delta[a, c-1]$  et si  $\mathcal{P}_{> c}$  est un carquois dont le graphe est  $\Delta[c+1, b]$  et si nous considérons tous les carquois  $\mathcal{Q}'_1$  dont le graphe est  $\Delta[a, b]$  et tels que  $\mathcal{Q}'_1[a, c-1] = \mathcal{P}_{< c}$  et  $\mathcal{Q}'_1[c+1, b] = \mathcal{P}_{> c}$ , alors il y a 4 possibilités pour  $\mathcal{Q}'_1$  correspondant aux 4 possibilités d'orienter les arêtes  $\{c-1, c\}$  et  $\{c, c+1\}$ . En utilisant la définition de  $E_{\mathcal{Q}'_1}$ , nous pouvons montrer facilement qu'il existe deux sous-ensembles disjoints  $\{j_1, j_2, \dots, j_x\}$ ,  $\{j'_1, j'_2, \dots, j'_y\}$  avec  $j_1 >$

$j_2 > \dots > j_x$ ,  $j'_1 > j'_2 > \dots > j'_y$ ,  $\{j_1, j_2, \dots, j_x\} \cup \{j'_1, j'_2, \dots, j'_y\} = \{a, a + 1, \dots, b\} \setminus \{c - 1, c, c + 1\}$  tels que pour tous les 4 carquois  $\mathcal{Q}'_1$  dont le graphe est  $\Delta[a, b]$  avec  $\mathcal{Q}'_1[a, c - 1] = \mathcal{P}_{<c}$  et  $\mathcal{Q}'_1[c + 1, b] = \mathcal{P}_{>c}$ , nous avons que  $E_{\mathcal{Q}'_1}$  est égal à

$$\begin{cases} E_{j_1} E_{j_2} \cdots E_{j_x} E_{c+1} E_{c-1} E_c E_{j'_y} \cdots E_{j'_2} E_{j'_1}, & \text{si } (c-1) \rightarrow c \leftarrow (c+1) \text{ dans } \mathcal{Q}'_1; \\ E_{j_1} E_{j_2} \cdots E_{j_x} E_{c+1} E_c E_{c-1} E_{j'_y} \cdots E_{j'_2} E_{j'_1}, & \text{si } (c-1) \leftarrow c \leftarrow (c+1) \text{ dans } \mathcal{Q}'_1; \\ E_{j_1} E_{j_2} \cdots E_{j_x} E_{c-1} E_c E_{c+1} E_{j'_y} \cdots E_{j'_2} E_{j'_1}, & \text{si } (c-1) \rightarrow c \rightarrow (c+1) \text{ dans } \mathcal{Q}'_1; \\ E_{j_1} E_{j_2} \cdots E_{j_x} E_c E_{c-1} E_{c+1} E_{j'_y} \cdots E_{j'_2} E_{j'_1}, & \text{si } (c-1) \leftarrow c \rightarrow (c+1) \text{ dans } \mathcal{Q}'_1; \end{cases}$$

et

$$\delta(\mathcal{Q}_1[a, b], \mathcal{Q}'_1) = \sigma + \begin{cases} 2, & \text{si } (c-1) \rightarrow c \leftarrow (c+1) \text{ dans } \mathcal{Q}'_1; \\ 1, & \text{si } (c-1) \leftarrow c \leftarrow (c+1) \text{ dans } \mathcal{Q}'_1; \\ 1, & \text{si } (c-1) \rightarrow c \rightarrow (c+1) \text{ dans } \mathcal{Q}'_1; \\ 0 & \text{si } (c-1) \leftarrow c \rightarrow (c+1) \text{ dans } \mathcal{Q}'_1; \end{cases}$$

où  $\sigma = \delta(\mathcal{Q}_1[a, c - 1], \mathcal{Q}'_1[a, c - 1]) + \delta(\mathcal{Q}_1[c + 1, b], \mathcal{Q}'_1[c + 1, b])$ .

Par conséquent

$$\sum_{\mathcal{Q}'_1} (-v)^{-\delta(\mathcal{Q}_1[a, b], \mathcal{Q}'_1)} \tilde{T}_{i_1}(E_{\mathcal{Q}'_1}) = (-v)^{-\sigma} E_{j_1} E_{j_2} \cdots E_{j_x} \tilde{T}_c(X) E_{j'_y} \cdots E_{j'_1} \quad (2.1)$$

où la somme est sur les 4 carquois  $\mathcal{Q}'_1$  dont le graphe est  $\Delta[a, b]$  et tels que  $\mathcal{Q}'_1[a, c - 1] = \mathcal{P}_{<c}$  et  $\mathcal{Q}'_1[c + 1, b] = \mathcal{P}_{>c}$  et

$$\begin{aligned} X &= (-v)^{-2} E_{c+1} E_{c-1} E_c + (-v)^{-1} E_{c+1} E_c E_{c-1} \\ &\quad + (-v)^{-1} E_{c-1} E_c E_{c+1} + E_c E_{c-1} E_{c+1}. \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} X &= \tilde{T}_{c-1}(E_c) E_{c+1} - v^{-1} E_{c+1} \tilde{T}_{c-1}(E_c) \\ &= \tilde{T}_c^{-1}(E_{c-1}) E_{c+1} - v^{-1} E_{c+1} \tilde{T}_c^{-1}(E_{c-1}), \end{aligned}$$

car  $\tilde{T}_c^{-1}(E_{c-1}) = \tilde{T}_{c-1}(E_c)$  et

$$\begin{aligned} \tilde{T}_c(X) &= E_{c-1} \tilde{T}_c(E_{c+1}) - v^{-1} \tilde{T}_c(E_{c+1}) E_{c-1} \\ &= E_{c-1} E_{c+1} E_c - v^{-1} E_{c-1} E_c E_{c+1} \\ &\quad - v^{-1} E_{c+1} E_c E_{c-1} + v^{-2} E_c E_{c+1} E_{c-1}. \end{aligned}$$

Donc le membre de gauche de l'équation (2.1) est égal à

$$\begin{aligned}
& (-v)^{-\sigma} E_{j_1} E_{j_2} \cdots E_{j_x} E_{c-1} E_{c+1} E_c E_{j'_y} \cdots E_{j'_2} E_{j'_1} \\
& + (-v)^{-(\sigma+1)} E_{j_1} E_{j_2} \cdots E_{j_x} E_{c-1} E_c E_{c+1} E_{j'_y} \cdots E_{j'_2} E_{j'_1} \\
& + (-v)^{-(\sigma+1)} E_{j_1} E_{j_2} \cdots E_{j_x} E_{c+1} E_c E_{c-1} E_{j'_y} \cdots E_{j'_2} E_{j'_1} \\
& + (-v)^{-(\sigma+2)} E_{j_1} E_{j_2} \cdots E_{j_x} E_c E_{c+1} E_{c-1} E_{j'_y} \cdots E_{j'_2} E_{j'_1}
\end{aligned}$$

et ceci est égal à

$$\sum_{\mathcal{Q}'_1} (-v)^{-\delta(\mathcal{Q}[a,b], \mathcal{Q}'_1)} E_{\mathcal{Q}'_1},$$

où la somme est sur les 4 carquois  $\mathcal{Q}'_1$  dont le graphe est  $\Delta[a, b]$  et tels que  $\mathcal{Q}'_1[a, c-1] = \mathcal{P}_{<c}$  et  $\mathcal{Q}'_1[c+1, b] = \mathcal{P}_{>c}$ . Noter que nous avons utilisé le fait que  $c$  est un puits de  $\mathcal{Q}$ .

Ainsi

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_{i_1} \tilde{T}_{i_2} \cdots \tilde{T}_{i_{m-1}}(E_{i_m}) &= \sum_{\mathcal{P}_{>c}, \mathcal{P}_{<c}} \sum_{\mathcal{Q}'_1} (-v)^{-\delta(\mathcal{Q}_1[a', b'], \mathcal{Q}'_1)} \tilde{T}_{i_1}(E_{\mathcal{Q}'_1}) \\
&= \sum_{\mathcal{P}_{>c}, \mathcal{P}_{<c}} \sum_{\mathcal{Q}'_1} (-v)^{-\delta(\mathcal{Q}[a, b], \mathcal{Q}'_1)} (E_{\mathcal{Q}'_1}) \\
&= \sum_{\mathcal{Q}'} (-v)^{-\delta(\mathcal{Q}[a, b], \mathcal{Q}')} (E_{\mathcal{Q}'}
\end{aligned}$$

où la somme  $\sum_{\mathcal{P}_{>c}, \mathcal{P}_{<c}}$  est sur toutes les paires de carquois  $(\mathcal{P}_{>c}, \mathcal{P}_{<c})$  telles que  $\mathcal{P}_{>c}$  est un carquois du graphe  $\Delta[c+1, b]$  et  $\mathcal{P}_{<c}$  est un carquois du graphe  $\Delta[a, c-1]$ , et la somme  $\sum_{\mathcal{Q}'_1}$  est sur les 4 carquois  $\mathcal{Q}'_1$  dont le graphe est  $\Delta[a, b]$  et tels que  $\mathcal{Q}'_1[a, c-1] = \mathcal{P}_{<c}$  et  $\mathcal{Q}'_1[c+1, b] = \mathcal{P}_{>c}$  et la somme  $\sum_{\mathcal{Q}'}$  est sur tous les carquois  $\mathcal{Q}'$  dont le graphe est  $\Delta[a, b]$ . Ceci termine la preuve dans le cas (1).

Considérons maintenant le cas (2):  $i_1 = a$ . Dans ce cas,  $a' = a+1$  et  $b' = b$ . Ainsi

$$\tilde{T}_{i_2} \tilde{T}_{i_3} \cdots \tilde{T}_{i_{m-1}}(E_{i_m}) = \sum_{\mathcal{Q}'_1} (-v)^{-\delta(\mathcal{Q}_1[a+1, b], \mathcal{Q}'_1)} E_{\mathcal{Q}'_1}$$

et

$$\tilde{T}_{i_1} \tilde{T}_{i_2} \cdots \tilde{T}_{i_{m-1}}(E_{i_m}) = \sum_{\mathcal{Q}'_1} (-v)^{-\delta(\mathcal{Q}_1[a+1, b], \mathcal{Q}'_1)} \tilde{T}_{i_1}(E_{\mathcal{Q}'_1})$$

où la somme est sur tous les carquois  $\mathcal{Q}'_1$  de  $\Delta[a+1, b]$ .

En utilisant la définition de  $E_{\mathcal{Q}'_1}$  et la relation  $E_{a+1} E_h = E_h E_{a+1}$  si  $|a+1-h| > 1$ , nous obtenons

$$E_{\mathcal{Q}'_1} = \begin{cases} E_{\mathcal{Q}'_1[a+2, b]} E_{a+1}, & \text{si } (a+1) \leftarrow (a+2) \text{ dans } \mathcal{Q}'_1; \\ E_{a+1} E_{\mathcal{Q}'_1[a+2, b]}, & \text{si } (a+1) \rightarrow (a+2) \text{ dans } \mathcal{Q}'_1; \end{cases}$$



et

$$\tilde{T}_a(E_{\mathcal{Q}'_1}) = \begin{cases} E_{\mathcal{Q}'_1[a+2,b]} (E_{a+1}E_a - v^{-1}E_aE_{a+1}), \\ \quad \text{si } (a+1) \leftarrow (a+2) \text{ dans } \mathcal{Q}'_1; \\ (E_{a+1}E_a - v^{-1}E_aE_{a+1}) E_{\mathcal{Q}'_1[a+2,b]}, \\ \quad \text{si } (a+1) \rightarrow (a+2) \text{ dans } \mathcal{Q}'_1. \end{cases}$$

Noter que si  $\mathcal{Q}'$  est un carquois du graphe  $\Delta[a, b]$  avec  $\mathcal{Q}'[a+1, b] = \mathcal{Q}'_1$ , alors

$$E_{\mathcal{Q}'} = \begin{cases} E_{\mathcal{Q}'[a+2,b]} E_{a+1} E_a, & \text{si } a \leftarrow (a+1) \leftarrow (a+2) \text{ dans } \mathcal{Q}'; \\ E_{\mathcal{Q}'[a+2,b]} E_a E_{a+1}, & \text{si } a \rightarrow (a+1) \leftarrow (a+2) \text{ dans } \mathcal{Q}'; \\ E_{a+1} E_a E_{\mathcal{Q}'[a+2,b]}, & \text{si } a \leftarrow (a+1) \rightarrow (a+2) \text{ dans } \mathcal{Q}'; \\ E_a E_{a+1} E_{\mathcal{Q}'[a+2,b]}, & \text{si } a \rightarrow (a+1) \rightarrow (a+2) \text{ dans } \mathcal{Q}'. \end{cases}$$

En utilisant la définition de la fonction  $\delta$ , il est maintenant facile de vérifier que

$$\tilde{T}_{i_1} \tilde{T}_{i_2} \dots \tilde{T}_{i_{m-1}}(E_{i_m}) = \sum_{\mathcal{Q}'} (-v)^{-\delta(\mathcal{Q}[a,b], \mathcal{Q}')} E_{\mathcal{Q}'}.$$

Ceci termine la preuve dans le cas (2).

Le cas (3),  $i_1 = b$ , se démontre de la même façon que le cas (2).

Nous considérons maintenant le cas (4):  $i_1 = (a-1)$ . Dans ce cas  $a' = (a-1)$  et  $b' = b$ . Ainsi

$$\tilde{T}_{i_2} \tilde{T}_{i_3} \dots \tilde{T}_{i_{m-1}}(E_{i_m}) = \sum_{\mathcal{Q}'_1} (-v)^{-\delta(\mathcal{Q}_1[a-1,b], \mathcal{Q}'_1)} E_{\mathcal{Q}'_1}$$

où la somme est sur tous les carquois  $\mathcal{Q}'_1$  de  $\Delta[a-1, b]$ . Si  $\mathcal{P}$  est un carquois dont le graphe est  $\Delta[a, b]$  et si nous considérons tous les carquois  $\mathcal{Q}'_1$  de  $\Delta[a-1, b]$  tels que  $\mathcal{Q}'_1[a, b] = \mathcal{P}$ , alors il y a deux possibilités pour  $\mathcal{Q}'_1$  correspondant aux 2 possibilités d'orienter l'arête  $\{a-1, a\}$  et, pour ceux-là, nous utilisons la définition de  $E_{\mathcal{Q}'_1}$  et la relation  $E_h E_k = E_k E_h$  si  $|h-k| > 1$ , pour obtenir

$$E_{\mathcal{Q}'_1} = \begin{cases} E_{\mathcal{Q}'_1[a+1,b]} E_a E_{a-1}, & \text{si } (a-1) \leftarrow a \leftarrow (a+1) \text{ dans } \mathcal{Q}'_1; \\ E_{\mathcal{Q}'_1[a+1,b]} E_{a-1} E_a, & \text{si } (a-1) \rightarrow a \leftarrow (a+1) \text{ dans } \mathcal{Q}'_1; \\ E_a E_{a-1} E_{\mathcal{Q}'_1[a+1,b]}, & \text{si } (a-1) \leftarrow a \rightarrow (a+1) \text{ dans } \mathcal{Q}'_1; \\ E_{a-1} E_a E_{\mathcal{Q}'_1[a+1,b]}, & \text{si } (a-1) \rightarrow a \rightarrow (a+1) \text{ dans } \mathcal{Q}'_1. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathcal{Q}'_1} (-v)^{-\delta(\mathcal{Q}_1[a-1,b], \mathcal{Q}'_1)} E_{\mathcal{Q}'_1} \\ &= \begin{cases} (-v)^{-\sigma} E_{\mathcal{Q}'_1[a+1,b]} (-v^{-1} E_a E_{a-1} + E_{a-1} E_a) & \text{si } a \leftarrow (a+1) \text{ dans } \mathcal{P}; \\ (-v)^{-\sigma} (-v^{-1} E_a E_{a-1} + E_{a-1} E_a) E_{\mathcal{Q}'_1[a+1,b]} & \text{si } a \rightarrow (a+1) \text{ dans } \mathcal{P}; \end{cases} \\ &= \begin{cases} (-v)^{-\sigma} E_{\mathcal{Q}'_1[a+1,b]} \tilde{T}_a(E_{a-1}) & \text{si } a \leftarrow (a+1) \text{ dans } \mathcal{P}; \\ (-v)^{-\sigma} \tilde{T}_a(E_{a-1}) E_{\mathcal{Q}'_1[a+1,b]} & \text{si } a \rightarrow (a+1) \text{ dans } \mathcal{P}; \end{cases} \end{aligned}$$

où la somme est sur les deux carquois  $\mathcal{Q}'_1$  de  $\Delta[a-1, b]$  tels que  $\mathcal{Q}'_1[a, b] = \mathcal{P}$  et  $\sigma = \delta(\mathcal{Q}_1[a, b], \mathcal{Q}'_1[a, b])$ . Noter que  $\tilde{T}_a(E_{a-1}) = \tilde{T}_{a-1}^{-1}(E_a)$ . Ainsi nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum_{\mathcal{Q}'_1} (-v)^{-\delta(\mathcal{Q}_1[a-1,b], \mathcal{Q}'_1)} \tilde{T}_{i_1}(E_{\mathcal{Q}'_1}) &= \begin{cases} (-v)^{-\sigma} E_{\mathcal{Q}'_1[a+1,b]} E_a & \text{si } a \leftarrow (a+1) \text{ dans } \mathcal{P} \\ (-v)^{-\sigma} E_a E_{\mathcal{Q}'_1[a+1,b]} & \text{si } a \rightarrow (a+1) \text{ dans } \mathcal{P} \end{cases} \\ &= (-v)^{-\delta(\mathcal{Q}[a,b], \mathcal{P})} E_{\mathcal{P}} \end{aligned}$$

où la somme est sur les deux carquois  $\mathcal{Q}'_1$  de  $\Delta[a-1, b]$  tels que  $\mathcal{Q}'_1[a, b] = \mathcal{P}$  et  $\sigma$  est comme ci-dessus. Nous obtenons

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{i_1} \tilde{T}_{i_2} \cdots \tilde{T}_{i_{m-1}}(E_{i_m}) &= \sum_{\mathcal{P}} \sum_{\mathcal{Q}'_1} (-v)^{-\delta(\mathcal{Q}_1[a-1,b], \mathcal{Q}'_1)} T_{i_1}(E_{\mathcal{Q}'_1}) \\ &= \sum_{\mathcal{P}} (-v)^{-\delta(\mathcal{Q}[a,b], \mathcal{P})} E_{\mathcal{P}} \end{aligned}$$

où la somme  $\sum_{\mathcal{P}}$  est sur tous les carquois du graphe  $\Delta[a, b]$  et la somme  $\sum_{\mathcal{Q}'_1}$  est sur tous les carquois  $\mathcal{Q}'_1$  de  $\Delta[a-1, b]$  tels que  $\mathcal{Q}'_1[a, b] = \mathcal{P}$ . Ceci termine la preuve dans le cas (4).

Le cas (5):  $i_1 = (b+1)$  se démontre de la même façon que le cas (4). Le cas (6) est évident.  $\square$

Maintenant, nous utilisons cette description du vecteur de racine afin de calculer son image sous l'involution  $\overline{(\ )}$ .

**Proposition 2.1.2** (Avec les notations de la proposition 2.1.1) Soient  $\mathcal{Q}$  un carquois de  $\Delta$  et  $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_\nu) \in \mathcal{I}$  adapté à  $\mathcal{Q}$ . Pour  $1 \leq a \leq b \leq n$ , soient  $\Delta[a, b]$  le sous-graphe complet de  $\Delta$  dont l'ensemble de sommets est  $\{a, a+1, \dots, b\}$  et  $\mathcal{Q}[a, b]$  le sous-carquois de  $\mathcal{Q}$  dont le graphe est  $\Delta[a, b]$ . Si  $\alpha(\mathbf{i}, k) = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k}) = \alpha_a + \alpha_{a+1} + \cdots + \alpha_b$ , alors

$$\overline{\tilde{T}_{i_1} \tilde{T}_{i_2} \cdots \tilde{T}_{i_{k-1}}(E_{i_k})} = \sum_J (v^{-1} - v)^{|J|} E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{c}(J)},$$

où la somme est sur tous les sous-ensembles  $J$  de l'ensemble des arêtes de  $\Delta[a, b]$ ,  $\mathbf{c}(J) = (c_1(J), c_2(J), \dots, c_\nu(J)) \in \mathbf{N}^\nu$  avec  $c_m(J) \in \{0, 1\}$  et  $c_m(J) = 1$  si et seulement si le support  $\text{Supp}(\alpha(\mathbf{i}, m))$  est une des composantes connexes du graphe obtenu de  $\Delta[a, b]$  en retirant les arêtes de  $J$ .

*Preuve.*  $E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{c}(J)}$  est un produit de vecteurs de racine  $E_{\mathbf{i}}^{\pi^{0,r_1}} E_{\mathbf{i}}^{\pi^{0,r_2}} \dots E_{\mathbf{i}}^{\pi^{0,r_{|J|+1}}}$  par rapport à  $\mathbf{i}$ . En utilisant la proposition 2.1.1, nous pouvons exprimer chacun de ces facteurs  $E_{\mathbf{i}}^{\pi^{0,r_l}}$  comme une somme de monômes dans les  $E_i$  avec  $i \in \text{Supp}(\alpha(\mathbf{i}, r_l))$  et pour  $l \neq l'$ , les supports  $\text{Supp}(\alpha(\mathbf{i}, r_l))$  et  $\text{Supp}(\alpha(\mathbf{i}, r_{l'}))$  sont disjoints à cause de la définition de  $\mathbf{c}(J)$ . Disons que  $\mathbf{c}(J) = (c_1, c_2, \dots, c_\nu)$  et soit  $a \leq i < j \leq b$  tel que  $\{i, j\}$  est une arête dans  $J$ . Alors il existe  $1 \leq r \neq r' \leq \nu$  tel que  $c_r = c_{r'} = 1$ ,  $i \in \text{Supp}(\alpha(\mathbf{i}, r))$  et  $j \in \text{Supp}(\alpha(\mathbf{i}, r'))$ . Dans ce cas,  $\alpha(\mathbf{i}, r) + \alpha(\mathbf{i}, r') \in R^+$ . Si  $i \rightarrow j$  est une flèche dans  $\mathcal{Q}[a, b]$ , alors il y a une suite exacte non-scindée

$$0 \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i}, r')} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i}, r) + \alpha(\mathbf{i}, r')} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i}, r)} \rightarrow 0$$

de modules dans  $\text{Mod}(\mathcal{Q})$ . En appliquant le lemme 1.2.3, nous obtenons que  $r' < r$ . Par conséquent, si nous exprimons  $E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{c}(J)}$  comme une somme de monômes  $E_{\mathcal{Q}'}$  en utilisant la proposition 2.1.1, nous voyons que  $E_j$  apparaît dans  $E_{\mathcal{Q}'}$  à la gauche de  $E_i$ . Par un argument analogue, si  $i \leftarrow j$  est une flèche dans  $\mathcal{Q}[a, b]$ , alors  $r < r'$  et si nous exprimons  $E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{c}(J)}$  comme une somme de monômes  $E_{\mathcal{Q}'}$  en utilisant la proposition 2.1.1, nous voyons que  $E_j$  apparaît dans  $E_{\mathcal{Q}'}$  à la droite de  $E_i$ . Par conséquent,  $E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{c}(J)}$  est une somme de monômes  $E_{\mathcal{Q}'}$  où  $\mathcal{Q}'$  est un carquois de  $\Delta[a, b]$  et le monôme  $E_{\mathcal{Q}'}$  apparaît dans cette somme avec un coefficient non-nul si et seulement si les arêtes de  $J$  ont une orientation opposée dans  $\mathcal{Q}[a, b]$  et  $\mathcal{Q}'$  et, dans ce cas, ce coefficient est  $(-v)^{-\delta(\mathcal{Q}[a, b], \mathcal{Q}') + |J|}$ . Donc

$$\sum_J (v^{-1} - v)^{|J|} E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{c}(J)} = \sum_J (v^{-1} - v)^{|J|} \sum_{\mathcal{Q}'} (-v)^{-\delta(\mathcal{Q}[a, b], \mathcal{Q}') + |J|} E_{\mathcal{Q}'} \quad (2.2)$$

où la somme  $\sum_J$  est sur tous les sous-ensembles  $J$  de l'ensemble des arêtes de  $\Delta[a, b]$  et la somme  $\sum_{\mathcal{Q}'}$  est sur tous les carquois  $\mathcal{Q}'$  de  $\Delta[a, b]$  pour lesquels l'orientation de chaque arête de  $J$  dans  $\mathcal{Q}[a, b]$  est opposée à l'orientation dans  $\mathcal{Q}'$ .

Il est clair que le membre de droite de l'équation (2.2) est égal à

$$\sum_{\mathcal{Q}''} \left[ \sum_K (v^{-1} - v)^{|K|} (-v)^{|K|} \right] (-v)^{-\delta(\mathcal{Q}[a, b], \mathcal{Q}'')} E_{\mathcal{Q}''}$$

où la somme  $\sum_{\mathcal{Q}''}$  est sur tous les carquois  $\mathcal{Q}''$  du graphe  $\Delta[a, b]$  et la somme  $\sum_K$  est sur tous les sous-ensembles  $K$  de l'ensemble des arêtes de  $\Delta[a, b]$  qui ont une orientation opposée dans  $\mathcal{Q}[a, b]$  et dans  $\mathcal{Q}''$ .

Noter que

$$\sum_K (v^{-1} - v)^{|K|} (-v)^{|K|} = \sum_K (v^2 - 1)^{|K|} = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} (v^2 - 1)^i = v^{2m} = v^{2\delta(\mathcal{Q}[a,b], \mathcal{Q}'')}$$

où la somme  $\sum_K$  est sur tous les sous-ensembles  $K$  de l'ensemble des arêtes de  $\Delta[a, b]$  qui ont une orientation opposée dans  $\mathcal{Q}[a, b]$  et dans  $\mathcal{Q}''$  et  $m$  est le nombre de ces arêtes. Par conséquent, l'équation (2.2) devient:

$$\begin{aligned} \sum_J (v^{-1} - v)^{|J|} E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{c}(J)} &= \sum_{\mathcal{Q}''} v^{2\delta(\mathcal{Q}[a,b], \mathcal{Q}'')} (-v)^{-\delta(\mathcal{Q}[a,b], \mathcal{Q}'')} E_{\mathcal{Q}''} \\ &= \sum_{\mathcal{Q}''} (-v)^{\delta(\mathcal{Q}[a,b], \mathcal{Q}'')} E_{\mathcal{Q}''} \\ &= \overline{\tilde{T}_{i_1} \tilde{T}_{i_2} \cdots \tilde{T}_{i_{k-1}} (E_{i_k})} \end{aligned}$$

où la somme  $\sum_J$  est sur tous les sous-ensembles  $J$  de l'ensemble des arêtes de  $\Delta[a, b]$  et la somme  $\sum_{\mathcal{Q}''}$  est sur tous les carquois  $\mathcal{Q}''$  du graphe  $\Delta[a, b]$ . On obtient la dernière équation en appliquant l'involution  $\overline{(\ )}$  à la formule de la proposition 2.1.1.  $\square$

## 2.2 Relations de commutation entre les vecteurs de racine

Nous allons décrire dans cette section les relations de commutation entre des vecteurs de racine par rapport à  $\mathbf{i} \in \mathcal{I}$  adapté à un carquois  $\mathcal{Q}$ . D'abord nous rappellerons la correspondance de Ringel entre les algèbres de Hall et les algèbres enveloppantes quantiques. Nous suivrons la présentation donnée dans (Lusztig, 1990a). Dans le cas  $A_n$ , nous pouvons utiliser cette correspondance et donner les relations de commutation entre les vecteurs de racine.

Soient  $F_q$  un corps fini avec  $q$  éléments,  $\mathcal{Q}$  un carquois dont le graphe est le graphe de Dynkin de type  $A_n$  et  $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_\nu) \in \mathcal{I}$  adapté à  $\mathcal{Q}$ . Soit  $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbf{Z}^n$  tel que  $z_i - z_j = 1$  si  $i \rightarrow j$  est une flèche dans  $\mathcal{Q}$ . Un tel  $\mathbf{z}$  existe.

$R\mathcal{Q}$  est défini comme le  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel dont la base  $([\mathbf{V}])$  est indexée par les classes d'isomorphisme  $[\mathbf{V}]$  de modules  $\mathbf{V}$  de  $\mathcal{Q}$  sur  $F_q$ , et la structure de  $\mathbf{C}$ -algèbre est donnée par

$$[\mathbf{V}'] \cdot [\mathbf{V}''] = \sum_{[\mathbf{V}]} g_{\mathbf{V}, \mathbf{V}', \mathbf{V}''} [\mathbf{V}]$$

où la somme est sur tous les classes d'isomorphisme  $[\mathbf{V}]$  de modules  $\mathbf{V}$  de  $\mathcal{Q}$  et  $g_{\mathbf{V}, \mathbf{V}', \mathbf{V}''}$  est le nombre de sous-modules de  $\mathbf{V}$  qui sont isomorphes à  $\mathbf{V}''$  et qui sont tels que le module quotient correspondant est isomorphe à  $\mathbf{V}'$ . Noter que la somme est finie parce que  $\dim([\mathbf{V}]) = \dim([\mathbf{V}']) + \dim([\mathbf{V}''])$  si  $g_{\mathbf{V}, \mathbf{V}', \mathbf{V}''} \neq 0$ .

On peut voir  $\mathbf{C}$  comme une  $\mathbf{Z}[v, v^{-1}]$ -algèbre où  $v = q^{1/2}$  est une racine carrée fixée de  $q$ . Soit  $U_q, U_q^+$  les  $\mathbf{C}$ -algèbres obtenues de  $U$ , respectivement  $U^+$  par extension des scalaires.

Soit  $U_q^0$  la sous-algèbre de  $U_q$  engendrée par  $K_i, K_i^{-1}$  pour  $1 \leq i \leq n$ . Soit  $\widetilde{RQ} = U_q^0 \otimes_{\mathbf{C}} RQ$ .  $\widetilde{RQ}$  est une algèbre associative qui contient  $U_q^0$  et  $RQ$  comme sous-algèbres avec la loi de commutation suivante:

$$K_i [\mathbf{V}] K_i^{-1} = q^{\sum_j d_j (\alpha_i, \alpha_j)/2} [\mathbf{V}]$$

où  $\mathbf{V}$  est un module de  $Q$  de dimension  $\dim(\mathbf{V}) = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ .

Soit  $U_q^{\geq 0} = U_q^0 \otimes_{\mathbf{C}} U_q^+$ .  $U_q^{\geq 0}$  peut être identifié avec la sous-algèbre de  $U_q$  engendrée par  $U_q^0$  et  $U_q^+$ .

Pour chaque  $N \in \mathbf{N}$  et  $\alpha \in R^+$ , soit

$$[[N]]! = \prod_{s=1}^N \frac{(q^s - 1)}{(q - 1)} \quad \text{et} \quad [\mathbf{e}_\alpha]^{((N))} = \frac{1}{[[N]]!} [\mathbf{e}_\alpha]^N.$$

### Proposition 2.2.1

- (Ringel, 1990) Il existe un unique isomorphisme d'algèbres  $U_q^{\geq 0} \rightarrow \widetilde{RQ}$  tel que

$$K_i \mapsto K_i, \quad K_i^{-1} \mapsto K_i^{-1}, \quad E_i \mapsto K_i^{z_i} [\mathbf{e}_i]$$

où  $\mathbf{e}_i$  est le module simple dont la dimension  $\dim(\mathbf{e}_i) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  n'a qu'une seule composante non-nulle dans la  $i$ -ième colonne et qui est égale à 1. En particulier, il existe un plongement d'algèbres  $\Xi : RQ \hookrightarrow U_q$  tel que  $\Xi([\mathbf{e}_j]) = K_j^{-z_j} E_j$  pour  $1 \leq j \leq n$ .

- Pour tout  $\mathbf{c} \in \mathbf{N}^\nu$ , nous avons dans  $RQ$

$$[\mathbf{e}(\mathbf{c})] = [\mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i},1)}]^{((c_1))} [\mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i},2)}]^{((c_2))} \dots [\mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i},\nu)}]^{((c_\nu))}.$$

- Soit  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_\nu) \in \mathbf{N}^\nu$  de  $\mathbf{i}$ -homogénéité  $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_n) \in \mathbf{N}^n$ . Soit  $\mathbf{c}_k \in \mathbf{N}^\nu$  tel que la  $k$ -ième coordonnée est  $c_k$  et les autres coordonnées sont nulles. Soit  $\mathbf{d}^k = (d_1^k, d_2^k, \dots, d_n^k)$  la  $\mathbf{i}$ -homogénéité de  $\mathbf{c}_k$ . Posons  $r_{\mathbf{d}} = \sum_i d_i (d_i - 1) (2z_i - 1)/2 - \sum_{i \rightarrow j} d_i d_j z_j$ ,  $\delta(\mathbf{c}) = -\sum_{h < k, i} d_i^h d_i^k + \sum_{h < k, i \rightarrow j} d_j^h d_i^k$ ,  $f_{\mathbf{c}} = r_{\mathbf{d}} - \delta(\mathbf{c})$  et  $K(\mathbf{d}) = K_1^{-z_1 d_1} K_2^{-z_2 d_2} \dots K_n^{-z_n d_n}$ . Alors  $\Xi([\mathbf{e}(\mathbf{c})]) = q^{f_{\mathbf{c}}/2} K(\mathbf{d}) E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{c}}$ .

*Preuve.* (Lusztig, 1990a, chap. 5) □

Nous allons maintenant décrire le produit  $[\mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i},k)}] \cdot [\mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i},1)}]$  dans  $RQ$  pour  $k > 1$ . Faisons d'abord quelques observations générales.

Soit  $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_n) \in \mathbf{N}^n$  tel que  $\sum_{i=1}^n d_i \alpha_i = \alpha(\mathbf{i}, k) + \alpha(\mathbf{i}, 1)$ . Soit  $1 \leq a \leq b \leq n$  tel que  $\text{Supp}(\alpha(\mathbf{i}, k)) = \{a, a+1, \dots, b\}$ . Nous avons  $\alpha(\mathbf{i}, 1) = \alpha_{i_1}$ . Noter que si la classe d'isomorphisme  $[\mathbf{e}(\mathbf{c})]$  avec  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_\nu) \in \mathbf{N}^\nu$  apparaît dans le produit  $[\mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i}, k)}] \cdot [\mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i}, 1)}]$  avec un coefficient non-nul, alors  $\mathbf{c}$  est de  $\mathbf{i}$ -homogénéité  $\mathbf{d}$ . Ceci est une conséquence directe de la définition du produit dans  $R\mathcal{Q}$ . Noter aussi que, si  $c_j \neq 0$  et  $i_1$  n'est pas dans le support  $\text{Supp}(\alpha(\mathbf{i}, j))$  de  $\alpha(\mathbf{i}, j)$ , alors  $j = k$ . Car sinon chaque sous-module  $\mathbf{M}$  de  $\mathbf{e}(\mathbf{c})$  qui est isomorphe à  $\mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i}, 1)}$  donne un quotient  $\mathbf{e}(\mathbf{c})/\mathbf{M}$  qui n'est pas isomorphe à  $\mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i}, k)}$  parce qu'il admet un facteur direct indécomposable qui est isomorphe à  $\mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i}, j)}$ . Nous avons la formule suivante:

**Lemme 2.2.2**

$$[\mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i}, k)}] \cdot [\mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i}, 1)}] = q^{[\mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i}, 1)}, \mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i}, k)}]} [\mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i}, 1)}] \cdot [\mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i}, k)}] + \sum_{[\mathbf{V}]} (q-1)^{[\mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i}, 1)}, \mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i}, k)}]} [\mathbf{V}]$$

où la somme est sur toutes les classes d'isomorphisme  $[\mathbf{V}]$  telles qu'il y a une suite exacte non-scindée  $0 \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i}, 1)} \rightarrow \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i}, k)} \rightarrow 0$ . Noter que cette somme est nulle si  $[\mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i}, k)}, \mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i}, 1)}]^1 = 0$ .

*Preuve.* Nous écrivons  $\alpha^1, \alpha^k$  au lieu de  $\alpha(\mathbf{i}, 1), \alpha(\mathbf{i}, k)$ . Supposons que la classe d'isomorphisme  $[\mathbf{e}(\mathbf{c})]$  apparaît dans le produit  $[\mathbf{e}_{\alpha^k}] \cdot [\mathbf{e}_{\alpha^1}]$  avec un coefficient non-nul. Alors par nos observations ci-dessus, par le fait que le support d'une racine est un sous-ensemble connexe de  $\{1, \dots, n\}$  et par le fait que la  $\mathbf{i}$ -homogénéité de  $\mathbf{c}$  soit donnée par

$$d_{i_1} = \begin{cases} 2 & \text{si } a \leq i_1 \leq b \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}, \quad d_i = \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq i \leq b \text{ et } i \neq i_1 \\ 0 & \text{si } (i < a \text{ ou } i > b) \text{ et } i \neq i_1 \end{cases},$$

il n'y a que deux possibilités pour  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_\nu) \in \mathbf{N}^\nu$ :

1.  $c_j = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 1 \text{ ou } j = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
2.  $c_j = 1$  s'il existe une suite exacte non-scindée  $0 \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^1} \rightarrow \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^k} \rightarrow 0$  telle que  $\mathbf{e}_{\alpha^j}$  est un facteur direct de  $\mathbf{V}$ , et  $c_j = 0$  sinon.

Notons que le cas 2. n'est possible que si  $[\mathbf{e}_{\alpha^k}, \mathbf{e}_{\alpha^1}]^1 = 1$  (i.e.  $i_1 \in \{a-1, b+1\} \cup \{a+1, a+2, \dots, b-1\}$ ) et que dans ce cas  $[\mathbf{V}] = [\mathbf{e}_{\alpha^k + \alpha^1}]$  si  $[\mathbf{e}_{\alpha^1}, \mathbf{e}_{\alpha^k}] = 0$  (i.e.  $i_1 \in \{a-1, b+1\}$ ) et  $[\mathbf{V}] = [\mathbf{e}_{\alpha_a + \alpha_{a+1} + \dots + \alpha_{i_1}} \oplus \mathbf{e}_{\alpha_{i_1+1} + \alpha_{i_1+2} + \dots + \alpha_b}]$  si  $[\mathbf{e}_{\alpha^1}, \mathbf{e}_{\alpha^k}] = 1$  (i.e.  $i_1 \in \{a+1, a+2, \dots, b-1\}$ ).

Nous écrivons  $(\mathbf{e}(\mathbf{c})) = (V_i, f_{ij})$  pour le reste de la preuve. Dans le cas 1, nous avons

$$rk(f_{(i_1+1)i_1}) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq i_1 < b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad rk(f_{(i_1-1)i_1}) = \begin{cases} 1 & \text{si } a < i_1 \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\text{im}(f_{(i_1+1)i_1}) = \text{im}(f_{(i_1-1)i_1}) \text{ si } a < i_1 < b.$$

Le nombre de sous-modules  $\mathbf{M}$  de  $\mathbf{e}(\mathbf{c})$  isomorphes à  $\mathbf{e}_{\alpha^1}$  est égal au nombre de sous-espaces vectoriels de dimension 1 de  $V_{i_1}$ , qui est égal à  $(q^{d_{i_1}} - 1)/(q - 1)$ . Donc si  $d_{i_1} = 1$  (i.e.  $i_1 \notin \{a, \dots, b\}$ , i.e.  $[\mathbf{e}_{\alpha^1}, \mathbf{e}_{\alpha^k}] = 0$ ) il y a exactement un sous-module  $\mathbf{M}$  de  $\mathbf{e}(\mathbf{c})$  isomorphe à  $\mathbf{e}_{\alpha^1}$  et le quotient  $\mathbf{e}(\mathbf{c})/\mathbf{M}$  est isomorphe à  $\mathbf{e}_{\alpha^k}$ . Ainsi le coefficient de  $\mathbf{e}(\mathbf{c})$  est 1.

Si  $d_{i_1} = 2$  (i.e.  $i_1 \in \{a, \dots, b\}$ , i.e.  $[\mathbf{e}_{\alpha^1}, \mathbf{e}_{\alpha^k}] = 1$ ) alors il y a  $(q + 1)$  sous-modules  $\mathbf{M}$  de  $\mathbf{e}(\mathbf{c})$  isomorphes à  $\mathbf{e}_{\alpha^1}$ . Pour chacun de ces sous-modules  $\mathbf{M}$ , le quotient  $\mathbf{e}(\mathbf{c})/\mathbf{M}$  est isomorphe à  $\mathbf{e}_{\alpha^k}$  sauf pour celui correspondant à l'image  $\text{im}(f_{(i_1+1)i_1})$  si  $i_1 \neq b$  (respectivement  $\text{im}(f_{(i_1-1)i_1})$  si  $i_1 = b$ ). Ainsi le coefficient de  $\mathbf{e}(\mathbf{c})$  est  $q$ .

Donc dans le cas 1, le coefficient de  $\mathbf{e}(\mathbf{c})$  est  $q^{[\mathbf{e}_{\alpha^1}, \mathbf{e}_{\alpha^k}]}$ .

Dans le cas 2, nous avons  $i_1 \in \{a - 1, b + 1\} \cup \{a + 1, a + 2, \dots, b - 1\}$  et

$$\text{rk}(f_{(i_1+1)i_1}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i_1 \neq b + 1 \\ 0 & \text{si } i_1 = b + 1 \end{cases}, \quad \text{rk}(f_{(i_1-1)i_1}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i_1 \neq a - 1 \\ 0 & \text{si } i_1 = a - 1 \end{cases}$$

et

$$\text{im}(f_{(i_1+1)i_1}) \cap \text{im}(f_{(i_1-1)i_1}) = \{0\}.$$

Donc si  $i_1 \in \{a - 1, b + 1\}$  alors  $d_{i_1} = 1$  et il y a exactement un sous-module  $\mathbf{M}$  de  $\mathbf{e}(\mathbf{c})$  isomorphe à  $\mathbf{e}_{\alpha^1}$  et le quotient  $\mathbf{e}(\mathbf{c})/\mathbf{M}$  est isomorphe à  $\mathbf{e}_{\alpha^k}$ . Ainsi le coefficient de  $\mathbf{e}(\mathbf{c})$  est 1.

Si  $i_1 \in \{a + 1, a + 2, \dots, b - 1\}$  alors  $d_{i_1} = 2$  et il y a  $(q + 1)$  sous-modules  $\mathbf{M}$  de  $\mathbf{e}(\mathbf{c})$  isomorphes à  $\mathbf{e}_{\alpha^1}$ . Pour chacun de ces sous-modules  $\mathbf{M}$ , le quotient  $\mathbf{e}(\mathbf{c})/\mathbf{M}$  est isomorphe à  $\mathbf{e}_{\alpha^k}$  sauf pour les deux sous-modules correspondants aux images  $\text{im}(f_{(i_1+1)i_1})$  et  $\text{im}(f_{(i_1-1)i_1})$ . Ainsi le coefficient de  $\mathbf{e}(\mathbf{c})$  est  $(q - 1)$ . Donc dans le cas 2, le coefficient de  $\mathbf{e}(\mathbf{c})$  est  $(q - 1)^{[\mathbf{e}_{\alpha^1}, \mathbf{e}_{\alpha^k}]}$  et par la proposition 2.2.1.2, ceci termine la preuve.  $\square$

Maintenant, nous transportons la formule de la proposition précédente dans l'algèbre enveloppante quantique via le plongement d'algèbres  $\Xi : RQ \hookrightarrow U_q$ . Ceci nous donne les relations de commutation entre les vecteurs de racine.

**Proposition 2.2.3** *Soit  $1 \leq t \leq r \leq \nu$ . Alors*

$$E_1^{\pi^{\theta, r}} E_1^{\pi^{\theta, t}} = v^{\varphi(\pi^{\theta, t}, \pi^{\theta, r})} E_1^{\pi^{\theta, t}} E_1^{\pi^{\theta, r}} + \sum_{\mathbf{a}} (v - v^{-1})^{|\mathbf{a}| - 1} E_1^{\mathbf{a}}$$

où la somme est sur tous les  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_\nu) \in \mathbf{N}^\nu$  pour lesquels il existe une suite exacte non-scindée de la forme  $0 \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha(i, t)} \rightarrow \mathbf{e}_i(\mathbf{a}) \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha(i, r)} \rightarrow 0$

et  $|\mathbf{a}| = \sum_{s=1}^{\nu} a_s$ . Noter qu'il n'existe pas de tels  $\mathbf{a}$  si  $[\mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i},r)}, \mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i},t)}]^1 = 0$  et qu'il existe exactement un tel  $\mathbf{a}$  si  $[\mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i},r)}, \mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i},t)}]^1 = 1$ . De plus, dans le cas où  $[\mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i},r)}, \mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i},t)}]^1 = 1$  alors  $|\mathbf{a}| = 1$  si  $[\mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i},t)}, \mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i},r)}] = 0$  et  $|\mathbf{a}| = 2$  si  $[\mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i},t)}, \mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i},r)}] = 1$ .

*Preuve.* Considérons d'abord le cas  $t = 1$ . Alors  $\alpha(\mathbf{i}, t) = \alpha_{i_1}$ . Soient  $a, b$  tels que  $1 \leq a \leq b \leq n$  et  $\alpha(\mathbf{i}, r) = \alpha_a + \alpha_{a+1} + \dots + \alpha_b$ . Notons que

$$\begin{aligned} [\mathbf{e}_{\alpha_{i_1}}, \mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i},r)}] &= \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq i_1 \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \\ [\mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i},r)}, \mathbf{e}_{\alpha_{i_1}}]^1 &= \begin{cases} 1 & \text{si } i_1 \in \{a-1, b+1\} \cup \{a+1, \dots, b-1\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Il y a quatre cas à distinguer:

1.  $\left( [\mathbf{e}_{\alpha_{i_1}}, \mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i},r)}], [\mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i},r)}, \mathbf{e}_{\alpha_{i_1}}]^1 \right) = (1, 1)$  i.e.  $i_1 \in \{a+1, a+2, \dots, b-1\}$
2.  $\left( [\mathbf{e}_{\alpha_{i_1}}, \mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i},r)}], [\mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i},r)}, \mathbf{e}_{\alpha_{i_1}}]^1 \right) = (1, 0)$  i.e.  $i_1 \in \{a, b\}$
3.  $\left( [\mathbf{e}_{\alpha_{i_1}}, \mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i},r)}], [\mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i},r)}, \mathbf{e}_{\alpha_{i_1}}]^1 \right) = (0, 1)$  i.e.  $i_1 \in \{a-1, b+1\}$
4.  $\left( [\mathbf{e}_{\alpha_{i_1}}, \mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i},r)}], [\mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i},r)}, \mathbf{e}_{\alpha_{i_1}}]^1 \right) = (0, 0)$  i.e.  $i_1 \notin \{a-1, a, \dots, b, b+1\}$

Par le lemme 2.2.2 nous avons dans  $R\mathcal{Q}$

$$[\mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i},r)}] \cdot [\mathbf{e}_{\alpha_{i_1}}] = q^{[\mathbf{e}_{\alpha_{i_1}}, \mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i},r)}]} [\mathbf{e}_{\alpha_{i_1}}] \cdot [\mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i},r)}] + \sum_{[\mathbf{V}]} (q-1)^{[\mathbf{e}_{\alpha_{i_1}}, \mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i},r)}]} [\mathbf{V}]$$

où la somme est sur toutes les classes d'isomorphisme  $[\mathbf{V}]$  pour lesquelles il existe une suite exacte non-scindée  $0 \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i},1)} \rightarrow \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i},r)} \rightarrow 0$ .

Nous appliquons le plongement d'algèbres  $\Xi : R\mathcal{Q} \hookrightarrow U_q$  à cette équation et nous utilisons la proposition 2.2.1.3. pour voir que

$$q^{\frac{1}{2}f} \pi^{\theta,r} K_a^{-z_a} \dots K_b^{-z_b} E_i^{\pi^{\theta,r}} q^{\frac{1}{2}f} \pi^{\theta,1} K_{i_1}^{-z_{i_1}} E_i^{\pi^{\theta,1}}$$

est égal à

$$\begin{aligned} & q^{[\mathbf{e}_{\alpha_{i_1}}, \mathbf{e}(\mathbf{i},r)]} q^{\frac{1}{2}f} \pi^{\theta,1} K_{i_1}^{-z_{i_1}} E_i^{\pi^{\theta,1}} q^{\frac{1}{2}f} \pi^{\theta,r} K_a^{-z_a} \dots K_b^{-z_b} E_i^{\pi^{\theta,r}} \\ & + \sum_{\mathbf{a}} (q-1)^{[\mathbf{e}_{\alpha_{i_1}}, \mathbf{e}(\mathbf{i},r)]} q^{\frac{1}{2}f_{\mathbf{a}}} K_{i_1}^{-z_{i_1}} K_a^{-z_a} \dots K_b^{-z_b} E_i^{\mathbf{a}} \end{aligned}$$

où la somme est sur tous les  $\mathbf{a} \in \mathbf{N}^{\nu}$  pour lesquels il existe une suite exacte non-scindée de la forme  $0 \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i},t)} \rightarrow \mathbf{e}_i(\mathbf{a}) \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i},r)} \rightarrow 0$ . Noter qu'un tel  $\mathbf{a}$  n'existe que dans les cas 1 et 3 et que par la proposition 1.4.1 dans le cas 3,  $\mathbf{a} = \pi^{\theta,m}$  avec  $m$  tel que  $\alpha(\mathbf{i}, m) = \alpha_{i_1} + \alpha(\mathbf{i}, r)$  et dans le cas 1,  $\mathbf{a} = \pi^{\theta,m_1} + \pi^{\theta,m_2}$  avec  $m_1 < m_2$  tels que  $\alpha(\mathbf{i}, m_1) + \alpha(\mathbf{i}, m_2) = \alpha_{i_1} + \alpha(\mathbf{i}, r)$ .



En utilisant les relations (r.1) et (r.2) de la définition de  $U_q$  nous transformons cette équation: le membre de gauche est égal à

$$q^{\frac{1}{2}(f_{\boldsymbol{\pi}^{\theta,r}} + f_{\boldsymbol{\pi}^{\theta,1}})} K_a^{-z_a} \dots K_b^{-z_b} K_{i_1}^{-z_{i_1}} E_i^{\boldsymbol{\pi}^{\theta,r}} E_i^{\boldsymbol{\pi}^{\theta,1}} q^{\frac{1}{2}\rho}$$

avec

$$\rho = \begin{cases} 0 & \text{dans les cas 1 et 4} \\ z_{i_1} & \text{dans le cas 2} \\ -z_{i_1} & \text{dans le cas 3} \end{cases}$$

Noter que  $\rho = \varphi(\boldsymbol{\pi}^{\theta,1}, \boldsymbol{\pi}^{\theta,r})z_{i_1}$ , où  $\varphi$  est la forme bilinéaire définie dans la section 1.2.

Le membre de droite est égal à

$$\begin{aligned} & q^{[\mathbf{e}_{\alpha_{i_1}}, \mathbf{e}(\mathbf{i}, r)]} q^{\frac{1}{2}(f_{\boldsymbol{\pi}^{\theta,r}} + f_{\boldsymbol{\pi}^{\theta,1}})} K_a^{-z_a} \dots K_b^{-z_b} K_{i_1}^{-z_{i_1}} E_i^{\boldsymbol{\pi}^{\theta,1}} E_i^{\boldsymbol{\pi}^{\theta,r}} q^{\frac{1}{2}\rho'} \\ & + \sum_{\mathbf{a}} (q-1)^{[\mathbf{e}_{\alpha_{i_1}}, \mathbf{e}(\mathbf{i}, r)]} q^{\frac{1}{2}f_{\mathbf{a}}} K_{i_1}^{-z_{i_1}} K_a^{-z_a} \dots K_b^{-z_b} E_i^{\mathbf{a}} \end{aligned}$$

avec

$$\rho' = \begin{cases} -2 & \text{dans le cas 1} \\ z_{i_1} - 1 & \text{dans le cas 2} \\ -z_{i_1} - 1 & \text{dans le cas 3} \\ 0 & \text{dans le cas 4} \end{cases}$$

(nous avons utilisé le fait que  $z_{i_1} = z_{i_1-1} - 1 = z_{i_1+1} - 1$  puisque  $i_1$  est un puits). Noter que  $\rho' = \varphi(\boldsymbol{\pi}^{\theta,1}, \boldsymbol{\pi}^{\theta,r})z_{i_1} - [\mathbf{e}_{\alpha_{i_1}}, \mathbf{e}(\mathbf{i}, r)] - [\mathbf{e}(\mathbf{i}, r), \mathbf{e}_{\alpha_{i_1}}]^1$ . Comme ces résultats sont vrais dans  $U_q$  pour tous les  $q$ , nous pouvons conclure qu'ils sont vrais dans  $\mathbf{U}$ . En substituant  $v = q^{1/2}$  nous obtenons

$$\begin{aligned} E_i^{\boldsymbol{\pi}^{\theta,r}} E_i^{\boldsymbol{\pi}^{\theta,1}} &= v^{\varphi(\boldsymbol{\pi}^{\theta,1}, \boldsymbol{\pi}^{\theta,r})} E_i^{\boldsymbol{\pi}^{\theta,r}} E_i^{\boldsymbol{\pi}^{\theta,1}} \\ &+ \sum_{\mathbf{a}} (v^2 - 1)^{[\mathbf{e}_{\alpha_{i_1}}, \mathbf{e}(\mathbf{i}, r)]} v^{f_{\mathbf{a}} - f_{\boldsymbol{\pi}^{\theta,r}} - f_{\boldsymbol{\pi}^{\theta,1}}} v^{-z_{i_1} \varphi(\boldsymbol{\pi}^{\theta,1}, \boldsymbol{\pi}^{\theta,r})} E_i^{\mathbf{a}}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Notons que

$$[\mathbf{e}_{\alpha_{i_1}}, \mathbf{e}(\mathbf{i}, r)] = |\mathbf{a}| - 1 = \begin{cases} 0 & \text{dans le cas 3} \\ 1 & \text{dans le cas 1} \end{cases}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} f_{\boldsymbol{\pi}^{\theta,1}} &= 0, \quad f_{\boldsymbol{\pi}^{\theta,r}} = - \sum_{\substack{i \rightarrow j \\ a \leq i, j \leq b}} z_j \quad \text{et} \\ f_{\mathbf{a}} &= \begin{cases} 2z_{i_1} - 1 - \sum_{\substack{i \rightarrow j \\ a \leq i, j \leq b}} z_j - 2z_{i_1} + 1 - 1 & \text{dans le cas 1} \\ - \sum_{\substack{i \rightarrow j \\ i, j \in \{i_1\} \cup \{a, a+1, \dots, b\}}} z_j & \text{dans le cas 3} \end{cases} \\ &= \begin{cases} f_{\boldsymbol{\pi}^{\theta,r}} - 1 & \text{dans le cas 1} \\ f_{\boldsymbol{\pi}^{\theta,r}} & \text{dans le cas 3.} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi  $f_{\mathbf{a}} - f_{\boldsymbol{\pi}^{\theta,r}} - f_{\boldsymbol{\pi}^{\theta,1}} - z_{i_1} \varphi(\boldsymbol{\pi}^{\theta,1}, \boldsymbol{\pi}^{\theta,r})$  est égal à  $-1$  dans le cas 1 et à  $0$  dans le cas 3. Alors (2.3) devient

$$E_{\mathbf{i}}^{\boldsymbol{\pi}^{\theta,r}} E_{\mathbf{i}}^{\boldsymbol{\pi}^{\theta,1}} = v^{\varphi(\boldsymbol{\pi}^{\theta,1}, \boldsymbol{\pi}^{\theta,r})} E_{\mathbf{i}}^r E_{\mathbf{i}}^1 + \sum_{\mathbf{a}} (v - v^{-1})^{|\mathbf{a}|-1} E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{a}},$$

ce qui prouve la proposition pour  $t = 1$ .

Supposons maintenant que  $t > 1$ . Soit  $\mathbf{j} = (i_t, i_{t+1}, \dots, i_\nu, j_1, j_2, \dots, j_{t-1}) \in \mathcal{I}$  adapté au carquois  $\mathcal{Q}' = s_{i_{t-1}} \dots s_{i_2} s_{i_1}(\mathcal{Q})$  où les  $j_1, j_2, \dots, j_{t-1}$  sont définis par  $w_0(\alpha_{i_1}) = -\alpha_{j_1}$ ,  $w_0(\alpha_{i_2}) = -\alpha_{j_2}, \dots, w_0(\alpha_{i_{t-1}}) = -\alpha_{j_{t-1}}$ .

En appliquant le lemme 1.2.3 plusieurs fois, nous avons que  $[\mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{j},1)}, \mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{j},r-t+1)}] = [\mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i},t)}, \mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i},r)}]$  et  $[\mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{j},r-t+1)}, \mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{j},1)}]^1 = [\mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i},r)}, \mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i},t)}]^1$  (nous avons utilisé aussi la proposition 1.4.1). En appliquant la première partie de la preuve à  $\mathbf{j}$  et  $\mathcal{Q}'$  nous obtenons

$$\begin{aligned} & \tilde{T}_{i_t} \tilde{T}_{i_{t+1}} \dots \tilde{T}_{i_{r-1}}(E_{i_r}) E_{i_t} \\ &= E_{\mathbf{j}}^{\boldsymbol{\pi}^{\theta,r-t+1}} E_{\mathbf{j}}^{\boldsymbol{\pi}^{\theta,1}} \\ &= v^{\varphi(\boldsymbol{\pi}^{\theta,t}, \boldsymbol{\pi}^{\theta,r})} E_{i_t} \tilde{T}_{i_t} \tilde{T}_{i_{t+1}} \dots \tilde{T}_{i_{r-1}}(E_{i_r}) + \sum_{\mathbf{a}'} (v - v^{-1})^{|\mathbf{a}'|-1} E_{\mathbf{j}}^{\mathbf{a}'} \end{aligned}$$

où la somme est sur tous les  $\mathbf{a}'$  pour lesquels il existe une suite exacte non-scindée de modules de  $\mathcal{Q}'$  de la forme  $0 \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{j},1)} \rightarrow \mathbf{e}_{\mathbf{j}}(\mathbf{a}') \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{j},r-t+1)} \rightarrow 0$ .

Maintenant, nous appliquons l'automorphisme  $\tilde{T}_{i_1} \tilde{T}_{i_2} \dots \tilde{T}_{i_{t-1}}$  à cette équation et nous obtenons

$$E_{\mathbf{i}}^{\boldsymbol{\pi}^{\theta,r}} E_{\mathbf{i}}^{\boldsymbol{\pi}^{\theta,t}} = v^{\varphi(\boldsymbol{\pi}^{\theta,t}, \boldsymbol{\pi}^{\theta,r})} E_{\mathbf{i}}^{\boldsymbol{\pi}^{\theta,t}} E_{\mathbf{i}}^{\boldsymbol{\pi}^{\theta,r}} + \sum_{\mathbf{a}''} (v - v^{-1})^{|\mathbf{a}''|-1} E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{a}''}$$

où la somme est sur tous les  $\mathbf{a}''$  tels que

$$a_m'' = \begin{cases} 0 & \text{si } m < t \\ a'_{m-t+1} & \text{si } m \geq t \end{cases}$$

et  $\mathbf{a}'$  est comme ci-dessus. Ainsi, il ne reste qu'à montrer que  $\mathbf{a} = \mathbf{a}''$  dans les cas 1 et 3.

Dans le cas 3,  $\mathbf{a}'' = \boldsymbol{\pi}^{\theta,m'}$  avec  $\alpha(\mathbf{j}, m' - t + 1) = \alpha(\mathbf{j}, 1) + \alpha(\mathbf{j}, r - t + 1)$  et  $\mathbf{a} = \boldsymbol{\pi}^{\theta,m}$  avec  $\alpha(\mathbf{i}, m) = \alpha(\mathbf{i}, t) + \alpha(\mathbf{i}, r)$ . Mais

$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{i}, m') &= s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_{t-1}}(\alpha(\mathbf{j}, m' - t + 1)) \\ &= s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_{t-1}}(\alpha(\mathbf{j}, 1)) + s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_{t-1}}(\alpha(\mathbf{j}, r - t + 1)) \\ &= \alpha(\mathbf{i}, t) + \alpha(\mathbf{i}, r) = \alpha(\mathbf{i}, m) \end{aligned}$$

et alors  $m = m'$  et  $\mathbf{a} = \mathbf{a}''$ .

Dans le cas 1,  $\mathbf{a}'' = \boldsymbol{\pi}^{\emptyset, m'_1} + \boldsymbol{\pi}^{\emptyset, m'_2}$ ,  $\mathbf{a} = \boldsymbol{\pi}^{\emptyset, m_1} + \boldsymbol{\pi}^{\emptyset, m_2}$  et il existe des suites exactes non-scindées  $\Upsilon_{\mathbf{j}} : 0 \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{j}, 1)} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{j}, m'_1 - t + 1)} \oplus \mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{j}, m'_2 - t + 1)} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{j}, r - t + 1)} \rightarrow 0$  et  $\Upsilon_{\mathbf{i}} : 0 \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i}, t)} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i}, m_1)} \oplus \mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i}, m_2)} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i}, r)} \rightarrow 0$ . En appliquant le foncteur  $\Phi_{i_1}^- \Phi_{i_2}^- \cdots \Phi_{i_{h-1}}^-$  à la suite  $\Upsilon_{\mathbf{j}}$  et en utilisant un argument similaire à celui utilisé dans le lemme 1.2.3, nous obtenons une suite exacte non-scindée

$$0 \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i}, t)} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i}, m'_1)} \oplus \mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i}, m'_2)} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i}, r)} \rightarrow 0.$$

Par la proposition 1.4.1.4, ceci implique que  $\mathbf{a} = \mathbf{a}''$ .  $\square$

**Proposition 2.2.4** *Soient  $1 \leq t \leq r \leq \nu$  et  $l \geq 1$ . Alors*

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{i}}^{\boldsymbol{\pi}^{\emptyset, r}} E_{\mathbf{i}}^l \boldsymbol{\pi}^{\emptyset, t} &= v^{l\varphi(\boldsymbol{\pi}^{\emptyset, t}, \boldsymbol{\pi}^{\emptyset, r})} E_{\mathbf{i}}^l \boldsymbol{\pi}^{\emptyset, t} E_{\mathbf{i}}^{\boldsymbol{\pi}^{\emptyset, r}} \\ &\quad + \sum_{\mathbf{a}} (v^{l-1}(v-v^{-1}))^{|\mathbf{a}|-1} E_{\mathbf{i}}^{(l-1)\boldsymbol{\pi}^{\emptyset, t}} E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{a}} \end{aligned}$$

où la somme est sur tous les  $\mathbf{a} \in \mathbf{N}^{\nu}$  pour lesquels il existe une suite exacte non-scindée de la forme  $0 \rightarrow \mathbf{e}(\mathbf{i}, \alpha^t) \rightarrow \mathbf{e}(\mathbf{a}) \rightarrow \mathbf{e}(\mathbf{i}, \alpha^r) \rightarrow 0$ .

*Preuve.* Par récurrence sur  $l$ . Si  $l = 1$ , ceci est la proposition précédente. Supposons  $l > 1$ . Chaque somme  $\sum_{\mathbf{a}}$  dans cette preuve est sur tous les  $\mathbf{a} \in \mathbf{N}^{\nu}$  pour lesquels il y a une suite exacte non-scindée de la forme  $0 \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i}, t)} \rightarrow \mathbf{e}(\mathbf{a}) \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha(\mathbf{i}, r)} \rightarrow 0$ .

Nous avons  $E_{\mathbf{i}}^{\boldsymbol{\pi}^{\emptyset, r}} E_{\mathbf{i}}^l \boldsymbol{\pi}^{\emptyset, t} = \begin{bmatrix} l \\ 1 \end{bmatrix}^{-1} E_{\mathbf{i}}^{\boldsymbol{\pi}^{\emptyset, r}} E_{\mathbf{i}}^l \boldsymbol{\pi}^{\emptyset, t} E_{\mathbf{i}}^{(l-1)\boldsymbol{\pi}^{\emptyset, t}}$ . Par la proposition précédente, ceci est égal à

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} l \\ 1 \end{bmatrix}^{-1} v^{\varphi(\boldsymbol{\pi}^{\emptyset, t}, \boldsymbol{\pi}^{\emptyset, r})} E_{\mathbf{i}}^{\boldsymbol{\pi}^{\emptyset, t}} E_{\mathbf{i}}^{\boldsymbol{\pi}^{\emptyset, r}} E_{\mathbf{i}}^{(l-1)\boldsymbol{\pi}^{\emptyset, t}} \\ &\quad + \begin{bmatrix} l \\ 1 \end{bmatrix}^{-1} \sum_{\mathbf{a}} (v-v^{-1})^{|\mathbf{a}|-1} E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{a}} E_{\mathbf{i}}^{(l-1)\boldsymbol{\pi}^{\emptyset, t}}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Maintenant nous appliquons l'hypothèse de récurrence pour obtenir

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{i}}^{\boldsymbol{\pi}^{\emptyset, t}} E_{\mathbf{i}}^{\boldsymbol{\pi}^{\emptyset, r}} E_{\mathbf{i}}^{(l-1)\boldsymbol{\pi}^{\emptyset, t}} &= v^{(l-1)\varphi(\boldsymbol{\pi}^{\emptyset, t}, \boldsymbol{\pi}^{\emptyset, r})} E_{\mathbf{i}}^{\boldsymbol{\pi}^{\emptyset, t}} E_{\mathbf{i}}^{(l-1)\boldsymbol{\pi}^{\emptyset, t}} E_{\mathbf{i}}^{\boldsymbol{\pi}^{\emptyset, r}} \\ &\quad + \sum_{\mathbf{a}} (v^{l-2}(v-v^{-1}))^{|\mathbf{a}|-1} E_{\mathbf{i}}^{\boldsymbol{\pi}^{\emptyset, t}} E_{\mathbf{i}}^{(l-2)\boldsymbol{\pi}^{\emptyset, t}} E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{a}} \\ &= \begin{bmatrix} l \\ 1 \end{bmatrix} v^{(l-1)\varphi(\boldsymbol{\pi}^{\emptyset, t}, \boldsymbol{\pi}^{\emptyset, r})} E_{\mathbf{i}}^l \boldsymbol{\pi}^{\emptyset, t} E_{\mathbf{i}}^{\boldsymbol{\pi}^{\emptyset, r}} \\ &\quad + \begin{bmatrix} l-1 \\ 1 \end{bmatrix} \sum_{\mathbf{a}} (v^{l-2}(v-v^{-1}))^{|\mathbf{a}|-1} E_{\mathbf{i}}^{(l-1)\boldsymbol{\pi}^{\emptyset, t}} E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{a}}. \end{aligned}$$

Alors le premier terme de (2.4) est égal à

$$v^{l\varphi(\boldsymbol{\pi}^{\emptyset, t}, \boldsymbol{\pi}^{\emptyset, r})} E_{\mathbf{i}}^l \boldsymbol{\pi}^{\emptyset, t} E_{\mathbf{i}}^{\boldsymbol{\pi}^{\emptyset, r}} + \rho_1 \sum_{\mathbf{a}} (v^{l-1}(v-v^{-1}))^{|\mathbf{a}|-1} E_{\mathbf{i}}^{(l-1)\boldsymbol{\pi}^{\emptyset, t}} E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{a}}$$

avec  $\rho_1 = \begin{bmatrix} l \\ 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} l-1 \\ 1 \end{bmatrix} v^{\varphi(\boldsymbol{\pi}^{\theta,t}, \boldsymbol{\pi}^{\theta,r})} (v^{-1})^{|\mathbf{a}|-1}$ .

Pour calculer le produit  $E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{a}} E_{\mathbf{i}}^{(l-1)\boldsymbol{\pi}^{\theta,t}}$  dans le deuxième terme de (2.4), nous utilisons l'hypothèse de récurrence: notons que si  $a_s \neq 0$  alors  $\varphi(\boldsymbol{\pi}^{\theta,t}, \boldsymbol{\pi}^{\theta,s}) = 1$  et dans ce cas il n'y a pas de suite exacte non-scindée de la forme  $0 \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^t} \rightarrow \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^s} \rightarrow 0$ . Par récurrence, nous avons alors

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} l \\ 1 \end{bmatrix}^{-1} \sum_{\mathbf{a}} (v - v^{-1})^{|\mathbf{a}|-1} E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{a}} E_{\mathbf{i}}^{(l-1)\boldsymbol{\pi}^{\theta,t}} \\ &= \begin{bmatrix} l \\ 1 \end{bmatrix}^{-1} \sum_{\mathbf{a}} (v - v^{-1})^{|\mathbf{a}|-1} v^{|\mathbf{a}|(l-1)} E_{\mathbf{i}}^{(l-1)\boldsymbol{\pi}^{\theta,t}} E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{a}}. \end{aligned}$$

Ainsi (2.4) devient

$$v^{l\varphi(\boldsymbol{\pi}^{\theta,t}, \boldsymbol{\pi}^{\theta,r})} E_{\mathbf{i}}^l \boldsymbol{\pi}^{\theta,t} E_{\mathbf{i}}^{\boldsymbol{\pi}^{\theta,r}} + \rho \sum_{\mathbf{a}} (v^{l-1}(v - v^{-1}))^{|\mathbf{a}|-1} E_{\mathbf{i}}^{(l-1)\boldsymbol{\pi}^{\theta,t}} E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{a}}$$

avec

$$\rho = \rho_1 + \begin{bmatrix} l \\ 1 \end{bmatrix}^{-1} v^{(l-1)}.$$

Afin de compléter la preuve, nous montrons que  $\rho = 1$ . Noter que  $\varphi(\boldsymbol{\pi}^{\theta,t}, \boldsymbol{\pi}^{\theta,r}) = |\mathbf{a}| - 2$  et ainsi

$$\begin{aligned} \rho &= \begin{bmatrix} l \\ 1 \end{bmatrix}^{-1} \left( \frac{v^{l-1} - v^{-l+1}}{v - v^{-1}} v^{-1} + \frac{v^l - v^{(l-2)}}{v - v^{-1}} \right) \\ &= \begin{bmatrix} l \\ 1 \end{bmatrix}^{-1} \frac{v^l - v^{-l}}{v - v^{-1}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

## CHAPITRE III

### LE CALCUL DES POLYNÔMES $\Omega_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}}$

Dans la section 2.1, nous exprimons le produit d'un vecteur de racine avec un élément de la base  $B_{\mathbf{i}}$  de type PBW en terme de la base  $B_{\mathbf{j}}$ . Nous utilisons cette description dans la section 2.2 pour donner une formule récursive pour les polynômes  $\Omega_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}}$ .

#### 3.1 Multiplication par un vecteur de racine

Soit  $\mathcal{Q}$  un carquois de type  $A_n$  et  $\mathbf{i} \in \mathcal{I}$  adapté à  $\mathcal{Q}$ . Nous écrivons  $\alpha^t$  au lieu de  $\alpha(\mathbf{i}, t)$  ( $t = 1, 2, \dots, \nu$ ). Soit  $\mathbf{c}' \in \mathbf{N}$  de  $\mathbf{i}$ -homogénéité  $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_n)$  et soit  $E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{c}'}$  l'élément de la base  $B_{\mathbf{i}}$  correspondant. Notons  $\boldsymbol{\pi}^{\theta, r} \in \mathbf{N}^{\nu}$  le vecteur valant 1 à la  $r$ -ième position et 0 ailleurs. Avec cette notation, le vecteur de racine  $\tilde{T}_{i_1} \tilde{T}_{i_2} \cdots \tilde{T}_{i_{r-1}}(E_{i_r})$  est  $E_{\mathbf{i}}^{\boldsymbol{\pi}^{\theta, r}}$  et  $E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{c}'} = E_{\mathbf{i}}^{c'_1 \boldsymbol{\pi}^{\theta, 1}} E_{\mathbf{i}}^{c'_2 \boldsymbol{\pi}^{\theta, 2}} \cdots E_{\mathbf{i}}^{c'_r \boldsymbol{\pi}^{\theta, r}} \cdots E_{\mathbf{i}}^{c'_\nu \boldsymbol{\pi}^{\theta, \nu}}$ . Comme dans la section 1.5,  $\Lambda(r, \mathbf{c}')$  est l'ensemble des  $\alpha^r$ -partages  $\lambda$  tel que  $\mathbf{c} + \boldsymbol{\pi}^{\lambda} \in \mathbf{N}^{\nu}$ .

##### Théorème 3.1.1

$$E_{\mathbf{i}}^{\boldsymbol{\pi}^{\theta, r}} E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{c}'} = \sum_{\lambda \in \Lambda(r, \mathbf{c}')} P(\lambda, \mathbf{c}' + \boldsymbol{\pi}^{\lambda}) E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{c}' + \boldsymbol{\pi}^{\lambda}}$$

où

$$P(\lambda, \mathbf{b}) = (1 - v^{-2})^{-1} \left( \prod_{t \in \boldsymbol{\pi}^{\lambda}_+} (1 - v^{-2b_t}) \right) v^{\varphi(\mathbf{b} - \boldsymbol{\pi}^{\lambda}, \boldsymbol{\pi}^{\lambda})}$$

pour tout  $\mathbf{b} \in \mathbf{N}^{\nu}$  et  $\lambda \in \Lambda(r, \mathbf{c}')$ .

*Preuve.* Montrons d'abord que ce résultat ne dépend pas du choix de  $\mathbf{i}$ . En effet, soient  $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathcal{I}$  adaptés à  $\mathcal{Q}$ ,  $r \in \{1, \dots, \nu\}$  et  $\mathbf{c} \in \mathbf{N}^{\nu}$ . Supposons que le théorème soit vrai pour  $\mathbf{i}$ . Pour chaque  $t \in \{1, \dots, \nu\}$ , définissons  $t'$  par  $\alpha(\mathbf{i}, t) = \alpha(\mathbf{j}, t')$  et  $\mathbf{c}' \in \mathbf{N}^{\nu}$  par  $c'_t = c_t$  pour tout  $t$ . Or,  $\mathbf{j}$  est obtenu de  $\mathbf{i}$  en effectuant une série d'opérations dont chacune consiste en remplaçant deux entrées consécutives  $h, k$

dans  $\mathbf{i}$ , avec  $|h - k| > 2$ , par  $k, h$ . Par conséquent,  $E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{c}} = E_{\mathbf{j}}^{\mathbf{c}'}$ ,  $\Lambda_{\mathbf{i}}(r, \mathbf{c}) = \Lambda_{\mathbf{j}}(r', \mathbf{c}')$  et

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{j}}^{\pi^{0,r'}} E_{\mathbf{j}}^{\mathbf{c}'} &= E_{\mathbf{i}}^{\pi^{0,r}} E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{c}} = \sum_{\lambda \in \Lambda_{\mathbf{i}}(r, \mathbf{c})} P(\lambda, \mathbf{c} + \pi^\lambda) E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{c} + \pi^\lambda} \\ &= \sum_{\lambda \in \Lambda_{\mathbf{j}}(r', \mathbf{c}')} P(\lambda, \mathbf{c}' + \pi^\lambda) E_{\mathbf{j}}^{\mathbf{c}' + \pi^\lambda}. \end{aligned}$$

Ainsi, nous pouvons supposer sans perte de généralité que  $\mathbf{i}$  est tel que l'ordre induit sur  $R^+$  est le suivant: pour deux racines positives  $\alpha^s, \alpha^t$ , disons  $\Theta(\alpha^s) = (s_1, s_2)$  et  $\Theta(\alpha^t) = (t_1, t_2)$  où  $\Theta$  est le plongement de  $\Gamma_{\mathcal{Q}}$  dans  $\mathbf{Z}\Delta$  de la section 1.4. Alors  $\alpha^s \leq \alpha^t \Leftrightarrow (s_1 + s_2 < t_1 + t_2)$  ou  $(s_1 + s_2 = t_1 + t_2 \text{ et } s_1 < t_1)$ . Un tel  $\mathbf{i}$  existe, nous pouvons le définir par la méthode suivante: Soit  $\mathcal{Q}_1^0 = \{h \in \mathcal{Q}^0 \mid h \leftarrow h + 1\} \cup \{n\}$  et  $\mathcal{Q}_2^0 = \{k \in \mathcal{Q}^0 \mid k \rightarrow k + 1\}$ . Disons que  $\mathcal{Q}_1^0 = \{h_1 < h_2 < \dots < h_{p-1} < h_p = n\}$ ,  $\mathcal{Q}_2^0 = \{k_1 < k_2 < \dots < k_q\}$ . Alors

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= (h_1, h_1 - 1, \dots, 2, 1, h_2, h_2 - 1, \dots, 2, 1, \dots, h_{p-1}, h_{p-1} - 1, \dots \\ &\quad \dots, 2, 1, n, n - 1, \dots, 2, 1, n, n - 1, \dots, n - k_q + 1, n, n - 1, \dots \\ &\quad \dots, n - k_{q-1} + 1, \dots, n, n - 1, \dots, n - k_1 + 1). \end{aligned}$$

Ceci fonctionne parce que le carquois d'Auslander-Reiten a  $n$  diagonales descendantes  $\dot{D}_1, \dots, \dot{D}_n$  telles qu'il y a  $l$  sommets sur  $\dot{D}_l$ , ( $l = 1, \dots, n$ ) et  $\dot{D}_l$  est à la gauche de  $\dot{D}_{l+1}$  si et seulement si  $l \leftarrow l + 1 \in \mathcal{Q}^1$ .

Une autre façon de définir  $\mathbf{i}$  est la suivante: Dessiner le carquois d'Auslander-Reiten, étiqueter les sommets  $\alpha^1 < \alpha^2 < \dots < \alpha^\nu$  en suivant l'ordre défini précédemment et définir  $h_t$  par  $\Theta(\alpha^t) = (z_t, h_t)$ , ( $t = 1, \dots, \nu$ ) et  $\mathbf{i} = (h_1, h_2, \dots, h_\nu)$ .

Nous procédons par récurrence sur  $r$ . Si  $r = 1$  alors  $E_{\mathbf{i}}^{\pi^{0,1}} E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{c}'} = \begin{bmatrix} c'_1 + 1 \\ 1 \end{bmatrix} E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{c}' + \pi^{0,1}}$ . Comme  $\mathbf{e}_{\alpha_1}$  est projectif, nous avons  $\Lambda(r, \mathbf{c}') = \{\emptyset\}$ ,  $\pi^\emptyset = \pi^{0,1}$ ,  $\varphi(\mathbf{c}', \pi^{0,1}) = c'_1$  et

$$\begin{aligned} P(\emptyset, \mathbf{c}' + \pi^{0,1}) &= (1 - v^{-2})^{-1} (1 - v^{-2(c'_1 + 1)}) v^{c'_1} \\ &= \begin{bmatrix} c'_1 + 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Donc le théorème est vrai pour  $r = 1$ .

Supposons  $r > 1$ . Alors

$$E_{\mathbf{i}}^{\pi^{0,r}} E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{c}'} = E_{\mathbf{i}}^{\pi^{0,r}} E_{\mathbf{i}}^{c'_1 \pi^{0,1}} E_{\mathbf{i}}^{c'_2 \pi^{0,2}} \dots E_{\mathbf{i}}^{c'_r \pi^{0,r}} \dots E_{\mathbf{i}}^{c'_\nu \pi^{0,\nu}}$$

Pour écrire ceci dans la base  $(E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{c}'})$  il faut emmener le premier terme  $E_{\mathbf{i}}^{\pi^{0,r}}$  à la  $r$ -ième position, c.-à.-d. il faut appliquer  $(r-1)$  fois les règles de commutation pour les vecteurs de racine (proposition 2.2.4). Chaque commutation de  $E_{\mathbf{i}}^{\pi^{0,r}} E_{\mathbf{i}}^{c'_s \pi^{0,s}}$

avec  $[\mathbf{e}_{\alpha^r}, \mathbf{e}_{\alpha^s}]^1 = 1$  ajoute un nouveau terme à la somme. Dans ces nouveaux termes, il y a possiblement des vecteurs de racine  $E_i^{\pi^{0,t}}$  qui ne sont pas à la bonne position mais l'indice  $t$  du vecteur de racine est plus petit que  $r$  et par récurrence nous pouvons appliquer le théorème à ces termes.

Pour  $1 \leq s \leq t \leq \nu$  posons  $\mathbf{c}'[s, t] = (0, \dots, 0, c'_s, \dots, c'_t, 0, \dots, 0)$ . Alors un calcul élémentaire nous donne

$$\begin{aligned}
& E_i^{\pi^{0,r}} E_i^{\mathbf{c}'} \\
&= E_i^{\pi^{0,r}} E_i^{\mathbf{c}'[1,1]} E_i^{\mathbf{c}'[2,\nu]} \\
&= v^{\varphi(\mathbf{c}'[1,1], \pi^{0,r})} E_i^{\mathbf{c}'[1,1]} E_i^{\pi^{0,r}} E_i^{\mathbf{c}'[2,\nu]} \\
&\quad + \sum_{\mathbf{a}^1} (v^{c'_1-1} (v - v^{-1}))^{|\mathbf{a}^1|-1} E_i^{\mathbf{c}'[1,1]-\pi^{0,1}} E_i^{\mathbf{a}^1} E_i^{\mathbf{c}'[2,\nu]} \\
&= v^{\varphi(\mathbf{c}'[1,2], \pi^{0,r})} E_i^{\mathbf{c}'[1,2]} E_i^{\pi^{0,r}} E_i^{\mathbf{c}'[3,\nu]} \\
&\quad + v^{\varphi(\mathbf{c}'[1,1], \pi^{0,r})} \sum_{\mathbf{a}^2} (v^{c'_2-1} (v - v^{-1}))^{|\mathbf{a}^2|-1} E_i^{\mathbf{c}'[1,2]-\pi^{0,2}} E_i^{\mathbf{a}^2} E_i^{\mathbf{c}'[3,\nu]} \\
&\quad + \sum_{\mathbf{a}^1} (v^{c'_1-1} (v - v^{-1}))^{|\mathbf{a}^1|-1} E_i^{\mathbf{c}'[1,1]-\pi^{0,1}} E_i^{\mathbf{a}^1} E_i^{\mathbf{c}'[2,\nu]} \\
&= v^{\varphi(\mathbf{c}'[1,r-1], \pi^{0,r})} E_i^{\mathbf{c}'[1,r-1]} E_i^{\pi^{0,r}} E_i^{\mathbf{c}'[r,\nu]} \\
&\quad + v^{\varphi(\mathbf{c}'[1,r-2], \pi^{0,r})} \\
&\quad\quad \sum_{\mathbf{a}^{r-1}} (v^{c'_{r-1}-1} (v - v^{-1}))^{|\mathbf{a}^{r-1}|-1} E_i^{\mathbf{c}'[1,r-1]-\pi^{0,r-1}} E_i^{\mathbf{a}^{r-1}} E_i^{\mathbf{c}'[r,\nu]} \\
&\quad \vdots \\
&\quad + \sum_{\mathbf{a}^1} (v^{c'_1-1} (v - v^{-1}))^{|\mathbf{a}^1|-1} E_i^{\mathbf{c}'[1,1]-\pi^{0,1}} E_i^{\mathbf{a}^1} E_i^{\mathbf{c}'[2,\nu]} \\
&= \begin{bmatrix} c'_r+1 \\ 1 \end{bmatrix} v^{\varphi(\mathbf{c}'[1,r-1], \pi^{0,r})} E_i^{\mathbf{c}'+\pi^{0,r}} \\
&\quad + \sum_{t=1}^{r-1} v^{\varphi(\mathbf{c}'[1,t-1], \pi^{0,r})} \sum_{\mathbf{a}^t} (v^{c'_t-1} (v - v^{-1}))^{|\mathbf{a}^t|-1} E_i^{\mathbf{c}'[1,t]-\pi^{0,t}} E_i^{\mathbf{a}^t} E_i^{\mathbf{c}'[t+1,\nu]} \\
&= P(\emptyset, \mathbf{c}' + \pi^{0,r}) E_i^{\mathbf{c}'+\pi^{0,r}} \tag{3.1} \\
&\quad + \sum_{t=1}^{r-1} v^{\varphi(\mathbf{c}'[1,t-1], \pi^{0,r})} E_i^{\mathbf{c}'[1,t]-\pi^{0,t}} \sum_{\mathbf{a}^t} (v^{c'_t-1} (v - v^{-1}))^{|\mathbf{a}^t|-1} E_i^{\mathbf{a}^t} E_i^{\mathbf{c}'[t+1,\nu]}
\end{aligned}$$

où  $\mathbf{a}^t$  est tel qu'il existe une suite exacte non-scindée de la forme

$$0 \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^t} \rightarrow \mathbf{e}(\mathbf{a}^t) \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^r} \rightarrow 0.$$

Noter qu'un tel  $\mathbf{a}^t$  existe si et seulement si  $[\mathbf{e}_{\alpha^r}, \mathbf{e}_{\alpha^t}]^1 = 1$ , qu'il existe  $t'$  tel que  $t < t' < r$ ,  $\mathbf{a}^t = \pi^{0,t'}$  et  $|\mathbf{a}^t| = 1$  si  $([\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}_{\alpha^r}], [\mathbf{e}_{\alpha^r}, \mathbf{e}_{\alpha^t}]^1) = (0, 1)$  et

qu'il existe  $t', t''$  tels que  $t < t'' < t' < r$ ,  $\mathbf{a}^t = \pi^{\emptyset, t''} + \pi^{\emptyset, t'}$  et  $|\mathbf{a}^t| = 2$  si  $([\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}_{\alpha^r}], [\mathbf{e}_{\alpha^r}, \mathbf{e}_{\alpha^t}]^1) = (1, 1)$ . En utilisant la proposition 2.2.4 et la proposition 1.4.1.4, nous obtenons dans le cas  $|\mathbf{a}^t| = 2$

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{a}^t} E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{c}'[t+1, \nu]} &= E_{\mathbf{i}}^{\pi^{\emptyset, t'}} E_{\mathbf{i}}^{\pi^{\emptyset, t''}} E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{c}'[t+1, \nu]} \\ &= v^{[\mathbf{e}(\mathbf{c}'[t+1, t''-1]), \mathbf{e}_{\alpha^r}]} \begin{bmatrix} c'_{t''}+1 \\ 1 \end{bmatrix} E_{\mathbf{i}}^{\pi^{\emptyset, t'}} E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{c}'[t+1, \nu] + \pi^{\emptyset, t''}} \end{aligned}$$

car, à cause de notre choix de  $\mathbf{i}$ , nous avons que pour tout  $t < s < t''$ ,  $s$  est situé sur la diagonale entre  $t$  et  $t''$  dans le carquois d'Auslander-Reiten et conséquemment  $[\mathbf{e}_{\alpha^s}, \mathbf{e}_{\alpha^r}] = [\mathbf{e}_{\alpha^s}, \mathbf{e}_{\alpha^{t''}}] = 1$  et  $[\mathbf{e}_{\alpha^{t''}}, \mathbf{e}_{\alpha^s}]^1 = 0$ .

Posons

$$\mathbf{c}'' \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} \mathbf{c}'[t+1, \nu] & \text{si } |\mathbf{a}^t| = 1 \\ \mathbf{c}'[t+1, \nu] + \pi^{\emptyset, t''} & \text{si } |\mathbf{a}^t| = 2 \end{cases} .$$

Noter que  $\mathbf{c}''$  dépend de  $t$ . Avec cette notation, nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence dans les deux cas simultanément et la somme dans (3.1) devient

$$\sum_{t=1}^{r-1} \sum_{\mathbf{a}^t} v^{\varphi(\mathbf{c}'[1, t-1], \pi^{\emptyset, r})} E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{c}'[1, t] - \pi^{\emptyset, t}} (\rho_1(v))^{|\mathbf{a}^t|-1} \sum_{\lambda \in \Lambda(t', \mathbf{c}'')} P(\lambda, \mathbf{c}'' + \pi^\lambda) E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{c}'' + \pi^\lambda}$$

avec  $\rho_1(v) = v^{c'_t-1} (v^{c'_{t''}+1} - v^{-c'_{t''}-1}) v^{[\mathbf{e}(\mathbf{c}'[t+1, t''-1]), \mathbf{e}_{\alpha^r}]}$ .

Soit  $t$  tel que  $c'_t \geq 1$ ,  $[\mathbf{e}_{\alpha^r}, \mathbf{e}_{\alpha^t}]^1 = 1$  et soit  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l) \in \Lambda(t', \mathbf{c}'')$ . Soit  $\Theta(\alpha^r) = (x, i)$  la position de  $\alpha^r$  dans le carquois d'Auslander-Reiten et  $\Theta(\alpha^t) = (y, h)$  celle de  $\alpha^t$ . Définissons

$$\lambda(t) = \underbrace{(x-y, x-y, \dots, x-y)}_{x+i-y-h \text{ termes}}$$

Alors  $\lambda(t)$  est un  $\alpha^r$ -partage et  $\pi_-^{\lambda(t)} = \{t\}$ ,  $\pi_+^{\lambda(t)} = \{t'\}$  si  $|\mathbf{a}^t| = 1$  et  $\pi_+^{\lambda(t)} = \{t'', t'\}$  si  $|\mathbf{a}^t| = 2$ .

Nous allons "coller"  $\lambda(t)$  et  $\lambda$  pour obtenir un nouveau  $\alpha^r$ -partage  $\lambda(t) + \lambda \in \Lambda(r, \mathbf{c}')$ . Par la proposition 1.4.1, il y a deux possibilités pour la position de  $\alpha^t$  dans le carquois d'Auslander-Reiten:

1.  $\Theta(\alpha^{t'}) = (y, x+i-y)$
2.  $\Theta(\alpha^{t'}) = (x, y+h-x)$ .

Comme  $\lambda \in \Lambda(t', \mathbf{c}'')$ , il faut que  $\pi_s^\lambda \geq 0$  pour tout  $s \leq t$ , donc  $\pi_s^\lambda = 0$  pour tout  $s \leq t$  (par le lemme 1.5.3). Alors dans le cas 1., il existe  $s'$  tel que  $\pi_{s'}^\lambda = 1$ ,  $\Theta(\alpha^{s'}) = (y, k)$ ,  $h < k < x+i-y$  et  $l = x+i-y-k < x+i-y-h$ . Donc

$$\lambda(t) + \lambda \stackrel{\text{déf}}{=} \underbrace{(x-y+\lambda_1, x-y+\lambda_2, \dots, x-y+\lambda_l, x-y, \dots, x-y)}_{x+i-y-h \text{ termes}}$$



est un  $\alpha^r$ -partage et  $\pi^{\lambda(t)+\lambda} = \pi^\lambda + \pi^{\lambda(t)} - \pi^{\emptyset, t'}$ .

Dans le cas 2., il existe  $s'$  tel que  $\pi_{s'}^\lambda = 1$ ,  $\Theta(\alpha^{s'}) = (y+k, h-k)$ ,  $1 \leq k < x-y$  et  $\lambda_1 = x-y-k < x-y$ . Donc

$$\lambda(t) + \lambda \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{(x-y, x-y, \dots, x-y)}_{x+i-y-h \text{ termes}}, \lambda_1, \dots, \lambda_l$$

est un  $\alpha^r$ -partage et  $\pi^{\lambda(t)+\lambda} = \pi^\lambda + \pi^{\lambda(t)} - \pi^{\emptyset, t'}$ .

Enfin, dans les deux cas, nous avons  $\pi^{\lambda(t)+\lambda} = \pi^\lambda \cup \{t\}$  et comme  $c'_t \geq 1$  et  $\mathbf{c}'' + \pi^\lambda \in \mathbf{N}^\nu$ , ceci implique que  $\mathbf{c}' + \pi^{\lambda(t)+\lambda} \in \mathbf{N}^\nu$ , d'où  $\lambda(t) + \lambda \in \Lambda(r, \mathbf{c}')$ .

Nous montrons maintenant que pour tout  $\lambda \in \Lambda(t', \mathbf{c}'')$

$$P(\lambda + \lambda(t), \mathbf{c}' + \pi^{\lambda+\lambda(t)}) = P(\lambda, \mathbf{c}'' + \pi^\lambda) v^{\varphi(\mathbf{c}'[1, t-1], \pi^{\emptyset, r})} (\rho_1(v))^{[\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}_{\alpha^r}]}$$

En effet,

$$\begin{aligned} P(\lambda, \mathbf{c}'' + \pi^\lambda) &= (1-v^{-2})^{-1} v^{\varphi(\mathbf{c}'', \pi^\lambda)} \prod_{s \in \pi_+^\lambda} (1-v^{-2(c'_s+1)}) \\ &= (1-v^{-2})^{-1} v^{\varphi(\mathbf{c}'', \pi^\lambda)} \left( \prod_{s \in \pi_+^{\lambda(t)+\lambda}} (1-v^{-2(c'_s+1)}) \right) (1-v^{-2(c'_{t''}+1)})^{-[\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}_{\alpha^r}]} \\ &= P(\lambda + \lambda(t), \mathbf{c}' + \pi^{\lambda(t)+\lambda}) v^{\varphi(\mathbf{c}'', \pi^\lambda) - \varphi(\mathbf{c}', \pi^{\lambda(t)+\lambda})} (1-v^{-2(c'_{t''}+1)})^{-[\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}_{\alpha^r}]}. \end{aligned}$$

Mais  $\rho_1(v) = v^{c'_t-1} (v^{c'_{t''}+1} - v^{-c'_{t''}-1}) v^{[\mathbf{e}(\mathbf{c}'[t+1, t''-1]), \mathbf{e}_{\alpha^r}]}$ . et alors il suffit de montrer que le terme suivant

$$\begin{aligned} &\varphi(\mathbf{c}'', \pi^\lambda) - \varphi(\mathbf{c}', \pi^{\lambda(t)+\lambda}) + \varphi(\mathbf{c}'[1, t-1], \pi^{\emptyset, r}) \\ &+ ([\mathbf{e}(\mathbf{c}'[t+1, t''-1]), \mathbf{e}_{\alpha^r}] + c'_t + c'_{t''}) [\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}_{\alpha^r}] \end{aligned} \quad (3.2)$$

est nul. Or

$$\varphi(\mathbf{c}'', \pi^\lambda) = \varphi(\mathbf{c}'[t+1, \nu], \pi^\lambda)$$

car si  $|\mathbf{a}^t| = 2$  alors  $\Theta(\alpha^{t'}) = (y, x+i-y)$  et  $\Theta(\alpha^{t''}) = (x, y+h-x)$ , et par conséquent  $[\mathbf{e}(\pi^{\emptyset, t''}), \mathbf{e}(\pi^\lambda)] = [\mathbf{e}(\pi^\lambda), \mathbf{e}(\pi^{\emptyset, t''})]^1 = 0$ ; d'autre part

$$\begin{aligned} &-\varphi(\mathbf{c}', \pi^{\lambda+\lambda(t)}) \\ &= -\varphi(\mathbf{c}', \pi^\lambda) + \varphi(\mathbf{c}', \pi^{\emptyset, t}) - \varphi(\mathbf{c}', \pi^{\emptyset, t''}) [\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}_{\alpha^r}] \\ &= -\varphi(\mathbf{c}'[1, t-1], \pi^\lambda) - c'_t - \varphi(\mathbf{c}'[t+1, \nu], \pi^\lambda) \\ &+ \varphi(\mathbf{c}'[1, t-1], \pi^{\emptyset, t}) + c'_t \\ &- \left( \varphi(\mathbf{c}'[1, t-1], \pi^{\emptyset, t''}) + [\mathbf{e}(\mathbf{c}'[t, t'']), \mathbf{e}_{\alpha^r}] \right) [\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}_{\alpha^r}]. \end{aligned}$$

Donc (3.2) est égal à

$$\begin{aligned}
& -\varphi(\mathbf{c}'[1, t-1], \boldsymbol{\pi}^\lambda) + \varphi(\mathbf{c}'[1, t-1], \boldsymbol{\pi}^{\theta, t}) \\
& -\varphi(\mathbf{c}'[1, t-1], \boldsymbol{\pi}^{\theta, t''})[\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}_{\alpha^r}] + \varphi(\mathbf{c}'[1, t-1], \boldsymbol{\pi}^{\theta, r}) \\
& = -\varphi(\mathbf{c}'[1, t-1], \boldsymbol{\pi}^{\lambda(t)+\lambda}) + \varphi(\mathbf{c}'[1, t-1], \boldsymbol{\pi}^{\theta, r}) \\
& = -[\mathbf{e}(\mathbf{c}'[1, t-1]), \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\lambda(t)+\lambda})] + [\mathbf{e}(\mathbf{c}'[1, t-1]), \mathbf{e}_{\alpha^r}] \\
& \quad + [\mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\lambda(t)+\lambda}), \mathbf{e}(\mathbf{c}'[1, t-1])]^1 - [\mathbf{e}_{\alpha^r}, \mathbf{e}(\mathbf{c}'[1, t-1])]^1.
\end{aligned}$$

Par le lemme 1.5.5 ceci est égal à

$$\begin{aligned}
& -[\mathbf{e}(\mathbf{c}'[1, t-1]), \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\lambda(t)+\lambda})]^1 + [\mathbf{e}(\mathbf{c}'[1, t-1]), \mathbf{e}_{\alpha^r}]^1 \\
& \quad + [\mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\lambda(t)+\lambda}), \mathbf{e}(\mathbf{c}'[1, t-1])] - [\mathbf{e}_{\alpha^r}, \mathbf{e}(\mathbf{c}'[1, t-1])]
\end{aligned}$$

et ici chaque terme est nul parce que  $t-1$  est strictement plus petit que  $r$  et strictement plus petit que chaque  $s$  tel que  $\pi_s^{\lambda(t)+\lambda} \neq 0$ .

Ainsi (3.1) est égal à

$$\begin{aligned}
& P(\emptyset, \mathbf{c}' + \boldsymbol{\pi}^{\theta, r}) E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{c}' + \boldsymbol{\pi}^{\theta, r}} \\
& \quad + \sum_{t=1}^{r-1} \sum_{\lambda \in \Lambda(t, \mathbf{c}'')} P(\lambda(t) + \lambda, \mathbf{c}' + \boldsymbol{\pi}^{\lambda(t)+\lambda}) E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{c}' + \boldsymbol{\pi}^{\lambda(t)+\lambda}}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Donc  $E_{\mathbf{i}}^{\boldsymbol{\pi}^{\theta, r}} E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{c}'}$  est égal à une somme dont chaque terme est de la forme  $P(\lambda, \mathbf{c}' + \boldsymbol{\pi}^\lambda) E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{c}' + \boldsymbol{\pi}^\lambda}$  avec un  $\lambda \in \Lambda(r, \mathbf{c}')$ . Pour montrer le théorème, il ne reste plus qu'à voir que chaque  $\lambda \in \Lambda(r, \mathbf{c}')$  apparaît exactement une fois dans cette somme. Pour cela, soit  $\lambda \in \Lambda(r, \mathbf{c}')$  quelconque.  $\lambda$  apparaît dans le premier terme de (3.3) si et seulement si  $\lambda = \emptyset$ . D'autre part si  $\lambda \neq \emptyset$ , soit  $\alpha^t$  la plus petite racine (selon l'ordre  $\leq$  induit par  $\mathbf{i}$ ) telle que  $\pi_t^\lambda = -1$ . Noter que  $[\mathbf{e}_{\alpha^r}, \mathbf{e}_{\alpha^t}]^1 = 1$  et il existe une suite exacte non-scindée  $0 \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^t} \rightarrow \mathbf{e}(\mathbf{a}^t) \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^r} \rightarrow 0$ . Soit  $t'$  le plus grand entier tel que  $a_{t'}^t = 1$ , alors il existe exactement un  $\tilde{\lambda} \in \Lambda(t', \mathbf{c}'')$  tel que  $\lambda = \lambda(t) + \tilde{\lambda}$ .  $\square$

### 3.2 Formule récursive pour $\Omega_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}}$ dans le cas $A_n$

Dans cette section, nous utilisons la multiplication par des vecteurs de racine afin d'obtenir une formule récursive pour les polynômes  $\Omega_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}}$ .

Soit  $\mathcal{Q}$  un carquois de type  $A_n$  et soit  $\mathbf{i}$  adapté à  $\mathcal{Q}$ . Soit  $\mathbf{a} \in \mathbf{N}^\nu$ . Nous avons vu dans la proposition 1.3.1 que l'image  $\overline{E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{a}}}$  d'un élément  $E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{a}}$  de la base  $B_{\mathbf{i}}$  sous l'involution  $\overline{(\ )}$  s'exprime dans la base  $B_{\mathbf{i}}$  comme suit:

$$\overline{E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{a}}} = \sum_{\mathbf{c} \leq \mathbf{a}} \omega_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}} E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{c}} \tag{3.4}$$

On peut calculer  $\overline{E_i^{\mathbf{a}}}$  aussi de la façon suivante: soit  $j \geq 1$  le plus petit entier tel que  $a_j \neq 0$ , alors

$$\begin{aligned} \overline{E_i^{\mathbf{a}}} &= \overline{E_i^{(0, \dots, 0, a_j, a_{j+1}, \dots, a_\nu)}} \\ &= \begin{bmatrix} a_j \\ 1 \end{bmatrix}^{-1} \overline{E_i^{\pi^{0,j}} E_i^{(0, \dots, 0, a_j-1, a_{j+1}, \dots, a_\nu)}} \\ &= \begin{bmatrix} a_j \\ 1 \end{bmatrix}^{-1} \overline{E_i^{\pi^{0,j}} E_i^{(0, \dots, 0, a_j-1, a_{j+1}, \dots, a_\nu)}} \end{aligned}$$

et par la proposition 2.1.2

$$\overline{E_i^{\pi^{0,j}}} = \sum_J (v^{-1} - v)^{|J|} E_i^{\mathbf{c}(J)}$$

où la somme est sur tous les sous-ensembles  $J$  de l'ensemble des arêtes dans  $\text{Supp}(\alpha^j)$  et  $\mathbf{c}(J) = (c_1'', \dots, c_\nu'')$  avec  $c_m'' = 1$  si  $\text{Supp}(\alpha^m)$  est une composante connexe de  $\text{Supp}(\alpha^j) \setminus J$  et  $c_m'' = 0$  sinon. Soit  $\{r_1 < r_2 < \dots < r_{|J|+1}\}$  l'ensemble des positions où  $\mathbf{c}(J)$  ne s'annule pas.

En utilisant ce résultat nous obtenons

$$\overline{E_i^{\mathbf{a}}} = \begin{bmatrix} a_j \\ 1 \end{bmatrix}^{-1} \sum_J (v^{-1} - v)^{|J|} E_i^{\mathbf{c}(J)} \overline{E_i^{(0, \dots, 0, a_j-1, a_{j+1}, \dots, a_\nu)}}.$$

Posons maintenant  $\mathbf{a}' = (0, \dots, 0, a_j - 1, a_{j+1}, \dots, a_\nu)$  et appliquons (3.4) aux deux côtés. Alors

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{c} \leq \mathbf{a}} \omega_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}} E_i^{\mathbf{c}} &= \begin{bmatrix} a_j \\ 1 \end{bmatrix}^{-1} \sum_J (v^{-1} - v)^{|J|} E_i^{\mathbf{c}(J)} \sum_{\mathbf{c}' \leq \mathbf{a}'} \omega_{\mathbf{c}'}^{\mathbf{a}'} E_i^{\mathbf{c}'} \\ &= \begin{bmatrix} a_j \\ 1 \end{bmatrix}^{-1} \sum_J \sum_{\mathbf{c}' \leq \mathbf{a}'} (v^{-1} - v)^{|J|} \omega_{\mathbf{c}'}^{\mathbf{a}'} E_i^{\mathbf{c}(J)} E_i^{\mathbf{c}'} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Du côté gauche de l'équation (3.5), chaque  $E_i^{\mathbf{c}}$  n'apparaît qu'une fois tandis que du côté droit, les  $E_i^{\mathbf{c}}$  sont cachés dans les produits  $E_i^{\mathbf{c}(J)} E_i^{\mathbf{c}'}$  et peuvent donc apparaître plusieurs fois. Mais une fois les  $E_i^{\mathbf{c}(J)} E_i^{\mathbf{c}'}$  calculés, nous pourrions regrouper les termes, mettre les  $E_i^{\mathbf{c}}$  en évidence et récrire le côté droit comme une somme sur  $\mathbf{c} \leq \mathbf{a}$ . Dans cette somme, le coefficient devant chaque  $E_i^{\mathbf{c}}$  sera de la forme  $\sum_{\mathbf{c}'} (\text{polynôme en } v, v^{-1}) \omega_{\mathbf{c}'}^{\mathbf{a}'}$ . Donc ceci nous donnera une formule pour  $\omega_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}}$  en fonction des  $\omega_{\mathbf{c}'}^{\mathbf{a}'}$ . Nous calculons  $E_i^{\mathbf{c}(J)} E_i^{\mathbf{c}'}$  en appliquant  $|J| + 1$  fois le théorème 3.1.1 (posons  $m \stackrel{\text{déf}}{=} |J| + 1$ ):

$$E_i^{\mathbf{c}(J)} E_i^{\mathbf{c}'} = E_i^{\pi^{0,r_1}} E_i^{\pi^{0,r_2}} \dots E_i^{\pi^{0,r_m}} E_i^{\mathbf{c}'}$$

$$\begin{aligned}
&= E_{\mathbf{i}}^{\boldsymbol{\pi}^{\theta, r_1}} \dots E_{\mathbf{i}}^{\boldsymbol{\pi}^{\theta, r_{m-1}}} \sum_{\lambda^m \in \Lambda(r_m, \mathbf{c}')} P(\lambda^m, \mathbf{c}' + \boldsymbol{\pi}^{\lambda^m}) E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{c}' + \boldsymbol{\pi}^{\lambda^m}} \\
&= E_{\mathbf{i}}^{\boldsymbol{\pi}^{\theta, r_1}} \dots E_{\mathbf{i}}^{\boldsymbol{\pi}^{\theta, r_{m-2}}} \\
&\quad \sum_{\lambda^m, \lambda^{m-1}} P(\lambda^{m-1}, \mathbf{c}' + \boldsymbol{\pi}^{\lambda^m} + \boldsymbol{\pi}^{\lambda^{m-1}}) P(\lambda^m, \mathbf{c}' + \boldsymbol{\pi}^{\lambda^m}) E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{c}' + \boldsymbol{\pi}^{\lambda^m} + \boldsymbol{\pi}^{\lambda^{m-1}}} \\
&= \sum_{\boldsymbol{\lambda}_J \in \Lambda_J} \left( \prod_{k=1}^m P(\lambda^k, \mathbf{c}' + \sum_{l=k}^m \boldsymbol{\pi}^{\lambda^l}) \right) E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{c}' + \sum_{k=1}^m \boldsymbol{\pi}^{\lambda^k}}
\end{aligned}$$

où l'avant dernière somme est sur tous les  $(\lambda^m, \lambda^{m-1}) \in \Lambda(r_m, \mathbf{c}') \times \Lambda(r_{m-1}, \mathbf{c}' + \boldsymbol{\pi}^{\lambda^m})$  et la dernière somme est sur tous les  $\boldsymbol{\lambda}_J = (\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^m) \in \Lambda(r_1, \mathbf{c}' + \sum_{l=2}^m \boldsymbol{\pi}^{\lambda^l}) \times \dots \times \Lambda(r_m, \mathbf{c}') \stackrel{\text{déf}}{=} \Lambda_J$ . Ainsi (3.5) devient

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathbf{c} \leq \mathbf{a}} \omega_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}} E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{c}} &= \begin{bmatrix} a_j \\ 1 \end{bmatrix}^{-1} \sum_J \sum_{\mathbf{c}' \leq \mathbf{a}'} (v^{-1} - v)^{|J|} \omega_{\mathbf{c}'}^{\mathbf{a}'} \\
&\quad \sum_{\boldsymbol{\lambda}_J \in \Lambda_J} \left( \prod_{k=1}^{(|J|+1)} P(\lambda^k, \mathbf{c}' + \sum_{l=k}^{(|J|+1)} \boldsymbol{\pi}^{\lambda^l}) \right) E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{c}' + \sum_{k=1}^{(|J|+1)} \boldsymbol{\pi}^{\lambda^k}}
\end{aligned}$$

Maintenant, nous pouvons comparer les coefficients de  $E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{c}}$  et nous obtenons la formule suivante (noter que  $\mathbf{c}' = \mathbf{c} - \sum_{k=1}^{(|J|+1)} \boldsymbol{\pi}^{\lambda^k}$ ):

$$\omega_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} a_j \\ 1 \end{bmatrix}^{-1} \sum_J (v^{-1} - v)^{|J|} \sum_{\boldsymbol{\lambda}_J \in \Lambda_J} \omega_{\mathbf{c} - \sum_{k=1}^{(|J|+1)} \boldsymbol{\pi}^{\lambda^k}}^{\mathbf{a}'} \prod_{k=1}^{(|J|+1)} P(\lambda^k, \mathbf{c} - \sum_{l=1}^{k-1} \boldsymbol{\pi}^{\lambda^l}) \quad (3.6)$$

Nous posons  $\Omega_{\mathbf{x}}^{\mathbf{y}} = \omega_{\mathbf{x}}^{\mathbf{y}} v^{d(\mathbf{y}) - d(\mathbf{x})}$  avec  $d(\mathbf{z}) \stackrel{\text{déf}}{=} \dim(\mathcal{O}_{\mathbf{z}})$  et nous avons la formule réursive suivante:

$$\begin{aligned}
\Omega_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}} &= \\
&\begin{bmatrix} a_j \\ 1 \end{bmatrix}^{-1} \sum_J (v^{-1} - v)^{|J|} \sum_{\boldsymbol{\lambda}_J \in \Lambda_J} \Omega_{\mathbf{c} - \sum_{k=1}^{(|J|+1)} \boldsymbol{\pi}^{\lambda^k}}^{\mathbf{a}'} \left( \prod_{k=1}^{(|J|+1)} P(\lambda^k, \mathbf{c} - \sum_{l=1}^{k-1} \boldsymbol{\pi}^{\lambda^l}) \right) v^{\sigma}
\end{aligned} \quad (3.7)$$

avec  $\sigma = d(\mathbf{c} - \sum_{k=1}^{(|J|+1)} \boldsymbol{\pi}^{\lambda^k}) - d(\mathbf{a}') + d(\mathbf{a}) - d(\mathbf{c})$ .

Dans le reste du chapitre nous ne faisons que simplifier cette formule. Regardons d'abord la dimension  $d(\mathbf{c})$  de l'orbite  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}}$ . Nous avons la formule suivante:

### Lemme 3.2.1

$$\delta(\mathbf{c}) = \dim(E_{\mathbf{d}}) - d(\mathbf{c}) = [\mathbf{e}(\mathbf{c}), \mathbf{e}(\mathbf{c})]^1$$

*Preuve.* (Gabriel, 1975, sect.1) □

Maintenant, nous appliquons le lemme pour calculer  $\sigma$ :

$$\begin{aligned}\sigma &= - \left[ \mathbf{e}(\mathbf{c} - \sum_k \boldsymbol{\pi}^{\lambda^k}), \mathbf{e}(\mathbf{c} - \sum_k \boldsymbol{\pi}^{\lambda^k}) \right]^1 + [\mathbf{e}(\mathbf{c}), \mathbf{e}(\mathbf{c})]^1 - [\mathbf{e}(\mathbf{a}), \mathbf{e}(\mathbf{a})]^1 \\ &\quad + \left[ \mathbf{e}(\mathbf{a} - \boldsymbol{\pi}^{\theta, j}), \mathbf{e}(\mathbf{a} - \boldsymbol{\pi}^{\theta, j}) \right]^1 \\ &= \left[ \mathbf{e}(\mathbf{c}), \mathbf{e}(\sum_k \boldsymbol{\pi}^{\lambda^k}) \right]^1 + \left[ \mathbf{e}(\sum_k \boldsymbol{\pi}^{\lambda^k}), \mathbf{e}(\mathbf{c}) \right]^1 - \left[ \mathbf{e}(\sum_k \boldsymbol{\pi}^{\lambda^k}), \mathbf{e}(\sum_k \boldsymbol{\pi}^{\lambda^k}) \right]^1 \\ &\quad - \left[ \mathbf{e}(\mathbf{a}), \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\theta, j}) \right]^1 - \left[ \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\theta, j}), \mathbf{e}(\mathbf{a}) \right]^1 + \left[ \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\theta, j}), \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\theta, j}) \right]^1,\end{aligned}$$

où chaque somme  $\sum_k$  est sur  $k = 1, \dots, |J| + 1$ . Noter aussi que

$$\left[ \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\theta, j}), \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\theta, j}) \right]^1 = 0 \quad \text{et} \quad \left[ \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\theta, j}), \mathbf{e}(\mathbf{a}) \right]^1 = 0$$

car  $a_1 = \dots = a_{j-1} = 0$ . Avec ce résultat, nous avons

$$\begin{aligned}&\left( \prod_{k=1}^{|J|+1} P(\lambda^k, \mathbf{c} - \sum_{l=1}^{k-1} \boldsymbol{\pi}^{\lambda^l}) \right) v^\sigma \\ &= v^{-[\mathbf{e}(\mathbf{a}), \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\theta, j})]^1} \left[ \prod_{k=1}^{|J|+1} (1 - v^{-2})^{-1} \left( \prod_{t \in \boldsymbol{\pi}_+^{\lambda^k}} (1 - v^{-2c_t + 2 \sum_{l=1}^{k-1} \pi_t^{\lambda^l}}) \right) v^{\sigma_1} \right],\end{aligned}$$

où  $\sigma_1$  est égal à

$$\begin{aligned}&\varphi(\mathbf{c} - \sum_{l=1}^k \boldsymbol{\pi}^{\lambda^l}, \boldsymbol{\pi}^{\lambda^k}) \\ &\quad + \left( \left[ \mathbf{e}(\mathbf{c}), \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\lambda^k}) \right]^1 + \left[ \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\lambda^k}), \mathbf{e}(\mathbf{c}) \right]^1 - \left[ \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\lambda^k}), \mathbf{e}(\sum_{l=1}^{|J|+1} \boldsymbol{\pi}^{\lambda^l}) \right]^1 \right) \\ &= \left[ \mathbf{e}(\mathbf{c}), \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\lambda^k}) \right]^1 + \left[ \mathbf{e}(\mathbf{c}), \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\lambda^k}) \right]^1 - \left[ \mathbf{e}(\sum_{l=1}^{k-1} \boldsymbol{\pi}^{\lambda^l}), \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\lambda^k}) \right]^1 \\ &\quad - \left[ \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\lambda^k}), \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\lambda^k}) \right]^1 - \left[ \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\lambda^k}), \mathbf{e}(\sum_{l=k+1}^{|J|+1} \boldsymbol{\pi}^{\lambda^l}) \right]^1.\end{aligned}$$

Noter que  $-\left[ \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\lambda^k}), \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\lambda^k}) \right]^1 = -1$  par le lemme 1.5.6 et que

$$\begin{aligned}&\left[ \mathbf{e}(\mathbf{c}), \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\lambda^k}) \right]^1 + \left[ \mathbf{e}(\mathbf{c}), \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\lambda^k}) \right]^1 \\ &= 2 \left[ \mathbf{e}(\mathbf{c}), \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\lambda^k}) \right]^1 - \left[ \mathbf{e}(\mathbf{c}), \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\theta, r_k}) \right]^1 + \left[ \mathbf{e}(\mathbf{c}), \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\theta, r_k}) \right]^1\end{aligned}$$

par le lemme 1.5.5. Ainsi

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= -1 + 2 \left[ \mathbf{e}(\mathbf{c}), \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\lambda^k}) \right]^1 - \left[ \mathbf{e}(\mathbf{c}), \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\theta, r_k}) \right]^1 + \left[ \mathbf{e}(\mathbf{c}), \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\theta, r_k}) \right]^1 \\ &\quad - \left[ \mathbf{e}(\sum_{l=1}^{k-1} \boldsymbol{\pi}^{\lambda^l}), \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\lambda^k}) \right]^1 - \left[ \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\lambda^k}), \mathbf{e}(\sum_{l=k+1}^{|J|+1} \boldsymbol{\pi}^{\lambda^l}) \right]^1.\end{aligned}$$

Noter aussi que

$$\begin{bmatrix} a_j \\ 1 \end{bmatrix}^{-1} (v^{-1} - v)^{|J|} \prod_{k=1}^{|J|+1} (1 - v^{-2})^{-1} = (-1)^{|J|} (v^{2a_j} - 1)^{-1} v^{a_j} v^{|J|+1}$$

et ainsi (3.7) devient

$$\Omega_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}} = (v^{2a_j} - 1)^{-1} v^{a_j} [\mathbf{e}(\mathbf{a}), \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\emptyset, j})]^1 \sum_J (-1)^{|J|} \sum_{\boldsymbol{\lambda}_J \in \Lambda_J} \Omega_{\mathbf{c} - \sum_{k=1}^{|J|+1} \boldsymbol{\pi}^{\lambda^k}}^{\mathbf{a}'} v^{\sigma_2} \rho_2(v), \quad (3.8)$$

avec  $\rho_2(v) = \prod_{k=1}^{|J|+1} \prod_{t \in \boldsymbol{\pi}_+^{\lambda^k}} \left( 1 - v^{-2(c_t - \sum_{l=1}^{k-1} \pi_t^{\lambda^l})} \right)$  et

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \sum_{k=1}^{|J|+1} \left( 2 [\mathbf{e}(\mathbf{c}), \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\lambda^k})] - [\mathbf{e}(\mathbf{c}), \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\emptyset, r_k})] + [\mathbf{e}(\mathbf{c}), \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\emptyset, r_k})]^1 \right) \\ &\quad - \sum_{k=1}^{|J|+1} \left( [\mathbf{e}(\sum_{l=1}^{k-1} \boldsymbol{\pi}^{\lambda^l}), \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\lambda^k})] + [\mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\lambda^k}), \mathbf{e}(\sum_{l=k+1}^{|J|+1} \boldsymbol{\pi}^{\lambda^l})]^1 \right). \end{aligned}$$

Maintenant, nous montrons que quel que soit  $j$  et pour tout sous-ensemble  $J$  de l'ensemble des arêtes de  $\text{Supp}(\alpha^j)$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{|J|+1} [\mathbf{e}(\mathbf{c}), \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\emptyset, r_k})]^1 &= - [\mathbf{e}(\mathbf{c}), \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\emptyset, j})] + [\mathbf{e}(\mathbf{c}), \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\emptyset, j})]^1 \\ &\quad + \sum_{k=1}^{|J|+1} [\mathbf{e}(\mathbf{c}), \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\emptyset, r_k})] \end{aligned} \quad (3.9)$$

En effet, il suffit de montrer que pour tout  $j$  et pour tout sous-ensemble  $J$  de l'ensemble des arêtes de  $\text{Supp}(\alpha^j)$

$$\sum_{k=1}^{|J|+1} \psi(r_k) = \psi(j)$$

où  $r_1 < r_2 < \dots < r_{|J|+1}$  tels que  $\mathbf{c}(J) = \boldsymbol{\pi}^{\emptyset, r_1} + \boldsymbol{\pi}^{\emptyset, r_2} + \dots + \boldsymbol{\pi}^{\emptyset, r_{|J|+1}}$  et  $\psi(t) = [\mathbf{e}(\mathbf{c}), \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\emptyset, t})] - [\mathbf{e}(\mathbf{c}), \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\emptyset, t})]^1$ .

Nous procédons par récurrence sur  $|J|$ . Si  $|J| = 0$  alors  $\sum_{k=1}^{|J|+1} \psi(r_k) = \psi(r_1)$  et  $r_1 = j$ . Supposons  $|J| \geq 1$ . Soit  $x_0 \rightarrow y_0 \in J$ , alors il existe une suite exacte non-scindée  $0 \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^{t_1}} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^j} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^{t_2}} \rightarrow 0$  telle que  $y_0 \in \text{Supp}(\alpha^{t_1})$  et  $x_0 \in \text{Supp}(\alpha^{t_2})$ . Nous avons  $\psi(j) = \psi(t_1) + \psi(t_2)$ . Soit  $J_1 = \{x \rightarrow y \in J \mid x, y \in \text{Supp}(\alpha^{t_1})\}$  et  $J_2 = \{x \rightarrow y \in J \mid x, y \in \text{Supp}(\alpha^{t_2})\}$ . Donc  $J = J_1 \sqcup J_2 \sqcup \{x_0 \rightarrow y_0\}$ , alors

$|J_1|, |J_2| < |J|$  et nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence à  $t_1, J_1$  et à  $t_2, J_2$ . Nous obtenons

$$\psi(j) = \psi(t_1) + \psi(t_2) = \sum_{k=1}^{|J_1|+1} \psi(r_k^1) + \sum_{k=1}^{|J_2|+1} \psi(r_k^2)$$

où  $\mathbf{c}(J_1) = \boldsymbol{\pi}^{\emptyset, r_1^1} + \boldsymbol{\pi}^{\emptyset, r_2^1} + \dots + \boldsymbol{\pi}^{\emptyset, r_{|J_1|+1}^1}$  et  $\mathbf{c}(J_2) = \boldsymbol{\pi}^{\emptyset, r_1^2} + \boldsymbol{\pi}^{\emptyset, r_2^2} + \dots + \boldsymbol{\pi}^{\emptyset, r_{|J_2|+1}^2}$ . De plus, les arêtes de  $\text{Supp}(\alpha^j)$  qui ne sont pas dans  $J$  sont exactement les arêtes de  $\text{Supp}(\alpha^{t_1}) \sqcup \text{Supp}(\alpha^{t_2})$  qui ne sont pas dans  $J_1 \sqcup J_2$  et par conséquent  $\{r_1, r_2, \dots, r_{|J|+1}\} = \{r_1^1, r_2^1, \dots, r_{|J_1|+1}^1\} \sqcup \{r_1^2, r_2^2, \dots, r_{|J_2|+1}^2\}$ . Ainsi  $\psi(j) = \sum_{k=1}^{|J|+1} \psi(r_k)$  ce qui montre (3.9).

Avec ce résultat nous pouvons récrire (3.8) comme suit (en notant que  $a_j = [\mathbf{e}(\mathbf{a}), \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\emptyset, j})]$ ):

$$\Omega_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}} = (v^{2a_j} - 1)^{-1} v^{\sigma_3} \sum_J (-1)^{|J|} \sum_{\boldsymbol{\lambda}_J \in \Lambda_J} \Omega_{\mathbf{c} - \sum_{k=1}^{|J|+1} \boldsymbol{\pi}^{\lambda^k}}^{\mathbf{a}'} v^{\sigma_4} \rho_2(v) \quad (3.10)$$

avec

$$\begin{aligned} \sigma_3 &= [\mathbf{e}(\mathbf{a}), \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\emptyset, j})] - [\mathbf{e}(\mathbf{a}), \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\emptyset, j})]^1 - [\mathbf{e}(\mathbf{c}), \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\emptyset, j})] + [\mathbf{e}(\mathbf{c}), \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\emptyset, j})]^1 \\ \sigma_4 &= \sum_{k=1}^{|J|+1} \left( 2 [\mathbf{e}(\mathbf{c}), \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\lambda^k})] - [\mathbf{e}(\sum_{l=1}^{k-1} \boldsymbol{\pi}^{\lambda^l}), \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\lambda^k})] \right. \\ &\quad \left. - [\mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\lambda^k}), \mathbf{e}(\sum_{l=k+1}^{|J|+1} \boldsymbol{\pi}^{\lambda^l})]^1 \right) \\ \rho_2(v) &= \prod_{k=1}^{|J|+1} \prod_{t \in \boldsymbol{\pi}_+^{\lambda^k}} \left( 1 - v^{-2(c_t - \sum_{l=1}^{k-1} \pi_t^{\lambda^l})} \right). \end{aligned}$$

Nous allons montrer les deux faits suivants:

$$\sigma_3 = 0 \quad (3.11)$$

et

$$\sum_{k=1}^{|J|+1} [\mathbf{e}(\sum_{l=1}^{k-1} \boldsymbol{\pi}^{\lambda^l}), \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\lambda^k})] = \sum_{k=1}^{|J|+1} [\mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\lambda^k}), \mathbf{e}(\sum_{l=k+1}^{|J|+1} \boldsymbol{\pi}^{\lambda^l})]^1. \quad (3.12)$$

Dans (Auslander et Reiten, 1985, thm.1.4), on montre que la différence  $[\mathbf{e}(\mathbf{c}), \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\emptyset, j})] - [\mathbf{e}(\mathbf{c}), \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\emptyset, j})]^1$  dépend uniquement de la dimension de  $\mathbf{e}(\mathbf{c})$ . Ainsi,  $\sigma_3 = 0$  parce que  $\mathbf{c}$  et  $\mathbf{a}$  ont la même  $\mathbf{i}$ -homogénéité.

Preuve de (3.12) :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{|J|+1} \left[ \mathbf{e}(\sum_{l=1}^{k-1} \pi^{\lambda^l}), \mathbf{e}(\pi^{\lambda^k}) \right] - \sum_{k=1}^{|J|+1} \left[ \mathbf{e}(\pi^{\lambda^k}), \mathbf{e}(\sum_{l=k+1}^{|J|+1} \pi^{\lambda^l}) \right]^1 \\ &= \sum_{1 \leq l < k \leq |J|+1} \left[ \mathbf{e}(\pi^{\lambda^l}), \mathbf{e}(\pi^{\lambda^k}) \right] - \left[ \mathbf{e}(\pi^{\lambda^l}), \mathbf{e}(\pi^{\lambda^k}) \right]^1. \end{aligned}$$

Donc il suffit de montrer que  $\left[ \mathbf{e}(\pi^{\lambda^l}), \mathbf{e}(\pi^{\lambda^k}) \right] = \left[ \mathbf{e}(\pi^{\lambda^l}), \mathbf{e}(\pi^{\lambda^k}) \right]^1$  pour tout  $l < k$ . En appliquant le lemme 1.5.5 pour le partage  $\lambda^l$ , nous voyons que ceci est équivalent à  $\left[ \mathbf{e}(\pi^{\emptyset, r_l}), \mathbf{e}(\pi^{\lambda^k}) \right] = \left[ \mathbf{e}(\pi^{\emptyset, r_l}), \mathbf{e}(\pi^{\lambda^k}) \right]^1$  pour tout  $l < k$ . Et en appliquant le même lemme pour  $\lambda^k$ , nous voyons qu'il suffit de montrer que

$$\left[ \mathbf{e}(\pi^{\emptyset, r_l}), \mathbf{e}(\pi^{\emptyset, r_k}) \right] = \left[ \mathbf{e}(\pi^{\emptyset, r_l}), \mathbf{e}(\pi^{\emptyset, r_k}) \right]^1$$

pour tout  $r_l < r_k$ . Mais le membre de gauche est nul puisque  $\text{Supp}(\alpha^{r_l}) \cap \text{Supp}(\alpha^{r_k}) = \emptyset$  et le membre de droite est nul puisque  $r_l < r_k$  implique que s'il existe une suite courte exacte non-scindée avec  $\mathbf{e}(\pi^{\emptyset, r_l}), \mathbf{e}(\pi^{\emptyset, r_k})$  aux extrémités alors elle est de la forme  $0 \rightarrow \mathbf{e}(\pi^{\emptyset, r_l}) \rightarrow \mathbf{e}(\pi^{\emptyset, r_l} + \pi^{\emptyset, r_k}) \rightarrow \mathbf{e}(\pi^{\emptyset, r_k}) \rightarrow 0$ . Donc (3.12) est prouvé.

Ainsi (3.10) devient

$$\Omega_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}} = (v^{2a_j} - 1)^{-1} \sum_J (-1)^{|J|} \sum_{\lambda_J \in \Lambda_J} \Omega_{\mathbf{c} - \sum_{k=1}^{|J|+1} \pi^{\lambda^k}}^{\mathbf{a}'} v^{\sigma_5} \rho_2(v) \quad (3.13)$$

avec

$$\sigma_5 = 2 \sum_{k=1}^{|J|+1} \left( \left[ \mathbf{e}(\mathbf{c}), \mathbf{e}(\pi^{\lambda^k}) \right] - \left[ \mathbf{e}(\sum_{l=1}^{k-1} \pi^{\lambda^l}), \mathbf{e}(\pi^{\lambda^k}) \right] \right).$$

Le membre de droite de (3.13) est dans  $\mathbf{Z}[v^2, v^{-2}]$ . Posons maintenant

$$\mathcal{J}_{\mathbf{c}'} \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ J \subset \{\text{arêtes dans } \text{Supp}(\alpha^j)\} \mid \exists \lambda_J \in \Lambda_J \text{ tel que } \mathbf{c}' = \mathbf{c} - \sum_{k=1}^{|J|+1} \pi^{\lambda^k} \right\}$$

Donc pour  $\mathbf{c}' \preceq \mathbf{a}'$  donné, l'ensemble  $\mathcal{J}_{\mathbf{c}'}$  contient tous les ensembles  $J$  qui réalisent  $\Omega_{\mathbf{c}'}^{\mathbf{a}'}$  dans (3.13). Noter que  $\mathcal{J}_{\mathbf{c}'}$  peut être vide. Noter aussi qu'il peut y avoir  $\lambda_J, \tilde{\lambda}_J \in \mathcal{J}_{\mathbf{c}'}$  avec  $\lambda_J \neq \tilde{\lambda}_J$ . On dira que  $\mathbf{c}'$  est réalisable si  $\mathcal{J}_{\mathbf{c}'} \neq \emptyset$ . En regroupant les termes de (3.13) et en substituant  $u = v^2$  nous obtenons

$$\Omega_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}} = (u^{a_j} - 1)^{-1} \sum_{\substack{\mathbf{c}' \preceq \mathbf{a}' \\ \mathbf{c}' \text{ réalisable}}} \Omega_{\mathbf{c}'}^{\mathbf{a}'} \sum_{J \in \mathcal{J}_{\mathbf{c}'}} (-1)^{|J|} \sum_{\lambda_J : \mathbf{c} - \mathbf{c}' = \sum_k \pi^{\lambda^k}} u^{\sigma_6} \rho(u) \quad (3.14)$$

avec

$$\begin{aligned} \sigma_6 &= \sum_{k=1}^{|J|+1} \left( \left[ \mathbf{e}(\mathbf{c}), \mathbf{e}(\pi^{\lambda^k}) \right] - \left[ \mathbf{e}(\sum_{l=1}^{k-1} \pi^{\lambda^l}), \mathbf{e}(\pi^{\lambda^k}) \right] \right) \\ \rho(u) &= \prod_{k=1}^{|J|+1} \prod_{t \in \pi_+^{\lambda^k}} \left( 1 - u^{-(c_t - \sum_{l=1}^{k-1} \pi_t^{\lambda^l})} \right). \end{aligned}$$



Enfin, en utilisant d'une part que  $[\mathbf{e}(\mathbf{c}), \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\lambda^k})] = \sum_{(t: [\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\lambda^k})]=1)} c_t$  et d'autre part que si  $\pi_t^{\lambda^k} = 1$  alors  $[\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\lambda^k})] = 1$ , nous obtenons la formule suivante:

**Théorème 3.2.2** *Soient  $\mathcal{Q}$  un carquois de type  $A_n$  et  $\mathbf{i} \in \mathcal{I}$  adapté à  $\mathcal{Q}$ . Soient*

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (0, \dots, 0, a_j, a_{j+1}, \dots, a_\nu) \in \mathbf{N}^\nu; \\ \mathbf{c} &\prec \mathbf{a}; \\ \mathbf{a}' &= (0, \dots, 0, a_j - 1, a_{j+1}, \dots, a_\nu) \in \mathbf{N}^\nu. \end{aligned}$$

Alors

$$\Omega_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}} = (u^{a_j} - 1)^{-1} \sum_{\mathbf{c}', J, \boldsymbol{\lambda}_J} (-1)^{|J|} \Omega_{\mathbf{c}'}^{\mathbf{a}'} \prod_{k=1}^{|J|+1} \left( u^{\sigma(k)} \prod_{t \in \boldsymbol{\pi}^{\lambda^k}} (u^{c_t(k)} - 1) \right)$$

où la somme est sur tous les  $\mathbf{c}' \preceq \mathbf{a}'$  tels que  $\mathbf{c}'$  est réalisable, sur tous les  $J \in \mathcal{J}_{\mathbf{c}'}$  et tous les  $\boldsymbol{\lambda}_J = (\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^{|J|+1}) \in \boldsymbol{\Lambda}_J$  tels que  $\mathbf{c} - \mathbf{c}' = \sum_{k=1}^{|J|+1} \pi^{\lambda^k}$  et

$$c_t(k) = c_t - \sum_{l=1}^{k-1} \pi_t^{\lambda^l}, \quad \sigma(k) = \sum_{\substack{t: [\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}^{\lambda^k})]=1 \\ \pi_t^{\lambda^k} \neq 1}} c_t(k).$$

L'équation du dernier théorème est une formule récursive: Le polynôme  $\Omega_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}}$  y est exprimé en termes de polynômes  $\Omega_{\mathbf{c}'}^{\mathbf{a}'}$  et  $\mathbf{a}'$  est "plus petit" que  $\mathbf{a}$  dans le sens de  $|\mathbf{a}'| < |\mathbf{a}|$ . Par la proposition 1.3.1, nous savons que  $\Omega_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}}$  est un polynôme en  $u, u^{-1}$ . La formule confirme qu'on peut décrire  $\Omega_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}}$  en  $u, u^{-1}$ , mais il n'est pas évident que le membre de droite de la formule est un polynôme. En général, on ne peut pas diviser chaque terme de la somme par  $(u^{a_j} - 1)$ .



## CHAPITRE IV

### LES SINGULARITÉS DES VARIÉTÉS DE CARQUOIS DE TYPE $A_n$

Nous avons déjà vu (proposition 1.3.1 et théorème 1.3.2) que les polynômes  $\Omega_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}}$  encodent de l'information sur la cohomologie d'intersection de la variété de carquois  $\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{a}}}$ . Dans ce chapitre, nous nous servons de la formule du théorème 3.2.2 pour analyser la géométrie de la variété. Nous allons montrer que pour nos variétés les propriétés “lisse” et “rationnellement lisse” sont équivalentes et nous allons donner une liste complète des variétés de carquois qui sont lisses et aussi de celles dont la projectivisation est rationnellement lisse. Soit  $F$  la clôture algébrique d'un corps fini  $F_q$  ayant  $q = p^e$  éléments, où  $p$  est un nombre premier. En général,  $\mathcal{Q}$  est un carquois de type  $A_n$  dans ce chapitre, sauf aux endroits où nous indiquerons que  $\mathcal{Q}$  est de type  $A, D$ , ou  $E$ . Nous fixons  $\mathbf{i} \in \mathcal{I}$  adapté à  $\mathcal{Q}$  et nous écrivons  $\alpha^t$  au lieu de  $\alpha(\mathbf{i}, t)$  pour  $t = 1, 2, \dots, \nu$ . D'abord, il nous faut des résultats sur le comportement de  $\Omega_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}}$  quand  $\mathbf{c}$  et  $\mathbf{a}$  sont proches.

#### 4.1 Analyse de $\Omega_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}}$ pour $\mathbf{c}$ proche de $\mathbf{a}$

Soit  $\mathbf{c} \in \mathbf{N}^{\nu}$  de  $\mathbf{i}$ -homogénéité  $\mathbf{d}$  et  $d(\mathbf{c}) \stackrel{\text{déf}}{=} \dim(\mathcal{O}_{\mathbf{c}})$ ,  $\delta(\mathbf{c}) \stackrel{\text{déf}}{=} \text{codim}(\mathcal{O}_{\mathbf{c}}) = \dim(E_{\mathbf{d}}) - d(\mathbf{c})$ . Nous écrivons  $\mathbf{c} \prec \mathbf{a}$  si  $\mathbf{c} \preceq \mathbf{a}$  et  $\mathbf{c} \neq \mathbf{a}$ .

**Lemme 4.1.1** *Soient  $\mathbf{c}, \mathbf{a} \in \mathbf{N}^{\nu}$  tels que  $\mathbf{c} \prec \mathbf{a}$ . Alors  $d(\mathbf{c}) < d(\mathbf{a})$ .*

*Preuve.* Ceci est un résultat classique, voir (Humphreys, 1975, prop.8.3).  $\square$

**Proposition 4.1.2** *Soit  $\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{a}}}$  une variété de carquois de type  $A, D$  ou  $E$ . Si  $\mathbf{c} \prec \mathbf{a}$  alors  $\Omega_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}}$  est un polynôme en  $u = v^2$  divisible par  $(u - 1)$ .*

Notons  $\tilde{\Omega}_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}} \stackrel{\text{déf}}{=} \Omega_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}} / (u - 1)$ .

*Preuve.* Nous procédons par récurrence sur  $\dim(\mathcal{O}_{\mathbf{a}})$ . Si  $\dim(\mathcal{O}_{\mathbf{a}}) = 0$  il n'y a rien à prouver parce que il n'y a pas de  $\mathbf{c} \prec \mathbf{a}$ . Supposons  $\dim(\mathcal{O}_{\mathbf{a}}) > 0$ . Nous

avons  $\Omega_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}} = \omega_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}} v^{d(\mathbf{a})-d(\mathbf{c})}$ . Donc par le théorème 1.3.2.3

$$\begin{aligned} \zeta_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}} &= \sum_{\mathbf{c}'' : \mathbf{c} \prec \mathbf{c}'' \prec \mathbf{a}} \Omega_{\mathbf{c}''}^{\mathbf{c}'} v^{d(\mathbf{c})-d(\mathbf{c}'')} \overline{\zeta_{\mathbf{c}''}^{\mathbf{a}}} \\ &= \Omega_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}} v^{d(\mathbf{c})-d(\mathbf{a})} + \overline{\zeta_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}}} + \sum_{\mathbf{c}'' : \mathbf{c} \prec \mathbf{c}'' \prec \mathbf{a}} \Omega_{\mathbf{c}''}^{\mathbf{c}'} v^{d(\mathbf{c})-d(\mathbf{c}'')} \overline{\zeta_{\mathbf{c}''}^{\mathbf{a}}} \end{aligned}$$

car  $\zeta_{\mathbf{a}}^{\mathbf{a}} = 1$  par le théorème 1.3.2, et  $\Omega_{\mathbf{c}}^{\mathbf{c}} = 1$  par la proposition 1.3.1. Alors

$$\Omega_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}} = v^{d(\mathbf{a})-d(\mathbf{c})} \left( \zeta_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}} - \overline{\zeta_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}}} \right) - \sum_{\mathbf{c}'' : \mathbf{c} \prec \mathbf{c}'' \prec \mathbf{a}} \Omega_{\mathbf{c}''}^{\mathbf{c}'} v^{d(\mathbf{a})-d(\mathbf{c}'')} \overline{\zeta_{\mathbf{c}''}^{\mathbf{a}}}.$$

Or par le théorème 1.3.2.4, nous avons

$$\begin{aligned} v^{d(\mathbf{a})-d(\mathbf{c})} \left( \zeta_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}} - \overline{\zeta_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}}} \right) &= v^{d(\mathbf{a})-d(\mathbf{c})} \sum_k \dim \mathcal{H}_f^{2k}(\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{a}}}) \left( v^{2k+d(\mathbf{c})-d(\mathbf{a})} - v^{-2k-d(\mathbf{c})+d(\mathbf{a})} \right) \end{aligned}$$

(avec  $0 \leq 2k < d(\mathbf{a}) - d(\mathbf{c})$  si  $\mathbf{a} \neq \mathbf{c}$  car  $\zeta_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}} \in v^{-1}\mathbf{Z}[v^{-1}]$  si  $\mathbf{a} \neq \mathbf{c}$ ). Mais ceci est égal à

$$\begin{aligned} \sum_k \dim \mathcal{H}_f^{2k}(\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{a}}}) \left( v^{2k} - v^{-2k-2d(\mathbf{c})+2d(\mathbf{a})} \right) &= - \sum_k \dim \mathcal{H}_f^{2k}(\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{a}}}) u^k \left( u^{-2k-d(\mathbf{c})+d(\mathbf{a})} - 1 \right), \quad (4.1) \end{aligned}$$

où  $f$  est un point  $F_q$ -rationnel de  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}}$ . Alors  $(u^{-2k-d(\mathbf{c})+d(\mathbf{a})} - 1)$  est divisible par  $(u - 1)$  car  $-2k - d(\mathbf{c}) + d(\mathbf{a}) > 0$ . Donc chaque terme de (4.1) est divisible par  $(u - 1)$ . Ainsi  $v^{d(\mathbf{a})-d(\mathbf{c})} (\zeta_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}} - \overline{\zeta_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}}})$  est divisible par  $(u - 1)$ . Notons que (4.1)  $\neq 0$  car  $\zeta_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}} \in v^{-1}\mathbf{Z}[v^{-1}]$ .

D'autre part pour tout  $\mathbf{c} \prec \mathbf{c}'' \prec \mathbf{a}$ , le lemme 4.1.1 dit que  $d(\mathbf{c}) < d(\mathbf{c}'')$ , et nous pouvons supposer par récurrence que  $\Omega_{\mathbf{c}''}^{\mathbf{c}'}$  est un polynôme en  $u$  et divisible par  $(u - 1)$ .

De plus,

$$\begin{aligned} v^{d(\mathbf{a})-d(\mathbf{c}'')} \overline{\zeta_{\mathbf{c}''}^{\mathbf{a}}} &= \sum_k \dim \mathcal{H}_f^{2k}(\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{a}}}) v^{-2k-2d(\mathbf{c}'')+2d(\mathbf{a})} \\ &= \sum_k \dim \mathcal{H}_f^{2k}(\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{a}}}) u^{-k-d(\mathbf{c}'')+d(\mathbf{a})} \end{aligned}$$

est un polynôme en  $u$ .

Ainsi  $\Omega_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}} \in \mathbf{Z}[u]$  et  $\Omega_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}} = (u - 1)\tilde{\Omega}_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}}$  avec  $\tilde{\Omega}_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}} \in \mathbf{Z}[u]$ .  $\square$

**Proposition 4.1.3** *Soit  $\mathbf{c} \prec \mathbf{a}$ . Si  $\tilde{\Omega}_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}}|_{u=1} \neq 0$  alors il existe une opération élémentaire menant de  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}}$  à  $\mathcal{O}_{\mathbf{a}}$ , i.e. il existe  $\Upsilon \in \mathcal{S}_{op}$  tel que  $\mathbf{c} + \mathbf{op}^{\Upsilon} = \mathbf{a}$ .*

Pour la preuve nous avons besoin du lemme suivant.

**Lemme 4.1.4** Soient  $\mathbf{a} = (0, \dots, 0, a_j, a_{j+1}, \dots, a_\nu)$ ,  $\mathbf{c} \prec \mathbf{a}$ ,  $\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \boldsymbol{\pi}^{\emptyset, j}$ ,  $\mathbf{c}'$  réalisable,  $J \in \mathcal{J}_{\mathbf{c}'}$  et  $\{r_1 < r_2 < \dots < r_{|J|+1}\}$  l'ensemble des positions où  $c(J)$  ne s'annule pas. Soit  $\boldsymbol{\lambda}_J = (\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^{|J|+1}) \in \boldsymbol{\Lambda}_J$  tel que  $\mathbf{c} - \mathbf{c}' = \sum_{k=1}^{|J|+1} \boldsymbol{\pi}^{\lambda^k}$ . Noter que  $\lambda^k$  est un  $r_k$ -partage. Soit

$$M \stackrel{\text{déf}}{=} \max \left\{ h \mid (u-1)^h \text{ divise } \prod_{k=1}^{|J|+1} \prod_{t \in \boldsymbol{\pi}_+^{\lambda^k}} (u^{c_t - \sum_{l=1}^{k-1} \pi_t^{\lambda^l}} - 1) \right\}$$

1. Si  $\mathbf{c}' = \mathbf{a}'$  et  $M \leq 2$  alors il existe une unique opération élémentaire menant de  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}}$  à  $\mathcal{O}_{\mathbf{a}}$ . Plus précisément, nous obtenons dans ce cas que

$$|J| = 1, M = 2, \boldsymbol{\lambda}_J = (\lambda^1, \lambda^2) = (\emptyset, \lambda^2),$$

$$\lambda^1 \in \Lambda(r_1, \mathbf{c}' + \boldsymbol{\pi}^{\lambda^2}), \lambda^2 \in \Lambda(r_2, \mathbf{c}')$$

$$\Upsilon_J : 0 \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^{r_1}} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^j} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^{r_2}} \rightarrow 0 \in \mathcal{S}_{op}$$

et soit  $\lambda^2 = \emptyset$  et  $\mathbf{a} = \mathbf{c} + \mathbf{op}^{\Upsilon_J}$

soit il existe  $s, t \in \{1, 2, \dots, \nu\}$  tels que  $\boldsymbol{\pi}_-^{\lambda^2} = \{s\}$ ,  $\boldsymbol{\pi}_+^{\lambda^2} = \{t\}$  et  $\mathbf{a} = \mathbf{c} + \mathbf{op}^{\Upsilon}$  avec

$$\Upsilon : 0 \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^{r_1}} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^j} \oplus \mathbf{e}_{\alpha^s} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^t} \rightarrow 0 \in \mathcal{S}_{op}$$

et  $\text{Supp}(\alpha^j) \supset \text{Supp}(\alpha^{r_1})$ .

2. Si  $\mathbf{c}' \prec \mathbf{a}'$  et  $M = 1$  et s'il existe une opération élémentaire  $\Upsilon'$  menant de  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}'}$  à  $\mathcal{O}_{\mathbf{a}'}$  alors il existe une unique opération élémentaire menant de  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}}$  à  $\mathcal{O}_{\mathbf{a}}$ . Plus précisément, nous obtenons dans ce cas que

$$|J| = 0, \boldsymbol{\lambda}_J = (\lambda), \lambda \in \Lambda(j, \mathbf{c}')$$

et soit  $\lambda = \emptyset$  et  $\mathbf{a} = \mathbf{c} + \mathbf{op}^{\Upsilon'}$ , soit il existe  $s, t, y, z \in \{1, 2, \dots, \nu\}$  tels que  $\boldsymbol{\pi}_-^{\lambda} = \{s\}$ ,  $\text{op}_s^{\Upsilon'} = -1$ ,  $\boldsymbol{\pi}_+^{\lambda} = \{t\}$  et  $\mathbf{a} = \mathbf{c} + \mathbf{op}^{\Upsilon}$  avec

$$\Upsilon : 0 \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^t} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^j} \oplus \mathbf{e}_{\alpha^y} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^z} \rightarrow 0 \in \mathcal{S}_{op}$$

$$\Upsilon' : 0 \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^s} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^y} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^z} \rightarrow 0 \in \mathcal{S}_{op}$$

et  $\text{Supp}(\alpha^j) \subset \text{Supp}(\alpha^t)$ .

*Preuve du lemme.* Il faut montrer l'existence des opérations élémentaires, l'unicité est évidente. Nous avons  $M = \sum_{k=1}^{|J|+1} |\boldsymbol{\pi}_+^{\lambda^k}|$  (noter que  $c_t - \sum_{l=1}^{k-1} \pi_t^{\lambda^l} = c'_t + \sum_{l=k}^{|J|+1} \pi_t^{\lambda^l} = c'_t + \sum_{l=k+1}^{|J|+1} \pi_t^{\lambda^l} + 1 > 0$  par définition de  $\boldsymbol{\Lambda}_J$ ) et pour chaque partage  $\lambda$  il y a au moins un  $t$  tel que  $\pi_t^{\lambda} = 1$  (i.e.  $|\boldsymbol{\pi}_+^{\lambda}| \geq 1$ ).

*Preuve de 1.* Comme nous avons supposé que  $M \leq 2$ , il faut que  $|J| \leq 1$ . Supposons que  $|J| = 0$ , donc  $\lambda_J = (\lambda)$ ,  $\lambda \in \Lambda(j, \mathbf{c}')$ . Alors  $\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \pi^{\emptyset, j} = \mathbf{c}' + \pi^{\emptyset, j} = \mathbf{c} + \pi^{\emptyset, j} - \pi^\lambda$  et  $a_t = 0$  pour  $t < j$ . Donc  $\pi_t^\lambda \geq 0$  pour tout  $t < j$ , donc  $\pi_t^\lambda = 0$  pour tout  $t < j$  (par le lemme 1.5.3) et forcément  $\lambda = \emptyset$  parce que  $\lambda$  est un  $\alpha^j$ -partage. D'où  $\pi^\lambda = \pi^{\emptyset, j}$  et  $\mathbf{a} = \mathbf{c}$ , contradiction.

Ainsi  $|J| = 1, M = 2, \lambda_J = (\lambda^1, \lambda^2), \lambda^1 \in \Lambda(r_1, \mathbf{c}' + \pi^{\lambda^2})$  et  $\lambda^2 \in \Lambda(r_2, \mathbf{c}')$ . De plus,  $\alpha^{r_1} + \alpha^{r_2} = \alpha^j$  par définition de  $J$ , donc  $r_1 < j < r_2$  et

$$\Upsilon_J : 0 \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^{r_1}} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^j} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^{r_2}} \rightarrow 0 \in \mathcal{S}_{op}$$

Montrons maintenant que  $\lambda^1 = \emptyset$ . Supposons le contraire. Alors il existe  $t < r_1 < j$  tel que  $\pi_t^{\lambda^1} = -1$  et alors  $[\mathbf{e}_{\alpha^{r_1}}, \mathbf{e}_{\alpha^t}]^1 = 1$ , et comme le terme du milieu dans  $\Upsilon_J$  est indécomposable, il faut que  $[\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}_{\alpha^{r_2}}] = 0$  (ceci est une conséquence facile de la proposition 1.4.1). Mais  $\mathbf{a} = \mathbf{c} + \pi^{\emptyset, j} - \pi^{\lambda^1} - \pi^{\lambda^2}$  et  $a_t = 0$ , donc forcément  $\pi_t^{\lambda^2} = 1$  et alors  $[\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}_{\alpha^{r_2}}] = 1$ , ce qui est impossible.

Si  $\lambda^2 = \emptyset$  nous avons  $\mathbf{a} = \mathbf{c} + \pi^{\emptyset, j} - \pi^{\emptyset, r_1} - \pi^{\emptyset, r_2} = \mathbf{c} + \mathbf{op}^{\Upsilon_J}$ . Supposons alors  $\lambda^2 \neq \emptyset$ .  $M = 2$  implique  $|\pi_+^{\lambda^2}| = 1$ , disons  $\pi_+^{\lambda^2} = \{t\}$ . Alors pour chaque  $s \in \pi_-^{\lambda^2}$ , nous avons  $[\mathbf{e}_{\alpha^s}, \mathbf{e}_{\alpha^{r_2}}] = 0$  par la proposition 1.5.7 et  $[\mathbf{e}_{\alpha^{r_2}}, \mathbf{e}_{\alpha^s}]^1 = 1$ . Nous allons montrer que  $|\pi_-^{\lambda^2}| = 1$ . Supposons le contraire, donc  $|\pi_-^{\lambda^2}| = 2$  par la proposition 1.5.7. Disons  $\pi_-^{\lambda^2} = \{s, s'\}$  avec  $s < s'$ . Les positions de  $\alpha^s, \alpha^{s'}$  dans le carquois d'Auslander-Reiten sont données par le corollaire 1.5.8. D'autre part  $\Upsilon_J : 0 \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^{r_1}} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^j} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^{r_2}} \rightarrow 0$  implique  $([\mathbf{e}_{\alpha^j}, \mathbf{e}_{\alpha^{r_2}}], [\mathbf{e}_{\alpha^{r_2}}, \mathbf{e}_{\alpha^j}]^1) = (1, 0)$ . Donc dans le carquois d'Auslander-Reiten  $\Gamma$ ,  $\alpha^j$  est sur une même diagonale que  $\alpha^{r_2}$ , et il y a un chemin dans  $\Gamma$  de  $\alpha^s$  jusqu'à  $\alpha^j$  ou de  $\alpha^{s'}$  jusqu'à  $\alpha^j$ , d'où  $s < j$ . Comme  $a_s = 0, c_s \geq 0, \pi_s^{\lambda^2} = -1$  et  $\mathbf{a} = \mathbf{c} + \pi^{\emptyset, j} - \pi^{\emptyset, r_1} - \pi^{\lambda^2}$ , il faut que  $s = r_1$ . Ainsi,  $[\mathbf{e}_{\alpha^{r_1}}, \mathbf{e}_{\alpha^{s'}}]^1 = 0$  car  $\pi_{r_1}^{\lambda^2} = \pi_{s'}^{\lambda^2} = -1$ , et l'exactitude de la suite  $\text{Hom-Ext}(\Upsilon_J, \mathbf{e}_{\alpha^{s'}})$  donne

$$0 = -[\mathbf{e}_{\alpha^j}, \mathbf{e}_{\alpha^{s'}}]^1 + [\mathbf{e}_{\alpha^{r_2}}, \mathbf{e}_{\alpha^{s'}}]^1.$$

Donc  $[\mathbf{e}_{\alpha^j}, \mathbf{e}_{\alpha^{s'}}]^1 = 1$  et en particulier  $s' < j$ , d'où  $a_{s'} = 0$  et alors  $s' = r_1$ , contradiction.

Alors  $|\pi_-^{\lambda^2}| = 1$ , disons  $\pi_-^{\lambda^2} = \{s\}$ . Nous avons  $\mathbf{a} = \mathbf{c} - \pi^{\emptyset, r_1} + \pi^{\emptyset, j} + \pi^{\emptyset, s} - \pi^{\emptyset, t}$ . Notons que si  $s = r_1$  alors  $j = t$  et  $\mathbf{a} = \mathbf{c}$ , contradiction. Donc  $s \neq r_1$ , et  $s \geq j$  parce que  $a_s \geq 1$  et  $s \neq j$  parce que  $[\mathbf{e}_{\alpha^s}, \mathbf{e}_{\alpha^{r_2}}] = 0$ ; alors  $s > j$ .

Nous allons montrer maintenant qu'il y a une suite exacte non-scindée

$$\Upsilon : 0 \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^{r_1}} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^j} \oplus \mathbf{e}_{\alpha^s} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^t} \rightarrow 0$$

telle que  $\mathbf{a} = \mathbf{c} + \mathbf{op}^\Upsilon$ : Nous avons les deux suites exactes non-scindées

$$\begin{aligned} \Upsilon_J & : 0 \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^{r_1}} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^j} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^{r_2}} \rightarrow 0 \\ \Upsilon_{\lambda^2} & : 0 \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^s} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^t} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^{r_2}} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Disons que  $\Theta(\alpha^{r_2}) = (z, i)$  est la position de  $\alpha^{r_2}$  dans le carquois d'Auslander-Reiten. Alors  $\Theta(\alpha^j)$  (respectivement  $\Theta(\alpha^t)$ ) est sur une des diagonales  $\{(z, k) \mid 1 \leq k < i\}$  et  $\{(z - k + i, k) \mid i < k \leq n\}$  passant par  $(z, i)$ . Disons sans perte de généralité que  $\Theta(\alpha^j) = (z, k)$ . Nous montrons d'abord que  $\Theta(\alpha^t) = (z, k')$  pour un  $k' > k$ . Supposons que  $\Theta(\alpha^t)$  est sur l'autre diagonale,  $\Theta(\alpha^t) = (z - k' + i, k')$ . Alors  $\Theta(\alpha^s) = (z - k' + i, k' - i)$  et  $[\mathbf{e}_{\alpha^j}, \mathbf{e}_{\alpha^s}]^1 = 1$ , d'où  $s < j$ , contradiction. Donc  $\Theta(\alpha^t) = (z, k')$  et  $k' > k$  parce que  $j < s < t$ . De plus,  $\Theta(\alpha^s) = (z - n + i - 1, n - i + 1 + k')$  et  $\Theta(\alpha^{r_1}) = (z - n + i - 1, n - i + 1 + k)$ , et les sommets  $\alpha^{r_1}$ ,  $\alpha^s$ ,  $\alpha^j$ ,  $\alpha^t$  "forment un rectangle" dans  $\Gamma$ . Alors  $\Upsilon$  est une suite exacte non-scindée et  $\mathbf{a} = \mathbf{c} + \mathbf{op}^{\Upsilon}$ . De plus,  $\Upsilon_J$  implique que  $\text{Supp}(\alpha^j) \supset \text{Supp}(\alpha^{r_1})$ , ce qui montre 1.

*Preuve de 2.* Notons  $\Upsilon'$  la suite exacte non-scindée correspondante à l'opération élémentaire menant de  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}'}$  à  $\mathcal{O}_{\mathbf{a}'}$ , i.e.  $\mathbf{a}' = \mathbf{c}' + \mathbf{op}^{\Upsilon'}$ .  $M = 1$  implique  $|J| = 0$ ,  $\lambda_J = (\lambda)$ ,  $\lambda \in \Lambda(j, \mathbf{c}')$ . Si  $\lambda = \emptyset$  alors  $\mathbf{a} - \mathbf{c} = \mathbf{a}' - \mathbf{c}'$  et  $\mathbf{a} = \mathbf{c} + \mathbf{op}^{\Upsilon'}$ . Supposons  $\lambda \neq \emptyset$ . Comme  $M = 1$ , nous avons  $|\pi_{\pm}^{\lambda}| = 1$ , disons  $\pi_{\pm}^{\lambda} = \{t\}$ ,  $t < j$ . Alors  $\mathbf{a} = \mathbf{c} + \mathbf{op}^{\Upsilon'} + \pi^{\emptyset, j} + \pi_{\pm}^{\lambda} - \pi^{\emptyset, t}$ . Soit  $s \in \pi_{\pm}^{\lambda}$ , donc  $s < j$ . Alors  $0 = a_s = c_s + \text{op}_s^{\Upsilon'} + 1$  et forcément  $\text{op}_s^{\Upsilon'} = -1$ . De plus, pour tout  $y$  tel que  $\text{op}_y^{\Upsilon'} = 1$ , nous avons  $a'_y = c'_y + 1$ , donc  $y \geq j$  (sinon  $a'_y = 0$ ).

Nous allons montrer maintenant qu'il n'existe qu'un seul  $y$  tel que  $\mathbf{op}_y^{\Upsilon'} = 1$ , i.e.  $\Upsilon'$  est de la forme

$$\Upsilon' : 0 \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^s} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^y} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^z} \rightarrow 0.$$

Disons que  $\Theta(\alpha^j) = (w, i)$  est la position de  $\alpha^j$  dans le carquois d'Auslander-Reiten. Par la proposition 1.5.7 et par le fait que  $s \in \pi_{\pm}^{\lambda}$ , nous avons

$$([\mathbf{e}_{\alpha^s}, \mathbf{e}_{\alpha^j}], [\mathbf{e}_{\alpha^j}, \mathbf{e}_{\alpha^s}]^1) = (0, 1)$$

et alors  $\Theta(\alpha^s)$  est sur une des deux diagonales suivantes:  $\{(w - k, k) \mid 1 \leq k < n - i\}$ ,  $\{(w + i - n - 1, k) \mid n - i + 1 < k \leq n\}$ . Supposons sans perte de généralité que  $\Theta(\alpha^s) = (w - k, k)$ . Or s'il existe une suite exacte non-scindée  $0 \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^s} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^y} \oplus \mathbf{e}_{\alpha^{y'}} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^z} \rightarrow 0$  alors ou  $\Theta(\alpha^y)$  ou  $\Theta(\alpha^{y'})$  est égal à  $(w - k', k')$  avec  $k' < k$ . Mais ceci implique que  $y < j$  ou  $y' < j$ , contradiction. Donc  $\Upsilon'$  est de la forme

$$\Upsilon' : 0 \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^s} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^y} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^z} \rightarrow 0.$$

De plus, il faut que  $\pi_{\pm}^{\lambda} = \{s\}$ , donc

$$\Upsilon_{\lambda} : 0 \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^s} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^t} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^j} \rightarrow 0$$

est une suite exacte non-scindée.

Disons encore que  $\Theta(\alpha^j) = (w, i)$  et supposons sans perte de généralité que  $\Theta(\alpha^s) = (w - k, k)$ . Alors  $\Theta(\alpha^t) = (w - k, k + i)$ ,  $\Theta(\alpha^z) = (w, k')$  et  $\Theta(\alpha^y) = (w - k, k + k')$  avec  $k' > i$  puisque  $j < y$ . Alors il y a une suite exacte non-scindée

$$\Upsilon : 0 \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^t} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^j} \oplus \mathbf{e}_{\alpha^y} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^z} \rightarrow 0$$

et  $\mathbf{a} = \mathbf{c} + \mathbf{op}^\Upsilon$ . De plus,  $\Upsilon_\lambda$  implique que  $\text{Supp}(\alpha^j) \subset \text{Supp}(\alpha^t)$ .  $\square$

*Preuve de la proposition.* Par récurrence sur  $|\mathbf{a}| \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{t=1}^\nu a_t$ . Si  $|\mathbf{a}| = 0$  il n'y a rien à prouver. Supposons  $|\mathbf{a}| \geq 1$ . Soit  $M$  comme dans le lemme et supposons que  $\tilde{\Omega}_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}}|_{u=1} \neq 0$ . La formule du théorème 3.2.2 décrit  $\Omega_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}}$  en termes des  $\Omega_{\mathbf{c}'}^{\mathbf{a}'}$ . Comme  $|\mathbf{a}'| < |\mathbf{a}|$ , l'hypothèse de récurrence implique qu'il existe une opération élémentaire menant de  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}'}$  à  $\mathcal{O}_{\mathbf{a}'}$  si  $\mathbf{c}' \prec \mathbf{a}'$  et si  $\tilde{\Omega}_{\mathbf{c}'}^{\mathbf{a}'}|_{u=1} \neq 0$ . Par la proposition 4.1.2, nous savons que  $(u-1)$  divise  $\Omega_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}}$ . Donc  $\tilde{\Omega}_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}}|_{u=1} \neq 0$  implique que  $(u-1)^2 \nmid \Omega_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}}$ . Donc au moins un terme de la somme dans le théorème 3.2.2 n'est pas divisible par  $(u-1)^2$ , i.e. il existe un  $\mathbf{c}'$  réalisable,  $J \in J_{\mathbf{c}'}$ ,  $\lambda_J \in \Lambda_J$  tels que

$$(u-1)^2 \nmid \frac{\prod_{k=1}^{|\mathbf{c}'|+1} \prod_{t \in \pi_+^{\lambda_k}} \Omega_{\mathbf{c}'}^{\mathbf{a}'} \left( u^{c_t - \sum_{l=1}^{k-1} \pi_t^{\lambda^l}} - 1 \right)}{u^{a_j} - 1}.$$

Il y a deux cas possibles :

1.  $\mathbf{c}' = \mathbf{a}'$ , donc  $\Omega_{\mathbf{c}'}^{\mathbf{a}'} = 1$ ,  $M \leq 2$  et la proposition est vrai par le lemme 4.1.4.1.
2.  $\mathbf{c}' \prec \mathbf{a}'$ , donc  $(u-1) \mid \Omega_{\mathbf{c}'}^{\mathbf{a}'}$ ,  $M \leq 1$ . Si  $(u-1)^2 \nmid \Omega_{\mathbf{c}'}^{\mathbf{a}'}$  alors il existe une opération élémentaire menant de  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}'}$  à  $\mathcal{O}_{\mathbf{a}'}$ , de plus  $M = 1$  et ainsi, la proposition est vraie par le lemme 4.1.4.2.

Enfin, si  $(u-1)^2 \mid \Omega_{\mathbf{c}'}^{\mathbf{a}'}$  alors  $M = 0$ , ce qui contredit le fait que pour chaque  $\lambda$  il existe au moins un  $t$  tel que  $\pi_t^\lambda = 1$ .  $\square$

Nous allons maintenant calculer  $\tilde{\Omega}_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}}|_{u=1}$  dans le cas où il y a une opération élémentaire menant de  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}}$  à  $\mathcal{O}_{\mathbf{a}}$ .

**Lemme 4.1.5** *Soit  $\mathbf{c} \prec \mathbf{a} = (0, \dots, 0, a_j, a_{j+1}, \dots, a_\nu)$  et  $\Upsilon : 0 \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^{s_1}} \rightarrow V \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^{s_2}} \rightarrow 0$  une suite exacte non scindée telle que  $\mathbf{c} + \mathbf{op}^\Upsilon = \mathbf{a}$ . Alors il existe  $s, x, y \in \{1, 2, \dots, \nu\}$  tels que*

$$\begin{aligned} & \tilde{\Omega}_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}}|_{u=1} \\ &= \frac{c_j}{a_j} \tilde{\Omega}_{\mathbf{c} - \pi^{\theta, j}}^{\mathbf{a} - \pi^{\theta, j}}|_{u=1} \mathcal{V}(c_j \neq 0) - \frac{c_{s_1} c_{s_2}}{c_j + 1} \mathcal{V}(V = \mathbf{e}_{\alpha^j}) \\ & \quad - \frac{c_{s_1} c_{s_2}}{c_j + 1} \mathcal{V}(V = \mathbf{e}_{\alpha^j} \oplus \mathbf{e}_{\alpha^s}, \text{Supp}(\alpha^{s_1}) \subset \text{Supp}(\alpha^j)) \\ & \quad + \frac{c_{s_1}}{c_j + 1} \tilde{\Omega}_{\mathbf{c} + \pi^{\theta, x} - \pi^{\theta, s_1}}^{\mathbf{a} - \pi^{\theta, j}}|_{u=1} \mathcal{V}(V = \mathbf{e}_{\alpha^j} \oplus \mathbf{e}_{\alpha^y}, \text{Supp}(\alpha^{s_1}) \supset \text{Supp}(\alpha^j)) \end{aligned}$$

où  $\mathcal{V}(A) = 1$  si  $A$  est vrai et  $\mathcal{V}(A) = 0$  si  $A$  est faux.



*Preuve.* Soit  $M$  comme dans le lemme 4.1.4. Par la formule du théorème 3.2.2, nous avons

$$\tilde{\Omega}_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}} \Big|_{u=1} = \sum_{\substack{\mathbf{c}' \preceq \mathbf{a}' \\ \mathbf{c}' \text{ réalisable}}} \sum_{J \in \mathcal{J}_{\mathbf{c}'}} \sum_{\substack{\boldsymbol{\lambda}_J \in \boldsymbol{\Lambda}_J \\ \mathbf{c} - \mathbf{c}' = \sum_k \pi^{\lambda^k}}} (-1)^{|J|} \rho(u)$$

où

$$\rho(u) = \frac{\prod_{k=1}^{|J|+1} \prod_{t \in \pi^{\lambda^k}} \left( u^{c_t - \sum_{l=1}^{k-1} \pi_t^{\lambda^l}} - 1 \right) \Omega_{\mathbf{c}'}^{\mathbf{a}'}}{(u^{a_j} - 1)(u - 1)} \Big|_{u=1}.$$

Supposons que  $\rho(u) \neq 0$ , i.e.  $(u - 1)^2$  divise le numérateur de  $\rho(u)$  et  $(u - 1)^3$  ne le divise pas. Il y a deux cas possibles :

1.  $\mathbf{c}' = \mathbf{a}'$ ,  $M = 2$ .
2.  $\mathbf{c}' \prec \mathbf{a}'$ ,  $M = 1$ ,  $(u - 1)^2 \nmid \Omega_{\mathbf{c}'}^{\mathbf{a}'}$ , donc  $\tilde{\Omega}_{\mathbf{c}'}^{\mathbf{a}'} \Big|_{u=1} \neq 0$  et par la proposition 4.1.3 il existe une opération élémentaire  $\Upsilon'$  menant de  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}'}$  à  $\mathcal{O}_{\mathbf{a}'}$ .

Considérons ces deux cas séparément:

1. Par le lemme 4.1.4.1, nous avons  $|J| = 1$ ,  $\boldsymbol{\lambda}_J = (\lambda^1, \lambda^2)$ , il existe  $r_1, r_2$  tels que  $\Upsilon_J : 0 \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^{r_1}} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^j} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^{r_2}} \rightarrow 0$  est une suite exacte non-scindée et  $\lambda^i$  est un  $\alpha^{r_i}$ -partage,  $i = 1, 2$ . De plus  $\lambda^1 = \emptyset$  et ou bien  $\Upsilon = \Upsilon_J$ ,  $\lambda^2 = \emptyset$  et alors

$$\rho(u) = \frac{(u^{c_{r_1}} - 1)(u^{c_{r_2}} - 1)}{(u^{a_j} - 1)(u - 1)} \Big|_{u=1} = \frac{c_{r_1} c_{r_2}}{a_j} = \frac{c_{s_1} c_{s_2}}{c_j + 1};$$

ou bien  $\Upsilon : 0 \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^{r_1}} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^j} \oplus \mathbf{e}_{\alpha^s} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^t} \rightarrow 0$ ,  $\pi^{\lambda^2} = \pi^{\emptyset, t} - \pi^{\emptyset, s}$ ,  $\text{Supp}(\alpha^j) \supset \text{Supp}(\alpha^{s_1})$  et alors

$$\rho(u) = \frac{c_{r_1} c_t}{a_j} = \frac{c_{s_1} c_{s_2}}{c_j + 1}.$$

2. Par le lemme 4.1.4.2, nous avons ou bien  $\Upsilon = \Upsilon'$ ,  $|J| = 0$ ,  $\boldsymbol{\lambda}_J = (\lambda) = (\emptyset)$ , donc  $\mathbf{c}' = \mathbf{c} - \pi^{\emptyset, j}$  et alors

$$\rho(u) = \frac{u^{c_j} - 1}{u^{a_j} - 1} \Big|_{u=1} \tilde{\Omega}_{\mathbf{c} - \pi^{\emptyset, j}}^{\mathbf{a} - \pi^{\emptyset, j}} \Big|_{u=1} = \frac{c_j}{a_j} \tilde{\Omega}_{\mathbf{c} - \pi^{\emptyset, j}}^{\mathbf{a} - \pi^{\emptyset, j}} \Big|_{u=1};$$

ou bien il existe  $x, y \in \{1, 2, \dots, \nu\}$  tels que  $\Upsilon' : 0 \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^x} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^y} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^{s_2}} \rightarrow 0$ ,  $\Upsilon : 0 \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^{s_1}} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^j} \oplus \mathbf{e}_{\alpha^y} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^{s_2}} \rightarrow 0$ ,  $|J| = 0$ ,  $\boldsymbol{\lambda}_J = (\lambda)$ ,  $\pi^{\lambda} = \pi^{\emptyset, s_1} - \pi^{\emptyset, x}$ ,  $\text{Supp}(\alpha^j) \subset \text{Supp}(\alpha^{s_1})$ , donc  $\mathbf{c}' = \mathbf{c} + \pi^{\emptyset, x} + \pi^{\emptyset, s_1}$  et alors

$$\rho(u) = \frac{u^{c_{s_1}} - 1}{u^{a_j} - 1} \Big|_{u=1} \tilde{\Omega}_{\mathbf{c} + \pi^{\emptyset, x} - \pi^{\emptyset, s_1}}^{\mathbf{a} - \pi^{\emptyset, j}} \Big|_{u=1} = \frac{c_{s_1}}{a_j} \tilde{\Omega}_{\mathbf{c} + \pi^{\emptyset, x} - \pi^{\emptyset, s_1}}^{\mathbf{a} - \pi^{\emptyset, j}} \Big|_{u=1}$$

et  $a_j = c_j + 1$ .

Donc  $\tilde{\Omega}_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}}|_{u=1}$  s'écrit comme une somme d'au plus 4 termes, à savoir

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}}|_{u=1} &= \frac{c_j}{a_j} \tilde{\Omega}_{\mathbf{c}-\boldsymbol{\pi}^{\theta,j}}^{\mathbf{a}-\boldsymbol{\pi}^{\theta,j}}|_{u=1} \mathcal{V}(c_j \neq 0) - \frac{c_{s_1}c_{s_2}}{c_j+1} \mathcal{V}(V = \mathbf{e}_{\alpha^j}) \\ &\quad - \frac{c_{s_1}c_{s_2}}{c_j+1} \mathcal{V}(V = \mathbf{e}_{\alpha^j} \oplus \mathbf{e}_{\alpha^s}, \text{Supp}(\alpha^j) \supset \text{Supp}(\alpha^{s_1})) \\ &\quad + \frac{c_{s_1}}{c_j+1} \tilde{\Omega}_{\mathbf{c}+\boldsymbol{\pi}^{\theta,x}-\boldsymbol{\pi}^{\theta,s_1}}^{\mathbf{a}-\boldsymbol{\pi}^{\theta,j}}|_{u=1} \mathcal{V}(V = \mathbf{e}_{\alpha^j} \oplus \mathbf{e}_{\alpha^y}, \text{Supp}(\alpha^j) \subset \text{Supp}(\alpha^{s_1})) \end{aligned}$$

□

Pour toute opération élémentaire  $\Upsilon : 0 \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^{s_1}} \rightarrow V \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^{s_2}} \rightarrow 0 \in \mathcal{S}_{op}$  et  $\mathbf{c} \in \mathbf{N}^\nu$ , soit  $e(\Upsilon, \mathbf{c}) \stackrel{\text{déf}}{=} c_{s_1}c_{s_2}$ .

**Théorème 4.1.6** *Soient  $\mathbf{a} = (0, \dots, 0, a_j, a_{j+1}, \dots, a_\nu) \in \mathbf{N}^\nu$ ,  $\mathbf{c} \prec \mathbf{a}$  et  $\Upsilon \in \mathcal{S}_{op}(\mathbf{c})$  tels que  $\mathbf{c} + \mathbf{op}^\Upsilon = \mathbf{a}$ . Alors*

$$\tilde{\Omega}_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}}|_{u=1} = -e(\Upsilon, \mathbf{c}).$$

*Preuve.* Par récurrence sur  $|\mathbf{a}|$ . Si  $|\mathbf{a}| = 0$  il n'y a rien à prouver. Supposons que  $|\mathbf{a}| \geq 1$  et disons que  $\Upsilon : 0 \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^{s_1}} \rightarrow V \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^{s_2}} \rightarrow 0$ . Le lemme 4.1.5 implique que

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}}|_{u=1} &= \frac{c_j}{a_j} \tilde{\Omega}_{\mathbf{c}-\boldsymbol{\pi}^{\theta,j}}^{\mathbf{a}-\boldsymbol{\pi}^{\theta,j}}|_{u=1} \mathcal{V}(c_j \neq 0) - \frac{c_{s_1}c_{s_2}}{c_j+1} \mathcal{V}(V = \mathbf{e}_{\alpha^j}) \\ &\quad - \frac{c_{s_1}c_{s_2}}{c_j+1} \mathcal{V}(V = \mathbf{e}_{\alpha^j} \oplus \mathbf{e}_{\alpha^s}, \text{Supp}(\alpha^{s_1}) \subset \text{Supp}(\alpha^j)) \\ &\quad + \frac{c_{s_1}}{c_j+1} \tilde{\Omega}_{\mathbf{c}+\boldsymbol{\pi}^{\theta,x}-\boldsymbol{\pi}^{\theta,s_1}}^{\mathbf{a}-\boldsymbol{\pi}^{\theta,j}}|_{u=1} \mathcal{V}(V = \mathbf{e}_{\alpha^j} \oplus \mathbf{e}_{\alpha^y}, \text{Supp}(\alpha^{s_1}) \supset \text{Supp}(\alpha^j)). \end{aligned}$$

Notons que  $j \neq s_2$  parce que sinon, pour chaque facteur direct  $\mathbf{e}_{\alpha^t}$  de  $\mathbf{V}$ , nous aurions  $0 = a_t = c_t + 1$ , contradiction. Si  $j = s_1$  alors  $\tilde{\Omega}_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}}|_{u=1} = \frac{c_{s_1}}{a_{s_1}} \tilde{\Omega}_{\mathbf{c}-\boldsymbol{\pi}^{\theta,s_1}}^{\mathbf{a}-\boldsymbol{\pi}^{\theta,s_1}}|_{u=1}$ ,  $\mathbf{c} - \boldsymbol{\pi}^{\theta,s_1} + \mathbf{op}^\Upsilon = \mathbf{a} - \boldsymbol{\pi}^{\theta,s_1}$  et par récurrence

$$\tilde{\Omega}_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}}|_{u=1} = \frac{c_{s_1}}{a_{s_1}} (-e(\Upsilon, \mathbf{c} - \boldsymbol{\pi}^{\theta,s_1})) = -\frac{c_{s_1}}{a_{s_1}} (c_{s_1} - 1)c_{s_2} = -c_{s_1}c_{s_2},$$

(car  $a_{s_1} = (c_{s_1} - 1)$ ). Supposons maintenant que  $j \neq s_1$ . Dans le cas  $(V = \mathbf{e}_{\alpha^j} \oplus \mathbf{e}_{\alpha^y}, \text{Supp}(\alpha^{s_1}) \supset \text{Supp}(\alpha^j))$ , nous avons vu dans la preuve du lemme 4.1.5 qu'il existe  $\Upsilon' : 0 \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^x} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^y} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^{s_2}} \rightarrow 0 \in \mathcal{S}_{op}$  et alors  $\mathbf{a} - \boldsymbol{\pi}^{\theta,j} = (\mathbf{c} + \boldsymbol{\pi}^{\theta,x} - \boldsymbol{\pi}^{\theta,s_1}) + \mathbf{op}^{\Upsilon'}$  et  $c_x = a_x = 0$  car  $x < j$ . De plus, si  $c_{\alpha^j}$  est un facteur

direct de  $\mathbf{V}$  alors ou bien  $\text{Supp}(\alpha^{s_1}) \subset \text{Supp}(\alpha^j)$  ou bien  $\text{Supp}(\alpha^{s_1}) \supset \text{Supp}(\alpha^j)$ .  
Donc par récurrence

$$\begin{aligned}
\tilde{\Omega}_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}}|_{u=1} &= -\frac{c_j}{a_j} c_{s_1} c_{s_2} - \frac{c_{s_1} c_{s_2}}{c_j + 1} \mathcal{V}(V = \mathbf{e}_{\alpha^j}) \\
&\quad - \frac{c_{s_1} c_{s_2}}{c_j + 1} \mathcal{V}(V = \mathbf{e}_{\alpha^j} \oplus \mathbf{e}_{\alpha^s}, \text{Supp}(\alpha^{s_1}) \subset \text{Supp}(\alpha^j)) \\
&\quad - \frac{c_{s_1}}{c_j + 1} c_{s_2} \mathcal{V}(V = \mathbf{e}_{\alpha^j} \oplus \mathbf{e}_{\alpha^y}, \text{Supp}(\alpha^{s_1}) \supset \text{Supp}(\alpha^j)) \\
&= -c_{s_1} c_{s_2} \left( \frac{c_j}{a_j} + \frac{\mathcal{V}(c_j = a_j - 1)}{a_j} \right) \\
&= -c_{s_1} c_{s_2}
\end{aligned}$$

□

Noter que nous avons déterminé complètement  $\tilde{\Omega}_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}}|_{u=1}$ . Le dernier théorème nous en donne une expression d'une simplicité surprenante dans le cas où il y a une opération élémentaire menant de  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}}$  à  $\mathcal{O}_{\mathbf{a}}$  et par la proposition 4.1.3, nous savons que  $\tilde{\Omega}_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}}|_{u=1} = 0$  si une telle opération élémentaire n'existe pas. Ces résultats nous permettront dans les sections suivantes d'analyser la géométrie des variétés de carquois.

## 4.2 Lissité rationnelle

Considérons maintenant la situation suivante: Soient  $\mathbf{c}, \mathbf{c}' \in \mathbf{N}^{\nu}$  et  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}'}, \mathcal{O}_{\mathbf{c}}$  les orbites correspondantes telles que  $\mathbf{c}' \prec \mathbf{c}$  (i.e.  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}'} \subset \overline{\mathcal{O}_{\mathbf{c}}}$ ). Par la définition 1.3.3,  $\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{c}}}$  est rationnellement lisse en  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}'}$  si et seulement si  $\zeta_{\mathbf{c}'''}^{\mathbf{c}} = v^{d(\mathbf{c}''')-d(\mathbf{c})}$  pour tout  $\mathbf{c}' \preceq \mathbf{c}''' \preceq \mathbf{c}$ . Ici  $d(\mathbf{c}) = \dim \mathcal{O}_{\mathbf{c}}$ .

Ces polynômes  $\zeta_{\mathbf{c}'''}^{\mathbf{c}}$  satisfont les relations

$$\zeta_{\mathbf{c}'''}^{\mathbf{c}} = \sum_{\mathbf{c}'' : \mathbf{c}''' \preceq \mathbf{c}'' \preceq \mathbf{c}} \omega_{\mathbf{c}'''}^{\mathbf{c}''} \overline{\zeta_{\mathbf{c}''}^{\mathbf{c}}}.$$

Donc si  $\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{c}}}$  est rationnellement lisse en  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}'}$  alors

$$\zeta_{\mathbf{c}'''}^{\mathbf{c}} = \sum_{\mathbf{c}'' : \mathbf{c}''' \preceq \mathbf{c}'' \preceq \mathbf{c}} \omega_{\mathbf{c}'''}^{\mathbf{c}''} v^{-d(\mathbf{c}'')+d(\mathbf{c})}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
&\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{c}}}$$
 est rationnellement lisse en  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}'}$ 

$$\Leftrightarrow \sum_{\mathbf{c}'' : \mathbf{c}''' \preceq \mathbf{c}'' \preceq \mathbf{c}} \omega_{\mathbf{c}'''}^{\mathbf{c}''} v^{-d(\mathbf{c}'')+d(\mathbf{c})} = v^{d(\mathbf{c}''')-d(\mathbf{c})}, \quad \forall \mathbf{c}' \preceq \mathbf{c}''' \preceq \mathbf{c}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\mathbf{c}'' : \mathbf{c}''' \preceq \mathbf{c}'' \preceq \mathbf{c}} \Omega_{\mathbf{c}'''}^{\mathbf{c}''} v^{d(\mathbf{c}''')-d(\mathbf{c}'')} v^{-d(\mathbf{c}'')+d(\mathbf{c})} = v^{d(\mathbf{c}''')-d(\mathbf{c})}, \quad \forall \mathbf{c}' \preceq \mathbf{c}''' \preceq \mathbf{c}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\mathbf{c}'' : \mathbf{c}''' \preceq \mathbf{c}'' \preceq \mathbf{c}} \Omega_{\mathbf{c}'''}^{\mathbf{c}''} u^{d(\mathbf{c})-d(\mathbf{c}'')} = 1, \quad \forall \mathbf{c}' \preceq \mathbf{c}''' \preceq \mathbf{c}$$

Ainsi, nous obtenons une condition nécessaire et suffisante pour qu'une variété de carquois  $\overline{\mathcal{O}}_{\mathbf{c}}$  soit rationnellement lisse en  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}'}$  :

**Proposition 4.2.1** *Soit  $\overline{\mathcal{O}}_{\mathbf{c}}$  une variété de carquois de type  $A, D$  ou  $E$ . Alors  $\overline{\mathcal{O}}_{\mathbf{c}}$  est rationnellement lisse en  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}'}$ ,  $\mathbf{c}' \preceq \mathbf{c}$  si et seulement si*

$$\sum_{\mathbf{c}'' : \mathbf{c}''' \preceq \mathbf{c}'' \preceq \mathbf{c}} \Omega_{\mathbf{c}''}^{\mathbf{c}''} u^{d(\mathbf{c})-d(\mathbf{c}'')} = 1 \quad \text{pour tout } \mathbf{c}' \preceq \mathbf{c}''' \preceq \mathbf{c}$$

□

Considérons maintenant le cas  $\mathbf{c}''' = \mathbf{c}'$ . En dérivant la dernière équation nous obtenons

$$\sum_{\mathbf{c}'' : \mathbf{c}' \preceq \mathbf{c}'' \preceq \mathbf{c}} \left( \left( \frac{d}{du} \Omega_{\mathbf{c}''}^{\mathbf{c}''} \right) u^{d(\mathbf{c})-d(\mathbf{c}'')} + \Omega_{\mathbf{c}''}^{\mathbf{c}''} \left( \frac{d}{du} u^{d(\mathbf{c})-d(\mathbf{c}'')} \right) \right) = 0$$

et en évaluant en  $u = 1$

$$\sum_{\mathbf{c}'' : \mathbf{c}' \preceq \mathbf{c}'' \preceq \mathbf{c}} \left( \frac{d}{du} \Omega_{\mathbf{c}''}^{\mathbf{c}''} \Big|_{u=1} + \Omega_{\mathbf{c}''}^{\mathbf{c}''} \Big|_{u=1} (d(\mathbf{c}) - d(\mathbf{c}'')) \right) = 0.$$

Or,  $\Omega_{\mathbf{c}'}^{\mathbf{c}'} = 1$  et de plus, nous savons par la proposition 4.1.2 que  $\Omega_{\mathbf{c}''}^{\mathbf{c}''} \Big|_{u=1} = 0$  si  $\mathbf{c}' \neq \mathbf{c}''$  et la dernière équation devient

$$\left( \sum_{\mathbf{c}'' : \mathbf{c}' \prec \mathbf{c}'' \preceq \mathbf{c}} \frac{d}{du} \Omega_{\mathbf{c}''}^{\mathbf{c}''} \Big|_{u=1} \right) + d(\mathbf{c}) - d(\mathbf{c}') = 0. \quad (4.2)$$

Rappelons que  $\tilde{\Omega}_{\mathbf{c}''}^{\mathbf{c}''} \stackrel{\text{déf}}{=} \Omega_{\mathbf{c}''}^{\mathbf{c}''} \frac{1}{u-1}$  est un polynôme en  $u$  si  $\mathbf{c}' \neq \mathbf{c}''$ . Pour  $\mathbf{c}' \neq \mathbf{c}''$ , nous avons

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \Omega_{\mathbf{c}''}^{\mathbf{c}''} \Big|_{u=1} &= \frac{d}{du} \left( (u-1) \tilde{\Omega}_{\mathbf{c}''}^{\mathbf{c}''} \right) \Big|_{u=1} \\ &= \tilde{\Omega}_{\mathbf{c}''}^{\mathbf{c}''} \Big|_{u=1} + \left( (u-1) \frac{d}{du} \tilde{\Omega}_{\mathbf{c}''}^{\mathbf{c}''} \right) \Big|_{u=1} \\ &= \tilde{\Omega}_{\mathbf{c}''}^{\mathbf{c}''} \Big|_{u=1} \end{aligned}$$

et alors, l'équation (4.2) devient

$$\sum_{\mathbf{c}'' : \mathbf{c}' \prec \mathbf{c}'' \preceq \mathbf{c}} \tilde{\Omega}_{\mathbf{c}''}^{\mathbf{c}''} \Big|_{u=1} = d(\mathbf{c}') - d(\mathbf{c}). \quad (4.3)$$

Nous obtenons ainsi une condition nécessaire pour qu'une variété de carquois  $\overline{\mathcal{O}}_{\mathbf{c}}$  soit rationnellement lisse en  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}'}$  :

**Proposition 4.2.2** *Soit  $\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{c}}}$  une variété de carquois de type  $A, D$  ou  $E$ . Si  $\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{c}}}$  est rationnellement lisse en  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}'}$ ,  $\mathbf{c}' \preceq \mathbf{c}$  alors*

$$\sum_{\mathbf{c}'' : \mathbf{c}' \prec \mathbf{c}'' \preceq \mathbf{c}} \tilde{\Omega}_{\mathbf{c}''}^{\mathbf{c}'} \Big|_{u=1} = d(\mathbf{c}') - d(\mathbf{c})$$

□

Utilisons maintenant les résultats obtenus dans la section précédente pour le cas  $A_n$ .

**Théorème 4.2.3** *Soit  $\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{c}}}$  une variété de carquois de type  $A$ . Si  $\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{c}}}$  est rationnellement lisse en  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}'}$ ,  $\mathbf{c}' \preceq \mathbf{c}$  alors*

$$\sum_{\Upsilon} e(\Upsilon, \mathbf{c}') = \dim(E_{\mathbf{d}}) - d(\mathbf{c}) = \text{codim}_{E_{\mathbf{d}}}(\mathcal{O}_{\mathbf{c}})$$

où la somme est sur tous les  $\Upsilon \in \mathcal{S}_{op}(\mathbf{c}')$  tels que  $\mathbf{c}' + \mathbf{op}^{\Upsilon} \not\preceq \mathbf{c}$ .

*Preuve.* En appliquant la proposition 4.1.3 et le théorème 4.1.6 à l'équation de la proposition 4.2.2, nous obtenons

$$- \sum_{\Upsilon \in \mathcal{S}_{op}(\mathbf{c}')} e(\Upsilon, \mathbf{c}') + \sum_{\substack{\Upsilon \in \mathcal{S}_{op}(\mathbf{c}') \\ \mathbf{c}' + \mathbf{op}^{\Upsilon} \not\preceq \mathbf{c}}} e(\Upsilon, \mathbf{c}') = d(\mathbf{c}') - d(\mathbf{c}) \quad (4.4)$$

et il ne reste qu'à montrer que

$$\sum_{\Upsilon \in \mathcal{S}_{op}(\mathbf{c}')} e(\Upsilon, \mathbf{c}') = \dim(E_{\mathbf{d}}) - d(\mathbf{c}').$$

Mais ceci n'est que le lemme (3.2.1)

$$\dim(E_{\mathbf{d}}) - d(\mathbf{c}') = [\mathbf{e}(\mathbf{c}'), \mathbf{e}(\mathbf{c}')]^1 = \sum_{s,t=1}^{\nu} c'_s c'_t [\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}_{\alpha^s}]^1 = \sum_{\Upsilon \in \mathcal{S}_{op}(\mathbf{c}')} e(\Upsilon, \mathbf{c}')$$

□

Pour comprendre la somme dans le théorème précédent, il faut déterminer quand est-ce que nous avons  $\mathbf{c}' + \mathbf{op}^{\Upsilon} \not\preceq \mathbf{c}$ . Il y a d'une part le théorème 1.2.4 qui donne des critères équivalents et nous nous en servons dans la section suivante. D'autre part, il y a le lemme suivant qui donne un critère suffisant dont nous nous servons tout de suite. Le lemme est vrai dans les cas  $A, D, E$  (noter que dans les cas  $D$  et  $E$ ,  $R(h, k)$  ne forme pas un rectangle dans le carquois d'Auslander-Reiten).

**Lemme 4.2.4** Soit  $\mathcal{Q} = (\mathcal{Q}^0, \mathcal{Q}^1)$  un carquois de type  $A, D$  ou  $E$  et soit  $\mathbf{c} \in \mathbf{N}^\nu$  de  $\mathbf{i}$ -homogénéité  $\mathbf{d}$ . Soit  $h \rightarrow k \in \mathcal{Q}^1$  une flèche quelconque et  $\mathbf{c}' \in \mathbf{N}^\nu$  défini par

$$\mathbf{c}'_t = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in R(h, k) \\ c_t + c_{R(h, k)} & \text{si } \alpha^t \in \{\alpha_h, \alpha_k\} \\ c_t & \text{autrement.} \end{cases}$$

Autrement dit, si  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}}$  est l'orbite  $G_{\mathbf{d}} \cdot f$ ,  $f \in E_{\mathbf{d}}$ , alors  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}'} = G_{\mathbf{d}} \cdot f'$  avec

$$f'_{ij} = \begin{cases} f_{ij} & \text{si } \{i, j\} \neq \{h, k\} \\ 0 & \text{si } \{i, j\} = \{h, k\}. \end{cases}$$

Alors

$$\mathbf{c}' \preceq \mathbf{c}.$$

*Preuve.* Pour  $t \in F \setminus \{0\}$ , soit  $g^t \in G_{\mathbf{d}}$  défini par

$$g^t_i = \begin{cases} t \text{Id}_{F^{d_i}} & \text{si } i \text{ est dans la composante de } k \text{ dans } \Omega \setminus \{h \rightarrow k\} \\ \text{Id}_{F^{d_i}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Or soit  $f \in \mathcal{O}_{\mathbf{c}}$ . Il suffit de montrer que  $f' \in \overline{\mathcal{O}_{\mathbf{c}'}}$  où

$$f'_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } \{i, j\} = \{h, k\} \\ f_{ij} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} (g^t \cdot f)_{ij} &= g^t_j \circ f_{ij} \circ (g^t_i)^{-1} \\ &= \begin{cases} t f_{hk} & \text{si } \{i, j\} = \{h, k\} \\ f_{ij} & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

car si  $\{i, j\} \neq \{h, k\}$  alors  $i$  et  $j$  sont dans la même composante de  $\Omega \setminus \{h \rightarrow k\}$ . Mais  $g^t \cdot f \in \mathcal{O}_{\mathbf{c}}$  pour tout  $t \in F \setminus \{0\}$  et quand  $t$  tend vers 0, alors  $g^t \cdot f$  tend vers  $f'$ , d'où  $f' \in \overline{\mathcal{O}_{\mathbf{c}'}}$ .  $\square$

Maintenant, nous considérons le cas spécial  $\mathbf{c}' = \mathbf{c}^0$  avec

$$\mathbf{c}^0_t = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha^t \text{ n'est pas une racine simple} \\ d_i & \text{si } \alpha^t = \alpha_i. \end{cases}$$

Noter que  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}^0}$  consiste seulement en l'élément neutre de  $E_{\mathbf{d}}$  et alors  $\mathbf{c}^0 \preceq \mathbf{c}$  pour tout  $\mathbf{c}$  de  $\mathbf{i}$ -homogénéité  $\mathbf{d}$  et  $\dim(\mathcal{O}_{\mathbf{c}^0}) = 0$ . Pour chaque flèche  $i \rightarrow j \in \Omega^1$ , notons par  $\Upsilon_{ij}$  l'opération élémentaire  $0 \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha_j} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha_i + \alpha_j} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha_i} \rightarrow 0$  et soit

$\mathbf{c}^{ij} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{c}^0 + \mathbf{op}^{\Upsilon_{ij}}$ . Noter bien que  $\mathbf{c}^{ij} \in \mathbf{N}^\nu$  si et seulement si  $d_i$  et  $d_j$  sont non-nuls et que dans ce cas

$$\mathcal{O}_{\mathbf{c}^{ij}} = \{f \in E_{\mathbf{d}} \mid rk(f_{ij}) = 1 \text{ et } f_{hk} = 0 \text{ si } \{i, j\} \neq \{h, k\}\}$$

Alors  $\mathcal{S}_{op}(\mathbf{c}^0) = \{\Upsilon_{ij} \mid i \rightarrow j \in \Omega^1 \text{ et } d_i d_j \neq 0\}$ . Ainsi

$$\sum_{\substack{\Upsilon \in \mathcal{S}_{op}(\mathbf{c}^0) \\ \mathbf{c}^0 + \mathbf{op}^{\Upsilon} \not\leq \mathbf{c}}} e(\Upsilon, \mathbf{c}^0) = \sum_{\substack{i \rightarrow j \\ \mathbf{c}^{ij} \not\leq \mathbf{c}}} d_i d_j. \quad (4.5)$$

Nous utiliserons la notation suivante:  $c_A \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{t \in A} c_t$ .

**Lemme 4.2.5** *Pour chaque arête  $i \rightarrow j \in \mathcal{Q}^1$  telle que  $d_i, d_j \neq 0$ , nous avons*

$$\mathbf{c}^{ij} \preceq \mathbf{c} \quad \Leftrightarrow \quad c_{R(i,j)} \geq 1.$$

*Preuve.* Supposons sans perte de généralité que  $i \rightarrow j$ . Soit  $\mathbf{c}^{ij} \preceq \mathbf{c}$ . Par la proposition 1.4.1, nous avons

$$c_{R(i,j)} = \begin{cases} d_i - [\mathbf{e}_{\alpha_{R \leftarrow [i]}}, \mathbf{e}(\mathbf{c})] & \text{si } i < j \\ d_i - [\mathbf{e}_{\alpha_{R \rightarrow [i]}}, \mathbf{e}(\mathbf{c})] & \text{si } i > j \end{cases},$$

tandis que  $[\mathbf{e}_{\alpha_{R \leftarrow [i]}}, \mathbf{e}(\mathbf{c}^{ij})] = d_i - 1$  si  $i < j$  et  $[\mathbf{e}_{\alpha_{R \rightarrow [i]}}, \mathbf{e}(\mathbf{c}^{ij})] = d_i - 1$  si  $i > j$ . Mais comme  $\mathbf{c}^{ij} \preceq \mathbf{c}$ , le théorème 1.2.4 implique que  $[\mathbf{e}_{\alpha_{R \leftarrow [i]}}, \mathbf{e}(\mathbf{c}^{ij})] \geq [\mathbf{e}_{\alpha_{R \leftarrow [i]}}, \mathbf{e}(\mathbf{c})]$  et  $[\mathbf{e}_{\alpha_{R \rightarrow [i]}}, \mathbf{e}(\mathbf{c}^{ij})] \geq [\mathbf{e}_{\alpha_{R \rightarrow [i]}}, \mathbf{e}(\mathbf{c})]$ , d'où  $c_{R(i,j)} \geq 1$ .

Pour montrer l'autre implication, supposons  $c_{R(i,j)} \geq 1$ . Soit  $\mathbf{c}' \in \mathbf{N}^\nu$  donné par

$$c'_t = \begin{cases} d_h & \text{si } \alpha^t = \alpha_h, h \neq i, j \\ d_h - c_{R(i,j)} & \text{si } \alpha^t = \alpha_h, h = i, j \\ c_{R(i,j)} & \text{si } \alpha^t = \alpha_i + \alpha_j \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

En appliquant le lemme 4.2.4 successivement à chaque flèche  $(h \rightarrow k) \neq (i \rightarrow j)$ , nous voyons que  $\mathbf{c}' \preceq \mathbf{c}$ . Mais  $\mathbf{c}^{ij} \preceq \mathbf{c}'$  parce que  $\mathbf{c}^{ij} + (c_{R(i,j)} - 1)\mathbf{op}^{\Upsilon_{ij}} = \mathbf{c}'$ . Donc  $\mathbf{c}^{ij} \preceq \mathbf{c}'$ .  $\square$

Maintenant, nous pouvons démontrer notre résultat principal:

**Théorème 4.2.6** *Une variété de carquois de type  $A_n$  est lisse si et seulement si elle est rationnellement lisse.*

*Preuve.* Une variété est rationnellement lisse si elle est lisse (c'est une conséquence du fait que la cohomologie d'intersection d'une variété lisse est la cohomologie singulière). Il faut alors montrer l'autre implication. Une variété de carquois de type  $A_n$  est par définition l'adhérence  $\overline{\mathcal{O}_c}$  d'une orbite  $\mathcal{O}_c$  de l'action du groupe  $G_{\mathbf{d}} = \prod_{i=1}^n GL_{d_i}(F)$  sur l'espace vectoriel  $E_{\mathbf{d}} = \bigoplus_{i \rightarrow j \in \mathcal{Q}^1} \text{Hom}_F(F^{d_i}, F^{d_j})$ .

Ici  $\mathbf{d}$  est l' $\mathbf{i}$ -homogénéité de  $\mathbf{c}$ . Supposons que  $\overline{\mathcal{O}_c}$  est rationnellement lisse. Alors le théorème 4.2.3 en combinaison avec le lemme précédent et (4.5) donne

$$\dim(E_{\mathbf{d}}) - d(\mathbf{c}) = \sum_{\substack{i \rightarrow j \\ c_{R(i,j)}=0}} d_i d_j. \quad (4.6)$$

Soient  $\mathcal{F} = \{i \rightarrow j \in \mathcal{Q}^1 \mid c_{R(i,j)} = 0\}$  et  $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \dots, \mathcal{Q}_{|\mathcal{F}|+1}$  les composantes connexes de  $\mathcal{Q} \setminus \mathcal{F}$ . Soit  $f \in E_{\mathbf{d}}$  tel que

$$\mathcal{O}_c = G_{\mathbf{d}} \cdot f = \{g_k f_{hk} g_h^{-1} \mid h \rightarrow k \in \mathcal{Q}^1, (g_1, \dots, g_n) \in G_{\mathbf{d}}\}.$$

Alors  $f_{hk} = 0$  pour tout  $h \rightarrow k \in \mathcal{F}$  (parce que si  $f_{hk} \neq 0$  alors  $c_{R(h,k)} \neq 0$ ) et  $\mathcal{O}_c$  est un produit direct

$$\mathcal{O}_c = \left( \bigoplus_{l=1}^{|\mathcal{F}|+1} \{g_k f_{hk} g_h^{-1} \mid h \rightarrow k \in \mathcal{Q}_l^1, g_i \in GL_{d_i}(F) \forall i \in \mathcal{Q}_l^0\} \right) \oplus \left( \bigoplus_{h \rightarrow k \in \mathcal{F}} 0 \right).$$

Soit  $E_{\mathbf{d},l} = \bigoplus_{h \rightarrow k \in \mathcal{Q}_l^1} \text{Hom}_F(F^{d_h}, F^{d_k})$ , ( $l = 1, 2, \dots, |\mathcal{F}| + 1$ ). Alors

$$E_{\mathbf{d}} = \left( \bigoplus_{l=1}^{|\mathcal{F}|+1} E_{\mathbf{d},l} \right) \oplus \left( \bigoplus_{h \rightarrow k \in \mathcal{F}} \text{Hom}_F(F^{d_h}, F^{d_k}) \right)$$

et  $\mathcal{O}_c$  et  $\overline{\mathcal{O}_c}$  sont dans  $\left( \bigoplus_{l=1}^{|\mathcal{F}|+1} E_{\mathbf{d},l} \right) \oplus 0$ . Or

$$\begin{aligned} \dim E_{\mathbf{d}} - \dim \left( \bigoplus_{l=1}^{|\mathcal{F}|+1} E_{\mathbf{d},l} \right) &= \dim \left( \bigoplus_{h \rightarrow k \in \mathcal{F}} \text{Hom}_F(F^{d_h}, F^{d_k}) \right) \\ &= \sum_{h \rightarrow k \in \mathcal{F}} d_h d_k \stackrel{(4.6)}{=} \dim(E_{\mathbf{d}}) - d(\mathbf{c}). \end{aligned}$$

Donc  $\overline{\mathcal{O}_c} = \bigoplus_{l=1}^{|\mathcal{F}|+1} E_{\mathbf{d},l}$  et ainsi  $\overline{\mathcal{O}_c}$  est lisse.  $\square$

**Corollaire 4.2.7** Soit  $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n)$ . Parmi les variétés de carquois  $\overline{\mathcal{O}_c}$  telles que  $\mathbf{c}$  est de  $\mathbf{i}$ -homogénéité  $\mathbf{d}$ , les variétés lisses sont les  $2^{n-1}$  variétés suivantes:

$$\{(f_{ij}) \in E_{\mathbf{d}} \mid f_{ij} = 0 \forall i \rightarrow j \in \mathcal{F}\}$$

où  $\mathcal{F}$  parcourt tous les sous-ensembles de l'ensemble des flèches dans  $\mathcal{Q}$ .  $\square$



### 4.3 Lissité rationnelle projective

Dans cette section, nous donnons la liste complète des variétés de carquois de type  $A$  dont la projectivisation est rationnellement lisse. Soient  $\mathcal{Q} = (\mathcal{Q}^0, \mathcal{Q}^1)$  un carquois de type  $A_n$  et  $\mathbf{i}$  adapté à  $\mathcal{Q}$ . Soient  $\mathbf{c} \in \mathbf{N}^\nu$  de  $\mathbf{i}$ -homogénéité  $\mathbf{d}$  et  $\mathbf{c}^0 \prec \mathbf{c}$  l'unique  $\nu$ -vecteur tel que  $\dim(\mathcal{O}_{\mathbf{c}^0}) = 0$  ( $\mathcal{O}_{\mathbf{c}^0}$  "est" l'élément neutre de  $E_{\mathbf{d}}$ ). Pour chaque flèche  $i \rightarrow j \in \mathcal{Q}^1$ , soit  $\mathbf{c}^{ij} = \mathbf{c}^0 + \mathbf{op}^{\Upsilon_{ij}}$ , où  $\Upsilon_{ij} : 0 \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha_j} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha_i + \alpha_j} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha_i} \rightarrow 0$ . On dit que la variété de carquois  $\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{c}}}$  est *projectivement rationnellement lisse* si  $\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{c}}}$  est rationnellement lisse en  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}'}$  pour tout  $\mathbf{c}' \preceq \mathbf{c}, \mathbf{c}' \neq \mathbf{c}^0$ . Par définition, ceci est équivalent à ce que  $\zeta_{\mathbf{c}'}^{\mathbf{c}} = \nu^{d(\mathbf{c}') - d(\mathbf{c})}$  pour tout  $\mathbf{c}' \preceq \mathbf{c}, \mathbf{c}' \neq \mathbf{c}^0$ . Alors la projectivisation de  $\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{c}}}$  est rationnellement lisse si et seulement si  $\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{c}}}$  est projectivement rationnellement lisse.

Le théorème 4.2.3 nous dit que si  $\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{c}}}$  est projectivement rationnellement lisse alors

$$\sum_{\substack{\Upsilon \in \mathcal{S}_{op}(\mathbf{c}^{ij}) \\ \mathbf{c}^{ij} + \mathbf{op}^{\Upsilon} \not\preceq \mathbf{c}}} e(\Upsilon, \mathbf{c}^{ij}) = \dim(E_{\mathbf{d}}) - d(\mathbf{c})$$

pour tout  $i \rightarrow j \in \mathcal{Q}^1$ . Afin de pouvoir calculer le membre de gauche, il nous faut d'abord les lemmes suivants qui nous donnent des critères pour que  $\mathbf{c}^{ij} + \mathbf{op}^{\Upsilon} \not\preceq \mathbf{c}$ .

#### Lemme 4.3.1

$$\mathbf{c}^{ij} + \mathbf{op}^{\Upsilon_{ij}} \preceq \mathbf{c} \Leftrightarrow c_{R(i,j)} \geq 2$$

*Preuve.* Supposons d'abord que  $c_{R(i,j)} \geq 2$ . Soit  $f \in \mathcal{O}_{\mathbf{c}}$  et définissons  $f'$  par

$$f'_{hk} = \begin{cases} f_{ij} & \text{si } (h \rightarrow k) = (i \rightarrow j) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit  $\mathbf{c}' \in \mathbf{N}^\nu$  de la même  $\mathbf{i}$ -homogénéité que  $\mathbf{c}$  tel que  $f' \in \mathcal{O}_{\mathbf{c}'}$ . Alors  $\mathbf{c}^{ij} + \mathbf{op}^{\Upsilon_{ij}} + (c_{R(i,j)} - 2) \mathbf{op}^{\Upsilon_{ij}} = \mathbf{c}'$ , d'où  $\mathbf{c}^{ij} + \mathbf{op}^{\Upsilon_{ij}} \preceq \mathbf{c}'$  par le théorème 1.2.4. Mais par le lemme 4.2.4, nous avons  $\mathbf{c}' \preceq \mathbf{c}$  d'où  $\mathbf{c}^{ij} + \mathbf{op}^{\Upsilon_{ij}} \preceq \mathbf{c}$ .

Soit maintenant  $\mathbf{c}^{ij} + \mathbf{op}^{\Upsilon_{ij}} \preceq \mathbf{c}$  et supposons sans perte de généralité que  $i < j$ . Alors par la proposition 1.4.1.6, nous avons  $[\mathbf{e}_{\alpha_{R \leftarrow [i]}}, \mathbf{e}(\mathbf{c})] = d_i - c_{R(i,j)}$  tandis que  $[\mathbf{e}_{\alpha_{R \leftarrow [i]}}, \mathbf{e}(\mathbf{c}^{ij} + \mathbf{op}^{\Upsilon_{ij}})] = d_i - 2$ . Mais comme  $\mathbf{c}^{ij} + \mathbf{op}^{\Upsilon_{ij}} \preceq \mathbf{c}$ , le théorème 1.2.4 implique

$$[\mathbf{e}_{\alpha_{R \leftarrow [i]}}, \mathbf{e}(\mathbf{c}^{ij} + \mathbf{op}^{\Upsilon_{ij}})] \geq [\mathbf{e}_{\alpha_{R \leftarrow [i]}}, \mathbf{e}(\mathbf{c})]$$

d'où  $c_{R(i,j)} \geq 2$ . □

**Lemme 4.3.2** Soient  $i \rightarrow j, h \rightarrow k \in \mathcal{Q}^1$  tels que  $\{i, j\} \cap \{h, k\} = \emptyset$ ,  $\mathbf{c}^{ij} \preceq \mathbf{c}$  et  $\mathbf{c}^{hk} \preceq \mathbf{c}$ . Alors

$$\mathbf{c}^{ij} + \mathbf{op}^{\Upsilon_{hk}} \preceq \mathbf{c}.$$

*Preuve.* Soit  $f \in \mathcal{O}_{\mathbf{c}}$  et définissons  $f'$  par

$$f'_{xy} = \begin{cases} f_{xy} & \text{si } x \rightarrow y \in \{i \rightarrow j, h \rightarrow k\} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit  $\mathbf{c}' \in \mathbf{N}^\nu$  de la même  $\mathbf{i}$ -homogénéité que  $\mathbf{c}$  tel que  $f' \in \mathcal{O}_{\mathbf{c}'}$ . Alors  $\mathbf{c}'^{ij} + \mathbf{op}^{\Upsilon_{hk}} + (\mathbf{c}_{R(i,j)} - 1) \mathbf{op}^{\Upsilon_{ij}} + (\mathbf{c}_{R(h,k)} - 1) \mathbf{op}^{\Upsilon_{hk}} = \mathbf{c}'$  et ainsi  $\mathbf{c}'^{ij} + \mathbf{op}^{\Upsilon_{hk}} \preceq \mathbf{c}'$  et par le lemme 4.2.4 nous avons  $\mathbf{c}' \preceq \mathbf{c}$ .  $\square$

Notons  $\mathcal{Q}_{SP}^0$  le sous-ensemble des sources et puits de  $\mathcal{Q}^0$ , i.e.  $\mathcal{Q}_{SP}^0 = \{i \in \mathcal{Q}^0 \mid i \text{ est une source ou } i \text{ est un puits dans } \mathcal{Q}\}$ . Pour  $t \in \{1, 2, \dots, \nu\}$ , on dit que  $x \in \text{Supp}(\alpha^t)$  est une source (respectivement un puits) dans  $\text{Supp}(\alpha^t)$  s'il n'y a pas de flèche  $x \leftarrow y$  (respectivement  $x \rightarrow y$ ) avec  $y \in \text{Supp}(\alpha^t)$ . Posons  $\text{Supp}_S(\alpha^t) = \{\text{sources dans } \text{Supp}(\alpha^t)\}$  et  $\text{Supp}_P(\alpha^t) = \{\text{puits dans } \text{Supp}(\alpha^t)\}$ .

**Lemme 4.3.3** *Soient  $s, t \in \{1, 2, \dots, \nu\}$  et  $x \in \mathcal{Q}^0$ . Si  $[\mathbf{e}_{\alpha^s}, \mathbf{e}_{\alpha^t}] = 1$  alors*

$$\text{Supp}(\alpha^s) \cap \text{Supp}_P(\alpha^t) \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \text{Supp}_S(\alpha^s) \cap \text{Supp}(\alpha^t) \neq \emptyset.$$

*En particulier, si  $[\mathbf{e}_{\alpha_x}, \mathbf{e}_{\alpha^t}] = 1$  alors  $x \in \text{Supp}_P(\alpha^t)$  et si  $[\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}_{\alpha_x}] = 1$  alors  $x \in \text{Supp}_S(\alpha^t)$ .*

*Preuve.* Notons  $\mathbf{e}_{\alpha^s}$  par  $(V_i, f_{ij})$ ,  $\mathbf{e}_{\alpha^t}$  par  $(V'_i, f'_{ij})$  et soit  $g \in \text{Hom}(\mathbf{e}_{\alpha^s}, \mathbf{e}_{\alpha^t}) \setminus \{0\}$ . Soit  $x \in \mathcal{Q}^0$  tel que  $g_x \neq 0$ , donc  $x \in \text{Supp}(\alpha^s) \cap \text{Supp}(\alpha^t)$ . Alors si  $x \notin \text{Supp}_P(\alpha^t)$ , il existe une flèche  $x \rightarrow y \in \mathcal{Q}^1$  avec  $y \in \text{Supp}(\alpha^t)$  et  $g_y \circ f_{xy} = f'_{xy} \circ g_x \neq 0$ . Par conséquent  $y \in \text{Supp}(\alpha^s)$ . Alors si  $y \notin \text{Supp}_P(\alpha^t)$ , nous répétons le même argument jusqu'à ce que nous trouvons un  $z \in \text{Supp}(\alpha^s) \cap \text{Supp}_P(\alpha^t)$ . La preuve de  $\text{Supp}_S(\alpha^s) \cap \text{Supp}(\alpha^t) \neq \emptyset$  est similaire.  $\square$

**Lemme 4.3.4** *Soit  $t \in \{1, 2, \dots, \nu\}$ . Alors*

$$\begin{aligned} [\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}(\mathbf{c}^0)] &= \sum_{x \in \text{Supp}_S(\alpha^t)} d_x \\ [\mathbf{e}(\mathbf{c}^0), \mathbf{e}_{\alpha^t}] &= \sum_{x \in \text{Supp}_P(\alpha^t)} d_x \\ [\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}(\mathbf{c}^{ij})] &= \sum_{x \in \text{Supp}_S(\alpha^t)} d_x + [\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}(\mathbf{op}^{\Upsilon_{ij}})] \\ [\mathbf{e}(\mathbf{c}^{ij}), \mathbf{e}_{\alpha^t}] &= \sum_{x \in \text{Supp}_P(\alpha^t)} d_x + [\mathbf{e}(\mathbf{op}^{\Upsilon_{ij}}), \mathbf{e}_{\alpha^t}] \end{aligned}$$

*Preuve.* Nous avons  $c_s^0 = 0$  si  $\alpha^s$  n'est pas une racine simple et  $c_s^0 = d_x$  si  $\alpha^s = \alpha_x$ . Ainsi

$$[\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}(\mathbf{c}^0)] = \sum_{x \in \mathcal{Q}^0} [\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}_{\alpha_x}] d_x = \sum_{x \in \text{Supp}_S(\alpha^t)} d_x$$

et

$$[\mathbf{e}(\mathbf{c}^0), \mathbf{e}_{\alpha^t}] = \sum_{x \in \mathcal{Q}^0} [\mathbf{e}_{\alpha_x}, \mathbf{e}_{\alpha^t}] d_x = \sum_{x \in \text{Supp}_P(\alpha^t)} d_x$$

par le lemme précédent.

Les équations pour  $\mathbf{e}(\mathbf{c}^{ij})$  sont des conséquences des équations pour  $\mathbf{e}(\mathbf{c}^0)$  et du fait que  $\mathbf{c}^{ij} = \mathbf{c}^0 + \mathbf{op}^{\Upsilon_{ij}}$ .  $\square$

Pour  $s, t \in \{1, 2, \dots, \nu\}$ , nous définissons  $\chi_t(s) = |\text{Supp}_P(\alpha^t) \cap \text{Supp}(\alpha^s)|$ ,  $\chi'_t(s) = |\text{Supp}_S(\alpha^t) \cap \text{Supp}(\alpha^s)|$  et

$$\widetilde{\chi}_t(s) = \begin{cases} \chi_t(s) - 1 & \text{si } [\mathbf{e}_{\alpha^s}, \mathbf{e}_{\alpha^t}] = 1 \\ \chi_t(s) & \text{si } [\mathbf{e}_{\alpha^s}, \mathbf{e}_{\alpha^t}] = 0 \end{cases}$$

$$\widetilde{\chi}'_t(s) = \begin{cases} \chi'_t(s) - 1 & \text{si } [\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}_{\alpha^s}] = 1 \\ \chi'_t(s) & \text{si } [\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}_{\alpha^s}] = 0. \end{cases}$$

Noter que  $\widetilde{\chi}_t(s) \geq 0$  et  $\widetilde{\chi}'_t(s) \geq 0$  par le lemme 4.3.3. Nous avons le lemme suivant.

**Lemme 4.3.5** *Soit  $t \in \{1, 2, \dots, \nu\}$  et  $\mathbf{c} \in \mathbf{N}^\nu$  de  $\mathbf{i}$ -homogénéité  $\mathbf{d}$ . Alors*

$$[\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}(\mathbf{c})] = \sum_{x \in \text{Supp}_S(\alpha^t)} d_x - \sum_{s=1}^{\nu} \widetilde{\chi}'_t(s) c_s$$

et

$$[\mathbf{e}(\mathbf{c}), \mathbf{e}_{\alpha^t}] = \sum_{x \in \text{Supp}_P(\alpha^t)} d_x - \sum_{s=1}^{\nu} \widetilde{\chi}_t(s) c_s$$

*Preuve.* Nous ne prouvons que la deuxième égalité car la première se démontre de façon analogue. Nous voulons calculer  $[\mathbf{e}(\mathbf{c}), \mathbf{e}_{\alpha^t}] = \sum_{s=1}^{\nu} c_s [\mathbf{e}_{\alpha^s}, \mathbf{e}_{\alpha^t}]$ . L'ensemble des  $s \in \{1, 2, \dots, \nu\}$  pour lesquels  $[\mathbf{e}_{\alpha^s}, \mathbf{e}_{\alpha^t}] \neq 0$  est inclus dans la réunion  $\cup_{x \in \text{Supp}_P(\alpha^t)} \{s \mid x \in \text{Supp}(\alpha^s)\}$  et la fonction  $\chi_t(s)$  compte le nombre d'éléments  $x$  dans  $\text{Supp}_P(\alpha^t) \cap \text{Supp}(\alpha^s)$ . Ainsi

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^{\nu} c_s [\mathbf{e}_{\alpha^s}, \mathbf{e}_{\alpha^t}] & (4.7) \\ &= \left( \sum_{x \in \text{Supp}_P(\alpha^t)} \sum_{s: x \in \text{Supp}(\alpha^s)} c_s [\mathbf{e}_{\alpha^s}, \mathbf{e}_{\alpha^t}] \right) - \sum_{s=1}^{\nu} (\chi_t(s) - 1) c_s [\mathbf{e}_{\alpha^s}, \mathbf{e}_{\alpha^t}]. \end{aligned}$$

Or  $\sum_{s: x \in \text{Supp}(\alpha^s)} c_s = d_x$ , donc

$$\sum_{s: x \in \text{Supp}(\alpha^s)} c_s [\mathbf{e}_{\alpha^s}, \mathbf{e}_{\alpha^t}] = d_x - \sum_{s: x \in \text{Supp}(\alpha^s)} c_s (1 - [\mathbf{e}_{\alpha^s}, \mathbf{e}_{\alpha^t}]).$$

De plus,

$$\sum_{x \in \text{Supp}_P(\alpha^t)} \sum_{s: x \in \text{Supp}(\alpha^s)} c_s (1 - [\mathbf{e}_{\alpha^s}, \mathbf{e}_{\alpha^t}]) = \sum_{s=1}^{\nu} \chi_t(s) c_s (1 - [\mathbf{e}_{\alpha^s}, \mathbf{e}_{\alpha^t}])$$

et alors (4.7) devient

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{x \in \text{Supp}_P(\alpha^t)} d_x - \sum_{s=1}^{\nu} \chi_t(s) c_s (1 - [\mathbf{e}_{\alpha^s}, \mathbf{e}_{\alpha^t}]) \right) - \sum_{s=1}^{\nu} (\chi_t(s) - 1) c_s [\mathbf{e}_{\alpha^s}, \mathbf{e}_{\alpha^t}] \\ &= \sum_{x \in \text{Supp}_P(\alpha^t)} d_x - \sum_{s=1}^{\nu} \tilde{\chi}_t(s) c_s \end{aligned}$$

□

**Lemme 4.3.6** Soit  $j \in \{2, \dots, n-1\}$ ,  $i = j-1$ ,  $k = j+1$ . Supposons que  $\mathbf{c}^{ij} \preceq \mathbf{c}$  et  $\mathbf{c}^{jk} \preceq \mathbf{c}$ . Notons  $\Upsilon'$  l'opération élémentaire

$$0 \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha_k} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha_i + \alpha_j} \rightarrow 0$$

(respectivement  $0 \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha_i + \alpha_j} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha_k} \rightarrow 0$  dépendant de l'orientation des flèches  $i \leftarrow j \leftarrow k$ ). Alors

1. Si  $j \notin \mathcal{Q}_{SP}^0$  alors  $\mathbf{c}^{ij} + \mathbf{op}^{\Upsilon_{jk}} \preceq \mathbf{c}$  et

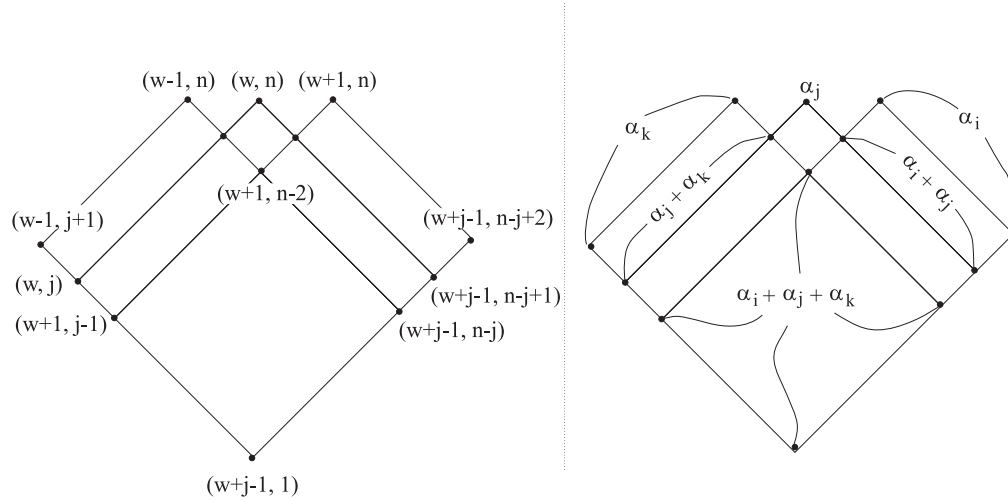
$$\mathbf{c}^{ij} + \mathbf{op}^{\Upsilon'} \preceq \mathbf{c} \Leftrightarrow c_{R(i,j,k)} \geq 1$$

2. Si  $j \in \mathcal{Q}_{SP}^0$  alors  $\mathbf{c}^{ij} + \mathbf{op}^{\Upsilon'} \preceq \mathbf{c}$  et

$$\mathbf{c}^{ij} + \mathbf{op}^{\Upsilon_{jk}} \preceq \mathbf{c} \Leftrightarrow c_{\alpha_j} \leq d_j - 2$$

*Preuve.* Supposons sans perte de généralité que  $i \rightarrow j$ . Montrons d'abord 1. Comme  $j \notin \mathcal{Q}_{SP}^0$ , nous avons  $i \rightarrow j \rightarrow k$  dans  $\mathcal{Q}$ . Notons par  $(w, j)$  la position  $\Theta(\mathbf{P}(j))$  du  $j$ -ième module indécomposable projectif  $\mathbf{P}(j)$  dans le carquois d'Auslander-Reiten. Alors  $\Theta(\alpha_j) = (w, n)$  et nous pouvons préciser les positions des racines  $\alpha_i, \alpha_k, \alpha_i + \alpha_j, \alpha_j + \alpha_k$  et  $\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k$  comme dans le tableau suivant (il y a quatre cas possibles):

| cas | $\Theta(\alpha_i)$ | $\Theta(\alpha_k)$ | $\Theta(\alpha_i + \alpha_j)$ | $\Theta(\alpha_j + \alpha_k)$ | $\Theta(\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k)$ |
|-----|--------------------|--------------------|-------------------------------|-------------------------------|--|
| I   | $(w+1, n)$         | $(w-1, n)$         | $(w+1, n-1)$                  | $(w, n-1)$                    | $(w+1, n-2)$                             |
| II  | $(w+1, n)$         | $(w-1, j+1)$       | $(w+1, n-1)$                  | $(w, j)$                      | $(w+1, j-1)$                             |
| III | $(w+j-1, n-j+2)$   | $(w-1, n)$         | $(w+j-1, n-j+1)$              | $(w, n-1)$                    | $(w+j-1, n-j)$                           |
| IV  | $(w+j-1, n-j+2)$   | $(w-1, j+1)$       | $(w+j-1, n-j+1)$              | $(w, j)$                      | $(w+j-1, 1)$                             |



**Figure 4.1** Deux schémas du carquois d'Auslander-Reiten dans le cas  $i \rightarrow j \rightarrow k$ .

Le carquois d'Auslander-Reiten est illustré dans la figure 4.1. Nous montrons d'abord que  $\mathbf{c}^{ij} + \mathbf{op}^{\Upsilon_{jk}} \preceq \mathbf{c}$ . Noter que  $\mathbf{c}^{ij} + \mathbf{op}^{\Upsilon_{jk}} = \mathbf{c}^{jk} + \mathbf{op}^{\Upsilon_{ij}}$ . Rappelons que

$$\begin{aligned} \Upsilon_{ij} &: 0 \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha_j} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha_i + \alpha_j} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha_i} \rightarrow 0 \\ \Upsilon_{jk} &: 0 \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha_k} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha_j + \alpha_k} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha_j} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

et que par le théorème 1.2.4, nous avons

$$\mathbf{c}^{jk} + \mathbf{op}^{\Upsilon_{ij}} \preceq \mathbf{c} \Leftrightarrow [\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}(\mathbf{c}^{jk})] + [\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}(\mathbf{op}^{\Upsilon_{ij}})] \geq [\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}(\mathbf{c})] \quad \forall t \in \{1, 2, \dots, \nu\}.$$

De plus,  $[\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}(\mathbf{c}^{jk})] \geq [\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}(\mathbf{c})]$  (car  $\mathbf{c}^{jk} \preceq \mathbf{c}$ ) et

$$\begin{aligned} [\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}(\mathbf{op}^{\Upsilon_{ij}})] &= -[\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}_{\alpha_j}] + [\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}_{\alpha_i + \alpha_j}] - [\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}_{\alpha_i}] \\ &= \begin{cases} -1 & \text{si } [\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}_{\alpha_i}] = 1 \text{ et } [\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}_{\alpha_i + \alpha_j}] = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

parce que la suite Hom-Ext  $(\mathbf{e}_{\alpha^t}, \Upsilon_{ij})$  est exacte.

Ainsi  $\mathbf{c}^{jk} + \mathbf{op}^{\Upsilon_{ij}} \preceq \mathbf{c}$  si et seulement si pour tout  $t$  tel que  $[\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}_{\alpha_i}] = 1$  et  $[\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}_{\alpha_i + \alpha_j}] = 0$ , nous avons  $[\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}(\mathbf{c}^{jk})] > [\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}(\mathbf{c})]$ .

Fixons un tel  $t$ . Alors d'une part,  $i \in \text{Supp}_S(\alpha^t)$  par le lemme 4.3.3 et d'autre part, par la proposition 1.4.1, nous avons

$$\Theta(\alpha^t) \in \left. \begin{aligned} & \Theta(\alpha^t) = (w+1, n) \quad \text{dans les cas I et II} \\ & \Theta(\alpha^t) \in \{(w+a, n-a+1) \mid 1 \leq a \leq j-1\} \quad \text{dans les cas III et IV.} \end{aligned} \right\} (4.8)$$

Ainsi, par la proposition 1.4.1, nous avons

$$[\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}(\mathbf{op}^{\Upsilon_{jk}})] = -[\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}_{\alpha_k}] + [\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}_{\alpha_j + \alpha_k}] - [\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}_{\alpha_j}] = 0$$

et alors par le lemme 4.3.4

$$[\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}(\mathbf{c}^{jk})] = \sum_{x \in \text{Supp}_S(\alpha^t)} d_x.$$

Pour montrer que  $\mathbf{c}^{jk} + \mathbf{op}^{\Upsilon_{ij}} \preceq \mathbf{c}$ , il suffit donc de voir que  $[\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}(\mathbf{c})] < \sum_{x \in \text{Supp}_S(\alpha^t)} d_x$ . Le lemme 4.3.5 implique que

$$[\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}(\mathbf{c})] = \sum_{x \in \text{Supp}_S(\alpha^t)} d_x - \sum_{s=1}^{\nu} \widetilde{\chi}'_t(s) c_s.$$

Par (4.8),  $\alpha^t = \alpha_i$  dans les cas I et II. Comme  $i$  est une source de  $\mathcal{Q}$  dans les cas III et IV, ceci implique que  $i \in \text{Supp}_S(\alpha^t)$  dans tous les cas I–IV. Par (4.8) et par la proposition 1.4.1, nous avons  $[\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}_{\alpha^s}] = 0$  pour tout  $s \in R(i, j)$ . Mais comme  $\mathbf{c}^{ij} \preceq \mathbf{c}$ , il existe un  $s \in R(i, j)$  tel que  $c_s \neq 0$  et comme  $i \in \text{Supp}(\alpha^s) \cap \text{Supp}_S(\alpha^t)$ , nous avons  $\widetilde{\chi}'_t(s) \geq 1$ . Ainsi  $\sum_{s=1}^{\nu} \widetilde{\chi}'_t(s) c_s \geq 1$  et  $[\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}(\mathbf{c})] < \sum_{x \in \text{Supp}_S(\alpha^t)} d_x$ , ce qu'il fallait démontrer.

Nous montrons maintenant la deuxième partie de 1, à savoir

$$\mathbf{c}^{ij} + \mathbf{op}^{\Upsilon'} \preceq \mathbf{c} \Leftrightarrow c_{R(i,j,k)} \geq 1.$$

Rappelons que  $\Upsilon' : 0 \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha_k} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha_i + \alpha_j} \rightarrow 0$ . Noter que  $t \in R(i, j, k)$  si et seulement si la position de  $\alpha^t$  dans le carquois d'Auslander-Reiten est dans le rectangle dont les coins sont  $(w+1, j-1)$ ,  $(w+1, n-2)$ ,  $(w+j-1, 1)$ ,  $(w+j-1, n-j)$ , plus précisément

$$t \in R(i, j, k) \Leftrightarrow \theta(\alpha^t) \in \{(w+a, b-a) \mid 1 \leq a \leq j-1, j \leq b \leq n-1\}.$$

Supposons d'abord que  $\mathbf{c}^{ij} + \mathbf{op}^{\Upsilon'} \preceq \mathbf{c}$ . Soit  $t$  tel que  $\Theta(\alpha^t) = (w+1, n-1)$ . Alors par la proposition 1.4.1,  $[\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}(\mathbf{c})] = d_i - c_{R(i,j,k)}$  et  $[\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}(\mathbf{c}^{ij} + \mathbf{op}^{\Upsilon'})] = d_i - \sum_{t \in R(i,j,k)} (c_t^{ij} + op_t^{\Upsilon'})$ . Mais pour  $t \in R(i, j, k)$ , nous avons  $c_t^{ij} = 0$ ,  $op_t^{\Upsilon'} = 1$  si  $\alpha^t = \alpha_i + \alpha_j + \alpha_k$  et  $op_t^{\Upsilon'} = 0$  sinon. Donc  $[\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}(\mathbf{c}^{ij} + \mathbf{op}^{\Upsilon'})] = d_i - 1$ . Mais par le théorème 1.2.4,  $\mathbf{c}^{ij} + \mathbf{op}^{\Upsilon'} \preceq \mathbf{c}$  implique que  $[\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}(\mathbf{c})] \leq [\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}(\mathbf{c}^{ij} + \mathbf{op}^{\Upsilon'})]$ , d'où  $c_{R(i,j,k)} \geq 1$ .

Pour montrer l'autre implication, supposons maintenant que  $c_{R(i,j,k)} \geq 1$ . Par le théorème 1.2.4, nous avons

$$\mathbf{c}^{ij} + \mathbf{op}^{\Upsilon'} \preceq \mathbf{c} \Leftrightarrow [\mathbf{e}(\mathbf{c}^{ij}), \mathbf{e}_{\alpha^t}] + [\mathbf{e}(\mathbf{op}^{\Upsilon'}), \mathbf{e}_{\alpha^t}] \geq [\mathbf{e}(\mathbf{c}), \mathbf{e}_{\alpha^t}] \quad \forall t \in \{1, 2, \dots, \nu\}.$$

De plus,  $[\mathbf{e}(\mathbf{c}^{ij}), \mathbf{e}_{\alpha^t}] \geq [\mathbf{e}(\mathbf{c}), \mathbf{e}_{\alpha^t}]$  (car  $\mathbf{c}^{ij} \preceq \mathbf{c}$ ) et

$$\begin{aligned} [\mathbf{e}(\mathbf{op}^{\Upsilon'}), \mathbf{e}_{\alpha^t}] &= -[\mathbf{e}_{\alpha_k}, \mathbf{e}_{\alpha^t}] + [\mathbf{e}_{\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k}, \mathbf{e}_{\alpha^t}] - [\mathbf{e}_{\alpha_i + \alpha_j}, \mathbf{e}_{\alpha^t}] \\ &= \begin{cases} -1 & \text{si } [\mathbf{e}_{\alpha_k}, \mathbf{e}_{\alpha^t}] = 1 \text{ et } [\mathbf{e}_{\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k}, \mathbf{e}_{\alpha^t}] = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

parce que la suite Hom-Ext  $(\Upsilon', \mathbf{e}_{\alpha^t})$  est exacte.

Ainsi  $\mathbf{c}^{ij} + \mathbf{op}^{\Upsilon'} \preceq \mathbf{c}$  si et seulement si pour tout  $t$  tel que  $[\mathbf{e}_{\alpha_k}, \mathbf{e}_{\alpha^t}] = 1$  et  $[\mathbf{e}_{\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k}, \mathbf{e}_{\alpha^t}] = 0$ , nous avons  $[\mathbf{e}(\mathbf{c}^{ij}), \mathbf{e}_{\alpha^t}] > [\mathbf{e}(\mathbf{c}), \mathbf{e}_{\alpha^t}]$ .

Fixons un tel  $t$ . Alors d'une part,  $k \in \text{Supp}_P(\alpha^t)$  par le lemme 4.3.3 et d'autre part, par la proposition 1.4.1, nous avons

$$\Theta(\alpha^t) \in \left\{ \begin{array}{ll} \{(w-1, n), (w, n-1)\} & \text{cas I} \\ \{(w-1, b), (w, b-1) \mid j+1 \leq b \leq n\} & \text{cas II} \\ \{(w-1+a, n-a) \mid 0 \leq a \leq j-1\} & \text{cas III} \\ \{(w-1+a, b-a) \mid 0 \leq a \leq j-1, j+1 \leq b \leq n\} & \text{cas IV} \end{array} \right\} \quad (4.9)$$

Ainsi, par la proposition 1.4.1, nous avons

$$[\mathbf{e}(\mathbf{op}^{\Upsilon^{ij}}), \mathbf{e}_{\alpha^t}] = -[\mathbf{e}_{\alpha_j}, \mathbf{e}_{\alpha^t}] + [\mathbf{e}_{\alpha_i + \alpha_j}, \mathbf{e}_{\alpha^t}] - [\mathbf{e}_{\alpha_i}, \mathbf{e}_{\alpha^t}] = 0$$

et alors par le lemme 4.3.4

$$[\mathbf{e}(\mathbf{c}^{ij}), \mathbf{e}_{\alpha^t}] = \sum_{x \in \text{Supp}_P(\alpha^t)} d_x.$$

Alors afin de montrer que  $\mathbf{c}^{ij} + \mathbf{op}^{\Upsilon'} \preceq \mathbf{c}$ , il suffit de voir que

$$[\mathbf{e}(\mathbf{c}), \mathbf{e}_{\alpha^t}] < \sum_{x \in \text{Supp}_P(\alpha^t)} d_x. \quad (4.10)$$

Le lemme 4.3.5 implique que

$$[\mathbf{e}(\mathbf{c}), \mathbf{e}_{\alpha^t}] = \sum_{x \in \text{Supp}_P(\alpha^t)} d_x - \sum_{s=1}^{\nu} \widetilde{\chi}_t(s) c_s. \quad (4.11)$$

Par (4.9),  $\alpha^t \in \{\alpha_k, \alpha_j + \alpha_k\}$  dans le cas I. De plus,  $k$  est un puits de  $\mathcal{Q}$  dans les cas II et IV. Dans le cas III, la position de  $\alpha^t$  dans le carquois d'Auslander-Reiten est sur la diagonale entre  $\alpha_k$  et  $\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k$ , par (4.9). Dans ce cas, les racines sur cette diagonale sont précisément les racines positives  $\alpha$  telles que  $k \in \text{Supp}(\alpha)$  et  $(k+1) \notin \text{Supp}(\alpha)$ . (En effet, ceci est une conséquence facile de la proposition 1.4.1 et du fait que ces racines sont caractérisées par  $[\mathbf{P}(k), \mathbf{e}_{\alpha}] = 1$  et  $[\mathbf{P}(k+1), \mathbf{e}_{\alpha}] = 0$ .) Ainsi dans tous les cas I-IV, nous avons  $k \in \text{Supp}_P(\alpha^t)$ . Soit  $s_0 \in R(i, j, k)$  tel que  $c_{s_0} \geq 1$ . Un tel  $s_0$  existe puisque  $c_{R(i, j, k)} \geq 1$ . Dans les cas I et II, nous avons par (4.9) et par la proposition 1.4.1,  $[\mathbf{e}_{\alpha^{s_0}}, \mathbf{e}_{\alpha^t}] = 0$ .

Mais comme  $s_0 \in R(i, j, k)$  implique que  $k \in \text{Supp}(\alpha^{s_0})$ , nous avons  $\widetilde{\chi}_t(s_0) \geq 1$ , d'où

$$\begin{aligned} [\mathbf{e}(\mathbf{c}), \mathbf{e}_{\alpha^t}] &\stackrel{(4.11)}{\leq} \sum_{x \in \text{Supp}_P(\alpha^t)} d_x - \widetilde{\chi}_t(s_0) c_{s_0} \\ &< \sum_{x \in \text{Supp}_P(\alpha^t)} d_x, \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Considérons maintenant les cas III et IV. Si  $[\mathbf{e}_{\alpha^{s_0}}, \mathbf{e}_{\alpha^t}] = 0$  alors le même argument que dans les cas I et II montre que  $[\mathbf{e}(\mathbf{c}), \mathbf{e}_{\alpha^t}] < \sum_{x \in \text{Supp}_P(\alpha^t)} d_x$ . Sinon  $[\mathbf{e}_{\alpha^{s_0}}, \mathbf{e}_{\alpha^t}] = 1$ . Comme  $s_0 \in R(i, j, k)$  alors la proposition 1.4.1 en combinaison avec (4.9) implique que  $t \in R(i, j, k)$ , donc en particulier  $i \in \text{Supp}(\alpha^t)$ . Noter que  $i > 1$  (car si  $i = 1$  alors le cas III est le cas I et le cas IV est le cas II) et que  $i$  est une source dans  $\mathcal{Q}$ . Ainsi  $(i-1) \leftarrow i \in \mathcal{Q}^1$  et il existe  $x_1 < i$  tel qu'il y a un chemin dans  $\mathcal{Q}$  de  $i$  jusqu'à  $x_1$  et  $x_1 \in \text{Supp}_P(\alpha^t)$ .

Nous allons montrer que  $x_1 \in \text{Supp}(\alpha^{s_0})$  (i.e.  $[\mathbf{P}(x_1), \mathbf{e}_{\alpha^{s_0}}] = 1$ ). Noter que  $\Theta(\alpha^{P[x_1]}) = (w+1, x_1)$ , où  $P[x_1] \in \{1, 2, \dots, \nu\}$  est tel que  $\mathbf{e}_{\alpha^{P[x_1]}} = \mathbf{P}(x_1)$ . Disons que  $\Theta(\alpha^{s_0}) = (w^0, a^0)$  et que  $\Theta(\alpha^t) = (w^1, a^1)$ . Alors comme  $s_0 \in R(i, j, k)$ , nous avons

$$w+1 \leq w^0 \leq w+j-1 \quad \text{et} \quad w+j \leq w^0 + a^0 \leq w+n-1.$$

D'autre part,  $[\mathbf{P}(x_1), \mathbf{e}_{\alpha^t}] = 1$  implique que  $w+1 \leq w^1 \leq w+x_1$ , et  $[\mathbf{e}_{\alpha^{s_0}}, \mathbf{e}_{\alpha^t}] = 1$  implique que  $w^0 \leq w^1$ . Ainsi

$$w+1 \leq w^0 \leq w^1 \leq w+x_1 \quad \text{et} \quad w+x_1+1 \leq w+j \leq w^0+a^0 \leq w+n-1 < w+n+1$$

et par la proposition 1.4.1, ceci implique que  $[\mathbf{P}(x_1), \mathbf{e}_{\alpha^{s_0}}] = 1$ . Alors  $k$  et  $x_1$  sont des éléments de  $\text{Supp}(\alpha^{s_0}) \cap \text{Supp}_P(\alpha^t)$  et ainsi  $\widetilde{\chi}_t(s_0) \geq 1$ . Par conséquent,

$$\begin{aligned} [\mathbf{e}(\mathbf{c}), \mathbf{e}_{\alpha^t}] &\stackrel{(4.11)}{\leq} \sum_{x \in \text{Supp}_P(\alpha^t)} d_x - \widetilde{\chi}_t(s_0) c_{s_0} \\ &< \sum_{x \in \text{Supp}_P(\alpha^t)} d_x. \end{aligned}$$

Ceci termine la preuve de 1.

Maintenant, nous montrons 2.

Comme  $j \in \mathcal{Q}_{SP}^0$ , nous avons  $i \rightarrow j \leftarrow k$ , donc  $\mathbf{e}_{\alpha_j} = \mathbf{P}(j)$ . Notons par  $(w, j)$  la position  $\Theta(\alpha_j)$  de  $\alpha_j$  dans le carquois d'Auslander-Reiten. Nous pouvons préciser les positions des racines  $\alpha_i$ ,  $\alpha_k$ ,  $\alpha_i + \alpha_j$ ,  $\alpha_j + \alpha_k$  et  $\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k$  comme dans le tableau suivant (il y a quatre cas possibles):



| cas | $\Theta(\alpha_i)$ | $\Theta(\alpha_k)$ | $\Theta(\alpha_i + \alpha_j)$ | $\Theta(\alpha_j + \alpha_k)$ | $\Theta(\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k)$ |
|-----|--------------------|--------------------|-------------------------------|-------------------------------|--|
| I   | $(w+1, n)$         | $(w+j, 1)$         | $(w+1, j-1)$                  | $(w, j+1)$                    | $(w+1, j)$                               |
| II  | $(w+1, n)$         | $(w+j, n-j)$       | $(w+1, j-1)$                  | $(w, n)$                      | $(w+1, n-1)$                             |
| III | $(w+j-1, n-j+2)$   | $(w+j, 1)$         | $(w+j-1, 1)$                  | $(w, j+1)$                    | $(w+j-1, 2)$                             |
| IV  | $(w+j-1, n-j+2)$   | $(w+j, n-j)$       | $(w+j-1, 1)$                  | $(w, n)$                      | $(w+j-1, n-j+1)$                         |

Le carquois d'Auslander-Reiten est illustré dans la figure 4.2. Nous montrons d'abord que  $\mathbf{c}^{ij} + \mathbf{op}^{\Upsilon'} \preceq \mathbf{c}$ . Rappelons que  $\Upsilon' : 0 \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha_i + \alpha_j} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha_k} \rightarrow 0 \in \mathcal{S}_{op}$ . Par le théorème 1.2.4, nous avons

$$\mathbf{c}^{ij} + \mathbf{op}^{\Upsilon'} \preceq \mathbf{c} \Leftrightarrow \forall t \in \{1, 2, \dots, \nu\}, [\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}(\mathbf{c}^{ij})] + [\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}(\mathbf{op}^{\Upsilon'})] \geq [\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}(\mathbf{c})].$$

De plus  $[\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}(\mathbf{c}^{ij})] \geq [\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}(\mathbf{c})]$  (car  $\mathbf{c}^{ij} \preceq \mathbf{c}$ ) et

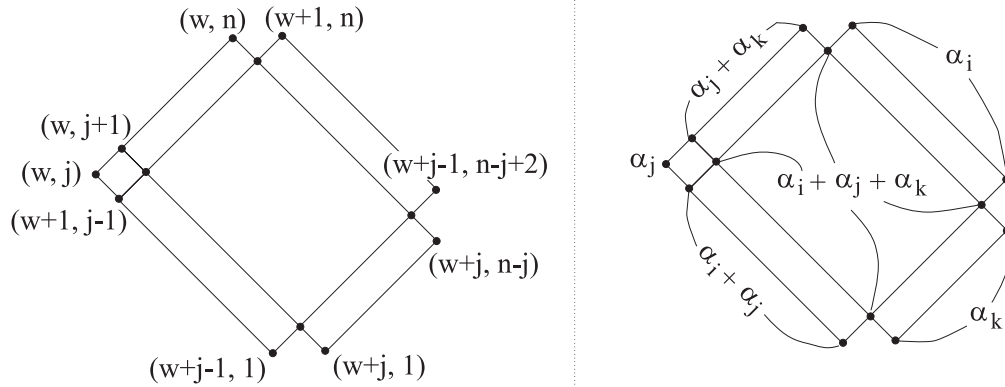
$$\begin{aligned} [\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}(\mathbf{op}^{\Upsilon'})] &= -[\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}_{\alpha_i + \alpha_j}] + [\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}_{\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k}] - [\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}_{\alpha_k}] \\ &= \begin{cases} -1 & \text{si } [\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}_{\alpha_k}] = 1 \text{ et } [\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}_{\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k}] = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

parce que la suite Hom-Ext  $(\mathbf{e}_{\alpha^t}, \Upsilon')$  est exacte.

Ainsi  $\mathbf{c}^{ij} + \mathbf{op}^{\Upsilon'} \preceq \mathbf{c}$  si et seulement si pour tout  $t$  tel que  $[\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}_{\alpha_k}] = 1$  et  $[\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}_{\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k}] = 0$ , nous avons  $[\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}(\mathbf{c}^{ij})] > [\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}(\mathbf{c})]$ .

Fixons un tel  $t$ . Alors d'une part,  $k \in \text{Supp}_S(\alpha^t)$  par le lemme 4.3.3 et d'autre part, par la proposition 1.4.1, nous avons

$$\Theta(\alpha^t) \in \left\{ \begin{array}{ll} \{(w+a, j+1-a) \mid 2 \leq a \leq j\} & \text{dans le cas I} \\ \{(w+a, b-a) \mid 2 \leq a \leq j, j+1 \leq b \leq n\} & \text{dans le cas II} \\ \{(w+j, 1)\} & \text{dans le cas III} \\ \{(w+j, b) \mid 1 \leq b \leq n-j\} & \text{dans le cas IV} \end{array} \right\} \quad (4.12)$$



**Figure 4.2** Deux schémas du carquois d'Auslander-Reiten dans le cas  $i \rightarrow j \leftarrow k$ .

Maintenant nous appliquons la proposition 1.4.1 et nous obtenons dans chaque cas I-IV que  $[\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}(\mathbf{op}^{\Upsilon^{ij}})] = -[\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}_{\alpha_j}] + [\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}_{\alpha_i + \alpha_j}] - [\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}_{\alpha_i}] = 0$  et alors par le lemme 4.3.4,

$$[\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}(\mathbf{c}^{ij})] = \sum_{x \in \text{Supp}_S(\alpha^t)} d_x.$$

Pour montrer que  $\mathbf{c}^{ij} + \mathbf{op}^{\Upsilon'} \preceq \mathbf{c}$ , il suffit donc de voir que  $[\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}(\mathbf{c})] < \sum_{x \in \text{Supp}_S(\alpha^t)} d_x$ . Mais  $[\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}(\mathbf{op}^{\Upsilon^{jk}})] = -[\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}_{\alpha_j}] + [\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}_{\alpha_j + \alpha_k}] - [\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}_{\alpha_k}] = -1$  (par (4.12)) et alors le lemme 4.3.4 implique que

$$[\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}(\mathbf{c}^{jk})] = \sum_{x \in \text{Supp}_S(\alpha^t)} d_x - 1.$$

Comme  $\mathbf{c}^{jk} \preceq \mathbf{c}$ , nous pouvons appliquer le théorème 1.2.4 et nous obtenons  $[\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}(\mathbf{c})] \leq [\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}(\mathbf{c}^{jk})] < \sum_{x \in \text{Supp}_S(\alpha^t)} d_x$ , ce qu'il fallait démontrer.

Nous montrons maintenant la deuxième partie de 2, à savoir

$$\mathbf{c}^{ij} + \mathbf{op}^{\Upsilon^{jk}} \preceq \mathbf{c} \Leftrightarrow c_{\alpha_j} \leq d_j - 2.$$

Rappelons que  $\Upsilon_{jk} : 0 \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha_j} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha_j + \alpha_k} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha_k} \rightarrow 0$ . Supposons d'abord que  $\mathbf{c}^{ij} + \mathbf{op}^{\Upsilon^{jk}} \not\preceq \mathbf{c}$ , i.e.  $\exists t$  tel que

$$[\mathbf{e}_{\alpha_j}, \mathbf{e}_{\alpha^t}] = 1, [\mathbf{e}_{\alpha_j + \alpha_k}, \mathbf{e}_{\alpha^t}] = [\mathbf{e}_{\alpha_k}, \mathbf{e}_{\alpha^t}] = 0 \text{ et } [\mathbf{e}(\mathbf{c}), \mathbf{e}_{\alpha^t}] = [\mathbf{e}(\mathbf{c}^{ij}), \mathbf{e}_{\alpha^t}] \quad (4.13)$$

(par le théorème 1.2.4, par le fait que  $\mathbf{c}^{ij} \preceq \mathbf{c}$  et parce que  $[\mathbf{e}(\mathbf{op}^{\Upsilon^{jk}}), \mathbf{e}_{\alpha^t}] = -1$  si et seulement si  $[\mathbf{e}_{\alpha_j}, \mathbf{e}_{\alpha^t}] = 1$  et  $[\mathbf{e}_{\alpha_j + \alpha_k}, \mathbf{e}_{\alpha^t}] = [\mathbf{e}_{\alpha_k}, \mathbf{e}_{\alpha^t}] = 0$ ). Alors par la proposition 1.4.1, nous avons

$$\Theta(\alpha^t) \in \left\{ \begin{array}{ll} \{(w+a, j-a) \mid 0 \leq a \leq j-1\} & \text{dans les cas I et III} \\ \{(w+a, b-a) \mid 0 \leq a \leq j-1, j \leq b \leq n-1\} & \text{dans les cas II et IV.} \end{array} \right\}$$

Nous voulons montrer que  $c_{\alpha_j} \geq d_j - 1$ , i.e.  $c_{\alpha_j} = d_j - 1$  car  $\mathbf{c}^{ij} \preceq \mathbf{c}$ . Il y a deux cas à distinguer et chacun possède plusieurs sous-cas.

1.  $k \notin \text{Supp}(\alpha^t)$ , donc

$$\Theta(\alpha^t) \in \{(w+a, j-a) \mid 0 \leq a \leq j-1\} \quad (4.14)$$

1.1  $\alpha^t = \alpha_j$ . Alors  $[\mathbf{e}(\mathbf{c}), \mathbf{e}_{\alpha^t}] = c_{\alpha_j}$  car  $j$  est un puits dans  $\mathcal{Q}$  et  $[\mathbf{e}(\mathbf{c}^{ij}), \mathbf{e}_{\alpha^t}] = d_j - 1$ . Par (4.13), ceci implique que  $c_{\alpha_j} = d_j - 1$ .

1.2  $\alpha^t = \alpha_i + \alpha_j$ . Alors  $[\mathbf{e}(\mathbf{c}^{ij}), \mathbf{e}_{\alpha^t}] = \sum_{x \in \text{Supp}_P(\alpha^t)} d_x$  par le lemme 4.3.4. Mais par (4.14) et par la proposition 1.4.1, nous avons  $[\mathbf{e}_{\alpha^s}, \mathbf{e}_{\alpha^t}] = 0$  pour tout  $s \in R(j, k)$  et ainsi, le lemme 4.3.5 implique que  $[\mathbf{e}(\mathbf{c}), \mathbf{e}_{\alpha^t}] \leq \sum_{x \in \text{Supp}_P(\alpha^t)} d_x - c_{R(j, k)}$ . Mais  $[\mathbf{e}(\mathbf{c}^{ij}), \mathbf{e}_{\alpha^t}] = [\mathbf{e}(\mathbf{c}), \mathbf{e}_{\alpha^t}]$  par (4.13), donc  $c_{R(j, k)} = 0$ , ce qui contredit le fait que  $\mathbf{c}^{jk} \preceq \mathbf{c}$ .

1.3  $\text{Supp}(\alpha^t) = \{a, a+1, \dots, i, j\}$ ,  $a < i$ . Alors si  $i$  n'est pas une source dans  $\mathcal{Q}$  ou si  $i = 1$  (cas I et II), nous avons  $\Theta(\alpha_i + \alpha_j) = (w + 1, j - 1)$  et alors  $[\mathbf{e}_{\alpha_i + \alpha_j}, \mathbf{e}_{\alpha^t}] = 1$  (par (4.14)) et ainsi  $[\mathbf{e}(\mathbf{c}^{ij}), \mathbf{e}_{\alpha^t}] = \sum_{x \in \text{Supp}_P(\alpha^t)} d_x$  (par le lemme 4.3.4), d'où  $c_{R(j,k)} = 0$  comme dans le cas 1.2. Sinon,  $i$  est une source dans  $\mathcal{Q}$  et il existe  $x_1 < i$  tel qu'il y a un chemin dans  $\mathcal{Q}$  de  $i$  jusqu'à  $x_1$  et  $x_1 \in \text{Supp}_P(\alpha^t)$  (cas III et IV). De plus,  $\Theta(\alpha_i + \alpha_j) = (w + j - 1, 1)$  et comme  $\alpha^t \neq \alpha_i + \alpha_j$ , nous avons  $[\mathbf{e}_{\alpha_i + \alpha_j}, \mathbf{e}_{\alpha^t}] = 0$  et  $[\mathbf{e}(\mathbf{c}^{ij}), \mathbf{e}_{\alpha^t}] = d_j - 1 + \sum_{\substack{x \in \text{Supp}_P(\alpha^t) \\ x \neq j}} d_x$  par le lemme 4.3.4. D'autre part,

$$\begin{aligned} [\mathbf{e}(\mathbf{c}), \mathbf{e}_{\alpha^t}] &\leq \sum_{s \in R(j) \cup R(x_1)} c_s [\mathbf{e}_{\alpha^s}, \mathbf{e}_{\alpha^t}] + \sum_{\substack{x \in \text{Supp}_P(\alpha^t) \\ x \neq x_1, j}} d_x \\ &= c_{\alpha_j} + \sum_{s \in R(x_1)} c_s [\mathbf{e}_{\alpha^s}, \mathbf{e}_{\alpha^t}] + \sum_{\substack{x \in \text{Supp}_P(\alpha^t) \\ x \neq x_1, j}} d_x \end{aligned}$$

car si  $[\mathbf{e}_{\alpha^s}, \mathbf{e}_{\alpha^t}] = 1$ ,  $s \in R(j)$  et  $s \notin R(x_1)$ , alors  $\alpha^s = \alpha_j$  puisque  $k \notin \text{Supp}(\alpha^t)$ . Ainsi (4.13) implique que  $d_j + d_{x_1} - 1 \leq c_{\alpha_j} + \sum_{s \in R(x_1)} c_s [\mathbf{e}_{\alpha^s}, \mathbf{e}_{\alpha^t}]$ , d'où  $c_{\alpha_j} = d_j - 1$ .

Ceci termine la preuve dans le premier cas.

2.  $k \in \text{Supp}(\alpha^t)$ , donc  $\Theta(\alpha^t) \in \{(w + a, b - a) \mid 0 \leq a \leq j - 1, j + 1 \leq b \leq n\}$  et alors nous sommes dans le cas II ou le cas IV. Ainsi  $k$  est une source dans  $\mathcal{Q}$  et  $k < n$ . Donc il existe  $x_2 > k$  tel qu'il y a un chemin dans  $\mathcal{Q}$  de  $k$  jusqu'à  $x_2$  et tel que  $x_2$  est un puits dans  $\text{Supp}(\alpha^t)$ .

2.1  $i \notin \text{Supp}(\alpha^t)$ , donc  $\Theta(\alpha^t) \in \{(w, b) \mid j + 1 \leq b \leq n\}$ .

Dans ce cas

$$\begin{aligned} \left( \sum_{x \in \text{Supp}_P(\alpha^t)} d_x \right) - 1 &\stackrel{4.3.4}{=} [\mathbf{e}(\mathbf{c}^{ij}), \mathbf{e}_{\alpha^t}] \stackrel{(4.13)}{=} [\mathbf{e}(\mathbf{c}), \mathbf{e}_{\alpha^t}] \\ &\stackrel{4.3.5}{=} \sum_{x \in \text{Supp}_P(\alpha^t)} d_x - \sum_{s=1}^{\nu} \tilde{\chi}_t(s) c_s \\ &\leq \sum_{s \in R(j)} c_s [\mathbf{e}_{\alpha^s}, \mathbf{e}_{\alpha^t}] + \sum_{s \in R(x_2)} c_s [\mathbf{e}_{\alpha^s}, \mathbf{e}_{\alpha^t}] \\ &\quad - \sum_{s \in R(j, x_2)} c_s [\mathbf{e}_{\alpha^s}, \mathbf{e}_{\alpha^t}] + \sum_{\substack{x \in \text{Supp}_P(\alpha^t) \\ x \neq j, x_2}} d_x. \end{aligned}$$

De plus,  $[\mathbf{e}_{\alpha^s}, \mathbf{e}_{\alpha^t}] = 0$  pour tout  $s \in R(i)$  et alors

$$\sum_{s \in R(j)} c_s [\mathbf{e}_{\alpha^s}, \mathbf{e}_{\alpha^t}] \leq d_j - c_{R(i,j)} \leq d_j - 1.$$

Donc forcément

$$\sum_{s \in R(j)} c_s[\mathbf{e}_{\alpha^s}, \mathbf{e}_{\alpha^t}] = d_j - 1, \quad \sum_{s \in R(x_2)} c_s[\mathbf{e}_{\alpha^s}, \mathbf{e}_{\alpha^t}] = d_{x_2}$$

et  $\sum_{s \in R(j, x_2)} c_s[\mathbf{e}_{\alpha^s}, \mathbf{e}_{\alpha^t}] = 0$ . Mais

$$\sum_{s \in R(j)} c_s[\mathbf{e}_{\alpha^s}, \mathbf{e}_{\alpha^t}] - \sum_{s \in R(j, x_2)} c_s[\mathbf{e}_{\alpha^s}, \mathbf{e}_{\alpha^t}] = c_{\alpha_j}$$

car  $i \notin \text{Supp}(\alpha^t)$ , d'où  $c_{\alpha_j} = d_j - 1$ .

2.2  $i \in \text{Supp}(\alpha^t)$ .

2.2.1  $i = 1$  ou  $i$  n'est pas une source dans  $\mathcal{Q}$ .

Alors  $\Theta(\alpha_i + \alpha_j) = (w+1, j-1)$ , donc nous avons  $[\mathbf{e}_{\alpha_i + \alpha_j}, \mathbf{e}_{\alpha^t}] = 1$  et ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \text{Supp}_P(\alpha^t)} d_x &\stackrel{(4.3.4)}{=} [\mathbf{e}(\mathbf{c}^{ij}), \mathbf{e}_{\alpha^t}] \stackrel{(4.13)}{=} [\mathbf{e}(\mathbf{c}), \mathbf{e}_{\alpha^t}] \\ &= \sum_{x \in \text{Supp}_P(\alpha^t)} d_x - \sum_{s=1}^{\nu} \widetilde{\chi}_t(s) c_s \end{aligned}$$

où la dernière égalité est vraie par le lemme 4.3.5. Donc  $\widetilde{\chi}_t(s) c_s = 0$  pour tout  $s$ . Mais pour  $s \in R(j, k)$ , nous avons  $j \in \text{Supp}(\alpha^s) \cap \text{Supp}_P(\alpha^t)$  et si  $[\mathbf{e}_{\alpha^s}, \mathbf{e}_{\alpha^t}] = 1$  alors  $j, x_2 \in \text{Supp}(\alpha^s) \cap \text{Supp}_P(\alpha^t)$ , donc  $\widetilde{\chi}_t(s) \geq 1$  et ainsi  $c_{R(j, k)} = 0$ . Ceci contredit le fait que  $\mathbf{c}^{jk} \preceq \mathbf{c}$ .

2.2.2  $i$  est une source dans  $\mathcal{Q}$  et  $i \neq 1$ .

Donc  $(i-1) \leftarrow i \rightarrow j \leftarrow k \rightarrow (k+1)$  est un sous-carquois de  $\mathcal{Q}$  (cas IV) et  $\Theta(\alpha_i + \alpha_j) = (w+j-1, 1)$ . Si  $[\mathbf{e}_{\alpha_i + \alpha_j}, \mathbf{e}_{\alpha^t}] = 1$  alors le même argument que dans le cas 2.2.1 mène à une contradiction. Sinon  $[\mathbf{e}_{\alpha_i + \alpha_j}, \mathbf{e}_{\alpha^t}] = 0$  et il existe  $x_1 < i$  tel qu'il y a un chemin dans  $\mathcal{Q}$  de  $i$  jusqu'à  $x_1$  et tel que  $x_1 \in \text{Supp}_P(\alpha^t)$ . Alors

$$\begin{aligned} d_{x_1} + d_j - 1 + d_{x_2} + \sum_{x \in \text{Supp}_P(\alpha^t) \setminus \{x_1, j, x_2\}} d_x \\ &\stackrel{4.3.4}{=} [\mathbf{e}(\mathbf{c}^{ij}), \mathbf{e}_{\alpha^t}] \\ &\stackrel{(4.13)}{=} [\mathbf{e}(\mathbf{c}), \mathbf{e}_{\alpha^t}] \\ &= c_{\alpha_j} + \sum_{s \in R(x_1) \cup R(x_2)} c_s[\mathbf{e}_{\alpha^s}, \mathbf{e}_{\alpha^t}] + \sum_{x \in \text{Supp}_P(\alpha^t) \setminus \{x_1, j, x_2\}} d_x \\ &\leq c_{\alpha_j} + d_{x_1} + d_{x_2} + \sum_{x \in \text{Supp}_P(\alpha^t) \setminus \{x_1, j, x_2\}} d_x, \end{aligned}$$

d'où  $c_{\alpha_j} = d_j - 1$ .

Ainsi nous avons montré que  $\mathbf{c}^{ij} + \mathbf{op}^{\Upsilon_{jk}} \not\leq \mathbf{c} \Rightarrow c_{\alpha_j} = d_j - 1$ . Maintenant, soit  $\mathbf{c}^{ij} + \mathbf{op}^{\Upsilon_{jk}} \leq \mathbf{c}$ . Alors pour tout  $t \in \{1, 2, \dots, \nu\}$ ,  $[\mathbf{e}(\mathbf{c}^{ij} + \mathbf{op}^{\Upsilon_{jk}}), \mathbf{e}_{\alpha^t}] \geq [\mathbf{e}(\mathbf{c}), \mathbf{e}_{\alpha^t}]$ . Pour  $\alpha^t = \alpha_j$ , ceci implique  $d_j - 2 \geq c_{\alpha_j}$  parce que  $j$  est un puits dans  $\mathcal{Q}$  et alors  $[\mathbf{e}_{\alpha^s}, \mathbf{e}_{\alpha^t}] = 1$  si et seulement si  $\alpha^s = \alpha_j$ .

Donc  $\mathbf{c}^{ij} + \mathbf{op}^{\Upsilon_{jk}} \leq \mathbf{c} \Leftrightarrow c_{\alpha_j} \leq d_j - 2$ , ce qui termine la preuve du deuxième cas et du lemme.  $\square$

**Proposition 4.3.7** *Soit  $\mathbf{c} \in \mathbf{N}^\nu$  tel que  $\mathbf{c}^{xy} \leq \mathbf{c}$  pour tout  $x \rightarrow y \in \mathcal{Q}^1$ . Soit  $i \rightarrow j \in \mathcal{Q}^1$  et notons par  $h$ ,  $h \neq j$  l'autre sommet adjacent à  $i$  dans  $\mathcal{Q}$  si un tel sommet existe (i.e. si  $1 < i < n$ ) et notons par  $k$ ,  $k \neq i$  l'autre sommet adjacent à  $j$  dans  $\mathcal{Q}$  si un tel sommet existe. Donc  $h - i \rightarrow j - k$  est un sous-carquois de  $\mathcal{Q}$ . Alors*

$$\sum_{\substack{\Upsilon \in \mathcal{S}_{op}(\mathbf{c}^{ij}) \\ \mathbf{c}^{ij} + \mathbf{op}^{\Upsilon} \not\leq \mathbf{c}}} e(\Upsilon, \mathbf{c}^{ij}) = \begin{cases} (d_i - 1)(d_j - 1) \mathcal{V}(c_{R(i,j)} = 1) \\ + d_h \mathcal{V}(c_{R(h,i,j)} = 0 \text{ et } h \rightarrow i) \\ + d_h(d_i - 1) \mathcal{V}(c_{\alpha_i} = d_i - 1 \text{ et } h \leftarrow i) \\ + d_k \mathcal{V}(c_{R(i,j,k)} = 0 \text{ et } j \rightarrow k) \\ + d_k(d_j - 1) \mathcal{V}(c_{\alpha_j} = d_j - 1 \text{ et } j \leftarrow k) \end{cases}$$

où  $\mathcal{V}(A) = 1$  si  $A$  est vrai et  $\mathcal{V}(A) = 0$  si  $A$  est faux.

*Preuve.* Soit  $\Upsilon \in \mathcal{S}_{op}(\mathbf{c}^{ij})$ ,  $\Upsilon : 0 \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^{s_1}} \rightarrow \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^{s_2}} \rightarrow 0$ . Alors  $c_{s_1}^{ij} \geq 1$  et  $c_{s_2}^{ij} \geq 1$  et les racines correspondantes  $\alpha^{s_1}, \alpha^{s_2}$  sont soit simples tous les deux soit l'une d'entre elles est égales à  $\alpha_i + \alpha_j$  et l'autre est simple. Supposons  $\mathbf{c}^{ij} + \mathbf{op}^{\Upsilon} \not\leq \mathbf{c}$ , alors par le lemme 4.3.2 nous pouvons exclure le cas où  $\{\alpha^{s_1}, \alpha^{s_2}\} = \{\alpha_x, \alpha_y\}$  avec  $\{x, y\} \cap \{i, j\} = \emptyset$ . Pour les autres cas nous avons

| $\{\alpha^{s_1}, \alpha^{s_2}\}$    | $e(\Upsilon, \mathbf{c}^{ij})$ | condition équivalente<br>à ce que $\mathbf{c}^{ij} + \mathbf{op}^{\Upsilon} \not\leq \mathbf{c}$ |
|-------------------------------------|--------------------------------|--|
| $\{\alpha_i, \alpha_j\}$            | $(d_i - 1)(d_j - 1)$           | $c_{R(i,j)} \leq 1$  |
| $\{\alpha_h, \alpha_i\}$            | $d_h(d_i - 1)$                 | $i \in \mathcal{Q}_{SP}^0$ et $c_{\alpha_i} \geq d_i - 1$  |
| $\{\alpha_j, \alpha_k\}$            | $d_k(d_j - 1)$                 | $j \in \mathcal{Q}_{SP}^0$ et $c_{\alpha_j} \geq d_j - 1$  |
| $\{\alpha_i + \alpha_j, \alpha_h\}$ | $d_h$                          | $i \notin \mathcal{Q}_{SP}^0$ et $c_{R(h,i,j)} = 0$  |
| $\{\alpha_i + \alpha_j, \alpha_k\}$ | $d_k$                          | $j \notin \mathcal{Q}_{SP}^0$ et $c_{R(i,j,k)} = 0$  |

où la dernière colonne est donnée par les lemmes 4.3.1 et 4.3.6. Or comme nous avons supposé que  $\mathbf{c}^{ij} \leq \mathbf{c}$  il faut que  $c_{R(i,j)} \geq 1$ ,  $c_{\alpha_i} \leq d_i - 1$  et  $c_{\alpha_j} \leq d_j - 1$ , d'où la proposition.  $\square$

Supposons maintenant que  $\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{c}}}$  est projectivement rationnellement lisse mais pas lisse, i.e.  $\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{c}}}$  est rationnellement lisse en  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}'}$  pour tout  $\mathbf{c}' \leq \mathbf{c}$ ,  $\mathbf{c}' \neq \mathbf{c}^0$  et  $\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{c}}}$  n'est pas rationnellement lisse en  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}^0}$ . Supposons de plus que  $\mathbf{c}^{ij} \leq \mathbf{c}$  pour tout  $i \rightarrow j \in \mathcal{Q}^1$ .

Par le théorème 4.2.3 la codimension de  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}}$  est égale à la somme

$$\sum_{\substack{\Upsilon \in \mathcal{S}_{op}(\mathbf{c}^{ij}) \\ \mathbf{c}^{ij} + \mathbf{op}^{\Upsilon} \neq \mathbf{c}}} e(\Upsilon, \mathbf{c}^{ij})$$

et cela quelle que soit la flèche  $i \rightarrow j$ . Nous avons donné une formule pour cette somme dans la proposition précédente. D'autre part, le lemme (3.2.1) implique

$$\text{codim}(\mathcal{O}_{\mathbf{c}}) = [\mathbf{e}(\mathbf{c}), \mathbf{e}(\mathbf{c})]^1 = \sum_{s,t=1}^{\nu} c_s c_t [\mathbf{e}_{\alpha^s}, \mathbf{e}_{\alpha^t}]^1 = \sum_{\Upsilon \in \mathcal{S}_{op}(\mathbf{c})} e(\Upsilon, \mathbf{c}) \quad (4.15)$$

Nous allons analyser cette somme maintenant.

**Lemme 4.3.8** *Soit  $\mathbf{c} \in \mathbf{N}^{\nu}$  tel que  $\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{c}}}$  est projectivement rationnellement lisse mais pas lisse et tel que  $\mathbf{c}^{ij} \preceq \mathbf{c}$  pour tout  $i \rightarrow j \in \mathcal{Q}^1$ . Alors  $c_{R(i,j)} = 1$  pour tout  $i \rightarrow j \in \mathcal{Q}^1$ .*

*Preuve.* Supposons le contraire (i.e. il existe  $i \rightarrow j \in \mathcal{Q}^1$  tel que  $c_{R(i,j)} \geq 2$ ), alors  $c_{\alpha_i} < d_i - 1$  et  $c_{\alpha_j} < d_j - 1$ , donc par la proposition 4.3.7

$$\text{codim}(\mathcal{O}_{\mathbf{c}}) = d_h \mathcal{V}(c_{R(h,i,j)} = 0 \text{ et } h \rightarrow i) + d_k \mathcal{V}(c_{R(i,j,k)} = 0 \text{ et } j \rightarrow k)$$

De plus  $\text{codim}(\mathcal{O}_{\mathbf{c}}) \neq 0$  car sinon  $\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{c}}}$  est lisse. Supposons sans perte de généralité que  $i < j$ . Dans le cas  $h \rightarrow i$ ,  $j \rightarrow k$ , le carquois d'Auslander-Reiten est illustré dans la figure 4.3. Dans cette situation, nous avons les opérations élémentaires suivantes:

$$0 \rightarrow R(k) \setminus R(i, j, k) \rightarrow \dots \rightarrow R(i, j) \setminus R(i, j, k) \rightarrow 0$$

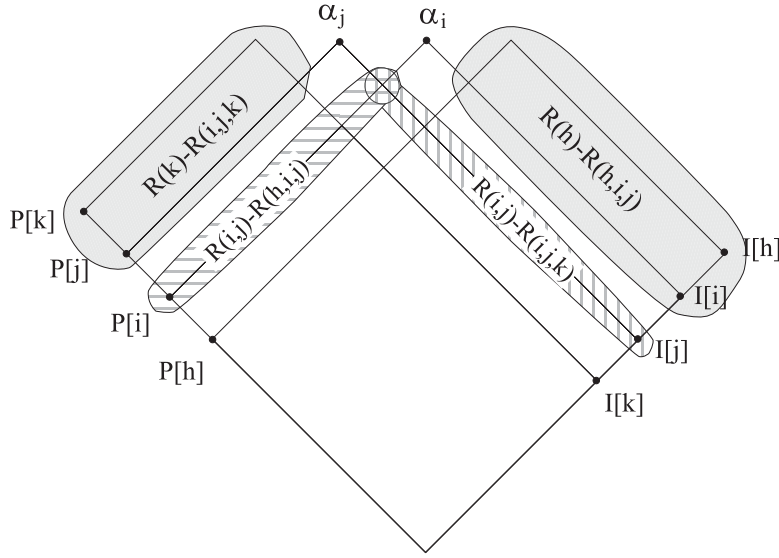
$$0 \rightarrow R(i, j) \setminus R(h, i, j) \rightarrow \dots \rightarrow R(h) \setminus R(h, i, j) \rightarrow 0$$

où la notation  $0 \rightarrow A \rightarrow \dots \rightarrow B \rightarrow 0$  signifie que pour tout  $s_1 \in A, s_2 \in B$  il existe une suite exacte non-scindée  $0 \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^{s_1}} \rightarrow \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha^{s_2}} \rightarrow 0$ . Alors par (4.15),

$$\begin{aligned} \text{codim}(\mathcal{O}_{\mathbf{c}}) &\geq (d_k - c_{R(i,j,k)})(c_{R(i,j)} - c_{R(i,j,k)}) \\ &\quad + (c_{R(i,j)} - c_{R(h,i,j)})(d_h - c_{R(h,i,j)}) \\ &\geq 2 d_k \mathcal{V}(c_{R(i,j,k)} = 0) + 2 d_h \mathcal{V}(c_{R(h,i,j)} = 0) \\ &= 2 \text{codim}(\mathcal{O}_{\mathbf{c}}) \end{aligned}$$

ce qui est impossible.

Dans le cas  $h \rightarrow i \rightarrow j \leftarrow k$  (respectivement  $h \leftarrow i \rightarrow j \rightarrow k$ ), le même argument donne  $\text{codim}(\mathcal{O}_{\mathbf{c}}) \geq 2 d_h \mathcal{V}(c_{R(h,i,j)} = 0) = 2 \text{codim}(\mathcal{O}_{\mathbf{c}})$  (respectivement



**Figure 4.3** Le schéma d'un carquois d'Auslander-Reiten dans le cas  $h \rightarrow i \rightarrow j \rightarrow k$

$\text{codim}(\mathcal{O}_c) \geq 2$   $d_k \mathcal{V}(c_{R(i,j,k)} = 0) = 2 \text{codim}(\mathcal{O}_c)$ ). Alors tous les cas mènent à une contradiction.  $\square$

Nous allons maintenant classifier les variétés de carquois de type  $A_n$  qui sont projectivement rationnellement lisses. La première étape est le lemme suivant.

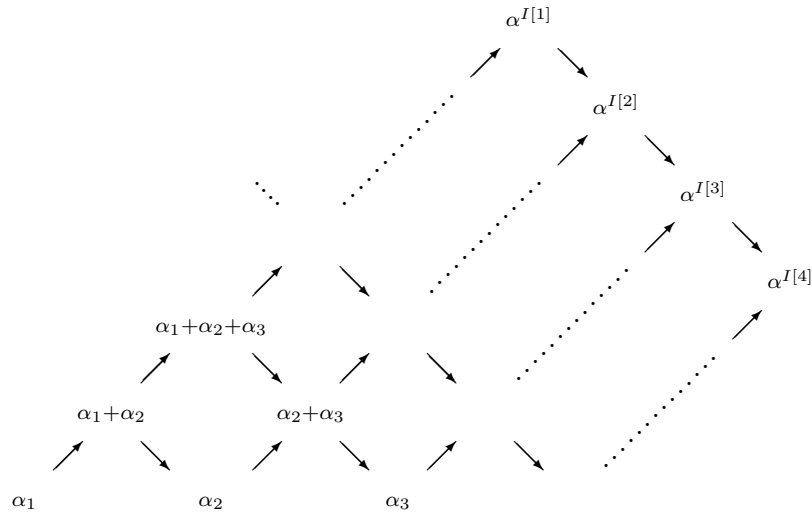
**Lemme 4.3.9** *Si  $n \geq 4$  alors il n'y a pas de variété de carquois  $\overline{\mathcal{O}}_c$  de type  $A_n$  qui est projectivement rationnellement lisse mais non-lisse et telle que  $\mathbf{c}^{ij} \preceq \mathbf{c}$  pour tout  $i \rightarrow j \in \mathcal{Q}^1$ .*

*Preuve.* Supposons le contraire. Par le lemme 4.3.8, nous avons  $c_{R(i,j)} = 1$  pour tout  $i \rightarrow j$  et alors il y a 4 types de candidat  $\mathbf{c}^1, \mathbf{c}^2, \mathbf{c}^3, \mathbf{c}^4$  classés selon leurs valeurs sur  $R(1, 2, 3)$  et sur  $R(2, 3, 4)$ . À savoir  $(c_{R(1,2,3)}^1, c_{R(2,3,4)}^1) = (0, 0)$ ,  $(c_{R(1,2,3)}^2, c_{R(2,3,4)}^2) = (1, 0)$ ,  $(c_{R(1,2,3)}^3, c_{R(2,3,4)}^3) = (0, 1)$ ,  $(c_{R(1,2,3)}^4, c_{R(2,3,4)}^4) = (1, 1)$ . On obtient le tableau suivant:

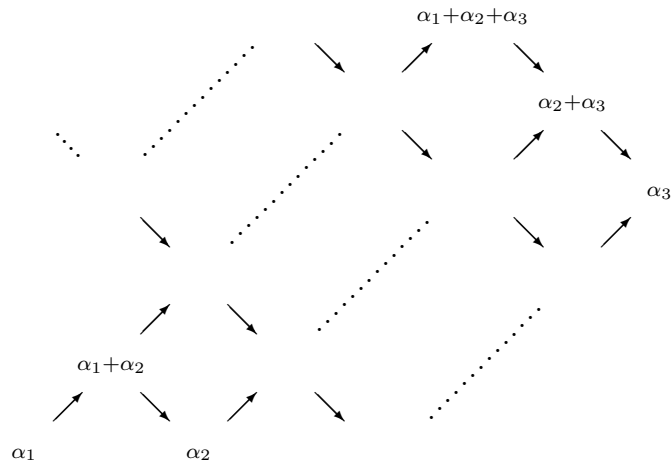
| $\mathbf{c}$   | $c_{R(1,2,3)}$ | $c_{R(2,3,4)}$ | $c_{\alpha_2}$ | $c_{\alpha_3}$ | $c_{\alpha_1+\alpha_2}$ | $c_{\alpha_2+\alpha_3}$ | $c_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}$ |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-------------------------|-------------------------|----------------------------------|
| $\mathbf{c}^1$ | 0              | 0              | $d_2 - 2$      | $d_3 - 2$      | 1                       | 1                       | 0                                |
| $\mathbf{c}^2$ | 1              | 0              | $d_2 - 1$      | $d_3 - 2$      | 0                       | 0                       | 1                                |
| $\mathbf{c}^3$ | 0              | 1              | $d_2 - 2$      | $d_3 - 1$      | 1                       | 0                       | 0                                |
| $\mathbf{c}^4$ | 1              | 1              | $d_2 - 1$      | $d_3 - 1$      | 0                       | 0                       | 0                                |

Noter que  $d_3 \geq 2$  dans les cas  $\mathbf{c}^1$  et  $\mathbf{c}^2$  et que  $d_2 \geq 2$  dans les cas  $\mathbf{c}^1$  et  $\mathbf{c}^3$ .

Par symétrie, nous pouvons supposer sans perte de généralité que  $1 \leftarrow 2 \in Q^1$ . Alors pour les 3 premières flèches, il y a 4 orientations possibles:  $Q_1 = 1 \leftarrow 2 \leftarrow 3 \leftarrow 4 \dots$ ,  $Q_2 = 1 \leftarrow 2 \leftarrow 3 \rightarrow 4 \dots$ ,  $Q_3 = 1 \leftarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \dots$ ,  $Q_4 = 1 \leftarrow 2 \rightarrow 3 \leftarrow 4 \dots$ . Les carquois d'Auslander-Reiten correspondants sont illustrés dans les figures 4.4–4.7.



**Figure 4.4** Le carquois d'Auslander-Reiten  $\Gamma_{Q_1}$



**Figure 4.5** Le carquois d'Auslander-Reiten  $\Gamma_{Q_2}$



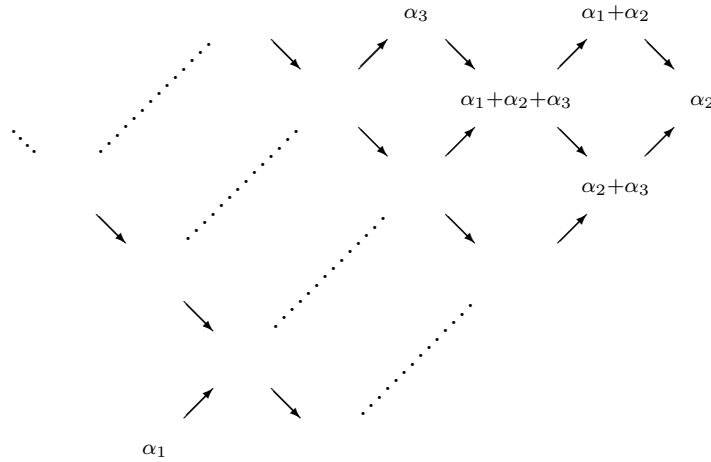


Figure 4.6 Le carquois d'Auslander-Reiten  $\Gamma_{\mathcal{Q}_3}$

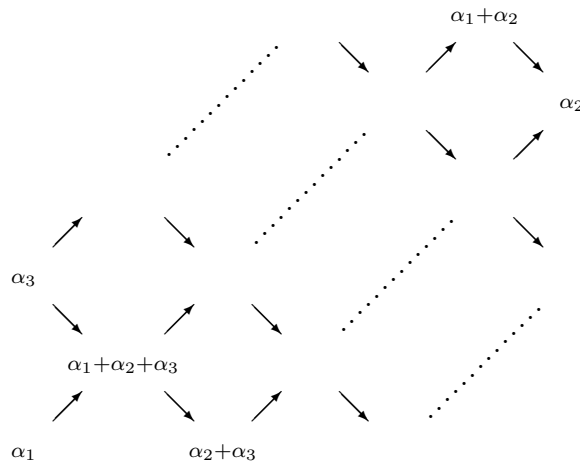


Figure 4.7 Le carquois d'Auslander-Reiten  $\Gamma_{\mathcal{Q}_4}$

Dans chaque cas, il y a les opérations élémentaires

$$0 \rightarrow R(j) \setminus R(i, j) \rightarrow \dots \rightarrow R(i) \setminus R(i, j) \rightarrow 0$$

pour tout  $i \rightarrow j$ , donc la codimension de  $\mathcal{O}_c$  est au moins  $D \stackrel{\text{déf}}{=} (d_1 - 1)(d_2 - 1) + (d_2 - 1)(d_3 - 1) + (d_3 - 1)(d_4 - 1)$ . De plus, pour chaque cas, il y a les opérations élémentaires suivantes:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \{\alpha_1 + \alpha_2\} \rightarrow \dots \rightarrow R(2, 3) \setminus R(1, 2, 3) \rightarrow 0 & \text{ si } \mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2 \\ 0 \rightarrow \{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\} \rightarrow \dots \rightarrow R(3, 4) \setminus R(1, 2, 3, 4) \rightarrow 0 & \text{ si } \mathcal{Q}_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 \rightarrow \{\alpha_2 + \alpha_3\} \rightarrow \dots \rightarrow R(3, 4) \setminus R(2, 3, 4) \rightarrow 0 & \text{ si } \mathcal{Q}_1 \\
0 \rightarrow R(2, 3, 4) \rightarrow \dots \rightarrow \{\alpha_3\} \rightarrow 0 & \text{ si } \mathcal{Q}_2 \\
0 \rightarrow R(1, 2, 3) \rightarrow \dots \rightarrow \{\alpha_2\} \rightarrow 0 & \text{ si } \mathcal{Q}_3, \mathcal{Q}_4 \\
0 \rightarrow R(3, 4) \setminus R(2, 3, 4) \rightarrow \dots \rightarrow R(2, 3) \setminus R(2, 3, 4) \rightarrow 0 & \text{ si } \mathcal{Q}_3 \\
0 \rightarrow \{\alpha_3\} \rightarrow \dots \rightarrow R(2, 3, 4) \rightarrow 0 & \text{ si } \mathcal{Q}_4.
\end{aligned}$$

Ainsi, la codimension de  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}}$  est au moins  $D(\mathbf{c}, \mathcal{Q}) \stackrel{\text{déf}}{=}$

$$\begin{cases} D + c_{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}(1 - c_{R(1,2,3,4)}) + c_{\alpha_1 + \alpha_2}(1 - c_{R(1,2,3)}) \\ \quad + c_{\alpha_2 + \alpha_3}(1 - c_{R(2,3,4)}) & \text{si } \mathcal{Q}_1 \\ D + c_{\alpha_1 + \alpha_2}(1 - c_{R(1,2,3)}) + c_{\alpha_3}c_{R(2,3,4)} & \text{si } \mathcal{Q}_2 \\ D + c_{\alpha_2}c_{R(1,2,3)} + (1 - c_{R(2,3,4)})(1 - c_{R(2,3,4)}) & \text{si } \mathcal{Q}_3 \\ D + c_{\alpha_2}c_{R(1,2,3)} + c_{\alpha_3}c_{R(2,3,4)} & \text{si } \mathcal{Q}_4 \end{cases}$$

avec  $D$  comme ci-dessus.

D'autre part, nous pouvons calculer les sommes de la proposition 4.3.7. Nous écrivons  $S(i, j)$  pour la somme

$$\sum_{\substack{\Upsilon \in \mathcal{S}_{op}(\mathbf{c}^{ij}) \\ \mathbf{c}^{ij} + \mathbf{op}\Upsilon \neq \mathbf{c}}} e(\Upsilon, \mathbf{c}^{ij})$$

pour tout  $i \rightarrow j$  et  $\delta(\mathbf{c})$  pour  $\text{codim}(\mathcal{O}_{\mathbf{c}})$ . Ainsi nous avons  $\delta(\mathbf{c}) = S(1, 2) = S(2, 3) = S(3, 4)$ .

Supposons d'abord que  $n \geq 5$ . Si  $4 \notin \mathcal{Q}_{SP}^0$  alors il y a les opérations élémentaires suivantes:

$$0 \rightarrow R(3, 4) \setminus R(3, 4, 5) \rightarrow \dots \rightarrow R(4, 5) \setminus R(3, 4, 5) \rightarrow 0$$

$$(\text{respectivement } 0 \rightarrow R(4, 5) \setminus R(3, 4, 5) \rightarrow \dots \rightarrow R(3, 4) \setminus R(3, 4, 5) \rightarrow 0),$$

et si  $4 \in \mathcal{Q}_{SP}^0$  alors il y a les opérations élémentaires suivantes:

$$0 \rightarrow R(3, 4, 5) \rightarrow \dots \rightarrow \{\alpha_4\} \rightarrow 0$$

$$(\text{respectivement } 0 \rightarrow \{\alpha_4\} \rightarrow \dots \rightarrow R(3, 4, 5) \rightarrow 0).$$

Ainsi

$$\delta(\mathbf{c}) \geq \begin{cases} D(\mathbf{c}, \mathcal{Q}) + (1 - c_{R(3,4,5)})^2 & \text{si } 4 \notin \mathcal{Q}_{SP}^0 \\ D(\mathbf{c}, \mathcal{Q}) + c_{\alpha_4}c_{R(3,4,5)} & \text{si } 4 \in \mathcal{Q}_{SP}^0 \end{cases}.$$

De plus

$$\begin{aligned} S(3, 4) &= A(3, 4) + d_5 \mathcal{V}(c_{R(3,4,5)}) = 0 \text{ et } 4 \notin \mathcal{Q}_{SP}^0 \\ &+ d_5(d_4 - 1) \mathcal{V}(c_{R(3,4,5)}) = 1 \text{ et } 4 \in \mathcal{Q}_{SP}^0, \end{aligned}$$

avec

$$A(3, 4) = (d_3 - 1)(d_4 - 1) + d_2 \mathcal{V}(c_{R(2,3,4)} = 0 \text{ et } 3 \notin \mathcal{Q}_{SP}^0) \\ + d_2(d_3 - 1) \mathcal{V}(c_{R(2,3,4)} = 1 \text{ et } 3 \in \mathcal{Q}_{SP}^0).$$

Ainsi, si  $A(3, 4) = 0$  et  $4 \notin \mathcal{Q}_{SP}^0$  alors  $c_{R(3,4,5)} = 0$  (car  $S(3, 4) \neq 0$ ) et si  $A(3, 4) = 0$  et  $4 \in \mathcal{Q}_{SP}^0$  alors  $c_{R(3,4,5)} = 1$  et  $d_4 > 1$  (car  $S(3, 4) \neq 0$ ) et  $c_{\alpha_4} = d_4 - 1$  (car  $c_{R(3,4)} = c_{R(4,5)} = c_{R(3,4,5)} = 1$ ), d'où  $\delta(\mathbf{c}) > D(\mathbf{c}, \mathcal{Q})$ . Donc, si nous pouvons montrer que  $\delta(\mathbf{c}) = D(\mathbf{c}, \mathcal{Q})$ ,  $n \geq 5$  et  $A(3, 4) = 0$  alors nous avons une contradiction. Nous nous servirons de ce résultat dans les tableaux 4.1-4.4.

Maintenant, revenons au cas  $n \geq 4$ . Nous pouvons facilement calculer les termes  $\delta(\mathbf{c}), S(1, 2), S(2, 3), S(3, 4)$  et nous obtenons une contradiction dans chacun des cas. Les résultats sont donnés dans les tableaux 4.1-4.4 (voir pages suivantes).

Ceci prouve que pour  $n \geq 4$  il n'y a pas de  $\mathbf{c}$  tel que  $\overline{\mathcal{O}}_{\mathbf{c}}$  est projectivement rationnellement lisse, non-lisse et  $\mathbf{c}^{ij} \preceq \mathbf{c}$  pour tout  $i \rightarrow j \in \mathcal{Q}^1$ .  $\square$

**Tableau 4.1** Résultats de calcul dans le cas  $\mathcal{Q}_1$ 

| $\mathbf{c}$   | $\delta(\mathbf{c}) \geq$ | $S(1, 2)$                  | $S(2, 3)$                  | $\mathcal{Q}_1 : 1 \leftarrow 2 \leftarrow 3 \leftarrow 4 \dots$  | $S(3, 4)$ | contradiction   |
|----------------|---------------------------|----------------------------|----------------------------|---|-----------|---|
|                |                           |                            |                            |   |           |   |
| $\mathbf{c}^1$ | $D + 2$                   | $(d_1 - 1)(d_2 - 1) + d_3$ |                            |   |           | $d_2 \geq 2 \Rightarrow \delta(\mathbf{c}) > S(1, 2)$   |
| $\mathbf{c}^2$ | $D + 1$                   | $(d_1 - 1)(d_2 - 1)$       |                            |   |           | $\delta(\mathbf{c}) > S(1, 2)$  |
| $\mathbf{c}^3$ | $D + 1$                   | $(d_1 - 1)(d_2 - 1) + d_3$ | $(d_2 - 1)(d_3 - 1) + d_1$ | $(d_3 - 1)(d_4 - 1) + d_5 \mathcal{V}(c_{R(3,4,5)}) = 0$ et $4 \leftarrow 5$<br>$+ (d_4 - 1)d_5 \mathcal{V}(c_{R(3,4,5)}) = 1$ et $4 \rightarrow 5$ |           | $d_2 \geq 2 \Rightarrow \delta(\mathbf{c}) = D + 1 = S(1, 2)$<br>et $(d_3 - 1)(d_4 - 1) = 0$<br>$\Rightarrow A(3, 4) = 0$ et $n \geq 5$ |
| $\mathbf{c}^4$ | $D$                       | $(d_1 - 1)(d_2 - 1)$       | $(d_2 - 1)(d_3 - 1)$       |   |           | $\delta(\mathbf{c}) \geq S(1, 2) + S(2, 3) = 2\delta(\mathbf{c})$   |

Les données dans la première colonne sont les bornes inférieures  $D(\mathbf{c}, \mathcal{Q})$  pour  $\delta(\mathbf{c})$ .  
La dernière colonne donne la contradiction du fait que  $\delta(\mathbf{c}) = S(1, 2) = S(2, 3) = S(3, 4)$ .

**Tableau 4.2** Résultats de calcul dans le cas  $\mathcal{Q}_2$ 

| $\mathbf{c}$   | $\delta(\mathbf{c}) \geq$ | $S(1, 2)$                  | $S(2, 3)$                                 | $\mathcal{Q}_2 : 1 \leftarrow 2 \leftarrow 3 \rightarrow 4 \dots$   | $S(3, 4)$ | contradiction   |
|----------------|---------------------------|----------------------------|---|---|-----------|---|
|                |                           |                            |   |   |           |   |
| $\mathbf{c}^1$ | $D + 1$                   | $(d_1 - 1)(d_2 - 1) + d_3$ | $(d_2 - 1)(d_3 - 1) + d_1$                | $(d_3 - 1)(d_4 - 1) + d_5 \mathcal{V}(c_{R(3,4,5)}) = 0$ et $4 \rightarrow 5$<br>$+ (d_4 - 1)d_5 \mathcal{V}(c_{R(3,4,5)}) = 1$ et $4 \leftarrow 5$                     |           | $d_2 \geq 2 \Rightarrow \delta(\mathbf{c}) = D + 1 = S(1, 2)$<br>et $(d_3 - 1)(d_4 - 1) = 0$<br>$\Rightarrow A(3, 4) = 0$ et $n \geq 5$ |
| $\mathbf{c}^2$ | $D$                       | $(d_1 - 1)(d_2 - 1)$       |   |   |           | $\delta(\mathbf{c}) > S(1, 2)$  |
| $\mathbf{c}^3$ | $D + d_3$                 | $(d_1 - 1)(d_2 - 1) + d_3$ | $(d_2 - 1)(d_3 - 1) + d_1 + d_4(d_3 - 1)$ | $(d_3 - 1)(d_4 - 1) + d_2(d_3 - 1)$<br>$+ d_5 \mathcal{V}(c_{R(3,4,5)}) = 0$ et $4 \rightarrow 5$<br>$+ (d_4 - 1)d_5 \mathcal{V}(c_{R(3,4,5)}) = 1$ et $4 \leftarrow 5$ |           | $d_2 \geq 2 \Rightarrow \delta(\mathbf{c}) = D + d_3 = S(1, 2)$<br>et $d_3 = 1 \Rightarrow A(3, 4) = 0$ et $n \geq 5$                   |
| $\mathbf{c}^4$ | $D + d_3 - 1$             | $(d_1 - 1)(d_2 - 1)$       | $(d_2 - 1)(d_3 - 1) + d_4(d_3 - 1)$       |   |           | $\delta(\mathbf{c}) = S(2, 3) \Rightarrow S(1, 2) = 0$  |

Les données dans la première colonne sont les bornes inférieures  $D(\mathbf{c}, \mathcal{Q})$  pour  $\delta(\mathbf{c})$ .  
La dernière colonne donne la contradiction du fait que  $\delta(\mathbf{c}) = S(1, 2) = S(2, 3) = S(3, 4)$ .

Tableau 4.3 Résultats de calcul dans le cas  $\mathcal{Q}_3$ 

| $\mathbf{c}$   | $\delta(\mathbf{c}) \geq$ | $S(1,2)$                           | $S(2,3)$                         | $\mathcal{Q}_3 : 1 \leftarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \cdots$<br>$S(3,4)$  | contradiction   |
|----------------|---------------------------|------------------------------------|----------------------------------|--|---|
| $\mathbf{c}^1$ | $D+1$                     | $(d_1-1)(d_2-1)$                   |                                  |  | $\delta(\mathbf{c}) > S(1,2)$   |
| $\mathbf{c}^2$ | $D+d_2$                   | $(d_1-1)(d_2-1)$<br>$+ (d_2-1)d_3$ |                                  |  | $\delta(\mathbf{c}) > S(1,2)$   |
| $\mathbf{c}^3$ | $D$                       | $(d_1-1)(d_2-1)$                   | $(d_2-1)(d_3-1)$                 |  | $\delta(\mathbf{c}) \geq S(1,2) + S(2,3) = 2\delta(\mathbf{c})$   |
| $\mathbf{c}^4$ | $D+d_2-1$                 | $(d_1-1)(d_2-1)$<br>$+ (d_2-1)d_3$ | $(d_2-1)(d_3-1)$<br>$(d_2-1)d_1$ | $(d_3-1)(d_4-1)$<br>$+ d_5 \mathcal{V}^{(c_{R(3,4,5)})} = 0$ et $4 \rightarrow 5$<br>$+ (d_4-1)d_5 \mathcal{V}^{(c_{R(3,4,5)})} = 1$ et $4 \leftarrow 5$ | $\delta(\mathbf{c}) = S(1,2) \Rightarrow \delta(\mathbf{c}) = D + d_2 - 1$<br>et $(d_3-1)(d_4-1) = 0$<br>$\Rightarrow A(3,4) = 0$ et $n \geq 5$ |

Les données dans la première colonne sont les bornes inférieures  $D(\mathbf{c}, \mathcal{Q})$  pour  $\delta(\mathbf{c})$ .  
La dernière colonne donne la contradiction du fait que  $\delta(\mathbf{c}) = S(1,2) = S(2,3) = S(3,4)$ .

Tableau 4.4 Résultats de calcul dans le cas  $\mathcal{Q}_4$ 

| $\mathbf{c}$   | $\delta(\mathbf{c}) \geq$ | $S(1,2)$                           | $S(2,3)$   | $\mathcal{Q}_4 : 1 \leftarrow 2 \rightarrow 3 \leftarrow 4 \cdots$<br>$S(3,4)$  | contradiction  |
|----------------|---------------------------|------------------------------------|--|---|--|
| $\mathbf{c}^1$ | $D$                       | $(d_1-1)(d_2-1)$                   |  |   | $\delta(\mathbf{c}) = S(1,2) \Rightarrow d_3 = 1$  |
| $\mathbf{c}^2$ | $D+d_2-1$                 | $(d_1-1)(d_2-1)$<br>$+ (d_2-1)d_3$ | $(d_2-1)(d_3-1)$<br>$+ (d_2-1)d_1$                 | $(d_3-1)(d_4-1)$<br>$+ d_5 \mathcal{V}^{(c_{R(3,4,5)})} = 0$ et $4 \leftarrow 5$<br>$+ (d_4-1)d_5 \mathcal{V}^{(c_{R(3,4,5)})} = 1$ et $4 \rightarrow 5$              | $\delta(\mathbf{c}) = S(1,2)$ et $d_3 \geq 2 \Rightarrow d_4 = 1$<br>et $\delta(\mathbf{c}) = D + d_2 - 1 \Rightarrow A(3,4) = 0$<br>et $n \geq 5$ |
| $\mathbf{c}^3$ | $D+d_3-1$                 | $(d_1-1)(d_2-1)$                   | $(d_2-1)(d_3-1)$<br>$(d_3-1)d_4$                   |   | $\delta(\mathbf{c}) = S(1,2) \Rightarrow S(2,3) = 0$   |
| $\mathbf{c}^4$ | $D+d_2+d_3-2$             | $(d_1-1)(d_2-1)$<br>$+ (d_2-1)d_3$ | $(d_2-1)(d_3-1)$<br>$(d_2-1)d_1$<br>$+ (d_3-1)d_4$ | $(d_3-1)(d_4-1) + d_2(d_3-1)$<br>$+ d_5 \mathcal{V}^{(c_{R(3,4,5)})} = 0$ et $4 \leftarrow 5$<br>$+ (d_4-1)d_5 \mathcal{V}^{(c_{R(3,4,5)})} = 1$ et $4 \rightarrow 5$ | $\delta(\mathbf{c}) = S(1,2) \Rightarrow d_3 = 1$ et<br>$\delta(\mathbf{c}) = D + d_2 + d_3 - 2$<br>$\Rightarrow A(3,4) = 0$ et $n \geq 5$         |

Les données dans la première colonne sont les bornes inférieures  $D(\mathbf{c}, \mathcal{Q})$  pour  $\delta(\mathbf{c})$ .  
La dernière colonne donne la contradiction du fait que  $\delta(\mathbf{c}) = S(1,2) = S(2,3) = S(3,4)$ .

Supposons maintenant  $n = 3$ . Supposons toujours sans perte de généralité que  $1 \leftarrow 2 \in \mathcal{Q}^1$ . Alors il y a deux carquois possibles  $\mathcal{Q}_1 : 1 \leftarrow 2 \leftarrow 3$  et  $\mathcal{Q}_2 : 1 \leftarrow 2 \rightarrow 3$ . Comme  $c_{R(i,j)} = 1$  pour tout  $i \rightarrow j$  il y n'a que deux candidats  $\mathbf{c}^1, \mathbf{c}^2$  classés selon leurs valeurs sur  $R(1, 2, 3)$ , à savoir  $c_{R(1,2,3)}^1 = 0$  et  $c_{R(1,2,3)}^2 = 1$ . Nous pouvons calculer facilement les tableaux 4.5 et 4.6. Or  $\delta(\mathbf{c}) = S(1, 2) = (1, 3)$  et dans chaque cas, nous obtenons des conditions:

**Tableau 4.5** Résultats de calcul dans le cas  $\mathcal{Q}_1, n = 3$

| $\mathbf{c}$   | $\delta(\mathbf{c})$                          | $\mathcal{Q}_1 : 1 \leftarrow 2 \leftarrow 3$ |                            |
|----------------|---|---|----------------------------|
|                |   | $S(1, 2)$                                     | $S(2, 3)$                  |
| $\mathbf{c}^1$ | $(d_1 - 1)(d_2 - 1) + (d_2 - 1)(d_3 - 1) + 1$ | $(d_1 - 1)(d_2 - 1) + d_3$                    | $(d_2 - 1)(d_3 - 1) + d_1$ |
| $\mathbf{c}^2$ | $(d_1 - 1)(d_2 - 1) + (d_2 - 1)(d_3 - 1)$     | $(d_1 - 1)(d_2 - 1)$                          | $(d_2 - 1)(d_3 - 1)$       |

**Tableau 4.6** Résultats de calcul dans le cas  $\mathcal{Q}_2, n = 3$

| $\mathbf{c}$   | $\delta(\mathbf{c})$                      | $\mathcal{Q}_2 : 1 \leftarrow 2 \rightarrow 3$ |                                     |
|----------------|---|--|-------------------------------------|
|                |   | $S(1, 2)$                                      | $S(2, 3)$                           |
| $\mathbf{c}^1$ | $(d_1 - 1)(d_2 - 1) + (d_2 - 1)(d_3 - 1)$ | $(d_1 - 1)(d_2 - 1)$                           | $(d_2 - 1)(d_3 - 1)$                |
| $\mathbf{c}^2$ | $(d_1 - 1)(d_2 - 1) + (d_2 - 1)d_3$       | $(d_1 - 1)(d_2 - 1) + (d_2 - 1)d_3$            | $d_1(d_2 - 1) + (d_2 - 1)(d_3 - 1)$ |

Pour  $\mathbf{c}^1$  dans le cas  $\mathcal{Q}_1$ , il faut que  $d_3 = (d_2 - 1)(d_3 - 1) + 1$  et  $d_1 = (d_1 - 1)(d_2 - 1) + 1$  et alors ou  $d_2 = 2$  ou  $d_1 = d_3 = 1$ . Ainsi nous avons que  $\mathbf{e}(\mathbf{c})$  est égal à

$$(d_1 - 1)\mathbf{e}_{\alpha_1} \oplus \mathbf{e}_{\alpha_1 + \alpha_2} \oplus \mathbf{e}_{\alpha_2 + \alpha_3} \oplus (d_3 - 1)\mathbf{e}_{\alpha_3}$$

ou

$$\mathbf{e}_{\alpha_1 + \alpha_2} \oplus (d_2 - 2)\mathbf{e}_{\alpha_2} \oplus \mathbf{e}_{\alpha_2 + \alpha_3}.$$

Pour  $\mathbf{c}^2$  dans le cas  $\mathcal{Q}_1$ , de même que pour  $\mathbf{c}^1$  dans le cas  $\mathcal{Q}_2$ , il faut que  $(d_2 - 1)(d_3 - 1) = 0$  et  $(d_1 - 1)(d_2 - 1) = 0$  donc  $\delta(\mathbf{c}) = 0$  ce qui est impossible car la variété correspondante  $\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{c}}} = E_{\mathbf{d}}$  est lisse.

Pour  $\mathbf{c}^2$  dans le cas  $\mathcal{Q}_2$  nous avons  $\delta(\mathbf{c}) = S(1, 2) = S(2, 3)$  donc dans ce cas, il n'y a pas de restriction additionnelle et

$$\mathbf{e}(\mathbf{c}) = (d_1 - 1)\mathbf{e}_{\alpha_1} \oplus (d_3 - 1)\mathbf{e}_{\alpha_3} \oplus \mathbf{e}_{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \oplus (d_2 - 1)\mathbf{e}_{\alpha_2}.$$

Supposons maintenant que  $n = 2$ . Alors  $\delta(\mathbf{c}) = c_{\alpha_1}c_{\alpha_2}$  et  $S(1, 2) = (d_1 - 1)(d_2 - 1)\mathcal{V}(\mathbf{c}^{12} + \mathbf{op}^{\Upsilon_{12}} \not\leq \mathbf{c})$ . Comme ces deux termes sont égaux et non-nuls, nous avons  $c_{\alpha_1} = d_1 - 1$  et  $c_{\alpha_2} = d_2 - 1$ , d'où  $\mathbf{c} = \mathbf{c}^{12}$ .

Nous avons démontré le théorème suivant qui donne des conditions nécessaires sur  $\mathbf{c}$ :

**Théorème 4.3.10** *Soit  $\overline{\mathcal{O}}_{\mathbf{c}}$  une variété de carquois de type  $A_n$ . Supposons que  $\overline{\mathcal{O}}_{\mathbf{c}}$  est projectivement rationnellement lisse mais pas lisse et que  $f_{ij} \neq 0$  pour chaque  $f \in \mathcal{O}_{\mathbf{c}}$  et chaque  $i \rightarrow j \in \mathcal{Q}^1$ . Alors  $2 \leq n \leq 3$  et nous avons un des 4 cas suivants:*

1.  $\mathcal{Q} \in \{1 \rightarrow 2, 1 \leftarrow 2\}$ ,  $d_1, d_2 > 1$  et  $\mathbf{e}(\mathbf{c})$  est égal à

$$(d_1 - 1)\mathbf{e}_{\alpha_1} \oplus \mathbf{e}_{\alpha_1 + \alpha_2} \oplus (d_2 - 1)\mathbf{e}_{\alpha_2}$$

2.  $\mathcal{Q} \in \{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3, 1 \leftarrow 2 \leftarrow 3\}$  et  $\mathbf{e}(\mathbf{c})$  est égal à

$$(d_1 - 1)\mathbf{e}_{\alpha_1} \oplus \mathbf{e}_{\alpha_1 + \alpha_2} \oplus \mathbf{e}_{\alpha_2 + \alpha_3} \oplus (d_3 - 1)\mathbf{e}_{\alpha_3}$$

3.  $\mathcal{Q} \in \{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3, 1 \leftarrow 2 \leftarrow 3\}$  et  $\mathbf{e}(\mathbf{c})$  est égal à

$$\mathbf{e}_{\alpha_1 + \alpha_2} \oplus (d_2 - 2)\mathbf{e}_{\alpha_2} \oplus \mathbf{e}_{\alpha_2 + \alpha_3}$$

4.  $\mathcal{Q} \in \{1 \rightarrow 2 \leftarrow 3, 1 \leftarrow 2 \rightarrow 3\}$ ,  $d_2 > 1$  et  $\mathbf{e}(\mathbf{c})$  est égal à

$$\mathbf{e}(\mathbf{c}) = (d_1 - 1)\mathbf{e}_{\alpha_1} \oplus (d_3 - 1)\mathbf{e}_{\alpha_3} \oplus \mathbf{e}_{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \oplus (d_2 - 1)\mathbf{e}_{\alpha_2}.$$

Nous montrons maintenant que ces conditions nécessaires sont aussi suffisantes, i.e. les quatre types de variétés du théorème précédent sont projectivement rationnellement lisses mais pas lisses. Dans le cas 1,  $n = 2$  et le corollaire 4.2.7 implique que  $\overline{\mathcal{O}}_{\mathbf{c}}$  n'est pas lisse parce que  $c_{12} \neq 0$  et  $\overline{\mathcal{O}}_{\mathbf{c}} \neq E_{\mathbf{d}}$ . Comme il n'y a pas de  $\mathbf{c}' \in \mathbf{N}^{\nu}$  tel que  $\mathbf{c}^0 \prec \mathbf{c}' \prec \mathbf{c}$ ,  $\overline{\mathcal{O}}_{\mathbf{c}}$  est projectivement rationnellement lisse.

Dans les trois autres cas,  $n = 3$  et l'ensemble  $\{\mathbf{c}' \mid \mathbf{c}' \preceq \mathbf{c}\}$  est  $\{\mathbf{c}^0, \mathbf{c}^{12}, \mathbf{c}^{23}, \mathbf{c}\}$  et  $\mathbf{c}^0 \prec \mathbf{c}^{12} \prec \mathbf{c}$ ,  $\mathbf{c}^0 \prec \mathbf{c}^{23} \prec \mathbf{c}$  et  $\mathbf{c}^{12}, \mathbf{c}^{23}$  ne sont pas comparables. Dans chaque cas, le corollaire 4.2.7 implique que  $\overline{\mathcal{O}}_{\mathbf{c}}$  n'est pas lisse et il ne reste qu'à montrer que  $\overline{\mathcal{O}}_{\mathbf{c}}$  est rationnellement lisse en  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}^{12}}$  et en  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}^{23}}$ . Par symétrie, il suffit de montrer ce résultat en  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}^{12}}$ . Nous utilisons la formule du théorème 3.2.2 pour calculer  $\Omega_{\mathbf{c}^{12}}^{\mathbf{c}}$ . Dans le cas 2, supposons sans perte de généralité que  $\mathcal{Q} = 1 \leftarrow 2 \leftarrow 3$ . Alors  $\mathbf{i} = (1, 2, 1, 3, 2, 1)$ ,  $\mathbf{c} = (d_1 - 1, 1, 0, 0, 1, d_3 - 1)$ ,  $\mathbf{c}^{12} = (d_1 - 1, 1, 1, 0, 0, d_3)$  et

$$\begin{aligned} \Omega_{\mathbf{c}^{12}}^{\mathbf{c}} &= (u^{d_1 - 1} - 1)^{-1} \Omega_{(d_1 - 2, 1, 1, 0, 0, d_3)}^{(d_1 - 2, 1, 0, 0, 1, d_3 - 1)} (u^{d_1 - 1} - 1) \\ &= \Omega_{(0, 1, 1, 0, 0, d_3)}^{(0, 1, 0, 0, 1, d_3 - 1)} \\ &= (u - 1)^{-1} \Omega_{(0, 0, 1, 0, 0, d_3)}^{(0, 0, 0, 0, 1, d_3 - 1)} (u - 1) \\ &= -(u - 1)^{-1} \Omega_{(0, 0, 0, 0, 0, d_3 - 1)}^{(0, 0, 0, 0, 0, d_3 - 1)} (u^{d_3} - 1)(u - 1) \\ &= -u^{d_3} + 1. \end{aligned}$$

Donc  $\omega_{\mathbf{c}^{12}}^{\mathbf{c}} = v^{d(\mathbf{c}^{12})-d(\mathbf{c})} \Omega_{\mathbf{c}^{12}}^{\mathbf{c}} = -v^{d_3} + v^{-d_3}$  et

$$\zeta_{\mathbf{c}^{12}}^{\mathbf{c}} = \overline{\zeta_{\mathbf{c}^{12}}^{\mathbf{c}}} + \omega_{\mathbf{c}^{12}}^{\mathbf{c}} = v^{-d_3} = v^{d(\mathbf{c}^{12})-d(\mathbf{c})},$$

d'où  $\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{c}}}$  est rationnellement lisse en  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}^{12}}$ .

Dans le cas 3, supposons sans perte de généralité que  $\mathcal{Q} = 1 \leftarrow 2 \leftarrow 3$ . Alors  $\mathbf{i} = (1, 2, 1, 3, 2, 1)$ ,  $\mathbf{c} = (0, 1, d_2 - 2, 0, 1, 0)$ ,  $\mathbf{c}^{12} = (0, 1, d_2 - 1, 0, 0, 1)$  et

$$\begin{aligned} \Omega_{\mathbf{c}^{12}}^{\mathbf{c}} &= \Omega_{(0,0,d_2-1,0,0,1)}^{(0,0,d_2-2,0,1,0)} \\ &= (u^{d_2-2} - 1)^{-1} \Omega_{(0,0,d_2-2,0,0,1)}^{(0,0,d_2-3,0,1,0)} (u^{d_2-1} - 1) \\ &= \frac{(u^{d_2-1} - 1)}{(u - 1)} \Omega_{(0,0,1,0,0,1)}^{(0,0,0,0,1,0)} \\ &= \frac{(u^{d_2-1} - 1)}{(u - 1)} \frac{-(u - 1)^2}{(u - 1)} \\ &= u^{d_2-1} + 1 \end{aligned}$$

Donc  $\omega_{\mathbf{c}^{12}}^{\mathbf{c}} = v^{d(\mathbf{c}^{12})-d(\mathbf{c})} \Omega_{\mathbf{c}^{12}}^{\mathbf{c}} = -v^{d_2-1} + v^{-d_2+1}$  et

$$\zeta_{\mathbf{c}^{12}}^{\mathbf{c}} = \overline{\zeta_{\mathbf{c}^{12}}^{\mathbf{c}}} + \omega_{\mathbf{c}^{12}}^{\mathbf{c}} = v^{-d_2+1} = v^{d(\mathbf{c}^{12})-d(\mathbf{c})},$$

d'où  $\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{c}}}$  est rationnellement lisse en  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}^{12}}$ .

Dans le cas 4, si  $\mathcal{Q} = 1 \rightarrow 2 \leftarrow 3$  alors  $\mathbf{i} = (2, 1, 3, 2, 1, 3)$ ,  $\mathbf{c} = (d_2 - 1, 0, 0, 1, d_3 - 1, d_1 - 1)$ ,  $\mathbf{c}^{12} = (d_2 - 1, 1, 0, 0, d_3, d_1 - 1)$  et

$$\begin{aligned} \Omega_{\mathbf{c}^{12}}^{\mathbf{c}} &= \Omega_{(0,1,0,0,d_3,d_1-1)}^{(0,0,0,1,d_3-1,d_1-1)} \\ &= (u - 1)^{-1} \Omega_{(0,0,0,0,d_3-1,d_1-1)}^{(0,0,0,0,d_3-1,d_1-1)} (-(u - 1)(u^{d_3} - 1)) \\ &= -u^{d_3} + 1. \end{aligned}$$

Si  $\mathcal{Q} = 1 \leftarrow 2 \rightarrow 3$  alors  $\mathbf{i} = (1, 3, 2, 1, 3, 2)$ ,  $\mathbf{c} = (d_1 - 1, d_3 - 1, 1, 0, 0, d_2 - 1)$ ,  $\mathbf{c}^{12} = (d_1 - 1, d_3, 0, 1, 0, d_2 - 1)$  et

$$\begin{aligned} \Omega_{\mathbf{c}^{12}}^{\mathbf{c}} &= \Omega_{(0,d_3,0,1,0,d_2-1)}^{(0,d_3-1,1,0,0,d_2-1)} \\ &= \frac{u^{d_3} - 1}{u - 1} \Omega_{(0,1,0,1,0,d_2-1)}^{(0,0,1,0,0,d_2-1)} \\ &= -\frac{u^{d_3} - 1}{u - 1} \frac{(u - 1)^2}{u - 1} \\ &= -u^{d_3} + 1. \end{aligned}$$

Donc  $\omega_{\mathbf{c}^{12}}^{\mathbf{c}} = v^{d(\mathbf{c}^{12})-d(\mathbf{c})} \Omega_{\mathbf{c}^{12}}^{\mathbf{c}} = -v^{d_3} + v^{-d_3}$  et

$$\zeta_{\mathbf{c}^{12}}^{\mathbf{c}} = \overline{\zeta_{\mathbf{c}^{12}}^{\mathbf{c}}} + \omega_{\mathbf{c}^{12}}^{\mathbf{c}} = v^{-d_3} = v^{d(\mathbf{c}^{12})-d(\mathbf{c})},$$



d'où  $\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{c}}}$  est rationnellement lisse en  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}12}$ .

Ce qui termine la preuve de la lissité rationnelle projective des quatre types de variétés du théorème 4.3.10.

Considérons maintenant le cas général.

**Théorème 4.3.11** *Soit  $\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{c}}}$  une variété de carquois de type  $A_n$  qui est projectivement rationnellement lisse mais pas lisse. Alors  $\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{c}}}$  est un produit des variétés de type  $A_2, A_3$  du théorème précédent et des variétés lisses.*

*Preuve.* Soit  $\mathbf{c}$  de  $\mathbf{i}$ -homogénéité  $\mathbf{d}$  et  $f \in \mathcal{O}_{\mathbf{c}}$ . Donc  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}} = G_{\mathbf{d}} \cdot f$ . Nous procédons par récurrence sur le nombre de flèches  $i \rightarrow j \in \mathcal{Q}^1$  tel que  $f_{ij} = 0$ . Si  $f_{ij} \neq 0$  pour tout  $i \rightarrow j \in \mathcal{Q}^1$ , alors le théorème est vrai par le théorème précédent. Sinon, soit  $i \rightarrow j \in \mathcal{Q}$  tel que  $f_{ij} = 0$  et supposons sans perte de généralité que  $i < j$ . Soit  $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}[1, i]$ ,  $\mathcal{Q}_2 = \mathcal{Q}[j, n]$  et définissons  $f^l \in E_{\mathbf{d}}$  par  $f_{hk}^l = f_{hk}$  si  $h \rightarrow k \in \mathcal{Q}_l^1$  et  $f_{hk}^l = 0$  sinon ( $l = 1, 2$ ). Soit  $\mathbf{c}^l \in \mathbf{N}^{\nu}$  tel que  $c_t^l = c_t$  si  $\text{Supp}(\alpha^t) \subset \mathcal{Q}_l$  et  $c_t^l = 0$  sinon ( $l = 1, 2$ ). Noter que  $\mathbf{c} = \mathbf{c}^1 + \mathbf{c}^2$  et que  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}^l} \cong G_{\mathbf{d}} \cdot f^l$  ( $l = 1, 2$ ) ( $\mathbf{c}^1$  est de  $\mathbf{i}$ -homogénéité  $\mathbf{d}_1 = (d_1, d_2, \dots, d_i, 0, \dots, 0)$  et  $\mathbf{c}^2$  est de  $\mathbf{i}$ -homogénéité  $\mathbf{d}_2 = (0, \dots, 0, d_j, d_{j+1}, \dots, d_n)$ ). Comme nous avons vu dans la preuve du théorème 4.2.6, l'orbite  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}}$  est le produit  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}} = \mathcal{O}_{\mathbf{c}^1} \times \mathcal{O}_{\mathbf{c}^2}$  et la variété de carquois  $\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{c}}}$  est le produit de deux variétés de carquois

$$\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{c}}} = \overline{\mathcal{O}_{\mathbf{c}^1}} \times \overline{\mathcal{O}_{\mathbf{c}^2}}.$$

Comme nous avons supposé que  $\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{c}}}$  n'était pas lisse, il faut que  $\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{c}^1}}$  ou  $\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{c}^2}}$  ne soit pas lisse. Nous allons montrer que si  $\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{c}}}$  est projectivement rationnellement lisse alors  $\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{c}^1}}$  et  $\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{c}^2}}$  sont projectivement rationnellement lisses. Par récurrence, ceci terminera la preuve du théorème. Nous avons besoin du lemme suivant:

**Lemme 4.3.12** *Soit  $\mathcal{Q}$  un carquois de type  $A_n$ ,  $i \rightarrow j \in \mathcal{Q}^1$ ,  $i < j$  et soit  $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}[1, i]$ ,  $\mathcal{Q}_2 = \mathcal{Q}[j, n]$ . Soit  $\mathbf{c} \in \mathbf{N}^{\nu}$  tel que  $\mathbf{c} = \mathbf{c}^1 + \mathbf{c}^2$  avec  $c_t^l = c_t$  si  $\text{Supp}(\alpha^t) \subset \mathcal{Q}_l$  et  $c_t^l = 0$  sinon ( $l = 1, 2$ ). Alors*

1.  $E_i^{\mathbf{c}} = E_i^{\mathbf{c}^2} E_i^{\mathbf{c}^1}$ .
2. Chaque  $\mathbf{a} \preceq \mathbf{c}$  s'écrit de façon unique comme  $\mathbf{a} = \mathbf{a}^1 + \mathbf{a}^2$  avec  $\mathbf{a}^1 \preceq \mathbf{c}^1, \mathbf{a}^2 \preceq \mathbf{c}^2$ .
3.  $\omega_{\mathbf{a}}^{\mathbf{c}} = \omega_{\mathbf{a}^1}^{\mathbf{c}^1} \omega_{\mathbf{a}^2}^{\mathbf{c}^2}$  pour chaque  $\mathbf{a} \preceq \mathbf{c}$ .
4.  $\zeta_{\mathbf{a}}^{\mathbf{c}} = \zeta_{\mathbf{a}^1}^{\mathbf{c}^1} \zeta_{\mathbf{a}^2}^{\mathbf{c}^2}$  pour chaque  $\mathbf{a} \preceq \mathbf{c}$ .

*Preuve du lemme.* 1. Si  $c_i^1 \neq 0$  et  $c_s^2 \neq 0$  alors ou bien  $[\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}_{\alpha^s}] = [\mathbf{e}_{\alpha^s}, \mathbf{e}_{\alpha^t}] = [\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}_{\alpha^s}]^1 = [\mathbf{e}_{\alpha^s}, \mathbf{e}_{\alpha^t}]^1 = 0$  et  $E_i^{\pi^{\theta,s}} E_i^{\pi^{\theta,t}} = E_i^{\pi^{\theta,t}} E_i^{\pi^{\theta,s}}$  par la proposition 2.2.3, ou bien  $i \in \text{Supp}(\alpha^t)$ ,  $j \in \text{Supp}(\alpha^s)$ ,  $[\mathbf{e}_{\alpha^t}, \mathbf{e}_{\alpha^s}]^1 = 1$  (car  $i \rightarrow j$ ) et alors  $s < t$ .

Ainsi

$$\begin{aligned} E_i^{c^2} E_i^{c^1} &= E_i^{c_1^2} \pi^{0,1} E_i^{c_2^2} \pi^{0,2} \dots E_i^{c_\nu^2} \pi^{0,\nu} E_i^{c_1^1} \pi^{0,1} E_i^{c_2^1} \pi^{0,2} \dots E_i^{c_\nu^1} \pi^{0,\nu} \\ &= E_i^{c_1} \pi^{0,1} E_i^{c_2} \pi^{0,2} \dots E_i^{c_\nu} \pi^{0,\nu} \\ &= E_i^c, \end{aligned}$$

ce qui prouve 1.

2. Soit  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_\nu) \preceq \mathbf{c}$ . Pour chaque  $f \in \mathcal{O}_{\mathbf{a}}$ , nous avons  $f \in \overline{\mathcal{O}_{\mathbf{c}}}$ , donc  $f_{ij} = 0$ . Alors  $a_{R(i,j)} = 0$  et  $\mathbf{a} = \mathbf{a}^1 + \mathbf{a}^2$  avec  $\mathbf{a}^l \preceq \mathbf{c}^l$ ,  $a_t^l = a_t$  si  $\text{Supp}(\alpha^t) \subset \mathcal{Q}_l$  et  $a_t^l = 0$  sinon ( $l = 1, 2$ ); ceci montre 2.

3. En utilisant la proposition 1.3.1 et la partie 1, nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{a} \preceq \mathbf{c}} \omega_{\mathbf{a}}^c E_i^{\mathbf{a}} &= \overline{E_i^c} = \overline{E_i^{c^2} E_i^{c^1}} \\ &= \sum_{\substack{\mathbf{a}^2 \preceq \mathbf{c}^2 \\ \mathbf{a}^1 \preceq \mathbf{c}^1}} \omega_{\mathbf{a}^2}^{c^2} \omega_{\mathbf{a}^1}^{c^1} E_i^{\mathbf{a}^2} E_i^{\mathbf{a}^1} \end{aligned}$$

et  $E_i^{\mathbf{a}^2} E_i^{\mathbf{a}^1} = E_i^{\mathbf{a}}$  par 1. Donc

$$\sum_{\mathbf{a} \preceq \mathbf{c}} \omega_{\mathbf{a}}^c E_i^{\mathbf{a}} = \sum_{\substack{\mathbf{a}^2 \preceq \mathbf{c}^2 \\ \mathbf{a}^1 \preceq \mathbf{c}^1}} \omega_{\mathbf{a}^2}^{c^2} \omega_{\mathbf{a}^1}^{c^1} E_i^{\mathbf{a}}$$

et ainsi  $\omega_{\mathbf{a}}^c = \omega_{\mathbf{a}^2}^{c^2} \omega_{\mathbf{a}^1}^{c^1}$ , ce qui montre 3.

4. Soit  $\mathbf{a} \preceq \mathbf{c}$  et  $\mathbf{a} = \mathbf{a}^1 + \mathbf{a}^2$  avec  $\mathbf{a}^1 \preceq \mathbf{c}^1$ ,  $\mathbf{a}^2 \preceq \mathbf{c}^2$ . Nous procédons par récurrence sur  $|\{\mathbf{b} \mid \mathbf{a} \preceq \mathbf{b} \preceq \mathbf{c}\}|$ . Si ce nombre est 1 alors  $\mathbf{a} = \mathbf{c}$ ,  $\mathbf{a}^1 = \mathbf{c}^1$ ,  $\mathbf{a}^2 = \mathbf{c}^2$  et l'énoncé à prouver est  $1 = 1$ . Supposons que  $|\{\mathbf{b} \mid \mathbf{a} \preceq \mathbf{b} \preceq \mathbf{c}\}| > 1$ . Par le théorème 1.3.2

$$\zeta_{\mathbf{a}^l}^{c^l} = \sum_{\mathbf{b}^l: \mathbf{a}^l \preceq \mathbf{b}^l \preceq \mathbf{c}^l} \omega_{\mathbf{a}^l}^{\mathbf{b}^l} \overline{\zeta_{\mathbf{b}^l}^{c^l}} \quad (l = 1, 2),$$

avec  $\zeta_{\mathbf{b}^l}^{c^l} \in v^{-1}\mathbf{Z}[v^{-1}]$ . Noter que pour  $\mathbf{b} = \mathbf{b}^1 + \mathbf{b}^2$ , nous avons  $\mathbf{a} \preceq \mathbf{b} \preceq \mathbf{c}$  et  $\omega_{\mathbf{a}^1}^{\mathbf{b}^1} \omega_{\mathbf{a}^2}^{\mathbf{b}^2} = \omega_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}$  par 3. Alors

$$\zeta_{\mathbf{a}^1}^{c^1} \zeta_{\mathbf{a}^2}^{c^2} = \sum_{\substack{\mathbf{b}^1: \mathbf{a}^1 \preceq \mathbf{b}^1 \preceq \mathbf{c}^1 \\ \mathbf{b}^2: \mathbf{a}^2 \preceq \mathbf{b}^2 \preceq \mathbf{c}^2}} \omega_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \overline{\zeta_{\mathbf{b}^1}^{c^1} \zeta_{\mathbf{b}^2}^{c^2}}$$

et par récurrence

$$\zeta_{\mathbf{a}^1}^{c^1} \zeta_{\mathbf{a}^2}^{c^2} = \overline{\zeta_{\mathbf{a}^1}^{c^1} \zeta_{\mathbf{a}^2}^{c^2}} + \sum_{\mathbf{b}: \mathbf{a} < \mathbf{b} \preceq \mathbf{c}} \omega_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \overline{\zeta_{\mathbf{b}}^c}.$$

Donc  $\zeta_{\mathbf{a}}^{\mathbf{c}}$  et  $\zeta_{\mathbf{a}^1}^{\mathbf{c}^1} \zeta_{\mathbf{a}^2}^{\mathbf{c}^2}$  satisfont la même équation et il est montré dans (Lusztig, 1990a, sect. 9.12) que cette équation détermine  $\zeta_{\mathbf{a}}^{\mathbf{c}}$  complètement. Ainsi  $\zeta_{\mathbf{a}}^{\mathbf{c}} = \zeta_{\mathbf{a}^1}^{\mathbf{c}^1} \zeta_{\mathbf{a}^2}^{\mathbf{c}^2}$  et le lemme est démontré.

Maintenant, nous montrons que dans la situation du théorème  $\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{c}^1}}$  et  $\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{c}^2}}$  sont projectivement rationnellement lisses. Supposons sans perte de généralité que  $i < j$  et soit  $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}[1, i]$ ,  $\mathcal{Q}_2 = \mathcal{Q}[j, n]$ .  $\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{c}}}$  est projectivement rationnellement lisse, i.e.  $\zeta_{\mathbf{a}}^{\mathbf{c}} = v^{d(\mathbf{a})-d(\mathbf{c})}$  pour  $\mathbf{c}^0 \neq \mathbf{a} \preceq \mathbf{c}$ . Fixons un tel  $\mathbf{a}$  et soient  $\mathbf{a}^1 \preceq \mathbf{c}^1$ ,  $\mathbf{a}^2 \preceq \mathbf{c}^2$  tels que  $\mathbf{a} = \mathbf{a}^1 + \mathbf{a}^2$ . Il suffit de montrer que  $\zeta_{\mathbf{a}^l}^{\mathbf{c}^l} = v^{d(\mathbf{a}^l)-d(\mathbf{c}^l)}$  ( $l = 1, 2$ ) si  $d(\mathbf{a}^l) \neq 0$ . Or par le lemme,  $\zeta_{\mathbf{a}^1}^{\mathbf{c}^1} \zeta_{\mathbf{a}^2}^{\mathbf{c}^2} = \zeta_{\mathbf{a}}^{\mathbf{c}} = v^{d(\mathbf{a})-d(\mathbf{c})}$ . De plus par le théorème 1.3.2.4,

$$\zeta_{\mathbf{a}^l}^{\mathbf{c}^l} = \sum_k \dim(\mathcal{H}_f^{2k}) v^{2k} v^{d(\mathbf{a}^l)-d(\mathbf{c}^l)} \quad (l = 1, 2)$$

Donc  $\zeta_{\mathbf{a}^l}^{\mathbf{c}^l} = v^{x(l)}$  avec  $x(l) \geq d(\mathbf{a}^l) - d(\mathbf{c}^l)$  ( $l = 1, 2$ ) et  $x(1) + x(2) = d(\mathbf{a}) - d(\mathbf{c})$ . Alors il suffit de montrer que

$$d(\mathbf{a}) - d(\mathbf{c}) = d(\mathbf{a}^1) + d(\mathbf{a}^2) - d(\mathbf{c}^1) - d(\mathbf{c}^2)$$

mais ceci est vrai parce que l'orbite  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}}$  est le produit des orbites  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}^1}$  et  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}^2}$  et l'orbite  $\mathcal{O}_{\mathbf{a}}$  est le produit des orbites  $\mathcal{O}_{\mathbf{a}^1}$  et  $\mathcal{O}_{\mathbf{a}^2}$ .  $\square$



## CONCLUSION

Nous avons étudié dans ce travail les variétés de carquois de type  $A$  et leurs singularités. Ces variétés forment une classe très riche de variétés algébriques affines et elles sont reliées à l'algèbre enveloppante quantique et aux représentations du carquois. Les algèbres enveloppantes quantiques sont en soi un sujet fort intéressant. Elles sont des exemples importants d'algèbres non-commutatives. De plus, elles ont des applications dans plusieurs branches des sciences, notamment en physique théorique, dans la théorie des noeuds et des représentations des algèbres. Comprendre la cohomologie d'intersection locale des variétés de carquois peut être un pas vers l'explicitation de la base canonique de l'algèbre enveloppante quantique, ce qui serait considérable.

Le but de notre recherche était de donner des critères pour qu'une variété de carquois de type  $A$  soit rationnellement lisse, c'est-à-dire sa cohomologie d'intersection soit la plus simple. Pour y arriver, il fallait d'abord étudier les polynômes  $\Omega_{\mathbb{C}}^{\mathbf{a}}$ . Nous avons réussi à donner une formule récursive pour ces polynômes en introduisant les  $r$ -partages, qui servent à décrire la combinatoire de la multiplication par un vecteur de racine dans l'algèbre enveloppante quantique, voir théorème 3.1.1. Ce théorème est le résultat clé de notre travail. Nous en avons déduit la formule récursive pour les  $\Omega_{\mathbb{C}}^{\mathbf{a}}$  (théorème 3.2.2) dont nous nous sommes servis afin de calculer la cohomologie d'intersection locale des variétés de carquois, pour enfin classifier complètement les variétés rationnellement lisses et les variétés projectivement rationnellement lisses. De plus, nous avons montré le résultat intéressant qu'une variété de carquois de type  $A$  est lisse si et seulement si elle est rationnellement lisse.

Notre travail ouvre plusieurs pistes de recherche à venir:

- Utiliser la formule de la multiplication par un vecteur de racine (théorème 3.1.1) pour mieux comprendre la multiplication dans l'algèbre enveloppante quantique ainsi que dans l'algèbre de Hall.
- Se servir de la formule récursive pour les  $\Omega_{\mathbb{C}}^{\mathbf{a}}$  (théorème 3.2.2) pour donner des critères pour qu'une variété de carquois de type  $A$  soit localement rationnellement lisse.
- Généraliser les arguments de la thèse pour obtenir des résultats dans les cas  $D$  et  $E$ . Plus précisément

- trouver une formule explicite pour la multiplication dans l'algèbre de Hall et la transporter dans l'algèbre enveloppante quantique.
- se servir de cette formule pour obtenir une formule récursive pour les  $\Omega_c^a$ .
- donner une description combinatoire des opérations élémentaires dans le cas  $E$  (cas  $A, D$  voir (Brown, 1998)).
- Donner une description de l'effet des opérations élémentaires sur les  $\Omega_c^a$  et déterminer des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une variété de carquois de type  $D$  ou  $E$  est rationnellement lisse.
- Donner des conditions nécessaires et suffisantes pour la lissité rationnelle locale des variétés de carquois dans les cas  $D$  et  $E$  et en particulier pour la lissité rationnelle projective de ces variétés.

## RÉFÉRENCES

- Auslander, M. et Reiten, I. 1985. « Modules determined by their composition factors », *Illinois J.Math.*, vol. 29, p. 281–301.
- Bongartz, K. 1995. « Degenerations for representations of tame quivers », *Annales Scientifiques De L'école Normale Supérieure (IV)*, vol. 28, p. 647–668.
- Brown, P. 1998. « Non-Split extensions over Representation-Finite hereditary algebras », *Communications in Algebra*, vol. 26(4), p. 1005–1015.
- Gabriel, P. 1975. « Finite representation type is open ». In *Representations of Algebras, Lecture Notes in Mathematics 488*, p. 132–155. Springer-Verlag.
- Gabriel, P. 1980. « Auslander-Reiten sequences and representation-finite algebras ». In *Representation Theory I, Lecture Notes in Mathematics 831*, p. 1–71. Springer Verlag.
- Humphreys, J. E. 1975. *Linear Algebraic Groups*. T. 21, série *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York.
- Lusztig, G. 1990a. « Canonical bases arising from quantized enveloping algebras », *J.Amer.Math.Soc.*, vol. 3, p. 447–498.
- Lusztig, G. 1990b. « Finite dimensional hopf algebras arising from quantized universal enveloping algebras », *J.Amer.Math.Soc.*, vol. 3, p. 257–296.
- Ringel, C. 1990. « Hall algebras and quantum groups », *Invent. Math.*, vol. 101, p. 583–592.





## Publications du **Laboratoire de Combinatoire** et d'Informatique **Mathématique**

---

..... suite de la page couverture 2

- 18 *Hyperbinomiales: doubles suites satisfaisant à des équations aux différences partielles de dimension et d'ordre deux de la forme  $H(n, k) = p(n, k)H(n - 1, k) + q(n, k)H(n - 1, k - 1)$* , P. Théoret, **1994**
  - 19 *Théorie des espèces et combinatoire des structures arborescentes*, F. Bergeron, G. Labelle, P. Leroux, **1994**
  - 20 *Axel Thue's papers on repetitions in words: a translation*, J. Berstel, **1995**
  - 21 *Une généralisation des séries indicatrices d'espèces de structures*, K. Pineau, **1996**
  - 22 *Fonctions symétriques, ensembles de descentes et classes de conjugaison dans les produits en couronne*, S. Poirier, **1996**
  - 23 *Combinatoire des systèmes d'équations différentielles et aux dérivées partielles*, B. Randrianirina, **1998**
  - 24 *Espèces de structures et applications au dénombrement de cartes et de cactus planaires*, M. Bousquet, **1998**
  - 25 *Contribution à l'étude des mots sturmiens*, B. Parvaix, **1998**
  - 26 *Analyse d'équations combinatoires en théorie des espèces*, P. Auger, **1999**
  - 27 *Colloque LaCIM 2000 — Combinatoire, Informatique et Applications*, P. Leroux (éd.), Septembre 2000, Actes, **2000**
  - 28 *Fonctions de Bessel et combinatoire*, F. Gascon, **2001**
  - 29 *The Saga of Reduced Factorizations of Elements of the Symmetric Group*, A. Garsia, **2002**
  - 30 *Variétés de carquois et homologie d'intersection*, R. Schiffler, **2003**
  - 31 *Algorithmes vectoriels et bioinformatique*, S. Hamel, **2003**
  - 32 *Conjecture  $n!$  et généralisations*, J.-C. Aval, **2003**
-

VARIÉTÉS DE CARQUOIS ET  
HOMOLOGIE D'INTERSECTION

Soit  $U^+$  la partie positive de l'algèbre enveloppante quantique  $U$  de type  $A$ . Le changement de base entre la base canonique et la base de type PBW peut s'interpréter en termes de cohomologie d'intersection locale de certaines variétés algébriques, à savoir les clôtures de Zariski des orbites des représentations d'un carquois de type  $A$ . Nous étudions la lissité rationnelle de ces variétés ainsi que de leur projectivisations.

TABLE DES MATIÈRES

|  |    |
|--|----|
| 1. Notations et rappels .....                                    | 3  |
| 2. Résultats de R. Bédard .....                                  | 23 |
| 3. Le calcul des polynômes $\Omega_c^a$ .....                    | 39 |
| 4. Les singularités des variétés de carquois de type $A_n$ ..... | 53 |

Laboratoire de combinatoire et d'informatique mathématique  
 Université du Québec à Montréal  
 C.P. 8888, Succ. Centre-Ville  
 Montréal (Québec) Canada  
 H3C 3P8



isbn 2-89276-302-9