Publications du Laboratoire de
Combinatoire et d'
Informatique
Mathématique

26

Pierre Auger

Analyse d'équations combinatoires en théorie des espèces

Université du Québec à Montréal

Ce numéro constitue la publication d'une thèse soutenue devant jury, le 17 septembre 1999, pour l'obtention du doctorat en mathématiques (Ph.D.) à l'Université du Québec à Montréal.

Composition du Jury

G. Labelle	*UQAM*, directeur de recherche
P. Leroux	*UQAM*, co-directeur de recherche
Pierre Bouchard	*UQAM*
C. Reutenauer	*UQAM*
Y. Chiricota	*Pad Systems Technologies*

Dépôt légal, premier semestre 2000, Bibliothèque nationale du Québec

ISBN 2-89276-177-8 LaCIM Montréal

Laboratoire de combinatoire et d'informatique mathématique
Université du Québec à Montréal
C.P. 8888, Succ. Centre-Ville
Montréal (Québec) Canada
H3C 3P8

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

ANALYSE D'ÉQUATIONS COMBINATOIRES EN THÉORIE DES ESPÈCES

THÈSE
PRÉSENTÉE
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DU DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES

PAR
PIERRE AUGER

OCTOBRE 1999

REMERCIEMENTS

Je remercie vivement Gilbert Labelle et Pierre Leroux d'avoir accepté d'être mes directeurs. De tout ce dont je leur suis redevable, je me bornerai à dire, par souci de brièveté, qu'ils se sont toujours montré des guides sûrs tout au long de mes études de doctorat, en m'indiquant souvent des pistes prometteuses, d'une part, mais aussi, d'autre part, en m'évitant des « écueils », ce qui m'amène à dire à ce propos, de façon imagée, qu'ils ont aussi été des « phares » sur ma route. Je tiens de plus à remercier Christophe Reutenauer de m'avoir fourni un cadre théorique adéquat en ce qui a trait à la section 4.3, ou, plus particulièrement, à l'article 4.3.4, contribuant de la sorte à en clarifier l'exposé. D'autre part, je remercie Gisèle Legault d'avoir mis au point un format en LaTeX qui soit conforme aux normes de présentation, ce qui a grandement facilité la production de cette thèse. Je remercie aussi mes parents pour leurs encouragements et leur aide.

En terminant, je tiens à souligner que l'aide financière que m'ont accordé le FCAR, l'ISM et le CRSNG m'a énormément aidé à poursuivre mes études de doctorat et à mener à bien l'écriture de cette thèse. Je tiens par conséquent à exprimer toute ma reconnnaissance à l'endroit de ces trois organismes.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES

LISTE DES TABLEAUX

LISTE DES NOTATIONS

$\mathbb{N}^*$	Ensemble des entiers (strictement) positifs
$\boldsymbol{B}$	Catégorie des ensembles finis et bijections
$\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{B}$	Catégorie produit de la catégorie $\boldsymbol{B}$ avec elle-même
$\mathfrak{A}$	Ensemble des classes d'isomorphie d'espèces atomiques uni-sortes
$\mathfrak{M}$	Ensemble des classes d'isomorphie d'espèces moléculaires uni-sortes
$\mathfrak{A}_{X,Y}$	Ensemble des classes d'isomorphie d'espèces atomiques bi-sortes, en les variables X et Y
$\mathfrak{M}_{X,Y}$	Ensemble des classes d'isomorphie d'espèces moléculaires bi-sortes, en les variables X et Y
$\mathbb{C}\lvert X\rvert$	$\mathbb{C}$-algèbre (stricte) du monoïde commutatif libre engendré par l'ensemble $\mathfrak{A}$
$\mathbb{C}\lVert X\rVert$	$\mathbb{C}$-algèbre large du monoïde commutatif libre engendré par l'ensemble $\mathfrak{A}$
$\mathbb{C}\lvert X,Y\rvert$	$\mathbb{C}$-algèbre (stricte) du monoïde commutatif libre engendré par l'ensemble $\mathfrak{A}_{X,Y}$
$\mathbb{C}\lVert X,Y\rVert$	$\mathbb{C}$-algèbre large du monoïde commutatif libre engendré par l'ensemble $\mathfrak{A}_{X,Y}$
$\mathcal{E}_2$	Ensemble des éléments de degré ≤ 2 de $\mathfrak{M}_{X,Y}$
$\mathbb{C}\lVert X,Y\rVert_{\leq 2}$	Ensemble des formes combinatoires quadratiques
$\mathcal{P}(L)$	Ensemble des palindromes de L
$\mathcal{D}(L)$	Ensemble des dexterpalindromes de L
$\mathcal{P}_{\mathrm{p}}(L)$	Ensemble des palindromes primitifs de L

$\mathcal{D}_{\mathrm{p}}(L)$	Ensemble des dexterpalindromes primitifs de L
$\mathcal{CP}(L)$	Ensemble des mots circulairement palindromes de L
$\mathfrak{D}(L)$	Ensemble des classes diédrales de L
$\mathfrak{P}(L)$	Ensemble des classes diédrales palindromes de L
$\mathfrak{C}(L)$	Ensemble des classes diédrales non palindromes de L
$\mathfrak{D}_{\mathrm{p}}(L)$	Ensemble des classes diédrales primitives de L
$\mathfrak{P}_{\mathrm{p}}(L)$	Ensemble des classes diédrales palindromes primitives de L
$\mathfrak{C}_{\mathrm{p}}(L)$	Ensemble des classes diédrales non palindromes primitives de L

RÉSUMÉ

Cette thèse est consacrée à l'étude d'équations combinatoires $\Phi(X,Y)=0$ dans le contexte des $\mathbb{C}$-espèces, plus riche que le contexte des séries formelles et que celui des espèces ordinaires ($\mathbb{N}$-espèces) (Bouchard, Chiricota et Labelle, 1995). En particulier, nous donnons des formes canoniques pour les équations $\Phi(X,Y)=0$, où Φ désigne une $\mathbb{C}$-espèce quadratique, de manière analogue à la classification des coniques, nous donnons des conditions d'existence de racines moléculaires de $\mathbb{C}$-espèces, c'est-à-dire de $\mathbb{C}$-espèces solutions à des équations de la forme $M(\Phi)=\Psi$, Ψ désignant une $\mathbb{C}$-espèce donnée et M une espèce moléculaire et, à cette fin, nous développons plusieurs méthodes de calcul de $\mathbb{C}$-espèces de la forme $M(\xi+X)$, où $\xi\in\mathbb{C}$ et où M désigne une espèce moléculaire. Au chapitre 1, dans la foulée des travaux de Joyal (1986) et de Yeh (1986a), nous étudions la loi de composition $(\Phi,\Psi)\mapsto\Phi\circ\Psi$ dans le contexte des $\mathbb{C}$-espèces à terme constant non nécessairement nul. Cette loi de composition nous permet alors, au chapitre 2, de définir une relation de congruence sur l'ensemble des formes combinatoires quadratiques, deux telles formes étant *congrues* lorsque l'une peut être obtenue de l'autre par ***substitution affine*** de ses variables. Cette classification nous permet alors de ramener la résolution de l'équation $F(X,Y)=0$, F désignant une forme combinatoire quadratique, à la résolution d'équations dont l'espèce F appartient à un petit nombre de familles d'espèces à un paramètre complexe. Au chapitre 3, nous donnons des conditions d'existence de solutions Φ à l'équation combinatoire $M(\Phi)=\Psi$, M désignant une espèce moléculaire et Ψ une $\mathbb{C}$-espèce donnée. Là encore, il se trouve que la loi de composition mentionnée ci-dessus rend très souvent possible la résolution de cette équation combinatoire dans des cas où cette même équation n'en admettrait pas autrement. Au chapitre 4, nous présentons des méthodes de calcul générales des $\mathbb{C}$-espèces *pseudo-moléculaires*, c'est-à-dire des $\mathbb{C}$-espèces de la forme $M(\xi+X)$, M désignant une espèce moléculaire et ξ un nombre complexe ; nous poursuivons par des résultats portant sur le développement de certaines $\mathbb{C}$-espèces pseudo-moléculaires. Finalement, au chapitre 5, nous présentons un module de calcul du développement des $\mathbb{C}$-espèces *cyclo-ensemblistes* et, pour faire suite, la mise en application de la méthode d'itération de Newton appliquée au calcul de racines symétriques et cycliques.

INTRODUCTION

Soient E l'espèce des ensembles et $\wp$ celle des parties. On a alors

$$\wp = E^2,$$

cette relation bien connue traduisant le fait que toute partie $P \subseteq U$ d'un ensemble U arbitraire correspond, par une bijection naturelle, au couple de parties de U formé de P et de son complément. On dit alors que l'espèce E est *racine carrée* de l'espèce $\wp$.

Considérons deuxièmement l'espèce Ch_6 des *chaînes* sur un ensemble à 6 éléments ainsi que l'espèce X^3 des ordres linéaires sur 3 éléments. On a alors (fig. 0.1)

$$\mathrm{Ch}_6 = E_2(X^3),$$

où E_2 désigne l'espèce des ensembles de cardinal 2. On dit alors dans ce cas que l'espèce X^3 est *racine carrée symétrique* de l'espèce Ch_6.

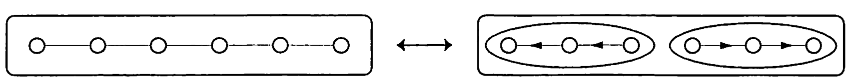

Figure 0.1 $\mathrm{Ch}_6 = E_2(X^3)$

Finalement, soit $\mathfrak{a}$ l'espèce des arbres (graphes connexes sans cycles), et soit A l'espèce des arborescences, c'est-à-dire des arbres pointés. P. Leroux a montré la relation suivante entre ces deux espèces, appelée la *formule de dissymétrie pour les arbres* (Bergeron, Labelle et Leroux, 1994, 1998 ; Leroux, 1988 ; Leroux et Miloudi, 1992)

$$A + E_2(A) = \mathfrak{a} + A^2.$$

Or, il se trouve (Bouchard, Chiricota et Labelle, 1995) que l'équation ci-dessus est en fait équivalente à l'équation

$$E_2(1 - A) = 1 - \mathfrak{a}. \tag{1}$$

On dit alors là encore que l'espèce virtuelle $1 - A$ est racine carrée symétrique de l'espèce virtuelle $1 - \mathfrak{a}$.

En fait, les espèces E_2 et X^2 étant moléculaires, on peut remarquer que les équations précédentes appartiennent toutes à une même classe d'équations combinatoires, à savoir l'équation générale de la forme

$$M(\Phi) = F, \tag{2}$$

M désignant une espèce moléculaire, Φ et F des espèce de structures, sauf dans le cas de l'équation (1) ci-dessus, où $1 - A$ et $1 - \mathfrak{a}$ sont, comme nous l'avons dit, des espèces virtuelles. Cette dernière équation constitue précisément un exemple remarquable d'équation combinatoire établissant une relation entre des objets mathématiques qui, bien que n'étant pas des espèces de structures, sont, dit de façon informelle, des objets combinatoires « analogues » aux espèces de structures, à savoir des *espèces virtuelles*; de plus, cette même équation présente le fait remarquable que le premier membre en est obtenu par substitution d'une espèce virtuelle à *terme constant non nul* dans une espèce moléculaire; nous aurons l'occasion d'y revenir un peu plus loin. Quoi qu'il en soit, il se trouve que l'ensemble des classes d'isomorphie d'espèces virtuelles peut être muni d'une structure de $\mathbb{Z}$-algèbre par rapport aux lois d'addition et de multiplication définies entre espèces virtuelles. Cette $\mathbb{Z}$-algèbre est alors isomorphe à la $\mathbb{Z}$-algèbre du monoïde commutatif libre engendré par les classes d'isomorphie d'espèces atomiques. On a alors en fait le plongement canonique $\mathbb{N}\|X\| \hookrightarrow \mathbb{Z}\|X\|$, le demi-anneau des classes d'isomorphie d'espèces de structures étant lui-même isomorphe au demi-anneau $\mathbb{N}\|X\|$.

Il était naturel que ceci, par une démarche analogue, nous conduisît à considérer l'extension $\mathbb{Z}\|X\| \hookrightarrow \mathbb{C}\|X\|$, $\mathbb{C}\|X\|$ désignant, comme on peut s'y attendre, la $\mathbb{C}$-algèbre large du monoïde commutatif libre engendré par l'ensemble des classes d'isomorphie d'espèces atomiques. Nous définissons alors de plus, dans la foulée des travaux de Joyal et de Yeh, la substitution d'une $\mathbb{C}$-espèce à terme constant non nécessairement nul dans une $\mathbb{C}$-espèce, polynomiale lorsque le terme constant de l'espèce qu'on substitue est non nul. Comme c'est souvent le cas en algèbre, cette extension nous permet alors de trouver des solutions à certaines équations combinatoires qui, si l'on se confinait à $\mathbb{Z}\|X\|$, n'en admettraient pas. Cette extension présente alors l'avantage, par rapport à d'autres extensions possibles, que le corps des scalaires est algébriquement clos.

On peut en fait situer le problème de la résolution des équations de la forme (2) dans un cadre plus général. Considérons en effet la $\mathbb{C}$-algèbre large du monoïde commutatif libre engendrée par les classes d'isomorphie d'espèces atomiques bi-sortes, notée $\mathbb{C}\|X,Y\|$. On définirait, de façon analogue à la loi de substitution définie entre $\mathbb{C}$-espèces, la substitution de deux $\mathbb{C}$-espèces à termes constants non nécessairement nuls dans une $\mathbb{C}$-espèce bi-sorte, cette dernière devant par définition être polynomiale lorsque l'une au moins des deux espèces qu'on substitue est à terme constant non nul. Soit alors $\Phi(X,Y) \in \mathbb{C}\|X,Y\|$. On peut alors poser le problème de la résolution de l'équation $\Phi(X,Y) = 0$ en convenant que ce problème consiste à trouver des couples de $\mathbb{C}$-espèces $(F(T), G(T))$ en la variable T satisfaisant à la relation

$$\Phi(F(T), G(T)) = 0.$$

Soit par exemple $\Phi(X,Y) = E_2(X) - Y$. On a ainsi, en vertu de l'équation (1), que le couple $(1 - A, 1 - \mathcal{a})$ est solution de l'équation $\Phi(X,Y) = 0$.

Cette thèse est précisément consacrée à l'étude de ces équations combinatoires. En particulier,

– nous donnons des formes canoniques pour les équations $\Phi(X,Y) = 0$, où Φ désigne une $\mathbb{C}$-espèce quadratique, de manière analogue à la classification des coniques,

– nous donnons des conditions d'existence de racines moléculaires de $\mathbb{C}$-espèces, c'est-à-dire de $\mathbb{C}$-espèces solutions à des équations de la forme $M(\Phi) = \Psi$, Ψ désignant une $\mathbb{C}$-espèce donnée et M une espèce moléculaire,

– nous développons plusieurs méthodes de calcul de $\mathbb{C}$-espèces de la forme $M(\xi + X)$, où $\xi \in \mathbb{C}$ et où M désigne une espèce moléculaire.

Au chapitre 1, suite aux travaux de Joyal (1986) et de Yeh (1986a), nous étudions la loi de composition $(\Phi, \Psi) \mapsto \Phi \circ \Psi$ dans le contexte des $\mathbb{C}$-espèces à terme constant non nécessairement nul. Cette loi de composition nous permet, au chapitre 2, de définir une relation de congruence sur l'ensemble des formes combinatoires quadratiques, deux telles formes étant congrues lorsque l'une peut être obtenue de l'autre par *substitution affine* de ses variables. On obtient alors des formes canoniques qui sont regroupées à l'intérieur d'un petit nombre de familles de $\mathbb{C}$-espèces à un paramètre. Cette classification nous permet ainsi de ramener la résolution de l'équation $F(X,Y) = 0$, F désignant une forme combinatoire quadratique, à la résolution d'équations dont l'espèce F est une forme canonique. Au chapitre 3, nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes d'existence de solutions Φ à l'équation combinatoires $M(\Phi) = F$, M désignant une espèce moléculaire et F une $\mathbb{C}$-espèce donnée. Là encore, il se trouve que la loi de composition mentionnée ci-dessus rend très souvent possible la résolution de cette équation combinatoire dans des cas où cette même équation n'en admettrait pas autrement. Au chapitre 4, nous présentons des méthodes de calcul générales des $\mathbb{C}$-espèces *pseudo-moléculaires*, c'est-à-dire des $\mathbb{C}$-espèces de la forme $M(\xi + X)$, M désignant une espèce moléculaire et ξ un nombre complexe ; nous poursuivons par des résultats portant sur le développement de certaines $\mathbb{C}$-espèces pseudo-moléculaires. En particulier, nous présentons la décomposition moléculaire de l'espèce $P_n(\xi + X)$, où P_n désigne l'espèce des polygones de degré n, et donnons des formules de calcul des coefficients de cette décomposition. Nous introduisons à cette occasion une nouvelle famille d'espèces moléculaires de la forme $C_m(X^j)/\mathbb{Z}_2$. Finalement, au chapitre 5, nous présentons un module de calcul du développement des $\mathbb{C}$-espèces *cyclo-ensemblistes* et, pour faire suite, la mise en application de la méthode d'itération de Newton appliquée au calcul de racines symétriques et de racines cycliques.

CHAPITRE I

GÉNÉRALITÉS SUR LES $\mathbb{C}$-ESPÈCES

1.1 $\mathbb{C}$-espèces

Dans la présente section, nous nous proposons principalement de définir ce qu'est une $\mathbb{C}$-espèce. Dans cette perspective, nous allons d'abord esquisser un certain nombre de rappels sur la théorie des espèces de structures.

Tout au long du présent ouvrage, $\boldsymbol{B}$ désignera la catégorie des ensembles finis et bijections.

Rappelons d'abord qu'une espèce de structures est tout simplement un endofoncteur de la catégorie des ensembles finis et bijections. Soit F une espèce de structures, et soit U un ensemble fini arbitraire. On note $F[U]$ le transformé de U par le foncteur F ; on dit alors que les éléments de $F[U]$ sont les F-structures sur U, ou encore que ce sont les F-structures *portées* par U. Soit alors V un ensemble fini tel que $|V| = |U|$, et soit σ une bijection de U sur V. On note $F[\sigma]$ le transformé de σ par le foncteur F ; la fonction $F[\sigma]$ est elle-même une bijection : on dit qu'elle effectue le « transport » des F-structures sur U vers les F-structures sur V. Rappelons également que deux espèces F et G sont dites *isomorphes* s'il existe une bijection naturelle $\alpha : F \to G$. On écrit alors $F \simeq G$, ou encore, par abus, $F = G$ (égalité combinatoire).

D'autre part, peut-être est-il bon de rappeler que, parmi les différentes lois de composition définies entre espèces de structures, deux de ces lois, notées respectivement $+$ et $\cdot$, munissent la classe des espèces de structures d'une structure de demi-anneau. Plus précisément, la structure multiplicative sous-jacente de ce demi-anneau est un monoïde ; plus particulièrement, ceci signifie qu'il existe une espèce qui constitue un élément unité. On note simplement 1 cette espèce ; elle est définie en posant

$$1[U] = \begin{cases} \{U\}, & \text{si } U = \emptyset, \\ \emptyset, & \text{si } U \neq \emptyset. \end{cases}$$

Il est bien connu que cette espèce est la seule qui soit inversible, à isomorphisme près. D'autre part, l'espèce nulle, notée 0, définie par $0[U] = \emptyset$, pour tout ensemble fini U, en est l'élément neutre pour l'addition.

Soient encore une fois U, V des ensembles finis arbitraires, et soient $s \in F[U]$, $t \in F[V]$; on note $s \sim t$ s'il existe une bijection σ de U sur V telle que $t = F[\sigma](s)$, auquel cas on dit que s est *isomorphe* à t. On vérifie aisément qu'il s'agit d'une relation d'équivalence définie sur la classe des F-structures. Les classes d'équivalence pour cette relation sont appelées les *types d'isomorphie de F-structures*. On peut déjà observer que deux F-structures ne peuvent être isomorphes que si elles sont portées par des ensembles de même cardinal. Qui plus est, toute F-structure sur un ensemble U arbitraire est isomorphe à une F-structure sur l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$; il suffit pour s'en convaincre de noter que, quelle que soit la bijection σ de U sur $\{1, 2, \ldots, n\}$, on a $F[\sigma](s) \in F[n]$, quel que soit $s \in F[U]$, lorsque l'on pose

$$F[n] = F[\{1, 2, \ldots, n\}].$$

En fait, on a une bijection canonique entre les classes d'équivalence de la classe des F-structures pour la relation d'isomorphie et les classes d'équivalence, pour cette même relation, de l'ensemble

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F[n].$$

Ceci nous permet d'en déduire que le nombre de classes d'équivalence de F-structures pour la relation $\sim$ restreinte à un cardinal donné est fini, c'est-à-dire, par définition, que le nombre de types d'isomorphie de structures sur un ensemble de ce même cardinal est fini. Rappelons incidemment que l'on note F_n l'espèce définie par

$$F_n[U] = \begin{cases} F[U], & \text{si } |U| = n, \\ \emptyset, & \text{sinon;} \end{cases} \tag{1.1}$$

autrement dit, F_n désigne l'espèce F *restreinte au cardinal* n. De plus, on note alors

$$F_{\leq n} = \sum_{k \leq n} F_k. \tag{1.2}$$

Nous sommes maintenant mieux à même de rappeler ce qu'est une espèce moléculaire.

Définition 1.1.1. Une espèce de structures M est dite *moléculaire* s'il n'existe qu'un type d'isomorphie de M-structures.

En d'autres termes, une espèce de structures M est moléculaire si, et seulement si, deux M-structures arbitraires sont toujours isomorphes, que ces structures soient portées par des ensembles sous-jacents distincts ou non. La proposition suivante énonce une propriété remarquable à laquelle satisfont les espèces moléculaires.

Proposition 1.1.2. Une espèce de structures M est moléculaire si, et seulement si, $M \neq 0$ et, quels que soient les espèces P et Q, la relation $M = P + Q$ entraîne $P = 0$ ou $Q = 0$.

On montre en effet aisément que la somme de deux espèces non nulles admet au moins deux types d'isomorphie.

L'espèce X des *singletons* est un exemple d'espèce moléculaire. Rappelons que X est l'espèce de structures telle que l'on a, pour $U \in \boldsymbol{B}$,

$$X[U] = \begin{cases} \{U\}, & \text{si } |U| = 1, \\ \emptyset, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme on le verra, cette espèce jouera un rôle fondamental dans la suite du présent ouvrage. Intuitivement, cette espèce joue un rôle analogue à celui que joue une indéterminée dans le contexte d'un anneau de séries formelles en cette même indéterminée.

Soit M une espèce moléculaire arbitraire. Alors, il résulte immédiatement de la définition ci-dessus que M est nécessairement *concentrée sur un cardinal donné*, c'est-à-dire qu'il existe un entier positif n tel que $M[U] \neq \emptyset$ seulement lorsque l'on a $|U| = n$. On dit alors de n que c'est le *degré* de M, noté $\deg M$. De plus, il se trouve que, pour un cardinal donné, le nombre d'espèces moléculaires (à isomorphisme d'espèces près) de degré égal à ce cardinal est fini et ainsi, l'ensemble des espèces moléculaires (à isomorphisme d'espèces près) est infini dénombrable. Désormais, nous noterons $\mathfrak{M}$ l'ensemble des espèces moléculaires, à isomorphisme près, et $\mathfrak{M}_+$ l'ensemble $\mathfrak{M} \setminus \{1\}$. De plus, pour $n \in \mathbb{N}$, nous noterons $\mathfrak{M}_n$ le sous-ensemble de l'ensemble $\mathfrak{M}$ formé des éléments de degré n. Incidemment, nous supposerons l'ensemble $\mathfrak{M}$ muni d'une relation d'ordre total fixée une fois pour toutes, notée $\preceq$, cette relation étant compatible avec les degrés, c'est-à-dire telle que, quelles que soient $M, N \in \mathfrak{M}$, on ait $M \preceq N$ dès que $\deg M < \deg N$. Soient E l'espèce des *ensembles*, C celle des *cycles*, définies respectivement par

$$\begin{aligned} E[U] &= \{U\} \\ C[U] &= \{\sigma \mid \sigma \text{ est une permutation circulaire des éléments de } U\}, \end{aligned}$$

U désignant un ensemble fini arbitraire. On a

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 \cup \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2 \cup \mathfrak{M}_3 \ldots$$

où $\mathfrak{M}_0 = \{1\}$, $\mathfrak{M}_1 = \{X\}$, $\mathfrak{M}_2 = \{E_2, X^2\}$, $\mathfrak{M}_3 = \{E_3, C_3, XE_2, X^3\}$, ...,

On a répertorié (Bergeron, Labelle et Leroux, 1994, 1998 ; Chiricota, 1993 ; Labelle, 1985) les espèces moléculaires jusqu'au degré 7.

Soit F une espèce de structures arbitraire. On a alors l'équation

$$F = \sum_{n \in \mathbb{N}} F_n.$$

De plus, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on sait, par un résultat bien connu de la théorie des actions de groupe affirmant que toute action est canoniquement isomorphe à une somme (réunion disjointe) d'actions transitives (Bergeron, Labelle et Leroux, 1994, 1998, app. 1), que le terme d'indice n de cette somme est isomorphe à une somme d'espèces moléculaires, unique à l'ordre des termes et à isomorphisme près. Ainsi, en regroupant les termes de cette dernière somme isomorphes entre eux, on obtient une identité de la forme

$$F_n = \sum_{N \in \mathfrak{M}_n} f_N N,$$

où, pour $N \in \mathfrak{M}_n$, f_N désigne un entier positif ou nul. On a donc finalement l'isomorphisme

$$F = \sum_{N \in \mathfrak{M}} f_N N; \tag{1.3}$$

et alors on dit de l'expression (1.1) que c'est la *décomposition moléculaire* de l'espèce F. On note alors $[N]F$ le coefficient de N de la décomposition moléculaire de F, c'est-à-dire que l'on pose

$$[N]F = f_N. \tag{1.4}$$

Nous allons maintenant définir une sous-classe de la classe des espèces moléculaires.

Définition 1.1.3. Une espèce de structures est dite *atomique* si elle est moléculaire $\neq 1$ et si elle est irréductible (pour le produit).

Désormais, nous noterons $\mathfrak{A}$ l'ensemble des classes d'isomorphie d'espèces atomiques. On a

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2 \cup \mathfrak{A}_3 \cup \mathfrak{A}_4 \cup \ldots$$

où $\mathfrak{A}_1 = \{X\}$, $\mathfrak{A}_2 = \{E_2\}$, $\mathfrak{A}_3 = \{E_3, C_3\}$, ...

On note alors $\mathbb{N}\|X\|$ la $\mathbb{N}$-demi-algèbre large du monoïde commutatif libre engendré par l'ensemble $\mathfrak{A}$.

Comme on le verra, la proposition suivante constitue le dernier maillon permettant d'établir un isomorphisme canonique entre l'ensemble des classes d'isomorphie d'espèces de structures et le demi-anneau $\mathbb{N}\|X\|$.

Proposition 1.1.4 (Yeh, 1985). Toute espèce moléculaire M admet une et une seule factorisation, à l'ordre des facteurs et à isomorphisme près, comme produit d'espèces atomiques.

Ainsi, l'ensemble $\mathfrak{M}$, lorsqu'on le suppose muni de la loi de multiplication d'espèces, n'est autre que le monoïde commutatif libre engendré par $\mathfrak{A}$. En vertu de la relation (1.3), on voit donc que le demi-anneau des classes d'isomorphie d'espèces de structures est isomorphe à la $\mathbb{N}$-(demi-)algèbre large du monoïde commutatif libre engendré par $\mathfrak{A}$, comme nous l'avions annoncé.

Tout au long du présent ouvrage, on notera $\mathbb{C}\|X\|$ la $\mathbb{C}$-algèbre large du monoïde commutatif libre engendré par l'ensemble $\mathfrak{A}$. Par définition, un élément de $\mathbb{C}\|X\|$ s'écrit de manière unique, à l'ordre des termes près, sous la forme (1.3), les coefficients f_N, pour $N \in \mathfrak{M}$, appartenant dans le cas présent à $\mathbb{C}$.

Définition 1.1.5. Une $\mathbb{C}$-*espèce* est un élément de $\mathbb{C}\|X\|$.

On peut observer d'emblée que la classe des espèces de structures, ou, plus précisément, l'ensemble des classes d'isomorphie d'espèces de structures, qui forme comme on l'a dit plus haut un demi-anneau, s'identifie canoniquement à une sous-structure de $\mathbb{C}\|X\|$; on a en effet le plongement canonique

$$\mathbb{N}\|X\| \hookrightarrow \mathbb{C}\|X\|.$$

Notons de plus que la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathbb{C}[\![X]\!]$ est une sous-algèbre de $\mathbb{C}\|X\|$, par plongement canonique, l'algèbre $\mathbb{C}[\![X]\!]$ étant évidemment l'algèbre des séries formelles en une « indéterminée » X.

Un autre sous-ensemble de $\mathbb{C}\|X\|$ retiendra notre attention, à savoir le sous-ensemble des éléments à support fini, sous-ensemble que nous noterons $\mathbb{C}|X|$.

Définition 1.1.6. On dit d'un élément de $\mathbb{C}|X|$ que c'est une $\mathbb{C}$-espèce *polynomiale*.

Les résultats précédents admettent des analogues (Joyal, 1981 ; Bergeron, Labelle et Leroux, 1994, 1998, sect.2.3) au cas des espèces multi-sortes. Rappelons d'abord ce qu'est une espèce bi-sorte.

Définition 1.1.7. Une espèce *bi-sorte* est un foncteur de la catégorie produit $\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{B}$ dans $\boldsymbol{B}$.

Ainsi, une espèce bi-sorte F fait correspondre à tout couple (U, V) d'ensembles finis un ensemble fini qui, incidemment, sera noté $F[U, V]$, et à tout couple (σ_1, σ_2) de bijections $\sigma_1 : U \xrightarrow{\sim} U'$, $\sigma_2 : V \xrightarrow{\sim} V'$ avec $(U', V') \in \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{B}$, une bijection

$$F[\sigma_1, \sigma_2] : F[U, V] \to F[U', V'].$$

Les définitions d'espèces moléculaires bi-sortes et d'espèces atomiques bi-sortes s'obtiennent *mutatis mutandis.* Ajoutons d'autre part que toute espèce de structures G s'identifie canoniquement à l'espèce bi-sorte F obtenue en posant, pour $U = (U_1, U_2) \in \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{B}$,

$$F[U] = \begin{cases} G[U_1], & \text{si } U_2 = \emptyset, \\ \emptyset, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, soit X l'espèce bi-sorte des singletons de première sorte, c'est-à-dire que X désigne dans ce qui suit l'espèce bi-sorte correspondant à l'espèce X des singletons par la bijection canonique décrite ci-dessus. Soit de plus Y l'espèce bi-sorte des singletons de deuxième sorte, c'est-à-dire l'espèce bi-sorte telle que l'on a, pour $U = (U_1, U_2) \in \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{B}$,

$$Y[U] = \begin{cases} \{U_2\} & \text{si } U_1 = \emptyset \text{ et } |U_2| = 1, \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note alors $\mathfrak{A}_{X,Y}$ l'ensemble des classes d'isomorphie d'espèces atomiques bi-sortes. Le monoïde commutatif libre engendré par cet ensemble est alors l'ensemble noté $\mathfrak{M}_{X,Y}$ des espèces moléculaires bi-sortes. Soit alors $\mathbb{C}\|X, Y\|$ la $\mathbb{C}$-algèbre large du monoïde commutatif libre engendré par l'ensemble $\mathfrak{A}_{X,Y}$. Alors, il se trouve qu'on a aussi dans le cas présent un isomorphisme du demi-anneau des classes d'isomorphie d'espèces bi-sortes sur la $\mathbb{N}$-(demi-) algèbre large du monoïde commutatif libre engendré par $\mathfrak{A}_{X,Y}$. D'autre part, on a également le plongement canonique

$$\mathbb{C}[\![X, Y]\!] \hookrightarrow \mathbb{C}\|X, Y\|.$$

$\mathbb{C}[\![X, Y]\!]$ désignant la $\mathbb{C}$-algèbre des séries formelles en les « indéterminées » X et Y.

On notera $\mathbb{C}|X, Y|$ la sous-algèbre des éléments de $\mathbb{C}\|X, Y\|$ à support fini.

La définition suivante est, intuitivement, l'analogue du bi-degré d'un monôme en deux indéterminées. On notera toutefois que ceci n'est vrai que dans un sens intuitif, certaines espèces moléculaires bi-sortes ne pouvant se factoriser en un produit de deux espèces moléculaires uni-sortes.

Définition 1.1.8. Soit M une espèce moléculaire bi-sorte, et soit $(n, k) \in \mathbb{N}^2$. On dit de (n, k) que c'est le *bi-degré* de M si $M[U, V] \neq \emptyset$ pour $(U, V) \in \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{B}$ tel que $|U| = n$, $|V| = k$.

On a les sous-classes suivantes de la classe des espèces bi-sortes.

Définition 1.1.9. Soit $\Phi \in \mathbb{C}\|X, Y\|$. On dit de Φ que c'est une $\mathbb{C}$-espèce *polynomiale*[1] *par rapport à* Y s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $\Phi[U, V] = \emptyset$, pour tout bi-ensemble $(U, V) \in \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{B}$ tel que $|V| > n$. On obtient *mutatis mutandis* la définition d'une $\mathbb{C}$-espèce polynomiale par rapport à X.

---

[1] Il est à noter que la définition donnée ici est plus restrictive que celle de l'ouvrage de Bergeron, Labelle et Leroux.

En fait, la classe des espèces de structures, de même que celle des espèces bi-sortes, peuvent être vues comme des sous-classes d'une classe beaucoup plus vaste, celle des espèces multi-sortes, que nous nous apprêtons à définir dans ce qui suit. Nous allons d'abord dans ce but introduire la définition suivante.

Définition 1.1.10. Soit I une famille d'indices. On note alors $\boldsymbol{B}^{(I)}$ la catégorie dont les objets sont les familles $(U_i)_{i\in I}$, avec $U_i \in \boldsymbol{B}$, pour $i \in I$, vérifiant la relation $\sum_{i\in I} |U_i| < \infty$, et dont les morphismes sont les familles $(\sigma_i)_{i\in I}$ de bijections $\sigma_i : U_i \to V_i$, lorsqu'on note $(V_i)_{i\in I}$ un autre objet arbitraire de cette catégorie.

Définition 1.1.11. Soit I une famille d'indices arbitraire. Une espèce multi-sorte est un foncteur de la catégorie $\boldsymbol{B}^{(I)}$ dans $\boldsymbol{B}$.

Exemple 1.1.12. Soit I une famille d'indices, et soit $i \in I$. On note alors T_i l'espèce multisorte telle que l'on a, pour $(U_\iota)_{\iota\in I} \in \boldsymbol{B}^{(I)}$,

$$T_i\left[(U_\iota)_{\iota\in I}\right] = \begin{cases} \{U_i\}, & \text{si } |U_i| = 1 \text{ et si } U_\iota = \emptyset, \text{ pour } \iota \in I \setminus \{i\}, \\ \emptyset, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On dit alors que T_i est l'*espèce (multi-sorte) des singletons de sorte* i.

1.2 Lois de composition

Nous nous proposons dans cette section de définir de nouvelles lois de composition entre $\mathbb{C}$-espèces.

1.2.1 Dérivation

Rappelons d'abord que si F désigne une espèce de structures quelconque, alors on pose

$$F' = \frac{d}{dX} F,$$

le symbole d/dX désignant l'opérateur usuel de dérivation combinatoire. Ainsi, on obtient une loi de composition externe sur $\mathbb{C}\|X\|$ en étendant à cet ensemble, par linéarité, l'opérateur d/dX. Plus précisément, soit $\Phi \in \mathbb{C}\|X\|$, $\Phi = \sum_{N\in\mathfrak{M}} \Phi_N N$. On pose alors

$$\Phi' = \sum_{N\in\mathfrak{M}} \Phi_N N'.$$

On dit alors de Φ' que c'est la dérivée combinatoire de Φ. De même, on définit des lois de composition externes sur $\mathbb{C}\|X,Y\|$ en étendant à cet ensemble, par linéarité, les opérateurs de dérivation partielles $\partial/\partial X$ et $\partial/\partial Y$, définis pour toute espèce moléculaire $M \in \mathfrak{M}_{X,Y}$. Plus précisément, soit $\Theta(X,Y) = \sum_{M\in\mathfrak{M}_{X,Y}} \theta_M M(X,Y)$; on pose

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X}\Theta &= \sum_{M\in\mathfrak{M}_{X,Y}} \theta_M \frac{\partial}{\partial X} M, \\ \frac{\partial}{\partial Y}\Theta &= \sum_{M\in\mathfrak{M}_{X,Y}} \theta_M \frac{\partial}{\partial Y} M. \end{aligned}$$

1.2.2 Substitution généralisée

Outre l'addition et la multiplication, il existe une troisième loi de composition usuelle entre éléments de $\mathbb{C}\|X\|$, à savoir la loi dite de *substitution* ou encore de *composition partitionnelle*, que l'on note $\circ$. Toutefois, contrairement aux deux premières, la loi de substitution n'est habituellement définie que pour les couples (Θ, Φ) tels que $\Phi(0) = 0$, auquel cas on dit de $\Theta \circ \Phi$ (aussi notée $\Theta(\Phi)$) que c'est la substitution de Φ dans Θ. Peut-être est-il bon de rappeler comment est définie cette loi. Posons

$$\Theta = \sum_{M \in \mathfrak{M}} \theta_M \, M.$$

On a alors, par définition (cf. déf. 1.2.3),

$$\Theta \circ \Phi = \sum_{M \in \mathfrak{M}} \theta_M \, M(\Phi),$$

où, pour $M \in \mathfrak{M}$, $M \circ \Phi$ est défini par un prolongement algébrique aux $\mathbb{C}$-espèces basé sur le comportement de la substitution d'une espèce ordinaire ($\mathbb{N}$-espèce) à terme constant nul dans une espèce moléculaire ; ceci fait précisément l'objet de la proposition qui suit, qu'on doit, essentiellement, à Joyal et Yeh (Joyal, 1985 ; Yeh, 1986a).

Proposition 1.2.1. Soit $M \in \mathfrak{M}$. Soit $(x_L)_{L \in \mathfrak{M}}$ une famille d'indéterminées. Il existe des polynômes $p_{M,N}((x_L)_{L \in \mathfrak{M}})$ tels que l'on ait, quelle que soit l'espèce $F = \sum_{L \in \mathfrak{M}} f_L L \in \mathbb{N}\|X\|$ avec $F(0) = 0$,

$$M(F) = \sum_{N \in \mathfrak{M}} p_{M,N}((f_L)_{L \in \mathfrak{M}}) \, N.$$

Démonstration. On a

$$M(F) = M\Big(\sum_{N \in \mathfrak{M}_+} f_N T_N\Big)\Big|_{T_N := N}.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} M\Big(\sum_{N \in \mathfrak{M}_+} f_N T_N\Big) &= M\Big(\sum_{N \in \mathfrak{M}_+} T_N\Big) \times E\Big(\sum_{N \in \mathfrak{M}_+} f_N T_N\Big) \\ &= M\Big(\sum_{N \in \mathfrak{M}_+} T_N\Big) \times \prod_{N \in \mathfrak{M}_+} (E(T_N))^{f_N} \\ &= M\Big(\sum_{N \in \mathfrak{M}_+} T_N\Big) \times \prod_{N \in \mathfrak{M}_+} \Big(\sum_{k_N \geq 0} \binom{f_N}{k_N} (E_+(T_N))^{k_N}\Big). \end{aligned}$$

Soit $N_\circ \in \mathfrak{M}$, et soit $n = \deg(N_\circ)$. On vérifie aisément que l'on a

$$[N_\circ] M(F) = [N_\circ] M(F_{\leq n}).$$

Or, on a évidemment

$$M\Big(\sum_{N \in \mathfrak{M}_{\leq n}} f_N N\Big) = M\Big(\sum_{N \in \mathfrak{M}_{\leq n}} f_N T_N\Big)\Big|_{T_N := N, \; N \in \mathfrak{M}_{\leq n}}.$$

De plus, on a

$$
\begin{aligned}
&M(\sum_{N\in\mathfrak{M}_{\le n}} f_N T_N) \\
&= M(\sum_{N\in\mathfrak{M}_{\le n}} T_N) \times E(\sum_{N\in\mathfrak{M}_{\le n}} f_N T_N) && (1.5)\\
&= M(\sum_{N\in\mathfrak{M}_{\le n}} T_N) \times \prod_{N\in\mathfrak{M}_{\le n}} (E(T_N))^{f_N} && (1.6)\\
&= M(\sum_{N\in\mathfrak{M}_{\le n}} T_N) \times \prod_{N\in\mathfrak{M}_{\le n}} \Big(\sum_{k_N\ge 0} \binom{f_N}{k_N} (E_+(T_N))^{k_N}\Big) && (1.7)\\
&= M\Big(\sum_{N\in\mathfrak{M}_{\le n}} T_N\Big) \times \sum_{(k_N)_{N\in\mathfrak{M}_{\le n}}} \prod_{N\in\mathfrak{M}_{\le n}} \binom{f_N}{k_N} E_+(T_N)^{k_N} && (1.8)\\
&= \sum_{(k_N)_{N\in\mathfrak{M}_{\le n}}} \Big(\prod_{N\in\mathfrak{M}_{\le n}} \binom{f_N}{k_N}\Big) M\Big(\sum_{N\in\mathfrak{M}_{\le n}} T_N\Big) \times \prod_{N\in\mathfrak{M}_{\le n}} E_+(T_N)^{k_N}, && (1.9)
\end{aligned}
$$

le multi-indice $(k_N)_{N\in\mathfrak{M}_{\le n}}$ décrivant l'ensemble des fonctions de $\mathfrak{M}_{\le n}$ dans $\mathbb{N}$. On obtient donc l'identité

$$
\begin{aligned}
&M(\sum_{N\in\mathfrak{M}_{\le n}} f_N N) \\
&= \sum_{(k_N)_{N\in\mathfrak{M}_{\le n}}} \Big(\prod_{N\in\mathfrak{M}_{\le n}} \binom{f_N}{k_N}\Big) M\Big(\sum_{N\in\mathfrak{M}_{\le n}} T_N\Big) \times \prod_{N\in\mathfrak{M}_{\le n}} E_+(T_N)^{k_N} \Bigg|_{T_N:=N,\ N\in\mathfrak{M}_{\le n}} && (1.10)
\end{aligned}
$$

Soit alors $(k_N)_{N\in\mathfrak{M}}$ un multi-indice arbitraire. L'ordre de l'espèce

$$\prod_{N\in\mathfrak{M}_{\le n}} (E_+(N))^{k_N}$$

étant d'au moins

$$\sum_{N\in\mathfrak{M}_{\le n}} k_N|N|,$$

on en déduit immédiatement qu'il en de même du terme de (1.10) correspondant à ce même multi-indice. On voit donc que seuls les multi-indices $(k_N)_{N\in\mathfrak{M}}$ vérifiant la relation

$$\sum_{N\in\mathfrak{M}_{\le n}} k_N|N| \le n,$$

peuvent contribuer au calcul du coefficient de N_o. L'ensemble des tels multi-indices étant évidemment fini, on a donc

$$
\begin{aligned}
&[N_o]M(\sum_{N\in\mathfrak{M}_{\le n}} f_N N) \\
&= \sum_{(k_N)_{N\in\mathfrak{M}_{\le n}}} \prod_{N\in\mathfrak{M}_{\le n}} \binom{f_N}{k_N} [N_o] \Big(M\Big(\sum_{N\in\mathfrak{M}_{\le n}} T_N\Big) \times \prod_{N\in\mathfrak{M}_{\le n}} E_+(T_N)^{k_N}\Big)\Bigg|_{T_N:=N,\ N\in\mathfrak{M}_{\le n}}
\end{aligned}
$$

le multi-indice $(k_N)_{N\in\mathfrak{M}_{\leq n}}$ décrivant cet ensemble fini. Ainsi, le coefficient de $N_\circ$ de la $\mathbb{C}$-espèce

$$\Big(M\Big(\sum_{N\in\mathfrak{M}_{\leq n}} T_N\Big) \times \prod_{N\in\mathfrak{M}_{\leq n}} E_+(T_N)^{k_N}\Big)\Big|_{T_N:=N,\ N\in\mathfrak{M}_{\leq n}}$$

étant évidemment constant, quel que soit le multi-indice $(k_N)_{N\in\mathfrak{M}_{\leq n}}$, on a bien que le coefficient de $N_\circ$ de $M(F)$ s'exprime comme polynôme en la famille des indéterminées $(f_L)_{L\in\mathfrak{M}}$. □

Définition 1.2.2. Soit $M \in \mathfrak{M}$, et soit $\Phi = \sum_{L\in\mathfrak{M}} \phi_L L \in \mathbb{C}\|X\|$ telle que $\Phi(0) = 0$. On définit alors comme suit la substitution de la $\mathbb{C}$-espèce Φ dans M :

$$M(\Phi) = \sum_{N\in\mathfrak{M}} p_{M,N}((\phi_L)_{L\in\mathfrak{M}})\, N, \tag{1.11}$$

où $(p_{M,N}((x_L)_{L\in\mathfrak{M}_{\leq n}}))_{N\in\mathfrak{M}_{\leq n}}$ désigne la famille des polynômes vérifiant la relation

$$M(F) = \sum_{N\in\mathfrak{M}_{\leq n}} p_{M,N}((f_L)_{L\in\mathfrak{M}_{\leq n}})\, N,$$

quelle que soit $F = \sum_{N\in\mathfrak{M}_{\leq n}} f_N N \in \mathbb{N}\|X\|$.

Désormais, nous désignerons par $\mathbb{C}\|X\|_\circ$ le sous-ensemble de $\mathbb{C}\|X\|$ formé des $\mathbb{C}$-espèces à terme constant nul.

Définition 1.2.3. Soit $(\Theta, \Phi) \in \mathbb{C}\|X\| \times \mathbb{C}\|X\|_\circ$. Posons $\Theta = \sum_{M\in\mathfrak{M}} \theta_M M$. On définit alors comme suit la substitution de Φ dans Θ :

$$\Theta \circ \Phi = \sum_{M\in\mathfrak{M}} \theta_M\, M(\Phi). \tag{1.12}$$

Il résulte immédiatement de la définition ci-dessus que cette loi de composition étend aux couples de $\mathbb{C}$-espèces (Θ, Φ) tels que $\Phi(0) = 0$ la substitution usuelle d'une espèce G dans une espèce F, cette opération étant définie dès que G vérifie $G(0) = 0$. De plus, cette loi de composition conserve les principales propriétés de la substitution usuelle d'une espèce dans une autre, à savoir entre autres l'associativité et la distributivité à droite (Yeh, 1986a ; Joyal, 1985).

Nous nous proposons dans ce qui suit d'étendre à l'ensemble $\mathbb{C}|X| \times \mathbb{C}\|X\|$ la substitution définie ci-dessus ; plus précisément, nous allons définir une loi de composition entre $\mathbb{C}$-espèces qui, comme on le verra, coïncide avec la substitution ci-dessus sur l'intersection de leurs domaines respectifs. Pour cette dernière raison, nous désignerons de nouveau par le symbole $\circ$ cette loi de composition. Au reste, une fois définie cette nouvelle loi de composition, il s'agira de « réunir » ces deux lois pour en former une seule, en réunissant leurs domaines de définition respectifs :

$$\circ\ :\ (\mathbb{C}|X| \times \mathbb{C}\|X\|) \cup (\mathbb{C}\|X\| \times \mathbb{C}\|X\|_\circ) \longrightarrow \mathbb{C}\|X\|.$$

Rappelons d'abord la définition suivante (Joyal, 1986 ; Bergeron, Labelle et Leroux, 1994, 1998).

Définition 1.2.4. Soit $F = F(T, X)$ une espèce bi-sorte, polynomiale par rapport à T. On note alors

$$F(T, X)|_{T:=1}$$

l'espèce dont les structures sur un ensemble $V \in \boldsymbol{B}$ sont les types d'isomorphie par rapport à T des $F(T, X)$-structures sur les bi-ensembles $(U, V) \in \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{B}$, U désignant un élément arbitraire de la catégorie $\boldsymbol{B}$.

Ajoutons que l'espèce $F(T, X)|_{T:=1}$ est également notée $\widetilde{\sum_T} F(T, X)$ par Joyal, *ibid.*

La définition suivante constitue la première étape menant à la définition de cette nouvelle loi de composition $\circ : \mathbb{C}|X| \times \mathbb{C}\|X\| \to \mathbb{C}\|X\|$.

Définition 1.2.5. Soit M une espèce moléculaire, et soit $k \in \mathbb{N}$. La substitution de $k + X$ dans M, notée $M(k + X)$, ou encore, $M \circ (k + X)$, est définie par

$$M(k+X) = M(kT+X)\Big|_{T:=1}.$$

Rappelons que l'ensemble $\mathfrak{M}$ des classes d'isomorphie d'espèces moléculaires est muni d'un ordre total noté $\preceq$, cet ordre étant compatible avec les degrés.

Proposition 1.2.6. Soit M une espèce moléculaire, et soit $k \in \mathbb{N}$. On a la décomposition moléculaire

$$M(k+X) = \sum_{N \preceq M} c_{M,N}(k)\, N(X), \tag{1.13}$$

où, pour $N \preceq M$, le coefficient $c_{M,N}(k)$ est une fonction polynomiale de la variable k. De plus, $\deg(c_{M,N}(k)) = \deg M - \deg N$, $c_{M,N}(k) = 0$ si $\deg M = \deg N$, $M \neq N$, et $c_{M,M}(k) = 1$.

Démonstration. Notons d'abord que l'on a

$$\begin{aligned}
M(kT+X) &= M(T+X) \times \big((E(T))^k \cdot E(X))\big) && (1.14)\\
&= M(T+X) \times \big((1 + E_+(T))^k \cdot E(X)\big) && (1.15)\\
&= M(T+X) \times \Big(\sum_{i=0}^{\deg M} \binom{k}{i} \big(E_+(T)^i \cdot E(X)\big)\Big) && (1.16)\\
&= \sum_{i=0}^{\deg M} \binom{k}{i} \big\{M(T+X) \times \big(E_+(T)^i \cdot E(X)\big)\big\}. && (1.17)
\end{aligned}$$

On a donc, par définition,

$$M(k+X) = \sum_{i=0}^{\deg M} \binom{k}{i} \big\{M(T+X) \times \big(E_+(T)^i \cdot E(X)\big)\big\}\Big|_{T:=1}.$$

Posons

$$M(T+X) \times \big(E_+(T)^i \cdot E(X)\big)\Big|_{T:=1} = \sum_{N \preceq M} \alpha_{M,N,i} N.$$

On a donc finalement

$$[N]M(k+X) = \sum_{i=0}^{\deg M - \deg N} \binom{k}{i} \alpha_{M,N,i}, \tag{1.18}$$

et ainsi, comme on le vérifie aisément, la somme ci-dessus définit bien une fonction polynomiale de la variable k, de degré égal à $\deg M - \deg N$. □

Soient encore une fois M une espèce moléculaire, k un entier positif. Résumons sous forme de définition l'objet de la démonstration ci-dessus. Autrement dit, définissons des polynômes en x qui, lorsqu'on substitue à x un entier k, nous permettent d'obtenir les coefficients de la décomposition moléculaire de $M(k+X)$.

Définition 1.2.7. Soit M une espèce moléculaire, et soit $n = \deg M$. Soit i tel que $0 \leq i \leq n$. Posons

$$M(T+X) \times \left(E_+(T)^i \cdot E(X)\right)\Big|_{T:=1} = \sum_{N \preceq M} \alpha_{M,N,i} N.$$

On définit alors comme suit le polynôme en x noté $\binom{M}{N}_x$

$$\binom{M}{N}_x = \sum_{i=0}^{n-\deg N} \binom{x}{i} \alpha_{M,N,i}$$

où, quel que soit $i \in \mathbb{N}$, le polynôme $\binom{x}{i}$ est défini par

$$\binom{x}{i} = x(x-1)\cdots(x-i+1)/i!.$$

◇

Notons qu'il résulte des calculs précédents que l'on a

$$M(k+X) = \sum_{N \preceq M} \binom{M}{N}_k N(X), \tag{1.19}$$

c'est-à-dire $c_{M,N}(k) = \binom{M}{N}_k$.

Nous sommes maintenant en mesure de définir la substitution d'une $\mathbb{C}$-espèce de degré 1 de la forme $\xi + X$ dans une espèce moléculaire.

Définition 1.2.8. Soient M une espèce moléculaire, $\xi \in \mathbb{C}$. Alors, la substitution de la $\mathbb{C}$-espèce $\xi + X$ dans l'espèce M, notée $M(\xi+X)$, est la $\mathbb{C}$-espèce définie par

$$M(\xi+X) = \sum_{N \preceq M} \binom{M}{N}_\xi N(X). \tag{1.20}$$

Remarque. Il résulte de cette définition que l'on a, d'une part, $\binom{M}{M}_\xi = 1$ et, d'autre part, $\binom{M}{N}_\xi = 0$ si $\deg(M) = \deg(N)$ et $M \neq N$.

Exemple 1.2.9. Soit m un entier positif et soit $M = X^m$. On a alors

$$\binom{X^m}{X^n}_\xi = \binom{m}{n} \xi^{m-n}, \qquad n \leq m, \tag{1.21}$$

tandis que $\binom{X^m}{N}_\xi = 0$ dès que N n'est pas de la forme X^n, pour $n \leq m$. On a donc en particulier

$$\binom{X^m}{X^n}_1 = \binom{m}{n}.$$

Ainsi, on voit que les coefficients $\binom{M}{N}_1$ constituent une généralisation des coefficients binomiaux. Dans le cas où $M = X^m$, $\xi = 1$, la formule (1.20) prend en effet la forme de la formule du binôme habituel

$$(1+X)^m = \sum_{n \leq m} \binom{m}{n} X^n.$$

Définition 1.2.10. On dit d'une $\mathbb{C}$-espèce de la forme $M(\xi + X)$, avec M une espèce moléculaire, ξ un nombre complexe, que c'est une $\mathbb{C}$-espèce *pseudo-moléculaire.*

La définition précédente nous conduit à définir comme suit la substitution d'une $\mathbb{C}$-espèce de la forme $\xi + X$ dans une $\mathbb{C}$-espèce polynomiale.

Définition 1.2.11. Soit P une $\mathbb{C}$-espèce polynomiale. Posons

$$P = P(X) = \sum_{M \in \mathfrak{M}} p_M M(X) \quad \text{(somme finie)}.$$

On définit alors comme suit la substitution de $\xi + X$ dans P, pour $\xi \in \mathbb{C}$,

$$P(\xi + X) = \sum_{M \in \mathfrak{M}} p_M M(\xi + X). \tag{1.22}$$

Nous sommes maintenant en mesure de définir la substitution d'une $\mathbb{C}$-espèce à terme constant quelconque dans une $\mathbb{C}$-espèce polynomiale. Comme nous l'avons déjà précisé, nous verrons que cette loi de composition coïncide avec la substitution habituelle lorsque le terme constant de l'espèce qu'on substitue est nul.

Définition 1.2.12. Soit P une $\mathbb{C}$-espèce polynomiale, et soit Φ une $\mathbb{C}$-espèce arbitraire. Posons $\Phi = \xi + \Phi_+$, avec $\Phi_+(0) = 0$, $Q(X) = P(\xi + X)$. Alors, la substitution de Φ dans P, notée $P(\Phi)$, ou encore $P \circ \Phi$, est définie par

$$P \circ \Phi = Q \circ \Phi_+. \tag{1.23}$$

Afin de bien distinguer la substitution usuelle de la loi de composition définie ci-dessus, nous noterons provisoirement $\odot$ cette dernière loi de composition. Nous allons montrer que cette loi est associative en nous ramenant à l'associativité de la substitution usuelle.

Lemme 1.2.13. Soit P une $\mathbb{C}$-espèce polynomiale, et soit $\Phi = \phi + \Phi_+$ une $\mathbb{C}$-espèce arbitraire. On a

$$P \odot \Phi = \left(P \circ (\phi T + \Phi_+)\right)\big|_{T:=1}. \tag{1.24}$$

Démonstration. On a en effet, lorsque P et Φ sont des $\mathbb{N}$-espèces,

$$\begin{aligned} P \odot \Phi &= (P \circ (\phi T + X))|_{T:=1, X:=\Phi_+} \\ &= (P \circ (\phi T + \Phi_+))|_{T:=1} \,. \end{aligned}$$

L'identité à démontrer découle alors de l'unicité du prolongement algébrique. □

Le lemme suivant établit une relation entre la substitution généralisée définie ici et celle définie par Joyal (Joyal, 1986).

Lemme 1.2.14. Soit P une $\mathbb{C}$-espèce polynomiale, et soit $\Phi = \phi + \Phi_+$ une $\mathbb{C}$-espèce arbitraire. On a

$$P \odot \Phi = (P \circ T\Phi)|_{T:=1} \,.$$

Démonstration. On a, lorsque P et Φ sont des $\mathbb{N}$-espèces,

$$\begin{aligned} P \odot \Phi &= (P \circ (\phi T + \Phi_+))|_{T:=1} \\ &= (P \circ (T\phi + T\Phi_+))|_{T:=1} \,. \end{aligned}$$

On conclut une fois de plus en faisant appel à l'unicité du prolongement algébrique. □

Proposition 1.2.15. La loi de composition

$$\begin{array}{rccc} \circ : & \mathbb{C}|X| \times \mathbb{C}\|X\| & \longrightarrow & \mathbb{C}\|X\| \\ & (P, \Psi) & \mapsto & P \circ \Psi, \end{array}$$

définie par (1.23), est associative ; plus précisément, quelles que soient les $\mathbb{C}$-espèces polynomiales P, Q, et quelle que soit la $\mathbb{C}$-espèce Ψ, on a

$$P \circ (Q \circ \Psi) = (P \circ Q) \circ \Psi. \tag{1.25}$$

Démonstration. On peut, par linéarité, supposer que P est une espèce moléculaire, que nous noterons M. Soient S et T des espèces de singletons auxiliaires. On a alors

$$\begin{aligned} M \odot (Q \odot \Psi) &= M \odot ((Q \circ (T\Psi))|_{T:=1}) \\ &= (M \circ S((Q \circ (T\Psi))|_{T:=1}))|_{S:=1} \\ &= (M \circ S(Q \circ (T\Psi)))|_{T:=1, S:=1} \\ &= (M \circ ((S \circ Q(X)) \circ (T\Psi)))|_{T:=1, S:=1} \\ &= (M \circ (SQ)) \circ (T\Psi))|_{T:=1, S:=1} \\ &= (M \odot Q) \odot \Psi, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. □

1.3 Nouvelle représentation des espèces moléculaires bi-sortes

L'objet central de cette section est un nouveau résultat (prop. 1.3.5) donnant une représentation de chaque espèce moléculaire bi-sorte comme quotient spécial d'un produit de deux espèces moléculaires uni-sortes.

Soient n, k des entiers positifs ou nuls arbitraires, et soit $S_{n,k}$ le sous-groupe du groupe symétrique S_{n+k} défini par

$$S_{n,k} = \{\sigma \in S_{n+k} \mid \sigma(\{1,\ldots,n\}) = \{1,\ldots,n\}, \sigma(\{n+1,\ldots,n+k\}) = \{n+1,\ldots,n+k\}\}.$$

Soit alors $\pi_1 : S_{n,k} \to S_n$ (resp. $\pi_2 : S_{n,k} \to S_{\{n+1,n+2,\ldots,n+k\}} \cong S_k$) l'application qui à une permutation $\sigma \in S_{n,k}$ fait correspondre sa restriction à l'ensemble $\{1,2,\ldots,n\}$ (resp. à l'ensemble $\{n+1, n+2, \ldots, n+k\}$). On note alors que $S_{n,k}$ est en fait isomorphe au groupe $S_n \times S_k$; on a en effet l'isomorphisme

$$\begin{array}{rcl} S_{n,k} & \to & S_n \times S_k \\ \sigma & \mapsto & (\pi_1(\sigma), \phi^{-1} \circ \pi_2(\sigma) \circ \phi), \end{array}$$

où ϕ désigne la bijection canonique de $\{1,2,\ldots,k\}$ sur $\{n+1, n+2, \ldots, n+k\}$, c'est-à-dire la bijection telle que $\phi(i) = n+i$, pour $i \in \{1,2,\ldots,k\}$.

Dans la suite, nous identifierons, par abus de langage, les groupes $S_{n,k}$ et $S_n \times S_k$, par ce dernier isomorphisme. De plus, étant donné un sous-groupe de $S_{n,k}$ formé de permutations laissant fixe chacun des éléments de l'ensemble $\{n+1, n+2, \ldots, n+k\}$, (resp. $\{1,2,\ldots,n\}$), nous identifierons ce sous-groupe et le sous-groupe de S_n (resp. de S_k) image par l'isomorphisme ci-dessus de ce sous-groupe. D'autre part, nous noterons id_1 et id_2 les éléments neutres respectifs de S_n et de S_k.

Soit H un sous-groupe de $S_{n,k}$, et soient

$$H' = \pi_1(H) \tag{1.26}$$
$$H'_1 = \pi_1\big((S_n \times \{\mathrm{id}_2\}) \cap H\big) \tag{1.27}$$
$$H'' = \pi_2(H) \tag{1.28}$$
$$H''_1 = \pi_2\big((\{\mathrm{id}_1\} \times S_k) \cap H\big). \tag{1.29}$$

Lemme 1.3.1. On a

$$H'_1 \triangleleft H' \leq S_n, \qquad H''_1 \triangleleft H'' \leq S_k,$$

c'est-à-dire que H'_1 (resp. H''_1) est un sous-groupe distingué de H' (resp. H'').

Démonstration. Facile. □

Soient $\alpha' \in H'$, $\alpha'' \in H''$. Posons

$$H'_{\alpha''} = \{h' \mid (h', \alpha'') \in H\}, \qquad H''_{\alpha'} = \{h'' \mid (\alpha', h'') \in H\}.$$

Proposition 1.3.2. Pour tout $\alpha'' \in H''$ (resp. $\alpha' \in H'$), l'ensemble $H'_{\alpha''}$ (resp. $H''_{\alpha'}$) est une classe latérale de H'_1 (resp. H''_1).

Démonstration. Nous nous bornerons à démontrer le premier des deux énoncés ci-dessus, l'autre énoncé se démontrant par des arguments symétriques. Soit $\alpha' \in H'_{\alpha''}$. On montre alors la relation $\alpha' H'_1 = H'_{\alpha''}$; par définition, on a $(\alpha', \alpha'') \in H$. On a alors évidemment, pour $h' \in H'_1$,

$$(\alpha', \alpha'') \circ (h', 1) = (\alpha' \circ h', \alpha''),$$

et ainsi, on a bien $\alpha' \circ h' \in H'_{\alpha''}$; h' étant arbitraire, on a donc bien $\alpha' H'_1 \subseteq H'_{\alpha''}$. On montre finalement l'inclusion inverse. Soit $\beta' \in H'_{\alpha''}$. On a alors, par définition, $(\beta', \alpha'') \in H$, et ainsi, on a de même $(\alpha'^{-1}, \alpha''^{-1}) \circ (\beta', \alpha'') = (\alpha'^{-1} \circ \beta', 1) \in H$. On en déduit immédiatement $\alpha'^{-1} \circ \beta' \in H'_1$; et ainsi, on en conclut $\beta' = \alpha' \circ (\alpha'^{-1} \circ \beta') \in \alpha' H'_1$, ce qui achève la démonstration. □

Proposition 1.3.3. L'application

$$\theta : \frac{H'}{H_1'} \to \frac{H''}{H_1''}$$

définie par $\theta(\alpha' H_1') = H_{\alpha'}''$, pour $\alpha' \in H'$, est un isomorphisme.

Démonstration. Montrons d'abord que θ est bien définie. Soit $\alpha', \beta' \in H'$ tels que $\alpha' \equiv \beta' \pmod{H_1'}$. On a alors évidemment $\alpha' \circ \beta'^{-1} \in H_1'$, et ainsi, on a $H''_{\alpha' \circ \beta'^{-1}} = H_1''$. On en déduit immédiatement $H''_{\alpha'} H''_{\beta'^{-1}} = H_1''$, et ainsi, on a bien $H''_{\alpha'} = H''_{\beta'}$. Finalement, on montrerait, par symétrie, que la fonction ψ obtenue en posant, pour $\alpha'' \in H''$, $\psi(\alpha'' H_1'') = H'_{\alpha''}$, n'est autre que la fonction réciproque de la fonction θ. □

Corollaire. On a

$$H = \bigsqcup_{(C',C'')} C' \times C'',$$

le couple (C', C'') décrivant l'ensemble $\mathfrak{C}(H)$ défini par

$$\mathfrak{C}(H) = \{(C, \theta(C)) \mid C \in H'/H_1'\}.$$

Démonstration. Immédiat. □

Nous supposerons désormais l'ensemble $\mathfrak{C}(H)$, défini au corollaire précédent, muni de la structure de groupe induite par celle de H ; autrement dit, nous posons

$$\mathfrak{C}(H) = \frac{H}{H_1' \times H_1''}.$$

Proposition 1.3.4. Soit $H \leq S_{n,k}$, soit id_1 (resp. id_2) l'élément neutre de S_n (resp. S_k), et soient

$$H_1' = \pi_1\big((S_n \times \{\mathrm{id}_2\}) \cap H\big), \quad H_1'' = \pi_2\big((\{\mathrm{id}_1\} \times S_k) \cap H\big).$$

Soit alors $U = (U_1, U_2) \in \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{B}$, et soit l'application

$$\begin{array}{rrcl} \varphi_U : & \mathfrak{C}(H) \times \dfrac{X^n}{H_1'} \cdot \dfrac{Y^k}{H_1''}[U] & \to & \dfrac{X^n}{H_1'} \cdot \dfrac{Y^k}{H_1''}[U] \\ & (\alpha' H_1', \alpha'' H_1'') \cdot (\lambda H_1', \mu H_1'') & \mapsto & ((\lambda \circ \alpha')H_1', (\mu \circ \alpha'')H_1''). \end{array}$$

Alors, la famille $(\varphi_U)_{U \in \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{B}}$ définit une action naturelle à droite (J. Labelle, 1985) de $\mathfrak{C}(H)$ sur l'espèce

$$\frac{X^n}{H_1'} \cdot \frac{Y^k}{H_1''}.$$

Démonstration. Nous allons d'abord montrer que l'application

$$\begin{array}{rrcl} \psi_U : & \mathfrak{C}(H) \times X^n \cdot Y^k[U] & \to & \dfrac{X^n}{H_1'} \cdot \dfrac{Y^k}{H_1''}[U] \\ & ((\alpha' H_1', \alpha'' H_1''), (\lambda, \mu)) & \mapsto & ((\lambda \circ \alpha')H_1', (\mu \circ \alpha'')H_1'') \end{array}$$

est bien définie. Soit $(\alpha', \alpha'') \in H$, et soit $(h', h'') \in H_1' \times H_1''$. Soit $U \in \boldsymbol{B}$, $(\lambda, \mu) \in X^n Y^k[U]$. On a

$$\begin{aligned} ((\lambda \circ (\alpha' \circ h'))H_1', (\mu \circ (\alpha'' \circ h''))H_1'') &= ((\lambda \circ \alpha')h' H_1', (\mu \circ \alpha'')h'' H_1'') \\ &= ((\lambda \circ \alpha')H_1', (\mu \circ \alpha'')H_1'') \end{aligned}$$

ce qui achève de montrer que ψ_U est bien définie. Il reste donc à montrer que l'on a

$$\psi_U((C',C''),(\lambda,\mu)) = \psi_U((C',C''),(\lambda',\mu'))$$

chaque fois que l'on a $\lambda H_1' = \lambda' H_1'$, $\mu H_1'' = \mu' H_1''$, pour $\lambda, \lambda' : [n] \xrightarrow{\sim} U_1$, $\mu, \mu' : [k] \xrightarrow{\sim} U_2$. Supposons donc ces relations vérifiées. Soient de plus $k' \in H_1'$, $k'' \in H_1''$ tels que $\lambda' = \lambda \circ k'$, $\mu' = \mu \circ k''$. Soit $(\alpha', \alpha'') \in H$ tel que $C' = \alpha' H_1'$, $C'' = \alpha'' H_1''$. En vertu du lemme 1.3.1, il existe alors, par une propriété bien connue des sous-groupes distingués, $k_1' \in H_1'$, $k_1'' \in H_1''$ tels que l'on ait $k' \circ \alpha' = \alpha' \circ k_1'$, $k'' \circ \alpha'' = \alpha'' \circ k_1''$. On en déduit

$$\begin{aligned}
(((\lambda \circ k') \circ \alpha')H_1', ((\mu \circ k'') \circ \alpha'')H_1'') &= ((\lambda \circ (k' \circ \alpha'))H_1', (\mu \circ (k'' \circ \alpha''))H_1'') \\
&= ((\lambda \circ (\alpha' \circ k_1'))H_1', (\mu \circ (\alpha'' \circ k_1''))H_1'') \\
&= ((\lambda \circ \alpha')k_1' H_1', (\mu \circ \alpha'')k_1'' H_1'') \\
&= ((\lambda \circ \alpha')H_1', (\mu \circ \alpha'')H_1''),
\end{aligned}$$

ce qui achève de montrer que l'on a

$$\psi_U((C',C''),(\lambda \circ k_1, \mu \circ k_2)) = \psi_U((C',C''),(\lambda,\mu)),$$

et, par le fait même, de montrer que φ_U est bien définie.

Nous allons maintenant montrer que l'application φ_U satisfait aux propriétés des actions de groupe. Comme on le vérifie immédiatement, le couple (H_1', H_1'') est l'élément neutre du groupe $\mathfrak{C}(H)$. Or, on vérifie aisément que l'on a, par définition de l'application φ_U,

$$(H_1', H_1'') \cdot (\lambda H_1', \mu H_1'') = (\lambda H_1', \mu H_1''),$$

quels que soient $\lambda : [n] \xrightarrow{\sim} U_1$, $\mu : [k] \xrightarrow{\sim} U_2$; ainsi, l'une des deux propriétés d'action de groupe est satisfaite. Montrons que l'autre propriété d'action de groupe à droite est elle aussi satisfaite. Soient $(\alpha', \alpha''), (\beta', \beta'') \in H$. On a, d'une part,

$$\begin{aligned}
((\alpha' H_1', \alpha'' H_1'') \cdot (\beta' H_1', \beta'' H_1'')) \cdot (\lambda H_1', \mu H_1'') &= (\alpha'\beta' H_1', \alpha''\beta'' H_1'') \cdot (\lambda H_1', \mu H_1'') \\
&= (\lambda\alpha'\beta' H_1', \mu\alpha''\beta'' H_1'')
\end{aligned}$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned}
(\beta' H_1', \beta'' H_1'') \cdot ((\alpha' H_1', \alpha'' H_1'') \cdot (\lambda H_1', \mu H_1'')) &= (\beta' H_1', \beta'' H_1'') \cdot (\lambda\alpha' H_1', \mu\alpha'' H_1'') \\
&= (\lambda\alpha'\beta' H_1', \mu\alpha''\beta'' H_1''),
\end{aligned}$$

ce qui achève de montrer que φ_U est une action du groupe $\mathfrak{C}(H)$. Finalement, on montrerait aisément, en remontant aux définitions, que cette action est naturelle. □

Proposition 1.3.5. Soit $H \leq S_{n,k}$, et soient id_1 (resp. id_2) l'élément neutre du groupe S_n (resp. S_k). On a l'isomorphisme d'espèces

$$\frac{X^n Y^k}{H} \cong \left(\frac{X^n}{H_1'} \cdot \frac{Y^k}{H_1''}\right) \Big/ \mathfrak{C}(H), \tag{1.30}$$

où on a posé

$$H_1' = \pi_1((S_n \times \{\mathrm{id}_2\}) \cap H), \quad H_1'' = \pi_2((\{\mathrm{id}_1\} \times S_k) \cap H).$$

Démonstration. Soit $U \in \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{B}$, et soit $(\lambda, \mu) \in X^n \cdot Y^k[U]$. Nous allons montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi_U : & \dfrac{X^nY^k}{H}[U] & \longrightarrow & \left(\left(\dfrac{X^n}{H_1'} \cdot \dfrac{Y^k}{H_1''}\right) \Big/ \mathfrak{C}(H)\right)[U] \\ & (\lambda, \mu)H & \mapsto & \mathcal{O}(\lambda H_1', \mu H_1'') \end{array}$$

définit un isomorphisme naturel entre ces deux espèces. Montrons d'abord que l'application φ_U est bien définie ; autrement dit, montrons que l'application

$$\begin{array}{rccc} \overline{\varphi}_U : & X^nY^k[U] & \longrightarrow & \left(\left(\dfrac{X^n}{H_1'} \cdot \dfrac{Y^k}{H_1''}\right) \Big/ \mathfrak{C}(H)\right)[U] \\ & (\lambda, \mu) & \mapsto & \mathcal{O}(\lambda H_1', \mu H_1'') \end{array}$$

est constante sur chacune des classes de l'ensemble

$$\frac{X^nY^k}{H}[U]. \tag{1.31}$$

Soit encore une fois $(\lambda, \mu) \in X^nY^k[U]$, et soit $(\alpha', \alpha'') \in H$. Par définition, on a

$$\overline{\varphi}_U(\lambda \circ \alpha', \mu \circ \alpha'') = \mathcal{O}((\lambda \circ \alpha')H_1', (\mu \circ \alpha'')H_1'').$$

Or, on a

$$((\lambda \circ \alpha')\, H_1', (\mu \circ \alpha'')H_1'') \quad = \quad (\alpha' H_1', \alpha'' H_1'') \cdot (\lambda H_1', \mu H_1''),$$

et ainsi, on voit que les couples (λ, μ), $(\lambda \circ \alpha', \mu \circ \alpha'')$ appartiennent bien à la même orbite de l'action de $\mathfrak{C}(H)$ sur l'ensemble $X^nY^k[U]$, de sorte que l'application φ_U est bien définie, étant constante sur chacune des classes de l'ensemble (1.31).

Soit alors l'application

$$\begin{array}{rccc} \psi_U : & \left(\left(\dfrac{X^n}{H_1'} \cdot \dfrac{Y^k}{H_1''}\right) \Big/ \mathfrak{C}(H)\right)[U] & \longrightarrow & \dfrac{X^nY^k}{H}[U] \\ & \mathcal{O}(\lambda H_1', \mu H_1'') & \mapsto & (\lambda, \mu)H \end{array}$$

On vérifie alors aisément que si ψ_U est bien définie, alors ψ_U n'est autre que la réciproque de φ_U. Il suffit donc comme on le voit, pour montrer que φ_U est une bijection, de montrer que ψ_U est bien définie. Soit l'application

$$\begin{array}{rccc} \overline{\psi}_U : & \dfrac{X^n}{H_1'} \cdot \dfrac{Y^k}{H_1''}[U] & \longrightarrow & \dfrac{X^nY^k}{H}[U] \\ & (\lambda H_1', \mu H_1'') & \mapsto & (\lambda, \mu)H. \end{array}$$

et soient $(\lambda, \mu) \in X^nY^k[U]$, $(\alpha', \alpha'') \in H$. On a alors évidemment

$$(\lambda, \mu)H = (\lambda \circ \alpha', \mu \circ \alpha'')H.$$

Ainsi, les couples (λ, μ), (α', α'') étant arbitraires, on voit que $\overline{\psi}_U$ est constante sur chacune des orbites de l'action de $\mathfrak{C}(H)$ sur l'ensemble

$$\frac{X^n}{H_1'} \cdot \frac{Y^k}{H_1''}[U],$$

ce qui achève de montrer que ψ_U est bien définie.

Finalement, on montrerait aisément, en remontant aux définitions, que cette action à droite est naturelle. □

Remarque. Il est possible de montrer que les sous-groupes H_1', H_1'' sont maximaux au sens où, si $A \leq S_n$, $B \leq S_k$, et si G est un groupe agissant fidèlement à droite sur l'espèce bi-sorte $\frac{X^n}{A} \cdot \frac{Y^k}{B}$, alors $A \leq H_1'$, $B \leq H_1''$.

Exemple 1.3.6. Soit H le sous-groupe du groupe $S_{2,3}$ engendré par les permutations $((1,2),(3,4))$ et $(\mathrm{id}_1,(3,4,5))$, id_1 désignant la permutation identité du groupe S_2. On vérifie alors que l'on a $H' = S_2$, $H_1' = \mathrm{id}_1$, $H'' = S_3$, $H_1'' = \langle(1,2,3)\rangle$. On en déduit immédiatement les isomorphismes

$$\frac{H'}{H_1'} \cong \frac{H''}{H_1''} \cong \mathbb{Z}_2 \cong \mathfrak{C}(H),$$

$\mathbb{Z}_2$ désignant le groupe abstrait à deux éléments. On a alors

$$\frac{X^2}{H_1'} \cong X^2, \qquad \frac{Y^3}{H_1''} \cong C_3(Y).$$

et ainsi, on a, en vertu de la proposition précédente,

$$\frac{X^2Y^3}{H} \cong \frac{X^2\,C_3(Y)}{\mathfrak{C}(H)}.$$

On retrouve ainsi l'espèce $X^2C_3(Y)/\mathbb{Z}_2$ introduite par J. Labelle dans (Labelle, 1985).

1.4 $\mathbb{C}$-espèces additives

Définition 1.4.1. Soit $\Phi \in \mathbb{C}\|X\|$. On dit que Φ est additive si elle vérifie la relation $\Phi(X+Y) = \Phi(X) + \Phi(Y)$.

Remarque. Soit Φ une $\mathbb{C}$-espèce additive arbitraire. On peut montrer, en utilisant l'unicité du prolongement algébrique, que Φ est « linéaire », c'est-à-dire telle que l'on ait, pour $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\Phi(\alpha X + \beta Y) = \alpha\,\Phi(X) + \beta\,\Phi(Y)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note alors Ω_n la $\mathbb{C}$-espèce $n\,C_n(X) - X^n$. Voici une famille infinie de $\mathbb{C}$-espèces additives formée d'éléments appartenant à la famille $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 1.4.2. Soit n un entier positif, et soit C_n l'espèce C restreinte au cardinal n. Alors, l'espèce $n\,C_n(X) - X^n$ est additive si, et seulement si, n est premier.

Avant d'en arriver à la démonstration de cette proposition, donnons d'abord, à cette fin, quelques définitions.

Définition 1.4.3. Soient U, V, deux ensembles finis. Posons $n = |U|$, $k = |V|$. Soient alors $\lambda : [n] \to U$, $\mu : [k] \to V$, $P \subseteq [n+k]$ tel que $|P| = n$. On appelle *mélange de λ et μ selon P* la fonction, notée $\lambda \perp_P \mu$, définie par

$$\begin{array}{rcl} \lambda \perp_P \mu : [n+k] & \to & U \cup V \\ \nu & \mapsto & \begin{cases} \lambda(\sigma^{-1}(\nu)), & \text{si } \nu \in P \\ \mu(\tau^{-1}(\nu)), & \text{sinon,} \end{cases} \end{array}$$

où σ (resp. τ) désigne l'unique bijection croissante de $[n]$ dans P, (resp. de $[k]$ dans $[n+k] - P$).

Exemple 1.4.4. Soient $U = \{a, b, c\}$, $V = \{d, e\}$, $\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ c & a & a \end{pmatrix}$, $\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ d & e \end{pmatrix}$, $P = \{1, 4, 5\}$. On a alors

$$\lambda \perp_P \mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ c & d & e & a & a \end{pmatrix}.$$

Définition 1.4.5. Soit $U = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ (réunion disjointe). Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $\lambda : [k] \to U$. On appelle *mot sous-jacent au mot* λ la fonction $\overline{\lambda} : [k] \to [n]$ telle que, pour $i \in [k]$, $\overline{\lambda}(i)$ est l'indice de l'ensemble auquel appartient $\lambda(i)$.

Exemple 1.4.6. Soit $U = (U_1, U_2)$ avec $U_1 = \{a, b, c\}$, $U_2 = \{d, e\}$, $\lambda = (b, e, d, a, e)$. Alors, le mot sous-jacent au mot λ est le mot $(1, 2, 2, 1, 2)$.

Démonstration de la proposition 1.4.2. Rappelons d'abord que l'on a

$$(X + Y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k Y^{n-k},$$

le second membre étant, comme on le vérifie aisément, la décomposition moléculaire de $(X+Y)^n$. Montrons d'abord que la condition à l'effet que n soit premier est nécessaire. Soit donc n un nombre qu'on suppose ne pas être premier ; posons $n = \alpha\beta$, avec $\alpha \neq 1$, $\beta \neq 1$. On se convainc alors aisément que l'espèce

$$C_\alpha(X \cdot Y^{\beta-1})$$

est isomorphe à une sous-espèce moléculaire de l'espèce $C_n(X + Y)$. Ainsi, dans le cas présent, cette dernière espèce apparaît nécessairement dans la décomposition moléculaire de $C_n(X+Y)$. Comme d'autre part cette même espèce n'apparaît pas dans la décomposition moléculaire de $(X + Y)^n$, on en conclut immédiatement, par définition de Ω_n, qu'elle apparaît dans la décomposition moléculaire de $\Omega_n(X + Y)$. On en déduit, par unicité de la décomposition moléculaire, que l'on a

$$\Omega_n(X + Y) \neq \Omega_n(X) + \Omega_n(Y),$$

ce qui achève de montrer que Ω_n n'est pas additive.

Montrons maintenant que la condition est suffisante. Supposons donc n premier. On veut montrer l'identité

$$\Omega_n(X + Y) = \Omega_n(X) + \Omega_n(Y),$$

c'est-à-dire

$$n\, C_n(X + Y) - (X + Y)^n = n\, C_n(X) - X^n + n\, C_n(Y) - Y^n.$$

Notons $(C_n(X+Y))_{k,n-k}$ l'espèce $C_n(X+Y)$ restreinte au bi-cardinal $(k, n-k)$. On a évidemment

$$C_n(X + Y) = \sum_{k=0}^{n} (C_n(X + Y))_{k,n-k}.$$

Soit donc k un entier arbitraire compris entre 1 et $n-1$. Il suffit en fait de montrer l'identité

$$\binom{n}{k} X^k \cdot Y^{n-k} = n\, (C_n(X + Y))_{k,n-k}.$$

Soit $U = (U_1, U_2)$ un bi-ensemble tel que $|U_1| = k$, $|U_2| = n - k$. On se donne d'abord une fois pour toutes une bijection entre l'ensemble noté $\wp^{[k]}[n]$ (Bergeron, Labelle et Leroux, 1994, 1998) des parties à k éléments de l'ensemble $[n]$ et l'ensemble des entiers allant de 1 à $\binom{n}{k}$; pour fixer les idées, on pourra par exemple supposer que cette bijection est la fonction notée ρ telle que, pour $P \in \wp^{[k]}[n]$, $\rho(P)$ est le rang de P par rapport à l'ordre lexicographique (Nijenhuis et Wilf, 1978).

Considérons alors la bijection

$$\alpha_U : \binom{n}{k} X^k \cdot Y^{n-k}[U] \xrightarrow{\sim} n(C_n(X+Y))_{k,n-k}[U].$$

définie comme suit : soit $s = (\nu, (\lambda, \mu))$ une structure appartenant au premier ensemble, avec ν tel que $1 \leq \nu \leq \binom{n}{k}$, $\lambda \in X^k[U_1]$, $\mu \in Y^{n-k}[U_2]$. Alors, n étant un nombre premier, par hypothèse, le mot $w = \lambda \perp_{\rho^{-1}(\nu)} \mu$ est primitif, de même que le mot sous-jacent de ce dernier, noté $\overline{w}$. On peut donc parler de la position de la première lettre du mot de Lyndon associé au mot $\overline{w}$, notée $\varphi(\overline{w})$. Ainsi, $\alpha_U(s)$ n'est autre que le couple dont la première composante est $\varphi(\overline{w})$ et dont la deuxième composante est le mot de Lyndon associé à w. On vérifiera sans trop de peine que la famille (α_U) ainsi définie détermine bien un isomorphisme naturel. □

Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous noterons dans ce qui suit $\mathbb{C}_n\|X\|$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}\|X\|$ formé des $\mathbb{C}$-espèces homogènes de degré n, et $A_n\|X\|$ le sous-ensemble de $\mathbb{C}_n\|X\|$ formé des $\mathbb{C}$-espèces additives de ce dernier ensemble. On a alors le résultat suivant :

Proposition 1.4.7. L'ensemble $A_n\|X\|$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}_n\|X\|$.

Démonstration. Facile. □

Remarque. Il est possible de montrer que si $F \in \mathbb{C}\|X\|$ est une $\mathbb{C}$-espèce additive, distincte de l'espèce X des singletons, alors $F(x) = 0$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. On peut, par la méthode des coefficients indéterminés, calculer des bases de l'espace $A_k\|X\|$, à partir des décompositions moléculaires des espèces bi-sortes $M(X+Y)$, pour les espèces moléculaires M de degré k ; ces décompositions étant connues pour $k \leq 5$ (Bergeron, Labelle et Leroux, 1994, 1998, table A.2.14), ceci nous a permis de calculer des bases des espaces $A_k\|X\|$, pour ces mêmes valeurs de k (tabl. 1.1).

1.5 Remarque à propos du théorème de préparation de Weierstrass

Soit une fonction f d'un ouvert de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}$, analytique au voisinage d'un point (x_o, y_o). Weierstrass a montré que s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait

$$f(x_o, y_o) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o) = \cdots = \frac{\partial^{n-1} f}{\partial y^{n-1}}(x_o, y_o) = 0, \quad \frac{\partial^n f}{\partial y^n}(x_o, y_o) \neq 0, \tag{1.32}$$

alors il existe deux fonctions analytiques à valeurs complexes $a(x, y), u(x, y)$ définies au voisinage de (x_o, y_o) et vérifiant

$$f(x, y) = a(x, y)u(x, y),$$

au voisinage de (x_o, y_o), la fonction $u(x, y)$ étant inversible multiplicativement au voisinage de (x_o, y_o), et la fonction $a(x, y)$ étant polynomiale en y, de la forme

$$a(x, y) = A_0(x) + A_1(x)y + \ldots + y^n,$$

k	Une base de $A_k\|X\|$
2	$\{2E_2(X) - X^2\}$
3	$\{X\, E_2 - E_3 - C_3, X^3 - 3C_3\}$
4	$\{2\, E_2 \circ E_2 - E_2^2 - P_4^{\mathrm{bic}} + C_4,$ $-E_4^{\pm} + 4\, E_2 \circ E_2 - 2\, E_2^2 - P_4^{\mathrm{bic}} + X \cdot C_3,$ $E_4 + 3\, E_2 \circ E_2 - X \cdot E_3 - 2\, E_2^2 - P_4^{\mathrm{bic}} + X^2 \cdot E_2,$ $4\, E_2 \circ E_2 - 2\, E_2^2 - 2\, P_4^{\mathrm{bic}} + E_2(X^2),$ $12\, E_2 \circ E_2 - 6\, E_2^2 - 4\, P_4^{\mathrm{bic}} + X^4\}$
5	$\{-P_5/\mathbb{Z}_2 - C_5 + X \cdot C_4,$ $E_5^{\pm} - X \cdot E_4^{\pm} + P_5 - (X^2 \cdot C_3)/\mathbb{Z}_2 - C_5 + X^2 \cdot C_3,$ $-E_5 + X \cdot E_4 + E_2 \cdot E_3 - X^2 \cdot E_3 - C_5 - X \cdot E_2^2 + X^3 \cdot E_2,$ $-P_5 - 2\, C_5 + X \cdot E_2(X^2),$ $-5\, C_5 + X^5\}$

Tableau 1.1 Des bases des espaces $A_k\|X\|$, pour $k = 2, \ldots, 5$

au voisinage de ce même point, $A_0(x), A_1(x), \ldots, A_{n-1}(x)$ désignant des fonctions analytiques définies au voisinage du point x_o.

Supposons alors qu'il existe une fonction φ définie au voisinage du point x_o, telle que $\varphi(x_o) = y_o$ et telle que l'on ait, au voisinage de ce même point,

$$f(x, \varphi(x)) = 0.$$

Il résulte alors immédiatement de ce que $u(x, y)$ est non nulle au voisinage de (x_o, y_o) que l'on a, toujours au voisinage de x_o,

$$A_0(x) + A_1(x)\varphi(x) + \ldots + \varphi(x)^n = 0, \tag{1.33}$$

cette dernière relation étant à vrai dire équivalente à la relation $f(x, \varphi(x)) = 0$. On peut donc se ramener à résoudre l'équation ci-dessus, ce qui revient à dire qu'on est ramené au calcul de fonctions algébriques.

Considérons maintenant x et y en tant qu'indéterminées. Soit $\mathbb{C}[\![x, y]\!]$ l'algèbre des séries formelles à coefficients complexes en x et y. On a depuis Weierstrass abstrait le problème ci-dessus ; on sait maintenant que si on se donne une série formelle $f(x,y)$ satisfaisant aux relations (1.32) avec $x_o = y_o = 0$ (lorsqu'on interprète ces relations dans le contexte présent), alors il existe une série formelle $a(x,y) \in \mathbb{C}[\![x,y]\!]$ ainsi qu'une série formelle inversible $u(x,y) \in \mathbb{C}\|X,Y\|$ telles que l'on ait

$$f(x,y) = a(x,y)u(x,y)$$

où encore une fois $a(x,y)$ est de la forme (1.33), mais où $A_0(x), A_1(x), \ldots, A_{n-1}(x)$ désignent cette fois-ci des séries formelles en x à coefficients complexes.

Supposons qu'il existe une série formelle $\varphi(x)$ vérifiant $f(x,\varphi(x)) = 0$. On a alors une fois de plus

$$f(x,\varphi(x)) = 0 \Longleftrightarrow a(x,\varphi(x)) = 0,$$

la structure d'anneau sous-jacente à $\mathbb{C}[\![x,y]\!]$ étant évidemment celle d'un anneau intégre. Ainsi, on est une fois de plus ramené au calcul de solutions d'équations de la forme

$$A_0(x) + A_1(x)y + \ldots + y^n = 0,$$

c'est-à-dire au calcul de séries $\varphi(x)$ vérifiant la relation

$$A_0(x) + A_1(x)\varphi(x) + \ldots + (\varphi(x))^n = 0.$$

Ces considérations nous ont naturellement conduit à nous demander s'il était possible d'étendre à l'algèbre $\mathbb{C}\|X,Y\|$ la « version » précédente du théorème de préparation de Weierstrass, au sens où cette « version » du théorème de préparation de Weierstrass s'applique à la sous-algèbre $\mathbb{C}[\![X,Y]\!]$ de $\mathbb{C}\|X,Y\|$, cette sous-algèbre étant isomorphe à l'algèbre $\mathbb{C}[\![x,y]\!]$ des séries formelles en les indéterminées x et y. On veut à vrai dire que de telles conditions, lorsque remplies, permettent de conclure à l'existence d'une $\mathbb{C}$-espèces inversible $U(X,Y)$ et d'une $\mathbb{C}$-espèce $G(X,Y)$ *polynomiale par rapport à* Y, ces deux $\mathbb{C}$-espèces vérifiant la relation

$$F(X,Y) = G(X,Y)\,U(X,Y);$$

on serait alors ramené de ce fait à résoudre l'équation plus simple $G(X,Y) = 0$, c'est-à-dire à trouver une $\mathbb{C}$-espèce $\Phi \in \mathbb{C}\|X\|$ telle que l'on ait $G(X,\Phi(X)) = 0$.

Soit encore une fois $F(X,Y) \in \mathbb{C}\|X,Y\|$. Nous allons présenter dans ce qui suit un premier essai de généralisation du théorème de préparation de Weierstrass. Nous verrons tout de suite après que l'hypothèse ci-dessous ne permet pas d'aboutir à la conclusion dont nous avons parlé ci-dessus. Supposons donc que F vérifie les hypothèses suivantes :

$$F(0,0) = \frac{\partial F}{\partial Y}(0,0) = \cdots = \frac{\partial^{n-1} F}{\partial Y^{n-1}}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial^n F}{\partial Y^n}(0,0) \neq 0;$$

la question se pose alors de savoir s'il existe des $\mathbb{C}$-espèces $P_j(X,Y)$ telles que, pour j compris entre 1 et n, $P_j(X,Y)$ soit de degré j par rapport à Y et telles que l'on ait

$$F(X,Y) = (P_0(X,Y) + P_1(X,Y) + \ldots + P_n(X,Y))\,U(X,Y), \tag{1.34}$$

$U(X,Y)$ désignant une $\mathbb{C}$-espèce inversible (c'est-à-dire, telle que $U(0,0) \neq 0$). Nous allons voir que tel n'est pas toujours le cas. Soit en effet

$$F(X,Y) = E_+(Y)$$

où $E_+(Y) = E(Y) - 1 = Y + E_2(Y) + E_3(Y) + \ldots$ est l'espèce des ensembles non vides de points de sorte Y. On a évidemment dans ce cas

$$F(0,0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial Y}(0,0) \neq 0.$$

Supposons alors qu'il existe $z_o \in \mathbb{C}$, $P(X,Y) \in \mathbb{C}\|X,Y\|$ polynomiale de degré 1 en Y ainsi qu'une $\mathbb{C}$-espèce inversible $U(X,Y)$ de $\mathbb{C}\|X,Y\|$ telles que l'on ait

$$F(X,Y) = (z_o + P(X,Y))U(X,Y).$$

Alors, $F(X,Y)$ appartenant en fait à la sous-algèbre $\mathbb{C}\|Y\|$ de $\mathbb{C}\|X,Y\|$, il en est de même des $\mathbb{C}$-espèces $P(X,Y)$ et $U(X,Y)$, comme cela résulte de ce que l'algèbre $\mathbb{C}\|X,Y\|$ est une algèbre de monoïde. Posons alors $P(X,Y) = P(Y)$, $U(X,Y) = U(Y)$. Or, $P(X,Y)$ étant par hypothèse de degré 1, on a nécessairement la relation $P(Y) = cY$, pour $c \in \mathbb{C}$. On a donc

$$cY\,U(Y) = c \sum_{M \in \mathfrak{M}} g_M Y \cdot M.$$

Or, on vérifie immédiatement que l'on doit avoir $z_o = 0$. En effet, dans le cas contraire, on aurait $[1]cY \cdot U(Y) \neq 0$, ce qui est absurde. On doit donc avoir en définitive

$$cY \cdot U(Y) = F(X,Y),$$

ce qui est absurde, puisque l'on a $[E_2]Y \cdot U(Y) = 0$. Ainsi, comme nous l'avions annoncé, l'hypothèse (1.34) ne permet pas d'en conclure ce que nous voulions. En fait, on peut aussi se demander si, avec les mêmes hypothèses, il existe des $\mathbb{C}$-espèces $A_0(X)$, $A_1(X)$, ..., $A_{n-1}(X)$ telles que l'on ait

$$F(X,Y) = (A_0(X) + A_1(X) \cdot Y + \ldots + Y^n)U(X,Y)$$

avec U une $\mathbb{C}$-espèce en X et Y inversible. L'exemple ci-dessus montre que ceci est faux en général. Toutes ces considérations nous ont à vrai dire conduits à ne considérer que des $\mathbb{C}$-espèce polynomiales par rapport à Y ; autrement dit, nous avons choisi de nous borner à ne considérer que des équations combinatoires de la forme

$$F(X,Y) = 0$$

avec $F(X,Y)$ une $\mathbb{C}$-espèce en X et Y, polynomiale en Y.

CHAPITRE II

FORMES COMBINATOIRES QUADRATIQUES

2.1 Introduction

Le présent chapitre contient une classification en formes canoniques des formes combinatoires quadratiques analogue à la classification classique des formes quadratiques en géométrie des coniques. Une telle classification permet alors de se ramener, quitte à effectuer une substitution affine des variables X et Y, à la résolution des *équations canoniques*, c'est-à-dire des équations $Q(X,Y) = 0$, $Q(X,Y)$ désignant une forme canonique.

Soit $\mathcal{E}_2$ l'ensemble des éléments de degré ≤ 2 de $\mathfrak{M}_{X,Y}$. Rappelons que l'on a

$$\mathcal{E}_2 = \{1, X, Y, E_2(X), X^2, XY, Y^2, E_2(Y)\}.$$

Soit alors $\mathbb{C}\|X,Y\|_{\leq 2}$ l'ensemble des éléments de degré ≤ 2 de $\mathbb{C}\|X,Y\|$; on peut donc dire d'un élément de cet ensemble que c'est une combinaison linéaire à coefficients complexes d'éléments de $\mathcal{E}_2$.

Définition 2.1.1. On dit d'un élément de $\mathbb{C}\|X,Y\|_{\leq 2}$ que c'est une *forme combinatoire quadratique.*

2.2 Congruence

Soient Φ, Ψ des $\mathbb{C}$-espèces de degré ≤ 1 et soit $F(X,Y) = \sum_{M\in\mathcal{E}_2} f_M M \in \mathbb{C}\|X,Y\|_{\leq 2}$. On pose

$$F(\Phi,\Psi) = \sum_{M\in\mathcal{E}_2} f_M M(\Phi,\Psi).$$

Désormais, nous noterons V le vecteur défini par $V = (X,Y)^\top$.

Soit $\mathfrak{I}$ le groupe des transformations affines inversibles de l'espace $\mathbb{C}^2$, et soit $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^2)$ le groupe des automorphismes linéaires de $\mathbb{C}^2$. Rappelons que tout élément $T \in \mathfrak{I}$ s'identifie canoniquement à un couple (A,B) avec $A \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^2)$, $B \in \mathbb{C}^2$. En fait, désormais, nous identifierons A et sa représentation matricielle par rapport à la base canonique ; d'autre part, nous supposerons que B appartient plutôt à l'espace $\mathbb{C}^{2\times 1}$ des vecteurs colonne d'ordre 2 à coefficients complexes. Finalement, nous poserons,

$$F((\Phi,\Psi)^\top) = F(\Phi,\Psi)$$

où Φ et Ψ désignent des $\mathbb{C}$-espèces de degré 1 arbitraires.

Soit l'application

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & (\mathbb{C}^* \times \mathfrak{I}) \times \mathbb{C}\|X,Y\|_{\leq 2} & \longrightarrow & \mathbb{C}\|X,Y\|_{\leq 2} \\ & ((z,T),F) & \longmapsto & (z,T)\cdot F = z\,F(AV+B). \end{array}$$

On note alors $F^T(X,Y) = F(AV+B)$.

Ainsi, si l'on pose $T=(A,B)$, avec $A=(a_{ij}) \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ une matrice carrée d'ordre 2, $B=(b_1,b_2)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{C}^{2\times 1}$, alors on a

$$F^T(X,Y) = F(a_{11}X + a_{12}Y + b_1, a_{21}X + a_{22}Y + b_2).$$

Proposition 2.2.1. L'application α définit une action à droite du groupe $\mathbb{C}^* \times \mathfrak{I}$ sur l'ensemble $\mathbb{C}\|X,Y\|_{\leq 2}$.

Démonstration. Soit F une forme combinatoire quelconque. L'élément neutre du groupe $\mathbb{C}^* \times \mathfrak{I}$ étant évidemment $(1,(I,0_{2\times 1}))$, I désignant la matrice identité d'ordre 2 et $0_{2\times 1}$ le vecteur colonne nul d'ordre 2, on vérifie aisément que l'on a

$$(1,(I,0_{2\times 1}))\cdot F = F;$$

ainsi, l'une des deux propriétés des actions de groupes est satisfaite.

Soient alors $(z,T),(z',T') \in \mathbb{C}^* \times \mathfrak{I}$. Nous allons montrer que l'on a

$$(z',T')\cdot((z,T)\cdot F) = (z'z, T\circ T')\cdot F.$$

Posons $T=(A,B)$, $T'=(A',B')$, avec $A,A' \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^2)$, B,B' deux vecteurs colonnes d'ordre 2 à coefficients complexes. On a

$$\begin{array}{rcl} (z',T')\cdot(((z,T)\cdot F)(X,Y)) & = & (z',T')\cdot(zF(AV+B)) \\ & = & z'zF(A(A'V+B')+B) \\ & = & z'zF(AA'V+AB'+B) \\ & = & z'zF^{T\circ T'}(X,Y) \end{array}$$

ce qui achève la démonstration. □

On sait que toute action induit une relation d'équivalence, à savoir la relation dont les classes sont les orbites de l'action considérée.

Définition 2.2.2. Soient $F,G \in \mathbb{C}\|X,Y\|_{\leq 2}$. On dit que F et G sont *congrues* si elles appartiennent à la même orbite de l'action α. On note alors $F \equiv G$.

2.3 Relation d'ordre

Rappelons d'abord que, par définition, le *support* d'une $\mathbb{C}$-espèce $F \in \mathbb{C}\|X,Y\|$, que nous noterons $\mathrm{supp}\,F$, est le sous-ensemble de $\mathfrak{M}_{X,Y}$ formé des éléments M tels que $[M]\,F \neq 0$.

Munissons l'ensemble $\mathcal{E}_2$ de l'ordre total suivant :

$$1 \prec X \prec Y \prec X^2 \prec Y^2 \prec XY \prec E_2(X) \prec E_2(Y).$$

Nous allons utiliser cet ordre total sur $\mathcal{E}_2$ pour définir un préordre sur $\mathbb{C}\|X,Y\|_{\leq 2}$. Nous aurons besoin à cette fin de la définition suivante.

Définition 2.3.1. Soit $F \in \mathbb{C}\|X,Y\|_{\leq 2}$, $F \neq 0$, et soit $\mu(F)$ la liste des éléments du support de F rangés en ordre décroissant. On dit alors de $\mu(F)$ que c'est le *mot décroissant associé à F*. Dans le cas où $F = 0$, on convient de poser $\mu(F) = ()$, le symbole $()$ désignant la liste vide.

Exemple 2.3.2. Soit $F(X,Y) = 1/3 + (3/2)Y + \sqrt{2}E_2(X) + XY$. Alors,

$$\mu(F) = (E_2(X), XY, Y, 1).$$

Définition 2.3.3. Soit $F, G \in \mathbb{C}\|X,Y\|_{\leq 2}$. On dit que F est inférieur ou égal à G selon l'ordre lexicographique si $\mu(F) \leq_{\text{lex}} \mu(G)$, où $\leq_{\text{lex}}$ désigne l'ordre lexicographique. On note alors $F \preceq G$.

Exemple 2.3.4. Soient

$$F(X,Y) = E_2(Y) + \sqrt{2}, \quad G(X,Y) = 2E_2(X) - iXY + Y^2 + Y + 7.$$

On a alors $G(X,Y) \preceq F(X,Y)$.

Nous sommes maintenant en mesure de définir le préordre annoncé plus haut.

Définition 2.3.5. Soient $F, G \in \mathbb{C}\|X,Y\|_{\leq 2}$. On note alors $F \leq G$ si F et G sont congrues et si $\mu(F)$ est inférieur ou égal à $\mu(G)$ selon l'ordre lexicographique.

Proposition 2.3.6. La relation $\leq$ définie sur $\mathbb{C}\|X,Y\|_{\leq 2}$ est un préordre.

Démonstration. On doit montrer que la relation $\leq$ est à la fois réflexive et transitive. Or, pour montrer que cette relation est réflexive, il suffit de noter que l'ordre lexicographique est lui-même réflexif et que, de plus, toute forme combinatoire quadratique est évidemment congrue à elle-même, comme cela résulte immédiatement de la définition d'une action de groupe. Pour ce qui est de la transitivité, elle résulte de ce que l'ordre lexicographique ainsi que la relation de congruence définie ci-dessus sont eux-mêmes transitifs, l'ordre lexicographique étant un ordre total et la relation de congruence définie ci-dessus étant une relation d'équivalence, comme nous l'avons observé plus haut. □

Il est bien connu que tout préordre défini sur un ensemble donné induit une relation d'équivalence sur cet ensemble, à savoir la relation $\mathcal{R}$ telle que, quel que soient x, y appartenant à l'ensemble considéré, on ait

$$(x,y) \in \mathcal{R} \Longleftrightarrow (x,y) \in \mathcal{P} \text{ et } (y,x) \in \mathcal{P},$$

$\mathcal{P}$ désignant le préordre donné. De plus, la relation induite par $\mathcal{P}$ sur les classes d'équivalence de la relation $\mathcal{R}$ est alors une relation d'ordre. Il est donc loisible de se proposer de trouver les classes minimales par rapport à cette dernière relation. C'est précisément ce que nous nous proposons de faire à la section suivante ; en fait, les théorèmes 2.4.2 et 2.4.4 donnent un ensemble de familles à au plus un paramètre complexe, la réunion de ces familles formant un système de représentants des classes minimales.

La proposition suivante énonce une propriété remarquable qu'ont en commun les représentants d'un même classe minimale.

Proposition 2.3.7. Soient $F, G \in \mathbb{C}\|X,Y\|_{\leq 2}$. Si F, G vérifient les relations $F \leq G$, $G \leq F$, alors $\text{supp}F = \text{supp}G$.

Démonstration. En effet, les hypothèses $F \leq G$, $G \leq F$ entraînent immédiatement $\mu(F) \leq_{\mathrm{lex}} \mu(G)$, $\mu(G) \leq_{\mathrm{lex}} \mu(F)$. Ainsi, l'ordre lexicographique étant évidemment antisymétrique, étant un ordre total, on a $\mu(F) = \mu(G)$, et ainsi, on a bien $\mathrm{supp}(F) = \mathrm{supp}(G)$. □

2.4 Formes canoniques

Définition 2.4.1. 2.4.1 Soit $F(X,Y)$ une forme combinatoire quadratique. Si les coefficients respectifs de $E_2(X)$ et de $E_2(Y)$ de F sont nuls, on dit de F que c'est une forme combinatoire quadratique *classique*; dans le cas contraire, on dit que c'est une forme *non classique*.

2.4.1 Classification

Considérons d'abord le cas bien connu des formes combinatoires quadratiques classiques.

Théorème 2.4.2. 2.4.2 Soit $F(X,Y)$ une forme combinatoire quadratique classique. Alors, F est congrue à une et une seule des formes combinatoires suivantes :

$$\begin{gathered} 0, \\ 1, \\ X, \\ X^2, \\ X^2+1, \\ X^2+Y, \\ X^2+Y^2, \\ X^2+Y^2+1. \end{gathered}$$

Le théorème suivant fournit un système de représentants des classes de congruence du sous-ensemble de $\mathbb{C}\|X,Y\|_{\leq 2}$ formé des formes combinatoires quadratiques non classiques, chacun de ces représentants étant en fait un représentant d'une classe minimale par rapport à l'ordre induit par le préordre $\leq$.

Lemme 2.4.3. L'ensemble des formes combinatoires quadratiques non classiques est fermé par congruence.

Démonstration. Il est en effet évident que l'ensemble des formes combinatoires classiques est lui-même fermé par congruence. Cet énoncé découle alors immédiatement de ce que la relation de congruence est une relation d'équivalence. □

Théorème 2.4.4. Soit $F(X,Y)$ une forme combinatoire quadratique non classique. Alors, parmi les $\mathbb{C}$-espèces suivantes, il en existe une et une seule qui soit congrue à F :

(I)	$E_2(X)+t, \quad t \in \mathbb{C}$
(II)	$E_2(X)+Y$
(III)	$E_2(X)+Y^2+t, \quad t \in \mathbb{C}$
(IV)	$2E_2(X)-X^2+tX, \quad t \in \mathbb{C}$

$$\begin{array}{ll}
\text{(V)} & 2E_2(X) - X^2 - X + 1 \\
\text{(VI)} & 2E_2(X) - X^2 + Y \\
\text{(VII)} & 2E_2(X) - X^2 + Y^2 + tX, \quad t \in \mathbb{C} \\
\text{(VIII)} & 2E_2(X) - X^2 + Y^2 - X + 1 \\
\text{(IX)} & E_2(X) + XY \\
\text{(X)} & E_2(X) + XY + 1.
\end{array}$$

La suite du présent article est consacrée à la démonstration du théorème ci-dessus. Indiquons d'abord les grandes lignes de cette démonstration. Rappelons que l'on a, par définition, $\Omega_2(X) = 2E_2(X) - X^2$. On vérifie alors aisément que l'ensemble $\mathcal{F}_2$ défini par

$$\mathcal{F}_2 = \{1, X, Y, X^2, Y^2, XY, \Omega_2(X), \Omega_2(Y)\}$$

forme une base de $\mathbb{C}\|X,Y\|_{\leq 2}$. On se propose dans ce qui suit de présenter un système de représentants des classes de congruence de $\mathbb{C}\|X,Y\|_{\leq 2}$, exprimés par rapport à cette base, en exploitant le fait que la $\mathbb{C}$-espèce Ω_2 satisfait à la relation de pseudo-linéarité suivante :

$$\Omega_2(\alpha X + \beta Y + \gamma) = \alpha\Omega_2(X) + \beta\Omega_2(Y) + \gamma$$

où α, β et γ désignent des nombres complexes arbitraires. Munissons l'ensemble $\mathcal{F}_2$ de l'ordre total

$$1 \prec X \prec Y \prec X^2 \prec Y^2 \prec XY \prec \Omega_2(X) \prec \Omega_2(Y).$$

Plus précisément, nous allons trouver un système de représentants des classes de congruence de $\mathbb{C}\|X,Y\|_{\leq 2}$ qui soient exprimés par rapport à cette nouvelle base et qui soient des minima par rapport au préordre obtenu en remplaçant $\mathcal{E}_2$ par $\mathcal{F}_2$ dans la définition 2.3.3. Une fois un tel système de représentants obtenu, il suffira d'exprimer chacun de ces représentants par rapport à la base canonique, c'est-à-dire par rapport à la base $\mathcal{E}_2$; on pourra ensuite déduire des formes obtenues un système de représentants qui soient minimaux par rapport à l'ordre induit par le préordre $\leq$ défini sur $\mathbb{C}\|X,Y\|_{\leq 2}$. A cette fin, nous allons d'abord montrer que la partie homogène de degré 2 de toute forme combinatoire quadratique non classique soit est congrue à une forme combinatoire de la forme

$$\Omega_2(X) + \delta X^2 + \delta' Y^2, \tag{2.1}$$

où $\delta, \delta' \in \{0,1\}$, soit est congrue à

$$\Omega_2(X) + XY, \tag{2.2}$$

chacune de ces $\mathbb{C}$-espèces étant des représentants de classes minimales, par rapport à la relation d'ordre induite par le préordre $\leq$. Ceci revient à montrer qu'il existe une matrice carrée inversible à coefficient complexes, d'ordre 2, $A = (a_{ij})$, ainsi qu'une constante $k \in \mathbb{C}^*$ telles que la partie homogène de degré 2 de

$$k\, F(a_{11}X + a_{12}Y, a_{21}X + a_{22}Y)$$

soit de la forme de l'une des $\mathbb{C}$-espèces ci-dessus. Ainsi, une fois ceci posé, on est ramené à montrer que toute forme combinatoire quadratique est de la forme $G(X,Y) + d\,X + e\,Y + f$, avec $G(X,Y)$ une forme combinatoire qui soit de la forme (2.1) ou qui soit la forme (2.2) ; c'est précisément ce que nous ferons ensuite.

Soit $F(X,Y)$ une forme combinatoire quadratique ; posons

$$F(X,Y) = \alpha\, \Omega_2(X) + aX^2 + 2bXY + cY^2 + \gamma\Omega_2(Y) + dX + eY + f.$$

Soit de plus $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre 2 à coefficients complexes. On a alors

$$\begin{gathered} F(a_{11}X + a_{12}Y, a_{21}X + a_{22}Y) = \\ (\alpha a_{11} + \gamma a_{21})\, \Omega_2(X) + \\ + (aa_{11}^2 + 2ba_{11}a_{21} + ca_{21}^2)\, X^2 + \\ + 2(aa_{11}a_{12} + b(a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}) + ca_{21}a_{22})\, XY + \\ + (aa_{12}^2 + 2ba_{12}a_{22} + ca_{22}^2)\, Y^2 + \\ + (\alpha a_{12} + \gamma a_{22})\, \Omega_2(Y) + \\ + (da_{11} + ea_{21})\, X + \\ + (da_{12} + ea_{22})\, Y + \\ + f. \end{gathered}$$

Lemme 2.4.5. Soit $F(X,Y) = \alpha\, \Omega_2(X) + a\, X^2 + c\, Y^2$, avec $\alpha, a, c \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$. Alors, $F(X,Y)$ est congrue à une forme combinatoire de la forme (2.1), avec $\delta = 0$ (resp. $\delta' = 0$) si $a = 0$ (resp. $c = 0$) et $\delta = 1$ (resp. $\delta' = 1$) si $a \neq 0$ (resp. $c \neq 0$).

Démonstration. Soit $a' = a/\alpha$, $b' = b/\alpha$. Il est alors clair que la forme

$$G(X,Y) = \Omega_2(X) + a'\, X^2 + c'\, Y^2$$

est congrue à $F(X,Y)$. On peut donc sans perte de généralité démontrer cet énoncé plutôt pour $G(X,Y)$. Notons d'abord que $a = 0$ (resp. $c = 0$) si, et seulement si, $a' = 0$ (resp. $c' = 0$). Ainsi, ce résultat est démontré dans le cas où l'on $a = 0 = c$, puisqu'alors on a $G(X,Y) = \Omega_2(X)$. Il reste donc à considérer les trois cas suivants, à savoir

i) $a = 0$, $c \neq 0$; soit $k = 1/\sqrt{c'}$, $\sqrt{c'}$ désignant l'une quelconque des deux racines de c'. On a alors

ii) $a \neq 0$, $c = 0$; soit $k = 1/a'$. On a alors dans ce cas

$$\frac{1}{k}\, G(k\, X, Y) = \Omega_2(X) + X^2;$$

iii) $a \neq 0 \neq c$; posons $k = 1/a'$, $l = 1/\sqrt{a'c'}$, où $\sqrt{a'c'}$ désigne l'une quelconque des deux racines de $a'c'$. On a alors

$$a'\, G(k\, X, l\, Y) = \Omega_2(X) + X^2 + Y^2.$$

□

Notons que toute forme combinatoire quadratique non classique est congrue à une forme combinatoire quadratique dont le coefficient de $\Omega_2(X)$ est non nul. Soit en effet F une forme combinatoire quadratique non classique dont le coefficient de $\Omega_2(X)$ est nul. On vérifie alors aisément que $F(X,Y)$ est congrue à la forme combinatoire quadratique $F(Y,X)$; comme de plus on a

$$[\Omega_2(X)]F(Y,X) = [\Omega_2(Y)]F(X,Y),$$

on en déduit immédiatement, par hypothèse, $[\Omega_2(X)]F(Y,X) \neq 0$.

Proposition 2.4.6. Soit $F(X,Y)$ une forme combinatoire quadratique homogène non classique. Posons

$$F(X,Y) = \alpha\, \Omega_2(X) + a\, X^2 + 2b\, X\, Y + c\, Y^2 + \gamma \Omega_2(Y).$$

avec $\alpha \neq 0$. Alors,

i) si $\alpha b = \gamma a$ ou $2\alpha\gamma b \neq \gamma^2 a + \alpha^2 c$, $F(X,Y)$ est congrue à une $\mathbb{C}$-espèce de la forme

$$\Omega_2(X) + \delta\, X^2 + \delta'\, Y^2, \tag{2.3}$$

avec $\delta, \delta' \in \{0,1\}$;

ii) sinon, $F(X,Y)$ est congrue à

$$\Omega_2(X) + X\, Y. \tag{2.4}$$

Démonstration. Soit $G(X,Y) = F(X - \gamma\, Y, \alpha\, Y)$. Il est alors clair que G est congrue à F. Nous allons montrer que si les conditions en (i) sont remplies, alors G est congrue à une forme combinatoire de la forme (2.3). Posons

$$G(X,Y) = \alpha'\, \Omega_2(X) + a'\, X^2 + 2b'\, XY + c'\, Y^2 + \gamma'\, \Omega_2(Y).$$

Notons d'abord qu'il résulte de la définition de G que l'on a en fait $\gamma' = 0$. Or, on a

$$[X\, Y]\, G = \alpha\, b - \gamma\, a, \quad [Y^2]\, G = a\gamma^2 - 2b\alpha\gamma + c\alpha^2.$$

Ainsi, les conditions

$$\alpha b = \gamma a \text{ ou } 2\alpha\gamma b \neq \alpha^2 a + \gamma^2 a$$

expriment simplement que le coefficient de XY de G est nul *ou* que le coefficient de Y^2 de cette même forme est non nul ; autrement dit, ces conditions expriment que l'on a, en fait, $b' = 0$ ou $c' \neq 0$. Or, si $b' = 0$, on peut déjà conclure, en vertu du lemme précédent, puisque $\gamma' = 0$, que $G(X,Y)$ est congrue à une forme combinatoire de la forme (2.3). Nous allons donc désormais pouvoir supposer $b' \neq 0$ et $c' \neq 0$. Montrons alors dans ce cas qu'il existe une matrice inversible $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ telle que $G(AV)$ est de la forme (2.3) ; en vertu du lemme 2.4.5, il suffit donc pour ce faire de montrer qu'il existe une telle matrice A qui soit telle que les coefficients respectifs de XY et de $\Omega_2(Y)$ de $G(AV)$ soient nuls.

Or, on a, d'une part, puisque $\gamma' = 0$,

$$[\Omega_2(Y)]\, G(AV) = \alpha' a_{12};$$

ainsi, on en déduit immédiatement la condition nécessaire $a_{12} = 0$; il est alors nécessaire, pour que A soit inversible, que l'on ait $a_{22} \neq 0$. Posons $a_{12} = 0$, $a_{22} = 1$. On a alors

$$[XY]\, G(AV) = 2\,(b' a_{11} + c' a_{21}).$$

On en déduit la condition nécessaire $a_{21} \neq 0$, puisque dans le cas contraire on devrait également avoir $a_{11} = 0$, et alors la matrice A ne serait évidemment pas inversible. Supposons donc $a_{21} \neq 0$. On peut alors poser a_{11} et a_{21} de façon que l'on ait

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = -\frac{c'}{b'}.$$

et alors, on vérifie aisément que la matrice A obtenue est inversible, le déterminant de A étant différent de 0. On obtient de la sorte, par construction, une forme dont les coefficients respectifs de XY et de $\Omega_2(Y)$ sont nuls, et ainsi, en vertu du lemme 2.4.5, cette forme est bien congrue à une forme combinatoire de la forme (2.3).

Montrons maintenant (ii). Les relations

$$\alpha b \neq \gamma a, \quad 2\alpha\gamma b = \gamma^2 a + \alpha^2 c,$$

expriment en fait que l'on a $[XY]\,G \neq 0$, $[Y^2]\,G = 0$, autrement dit, que l'on a $b' \neq 0$, $c' = 0$. Nous allons d'abord montrer qu'avec ces hypothèses, il existe une matrice carrée inversible d'ordre 2, $A = (a_{ij})$, telle que les coefficients respectifs de X^2 et de Y^2 de $G(AV)$ soient nuls. Notons d'abord que l'on a, dans le cas présent, puisque $c' = 0$,

$$[X^2]\,G(AV) = a'a_{11}^2 + 2b'a_{11}a_{21}, \tag{2.5}$$
$$[Y^2]\,G(AV) = a'a_{12}^2 + 2b'a_{12}a_{22}. \tag{2.6}$$

Or, pour la même raison qu'en (i), il est nécessaire, afin d'annuler le coefficient de $\Omega_2(Y)$ de $G(AV)$, que l'on ait $a_{12} = 0$; posons donc $a_{12} = 0$. De plus, posons $a_{22} = 1$. On vérifie alors immédiatement que la relation (2.6) est satisfaite. D'autre part, pour annuler le coefficient de X^2 de $G(AV)$, il suffit, dans le cas $a' = 0$, de poser $a_{11} = 1$, $a_{21} = 0$, tandis que dans le cas $a' \neq 0$, il suffit d'attribuer des valeurs à a_{11} et a_{21} de façon que l'on ait

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = -\frac{2b'}{a'}.$$

Ainsi, la matrice A obtenue est bien dans chaque cas inversible et telle que les coefficients respectifs de X^2 et de Y^2 de $G(AV)$ soient nuls ; autrement dit, on a

$$G(AV) = \alpha''\Omega_2(X) + b''XY,$$

avec $\alpha'', b'' \in \mathbb{C}$.

Soient alors $k = 1/\alpha''$, $l = \alpha''/b''$. On a ainsi

$$G(k\,X, l\,Y) = \Omega_2(X) + XY,$$

ce qui achève de montrer que $F(X,Y)$ est, dans le cas présent, congrue à la forme (2.4). □

Les propositions qui suivent vont nous permettre d'obtenir les familles à un paramètre complexe (I′) à (X′) plus loin, dont la réunion, comme on le verra, forme un système de représentants des classes de congruence de l'ensemble des formes combinatoires quadratiques non classiques.

Soit encore une fois $F(X,Y)$ une forme combinatoire quadratique non classique. Rappelons que l'on se propose de trouver une forme combinatoire congrue à F qui soit minimale lorsqu'exprimée par rapport à la base $\mathcal{F}_2$. Comme nous l'avons déjà observé, on peut donc sans perte de généralité supposer $F(X,Y)$ de la forme

$$G(X,Y) + d\,X + e\,Y + f,$$

où $G(X,Y)$ est de la forme (2.1) ou, sinon, est la forme (2.2). Nous allons donc considérer successivement chacun de ces cas.

Proposition 2.4.7. Soit $F(X,Y) = \Omega_2(X) + dX + eY + f$. Alors,

i) si $e \neq 0$, $F(X,Y)$ est congrue à la forme (III′) ;

ii) sinon, F est congrue à une forme combinatoire de la forme (I′), sauf dans le cas où $d = -1$, auquel cas elle est congrue à la forme (II′) lorsque $f = 0$ et à la forme (I′) avec $t = -1$ lorsque $f \neq 0$.

Démonstration. (i) Soit

$$G(X,Y) = \Omega_2(X) + dX + Y + f.$$

La forme $G(X,Y)$ étant congrue à $F(X,Y)$, puisqu'en effet on a $G(X,Y) = F(X,Y/e)$, on peut donc se ramener à montrer que $G(X,Y)$ est congrue à la forme (III′). Or, ceci résulte immédiatement de ce que l'on a

$$G(X, -dX + Y - f) = \Omega_2(X) + Y.$$

(ii) Considérons d'abord le cas où l'on a $d \neq -1$. On pose alors $x_o = -f/(d+1)$; on a alors

$$F(X + x_o, Y) = \Omega_2(X) + dX,$$

ce qui montre bien que dans ce cas $F(X,Y)$ est congrue à une forme combinatoire de la forme (I′). D'autre part, si $d = -1$ et si $f \neq 0$, alors on vérifie que, quel que soit $x \in \mathbb{C}$, on a

$$F(X + x, Y) = \Omega_2(X) - X + f, \tag{2.7}$$

ce qui montre bien que dans ce cas le support de F ne peut être réduit. Finalement, la relation

$$\frac{1}{f} F(X/f, Y) = \Omega_2(X) - X + 1$$

montre bien que F est, dans ce cas, congrue à la forme (II′) ; si par contre $f = 0$, on conclut immédiatement de l'identité (2.7) que F est congrue à la forme $\Omega_2(X) - X$, qui correspond bien au cas particulier où l'on pose $t = -1$ dans (I′). □

Proposition 2.4.8. Soit $F(X,Y) = \Omega_2(X) + X^2 + dX + eY + f$. Alors,

i) si $e = 0$, $F(X,Y)$ est congrue à une forme combinatoire de la forme (IV′) ;

ii) sinon $F(X,Y)$ est congrue à la forme combinatoire (V′).

Démonstration. (i) On a en effet dans ce cas

$$F(X - d/2, Y) = \Omega_2(X) + X^2 - d(d+2)/4 + f.$$

(ii) Soit $G(X,Y) = \Omega_2(X) + X^2 + dX + Y + f$. Alors, $G(X,Y)$ est bien congrue à F : il suffit en effet pour s'en convaincre de noter que $G(X,Y) = F(X,Y/e)$. On peut donc se ramener à montrer que $G(X,Y)$ est congrue à la forme (V′). Or, ceci résulte immédiatement de l'identité

$$G(X, -dX + Y - f) = \Omega_2(X) + X^2 + Y.$$

□

Proposition 2.4.9. Soit $F(X,Y) = \Omega_2(X) + Y^2 + dX + eY + f$. Alors,

i) si $d = -1$, $F(X,Y)$ est congrue à la forme (VII′) si $f - e^2/4 \neq 0$ et à la forme (VI′) avec $t = -1$ sinon ;

ii) sinon, $F(X,Y)$ est congrue à une forme combinatoire de la forme (VI′).

Démonstration. (ii) Posons $x_o = (e^2/4 - f)/(1+d)$. On a alors

$$F(X + x_o, Y - e/2) = \Omega_2(X) + Y^2 + dX.$$

(i) On a

$$F(X, Y - e/2) = \Omega_2(X) + Y^2 - X - e^2/4 + f.$$

Ainsi, si $f - e^2/4 = 0$, on déduit immédiatement de cette identité que F est congrue à (VI′) avec $t = -1$. Autrement, on a, lorsque l'on pose $k = f - e^2/4$, $G(X,Y) = F(X, Y - e/2)$,

$$\frac{1}{k}\, G(X/k, Y/\sqrt{k}) = \Omega_2(X) + Y^2 - X + 1,$$

$\sqrt{k}$ désignant l'une quelconque des deux racines de k ; ainsi $F(X,Y)$ est bien congrue dans ce cas à la forme (VII′). □

Proposition 2.4.10. Soit $F(X,Y) = \Omega_2(X) + X^2 + Y^2 + dX + eY + f$. Alors, $F(X,Y)$ est congrue à une forme combinatoire de la forme (VIII′).

Démonstration. Il suffit en effet de noter que l'on a

$$F(X - d/2, Y - e/2) = \Omega_2(X) + X^2 + Y^2 + f',$$

où on a posé $f' = -d/2 + (d^2 + e^2)/4 + f$. □

Proposition 2.4.11. Soit $F(X,Y) = \Omega_2(X) + XY + dX + eY + f$. Alors,

i) si $f = (1+d)e$, $F(X,Y)$ est congrue à la forme (IX′) ;

ii) sinon, $F(X,Y)$ est congrue à la forme (X′).

Démonstration. (i). On a en effet dans ce cas

$$F(X - e, Y - d) = \Omega_2(X) + XY.$$

(ii) Posons $k = f - (1+d)e$. On a alors

$$\frac{1}{k}\, F(kX - e, Y - d) = \Omega_2(X) + XY + 1.$$

□

Comme nous l'avions annoncé, les propositions ci-dessus nous permettent maintenant d'affirmer que la réunion des familles (à un paramètre complexe) suivantes forme un système de représentants des classes de congruence de l'ensemble des formes combinatoires quadratiques non classiques.

(I′)	$\Omega_2(X) + tX, \quad t \in \mathbb{C}$
(II′)	$\Omega_2(X) - X + 1$
(III′)	$\Omega_2(X) + Y$
(IV′)	$\Omega_2(X) + X^2 + t, \quad t \in \mathbb{C}$

$$\begin{array}{ll}
(\mathrm{V}') & \Omega_2(X) + X^2 + Y \\
(\mathrm{VI}') & \Omega_2(X) + Y^2 + t\,X, \quad t \in \mathbb{C} \\
(\mathrm{VII}') & \Omega_2(X) + Y^2 - X + 1 \\
(\mathrm{VIII}') & \Omega_2(X) + X^2 + Y^2 + t, \quad t \in \mathbb{C} \\
(\mathrm{IX}') & \Omega_2(X) + XY \\
(\mathrm{X}') & \Omega_2(X) + XY + 1
\end{array}$$

Nous allons utiliser les formes (I′) à (X′) pour en déduire un système de représentants des classes de congruence de l'ensemble des formes combinatoires quadratiques non classiques, qui soient exprimés par rapport à la base $\mathcal{E}_2$.

Dans chaque cas, on exprime d'abord la forme combinatoire générique par rapport à la base $\mathcal{E}_2$, puis on trouve une forme combinatoire de $\mathbb{C}\|X, Y\|_{\leq 2}$ qui soit congrue à la forme considérée et qui soit minimale lorsqu'exprimée par rapport à cette dernière base ; il s'agit donc dans chaque cas, essentiellement, de réduire le mot décroissant associé au support de la forme combinatoire obtenue après changement de base. Nous notons $\longrightarrow$ la transformation obtenue par la substitution $\Omega_2(X) = 2E_2(X) - X^2$.

Forme (I′) : $\Omega_2(X) + t\,X \longrightarrow 2E_2(X) - X^2 + t\,X$. Cette forme est minimale. En effet, on a

$$\begin{aligned}
\Omega_2(a_{11}X + x) + t(a_{11}X + x) &= a_{11}\Omega_2(X) + x + ta_{11}\,X + tx \\
&= 2a_{11}E_2(X) - a_{11}X^2 + ta_{11}X + x(1+t).
\end{aligned}$$

Ainsi, le mieux qu'on puisse faire est de poser $x = 0$, $a_{11} = 1$ et alors on trouve la forme (IV), c'est-à-dire

$$2E_2(X) - X^2 + t\,X.$$

Forme (II′) : $\Omega_2(X) - X + 1 \longrightarrow 2E_2(X) - X^2 - X + 1$. Cette forme est minimale. On a en effet

$$\begin{aligned}
&\Omega_2(a_{11}X + x) - (a_{11}X + x) + 1 \\
&= a_{11}\Omega_2(X) + x - a_{11}\,X - x + 1 \\
&= a_{11}\,\Omega_2(X) - a_{11}X + 1 \\
&= 2a_{11}E_2(X) - a_{11}X^2 - a_{11}X + 1.
\end{aligned}$$

Ainsi, quel que soit x, on trouve la forme

$$-2a_{11}E_2(X) + a_{11}X^2 + a_{11}X + 1,$$

et alors il suffit de poser $a_{11} = -1$ pour obtenir la forme (V).

Forme (III′) : $\Omega_2(X) + Y \longrightarrow 2E_2(X) - X^2 + Y$. Cette forme est minimale. On a en effet

$$\begin{aligned}
&\Omega_2(a_{11}X + x) + (a_{21}X + a_{22}Y + y) \\
&= a_{11}\Omega_2(X) + x + a_{21}X + a_{22}Y + y \\
&= 2a_{11}E_2(X) - a_{11}X^2 + a_{21}X + a_{22}Y + x + y.
\end{aligned}$$

Ainsi, le mieux qu'on puisse faire est de poser $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{21} = 0$, $x = y = 0$. On obtient alors la présente forme, c'est-à-dire la forme (VI).

Forme (IV′) : $\Omega_2(X) + X^2 + t \longrightarrow 2\,E_2(X) + t$. Cette forme est minimale. On a en effet

$$\begin{aligned}
&\Omega_2(a_{11}X + x) + (a_{11}X + x)^2 + t \\
&\quad = \quad a_{11}\Omega_2(X) + x + (a_{11}X + x)^2 + t \\
&\quad = \quad 2a_{11}E_2(X) - a_{11}\,X^2 + a_{11}^2\,X^2 + 2xa_{11}\,X + x(1 + x) + t,
\end{aligned}$$

et ainsi, le mieux qu'on puisse faire est de poser $x = 0$, $a_{11} = 1$. On obtient bien de la sorte la présente forme combinatoire. Il suffit alors de diviser cette forme par 2 pour obtenir une forme combinatoire de la forme (I).

Forme (V′) : $\Omega_2(X) + X^2 + Y \longrightarrow 2E_2(X) + Y$. Il est évident que cette forme est minimale, sachant que ni le terme en $E_2(X)$ ni le terme en Y ne peut disparaître par suite d'une substitution affine des variables X et Y. De plus, cette forme est congrue à la forme (II). Soit en effet $F(X, Y) = 2E_2(X) + Y$. On a alors évidemment

$$E_2(X) + Y = \frac{1}{2}\,F(X, 2Y).$$

Forme (VI′) : $\Omega_2(X) + Y^2 + t\,X \longrightarrow 2E_2(X) - X^2 + Y^2 + t\,X$. Cette forme est minimale. On a en effet

$$\begin{aligned}
&\Omega_2(a_{11}X + x) + (a_{22}Y + y)^2 + t\,(a_{11}X + x) \\
&\quad = \quad a_{11}\Omega_2(X) + x + (a_{22}Y + y)^2 + t\,(a_{11}X + x) \\
&\quad = \quad a_{11}(2E_2(X) - X^2) + x + a_{22}^2Y^2 + 2a_{22}yY + y^2 + ta_{11}x + tx.
\end{aligned}$$

Ainsi, le mieux qu'on puisse faire est de poser $a_{11} = a_{22} = 1$, $x = y = 0$, et ainsi on trouve la forme (VII).

Forme (VII′) : $\Omega_2(X) + Y^2 - X + 1 \longrightarrow 2\,E_2(X) - X^2 + Y^2 - X + 1$. Cette forme est minimale. On a en effet

$$\begin{aligned}
&\Omega_2(a_{11}X + x) + (a_{22}Y + y)^2 - (a_{11}X + x) + 1 \\
&\quad = \quad a_{11}\Omega_2(X) + x + a_{22}^2Y^2 + 2a_{22}yY + y^2 - a_{11}X - x + 1.
\end{aligned}$$

Ainsi, le mieux qu'on puisse faire est de poser $a_{11} = a_{22} = 1$, $x = y = 0$, et ainsi on trouve cette fois la forme (VIII).

Forme (VIII′) : $\Omega_2(X) + X^2 + Y^2 + t \longrightarrow 2\,E_2(X) + Y^2 + t$. Cette forme est minimale. On a en effet

$$\begin{aligned}
&\Omega_2(a_{11}X + x) + (a_{11}X + x)^2 + (a_{22}Y + y)^2 + t \\
&\quad = \quad a_{11}\Omega_2(X) + x + (a_{11}X + x)^2 + (a_{22}Y + y)^2 + t \\
&\quad = \quad 2a_{11}E_2(X) - a_{11}X^2 + x + (a_{11}X + x)^2 + (a_{22}Y + y)^2 + t \\
&\quad = \quad 2a_{11}E_2(X) + a_{11}(a_{11} - 1)X^2 + a_{22}^2Y^2 + 2a_{11}xX + 2a_{22}yY + x^2 + y^2 + x + t.
\end{aligned}$$

Ainsi, le mieux qu'on puisse faire est de poser $a_{11} = a_{22} = 1$, $x = y = 0$ et alors on trouve une forme équivalente à la forme (III).

Forme (IX′) : $\Omega_2(X) + XY \longrightarrow 2E_2(X) - X^2 + XY$. On a

$$E_2(X) + XY \leq 2E_2(X) - X^2 + XY. \tag{2.8}$$

On a en effet

$$
\begin{aligned}
&\Omega_2(a_{11}X + x) + (a_{11}X + x)(a_{21}X + a_{22}Y + y) \\
&= a_{11}\Omega_2(X) + x + (a_{11}X + x)(a_{21}X + a_{22}Y + y) \\
&= 2a_{11}E_2(X) - a_{11}X^2 + x + (a_{11}X + x)(a_{21}X + a_{22}Y + y) \\
&= 2a_{11}E_2(X) + a_{11}(a_{21} - 1)X^2 + a_{11}a_{22}XY + (a_{11}y + a_{21}x)X + a_{22}xY + xy.
\end{aligned}
$$

Ainsi, le mieux qu'on puisse faire est de poser $a_{11} = a_{21} = 1$, $a_{22} = 2$, $x = y = 0$, et alors on trouve bien une forme équivalente à la forme (IX).

Forme (X′) : $\Omega_2(X)+XY+1 \longrightarrow 2E_2(X)-X^2+XY+1$. On déduit alors immédiatement de (2.8)

$$2E_2(X) + XY + 1 \leq 2E_2(X) - X^2 + XY + 1.$$

et ainsi on trouve bien la forme (X).

2.4.2 Analyse des équations canoniques

Soit $Q(X, Y)$ une forme combinatoire quadratique. Considérons l'équation combinatoire

$$Q(X, Y) = 0. \tag{2.9}$$

Le problème de la résolution d'une telle équation consiste alors à trouver des $\mathbb{C}$-espèces $F(T)$, $G(T)$ telles que l'on ait

$$Q(F(T), G(T)) = 0. \tag{2.10}$$

Le problème étant ainsi posé, soit G (resp. F) une $\mathbb{C}$-espèce donnée arbitraire. On obtient alors évidemment des solutions à l'équation (2.9) en trouvant les $\mathbb{C}$-espèces F (resp. G) satisfaisant à l'équation ci-dessus, vue cette fois comme équation à une inconnue $F(T)$ (resp. $G(T)$). Ainsi, de la résolution d'une équation à deux inconnues, on est ramené à la résolution d'une équation à une inconnue, plus simple à résoudre, et pour laquelle il existe, en fait, des méthodes de calcul. C'est précisément cette démarche que nous avons adoptée dans la suite. D'autre part, on voit qu'on peut se ramener, quitte à effectuer une substitution affine des variables X et Y, à chercher des solutions non pas pour une forme combinatoire quadratique quelconque mais bien pour une forme canonique. Ainsi, nous allons considérer l'équation ci-dessus dans le cas où $Q(X, Y)$ désigne successivement chacune des formes canoniques, en donnant dans la plupart des cas des conditions d'existence de solutions dans $\mathbb{C}\|T\|$, cette équation étant vue, comme nous venons de le dire, comme équation à une inconnue $F(T)$, $G(T)$ étant donnée. Notons à ce propos que la lettre X joue le rôle, dans ce qui suit, de l'inconnue, alors qu'il est plutôt d'usage d'utiliser la lettre Y pour désigner une inconnue ; ceci résulte de ce que nous avons jugé les formes combinatoires quadratiques dont le terme en $E_2(X)$ apparaît plus simples que celles dont c'est plutôt le terme en $E_2(Y)$ qui apparaît.

On consultera, à propos du résultat central du présent article, l'article de Bouchard, Chiricota et Labelle (1995).

Avant d'en arriver à l'objet central du présent article, rappelons d'abord la proposition suivante (Bouchard, Chiricota et Labelle, 1995).

Proposition 2.4.12. Soit $F = \sum_{M\in\mathfrak{M}} f_M M$ une $\mathbb{C}$-espèce. On a

$$E_2(F) = \sum_{M\in\mathfrak{M}} f_M E_2(M) + \sum_{M\in\mathfrak{M}} \binom{f_M}{2} M^2 + \sum_{\substack{P,Q\in\mathfrak{M}\\ P\prec Q}} f_P f_Q P\cdot Q.$$

Corollaire. Soit $F = \sum_{M\in\mathfrak{M}} f_M M$ une $\mathbb{C}$-espèce. On a

$$2\,E_2(F) - F^2 = 2\sum_{M\in\mathfrak{M}} f_M E_2(M) - \sum_{M\in\mathfrak{M}} f_M M^2.$$

En d'autres termes, on a $\Omega_2(F) = \sum_{M\in\mathfrak{M}} f_M \Omega_2(M)$.
Démonstration. On a évidemment

$$F^2 = \sum_{M\in\mathfrak{M}} f_M^2\, M^2 + 2\sum_{\substack{P<Q\\ P,Q\in\mathfrak{M}}} f_P f_Q P\cdot Q.$$

Ainsi, on en déduit aisément, en vertu de la proposition précédente,

$$\begin{aligned} &2\,E_2(F) - F^2 \\ &= 2\Big(\sum_{M\in\mathfrak{M}} f_M E_2(M) + \sum_{M\in\mathfrak{M}} \binom{f_M}{2} M^2 + \sum_{\substack{P\cdot Q=M\\ P\prec Q}} f_P f_Q P\cdot Q\Big) - (F(T))^2 \qquad (2.11)\\ &= 2\sum_{M\in\mathfrak{M}} f_M E_2(M) - \sum_{M\in\mathfrak{M}} f_M M^2, \qquad (2.12)\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. □

Rappelons de plus la proposition suivante (Bouchard, Chiricota et Labelle, 1995, prop. 3.1), qui constitue un outil important dans l'analyse qui va suivre.

Proposition 2.4.13. Soit $F \in \mathbb{C}\|T\|$. Posons $G = \sum_{M\in\mathfrak{M}} g_M M$. Alors,

i) si le terme constant g_1 de G est différent de 0 ou de $-1/8$, il existe dans $\mathbb{C}\|T\|$ deux solutions G à l'équation $E_2(F) = G$;

ii) si le terme constant g_1 de G est $-1/8$, il existe dans $\mathbb{C}\|T\|$ une seule solution F à l'équation $E_2(F) = G$;

iii) si le terme constant g_1 de G est 0, alors

1. il existe dans $\mathbb{C}\|T\|$ une seule solution G à l'équation $E_2(F) = G$ dont le terme constant f_1 soit non nul : ce terme constant est alors $f_1 = -1$;
2. il existe dans $\mathbb{C}\|T\|$ au plus une solution G à l'équation $E_2(F) = G$ dont le terme constant f_1 soit nul.

Proposition 2.4.14. Soit G une $\mathbb{C}$-espèce en la variable T. Posons $G(T) = \sum_{M\in\mathfrak{M}} g_M M$. Soit $Q(X,Y)$ une forme quadratique canonique et considérons l'équation combinatoire $Q(X, G(T)) = 0$ à résoudre par rapport à l'inconnue $X = F(T)$. On a, selon chacun des 10 cas possibles (I) – (X) pour Q :

I. $E_2(X) + t = 0$. Cette équation est un cas particulier de l'équation $E_2(X) + Y = 0$.

1. Si t est différent de $1/8$, il existe deux solutions.
2. Si $t = 1/8$, il existe une seule solution.

II. $E_2(X) + G(T) = 0$. Cette équation fait l'objet de la proposition 2.4.13.

III. $E_2(X) + (G(T))^2 + t = 0$.

1. Si g_1 n'est ni racine carrée de $-t$ ni racine carrée de $1/8 - t$, alors il existe deux solutions.
2. Si g_1 est racine carrée de $1/8 - t$, il existe une seule solution.
3. Si g_1 est racine carrée de $-t$, alors
   - il existe exactement une solution à terme constant non nul,
   - il existe au plus une solution à terme constant nul.

IV. $2\,E_2(X) - X^2 + t\,X = 0$

1. Si t est différent de -1, la solution banale $X = 0$ est l'unique solution.
2. Si $t = -1$, l'ensemble des solutions n'est autre que l'ensemble des $\mathbb{C}$-espèces constantes.

V. L'équation combinatoire $2\,E_2(X) - X^2 - X + 1 = 0$ n'admet aucune solution.

VI. L'équation $2E_2(X) - X^2 + G(T) = 0$ admet une solution si, et seulement si, quel que soit $M \in \mathfrak{M}$,

i) g_M est nul dès que M n'est ni de la forme $E_2(N)$ ni de la forme N^2, N désignant une espèce moléculaire, et

ii) $g_{E_2(M)} = -2\,g_{M^2}$.

VII. $2E_2(X) - X^2 + (G(T))^2 + tX = 0$

1. Si t est différent de 0 et de -1, il existe une seule solution.
2. Si $t = 0$, il n'existe de solution que si G est l'espèce nulle, auquel cas la solution banale est l'unique solution.
3. Si $t = -1$, cette équation n'admet de solution que si $g_1 \neq 0$; dans ce cas, elle admet une infinité de solutions, chacune des solutions étant uniquement déterminée une fois son terme constant donné, le terme constant pouvant être un nombre complexe quelconque.

VIII. L'équation $2E_2(X) - X^2 + (G(T))^2 - X + 1$ n'admet de solutions que si $g_1 = \pm i$, auquel cas elle en admet une et une seule.

IX. $E_2(X) + X \cdot G(T) = 0$. L'espèce nulle $X = 0$ est solution de cette équation. De plus

1. Si $g_1 \notin \{-1/2, -1\}$, il existe exactement deux solutions, la solution autre que la solution banale étant à terme constant non nul.
2. Si $g_1 = -1/2$, la solution banale est l'unique solution.
3. Si $g_1 = -1$, il existe au plus une solution autre que la solution banale, auquel cas le terme constant de cette solution est non nul.

X. $E_2(X) + X \cdot G(T) + 1 = 0$.

1. Si $g_1 = \frac{1}{2}(-1 \pm 2\sqrt{2})$, alors cette équation admet une et une seule solution ;
2. si $g_1 \in \{-2, 1\}$, cette équation admet au moins une solution et au plus deux solutions ;

3: autrement, cette équation admet exactement deux solutions.

Démonstration.
I. Cas particulier où on a $G(T) = t$ en II.

II. Conséquence immédiate de la proposition 2.4.13.

III. Cette assertion se déduit aisément de l'assertion II en notant que la $\mathbb{C}$-espèce jouant le rôle de la $\mathbb{C}$-espèce G à l'assertion II est ici la $\mathbb{C}$-espèce $G(T)^2 + t$.

IV. Posons $Q(X) = 2\,E_2(X) - X^2 + t\,X$. On note d'abord que l'on a, par le corollaire à la proposition 2.4.12,

$$Q(F(T)) = 2 \sum_{M \in \mathfrak{M}} f_M E_2(M) - \sum_{M \in \mathfrak{M}} f_M M^2 + t \sum_{M \in \mathfrak{M}} f_M\, M.$$

On voit donc en particulier que le terme constant de la décomposition moléculaire de $Q(F(T))$ est $(1+t)f_1$. Plus généralement, soit $M \in \mathfrak{M}$. On a trois cas à considérer, à savoir le cas où M est de la forme $E_2(N)$, le cas où M est de la forme N^2, (N désignant dans chacun des cas une espèce moléculaire) et finalement le cas où M n'est d'aucune des deux formes précédentes. Supposons d'abord $t \neq 0$. Dans le premier cas, on déduit de l'identité ci-dessus la relation

$$2\,f_N + t\,f_M = 0, \tag{2.13}$$

et ainsi on a $f_M = -2f_N/t$. Dans le deuxième cas, on déduit la relation suivante de cette même identité :

$$-f_N + t\,f_M = 0 \tag{2.14}$$

de sorte qu'on a $f_M = -f_N/t$. Finalement, dans le dernier cas, on a

$$tf_M = 0, \tag{2.15}$$

et ainsi on voit que, dans ce cas, f_M doit être nul. Or, si t est différent de -1, on voit que f_1 doit être nul, puisqu'on doit avoir $(1+t)f_1 = 0$. Soit $M \in \mathfrak{M}$. Supposons donc par récurrence le coefficient f_N déterminé, pour $N < M$. Alors, les relations précédentes montrent que, dans tous les cas, f_M est déterminée, et ainsi, la solution est donc unique. Or, comme on le vérifie immédiatement, l'espèce nulle est solution : on a donc bien que l'espèce nulle $X = 0$ est l'unique solution de l'équation $Q(X) = 0$. D'autre part, dans le cas où $t = 0$, vérifions là encore que l'espèce nulle est solution. Soit $M \in \mathfrak{M}$ une espèce moléculaire arbitraire. Calculons le coefficient de $E_2(M)$ de $Q(F(T))$: ce coefficient n'est autre que $2f_M$, comme on le vérifie aisément, ce qui montre bien que f_M est nul ; l'espèce M étant arbitraire, on a bien montré dans ce cas également que l'espèce nulle est l'unique solution.

D'autre part, dans le cas où $t = -1$, on vérifie que f_1 peut prendre a priori n'importe quelle valeur, c'est-à-dire que, quel que soit $z \in \mathbb{C}$, on peut poser $f_1 = z$. De plus, une fois f_1 fixé, on vérifie, par le même argument que ci-dessus, que tous les autres coefficients de F sont déterminés, ce qui montre l'unicité de la solution pour une valeur donnée du terme constant ; or, l'espèce f_1 est elle-même solution, comme on le vérifie immédiatement, ce qui montre bien que toute solution doit appartenir à l'ensemble des $\mathbb{C}$-espèces constantes.

V. Soit F une $\mathbb{C}$-espèce arbitraire, soit $Q(X)$ la présente forme canonique et soit $R(X) = 2E_2(X) - X^2 - X$, c'est-à-dire que $R(X)$ n'est autre que la forme canonique correspondant au cas où l'on pose $t = -1$ dans (IV). On sait déjà, par la démonstration précédente, que le terme constant de $R(F)$ est 0. Ainsi, on en déduit immédiatement que le terme constant de $R(X) + 1$ est 1, et ainsi on a nécessairement $Q(F) \neq 0$. La $\mathbb{C}$-espèce F étant arbitraire, on a bien achevé de montrer que l'équation $Q(X) = 0$ ne peut admettre de solution.

VI. Soit $Q(X,Y) = 2\,E_2(X) - X^2 + Y$. On a alors, par le corollaire à la proposition 2.4.12,

$$Q(F(T), G(T)) \;=\; 2 \sum_{M\in\mathfrak{M}} f_M\, E_2(M) - \sum_{M\in\mathfrak{M}} f_M\, M^2 + \sum_{M\in\mathfrak{M}} g_M M.$$

Ainsi, on voit que l'équation $Q(F(T), G(T)) = 0$ équivaut à l'équation

$$2 \sum_{M\in\mathfrak{M}} f_M\, E_2(M) - \sum_{M\in\mathfrak{M}} f_M\, M^2 = - \sum_{M\in\mathfrak{M}} g_M M.$$

On en déduit immédiatement qu'il ne peut exister de solution F que si la condition i) est satisfaite, le membre de gauche de l'identité précédente ne faisant apparaître que des termes de la forme $E_2(N)$ et N^2, N désignant bien entendu une espèce moléculaire. Soit d'autre part $M \in \mathfrak{M}$. Une solution F, si elle existe, doit satisfaire aux relations

$$\begin{aligned} f_1 &= -g_1 && (2.16)\\ f_M &= -g_{E_2(M)}/2 && (2.17)\\ f_M &= g_{M^2}. && (2.18) \end{aligned}$$

On voit donc que la solution doit être unique, M étant arbitraire. En fait, comme on le vérifie aisément, les identités (2.17) et (2.18) montrent que la propriété (ii), jointe à la propriété (i), donne une condition d'existence non seulement nécessaire mais même suffisante.

VII. Soit $Q(X,Y) = 2\,E_2(X) - X^2 + Y^2 + t\,X$. Il est alors évident que la relation $Q(X,Y) = 0$ équivaut à

$$2\,E_2(X) - X^2 + t\,X = -Y^2.$$

Il s'agit donc de trouver une $\mathbb{C}$-espèce F telle que l'on ait $Q(F(T), G(T)) = 0$, c'est-à-dire

$$2\,E_2(F(T)) - (F(T))^2 + t\,F(T) = -(G(T))^2. \qquad (2.19)$$

Notons ici que le premier terme de cette identité n'est autre que la $\mathbb{C}$-espèce obtenue en substituant dans la forme canonique générique IV la $\mathbb{C}$-espèce F, $\mathbb{C}$-espèce dont on a déjà calculé les coefficients de la décomposition moléculaire. Posons $H(T) = -(G(T))^2$. On obtient alors, en comparant les coefficients respectifs des membres de la relation (2.19)

$$\begin{aligned} (1+t) f_1 &= h_1 && && (2.20)\\ 2\,f_N + t\,f_M &= h_M, && \text{s'il existe } N \in \mathfrak{M} \text{ tel que } M = E_2(N) && (2.21)\\ t\,f_M &= h_M, && \text{s'il existe } N \in \mathfrak{M} \text{ tel que } M = N^2. && (2.22) \end{aligned}$$

Considérons d'abord le cas où t est différent de 0 et de -1. On constate que dans ce cas le terme constant est déterminé par la relation (2.20). Un argument de récurrence analogue à celui utilisé dans la démonstration de la proposition IV nous permet de conclure que la solution existe et est unique.

D'autre part, si $t = 0$ et si G est l'espèce nulle, on retrouve alors la forme VI ; il suffit alors d'appliquer l'énoncé VI en substituant à G l'espèce nulle, puisque de toute évidence on a $G^2 = 0$. La proposition VI nous permet alors de conclure à l'unicité de la solution, l'espèce nulle satisfaisant manifestement aux conditions énoncées. Supposons donc maintenant $G \neq 0$. On va montrer que dans ce cas la relation $Q(X, G) = 0$ n'admet aucune solution en X. Il suffit en fait d'appliquer là encore la proposition VI dans le cas où on substitue à G dans l'énoncé de cette proposition le carré d'une $\mathbb{C}$-espèce. Il suffit donc de montrer que dans ce cas, les conditions énoncées à la proposition VI ne peuvent être satisfaites. Supposons donc par l'absurde que l'espèce G^2 satisfait à ces mêmes conditions. Soit

$$M = \min\{N \mid N > 1, [N](G(T))^2 \neq 0\}.$$

De deux choses l'une : M est soit de la forme $E_2(N)$ soit de la forme N^2. Dans le premier cas, on en déduit immédiatement, $E_2(N)$ étant atomique, que le terme constant de $(G(T))^2$ est non nul, ce qui entraîne du même coup que $E_2(N)$ apparaît dans la décomposition moléculaire de G. D'autre part, on sait que, par hypothèse, $N^2 \in (G(T))^2$. Ceci montre qu'il doit exister une espèce moléculaire $P \leq N$ telle que l'on ait $P \in G(T)$. On en déduit donc immédiatement que $P \cdot E_2(N) \in (G(T))^2$, ce qui est absurde, puisque $P \neq E_2(N)$. Ceci achève donc de montrer que, dans ce cas, $(G(T))^2$ ne peut satisfaire aux hypothèses de la proposition VI.

Considérons finalement le cas où $t = -1$. On a alors la relation

$$2\,E_2(X) - X^2 + (G(T))^2 - X = 0$$

qui est évidemment équivalente à la relation

$$2\,E_2(X) - X^2 - X = -(G(T))^2.$$

Soit $R(X) = 2\,E_2(X) - X^2 - X$, c'est-à-dire que $R(X)$ désigne le premier membre de la relation ci-dessus. Remarquons tout de suite que cette forme combinatoire n'est autre que la forme obtenue en substituant à t dans la forme générique IV la valeur -1. Or, on a vu en IV que le terme constant de la forme générique IV est $(1+t)f_1$. Ainsi, on voit que dans le présent cas, l'identité

$$(1+t)\,f_1 = 0$$

est satisfaite quel que soit $f_1 \in \mathbb{C}$, puisque dans ce cas on a $1 + t = 0$. Soit donc f_1 un nombre complexe arbitraire. Or, par ce qu'on a vu en IV, on sait que le coefficient d'une espèce moléculaire M quelconque de la décomposition moléculaire de $R(F)$ est donné par

$$[M]R(F(T)) = \begin{cases} 2\,f_N - f_M & \text{si } M \text{ est de la forme } E_2(N) \\ -f_N - f_M & \text{si } M \text{ est de la forme } N^2 \\ -f_M & \text{sinon} \end{cases}$$

Ces relations nous permettent alors de conclure à l'unicité de la solution, encore une fois par un argument de récurrence analogue à celui employé précédemment.

VIII. Soit $Q(X,Y) = 2E_2(X) - X^2 + Y^2 - X + 1$. On a vu en (V) que, quel que soit $F \in \mathbb{C}\|T\|$, le terme constant de $2E_2(F(T)) - (F(T))^2 - X + 1$ est 1. On en déduit immédiatement qu'il est nécessaire que le terme constant de $(G(T))^2$ soit -1, ce qui revient évidemment à dire qu'il est nécessaire que le terme constant de $G(T)$ soit une racine de -1. Nous allons montrer que cette condition est suffisante. Posons $R(X) = 2E_2(X) - X^2 - X + 1$. Soit M une espèce moléculaire. On obtient alors, en posant $t = -1$ dans (2.13), (2.14) et (2.15),

$$[M]R(F(T)) = \begin{cases} 2f_N - f_M & \text{si } M = E_2(N) \\ -f_N - f_M & \text{si } M = N^2 \\ -f_M & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, en procédant par récurrence sur l'espèce moléculaire M, on montrerait l'existence d'une solution $F(T)$ en utilisant un raisonnement identique à celui utilisé à la démonstration précédente.

IX. Soit $Q(X,Y) = E_2(X) + X \cdot Y$. On a alors, par la proposition (2.4.12),

$$\begin{aligned} Q(F(T),G(T)) &= \sum_{M\in\mathfrak{M}} f_M E_2(M) + \sum_{M\in\mathfrak{M}} \binom{f_M}{2} M^2 + \sum_{\substack{P\cdot Q=M\\ P\prec Q}} f_P f_Q P\cdot Q + \\ &\quad + \sum_{M\in\mathfrak{M}} \Big(\sum_{P\cdot Q=M} f_P g_Q \Big) M \end{aligned} \tag{2.23}$$

Soit $H(T) = Q(F(T),G(T))$; on pose $H(T) = \sum_{M\in\mathfrak{M}} h_M M$. On a alors, par l'identité précédente, que le terme constant h_1 de la décomposition moléculaire de H est

$$h_1 = f_1 + \binom{f_1}{2} + f_1 g_1. \tag{2.24}$$

On obtient alors, après calculs,

$$h_1 = f_1\,\big(\frac{1}{2}f_1 + (\frac{1}{2} + g_1)\big).$$

Ainsi, la relation $h_1 = 0$ équivaut à la relation

$$f_1\,(f_1 + 2\,g_1 + 1) = 0.$$

On en déduit donc la condition nécessaire suivante :

$$f_1 = 0 \text{ ou } f_1 = -2\,g_1 - 1. \tag{2.25}$$

Soit d'autre part M une espèce moléculaire autre que l'espèce 1. Considérons d'abord le cas où M est de la forme $E_2(N)$, N désignant une espèce moléculaire. On a alors, par (2.23),

$$h_M = f_N + f_1 f_M + f_1 g_M + f_M g_1.$$

Dans le cas où M est de la forme N^2, on a, toujours par (2.23),

$$h_M = \binom{f_N}{2} + \sum_{\substack{1\le P\prec Q\\ P\cdot Q=M}} f_P f_Q + \sum_{P\cdot Q=M} f_P g_Q.$$

Finalement, dans tous les autres cas, on a

$$h_M = f_1 f_M + \sum_{\substack{1 \leq P < Q \\ P \cdot Q = M}} f_P f_Q + \sum_{P \cdot Q = M} f_P g_Q.$$

Ainsi, la relation $h_M = 0$ s'exprime comme suit dans chacun des trois cas précédents : dans le premier cas, on a

$$f_M \left(f_1 + g_1\right) = -f_N - f_1 g_M; \tag{2.26}$$

dans le deuxième cas, on a

$$f_M(f_1 + g_1) = -\binom{f_N}{2} - \sum_{\substack{1 < P < Q \\ P \cdot Q = M}} f_P f_Q - \sum_{\substack{P \cdot Q = M \\ (P,Q) \neq (M,1)}} f_P g_Q; \tag{2.27}$$

finalement, dans le troisième cas, on a

$$f_M(f_1 + g_1) = -\Big(\sum_{\substack{1 < P < Q \\ P \cdot Q = M}} f_P f_Q + \sum_{\substack{P \cdot Q = M \\ (P,Q) \neq (M,1)}} f_P g_Q \Big). \tag{2.28}$$

Montrons que si $g_1 \neq -1$ et si $f_1 = -2g_1 - 1$, alors $f_1 + g_1 \neq 0$. On a en effet dans ce cas

$$f_1 + g_1 \neq 1 + g_1 \neq 0.$$

Ainsi, dans ce cas, les relations (2.26), (2.27) et (2.28) ci-dessus montrent qu'il existe une solution ayant $-2g_1 - 1$ pour terme constant, puisqu'en effet tous les autres coefficients sont uniquement déterminées par ces relations. Ainsi, si $g_1 \neq -1/2$, la solution obtenue est non nulle, le terme constant étant dans ce cas non nul. On voit donc par contre que si $g_1 = -1/2$, la solution banale est la seule solution, puisque, comme nous l'avons observé plus haut, il est nécessaire que l'on ait $f_1 = 0$ ou $f_1 = -2g_1 - 1$.

D'autre part, si $g_1 = -1$, les relations ci-dessus ne permettent pas de conclure à l'existence et à l'unicité d'une solution. Toutefois, la relation (2.26) montre que s'il existe une solution F telle que $f_1 = 1$, alors cette solution est unique. On déduit en effet de cette relation que, quel que $N \in \mathfrak{M}$, on a la condition nécessaire $f_N = -f_1 g_{E_2(N)}$. On peut par contre aisément donner des exemples où cette condition n'est pas suffisante. Ainsi, dans ce cas, il existe bien au plus une solution non nulle.

X. Soit $Q(X,Y) = E_2(X) + X \cdot Y + 1$. Sachant que le terme constant de $E_2(F(T)) + F(T) \cdot G(T)$ est donné par (2.24), on en déduit immédiatement que le terme constant de $Q(F(T), G(T))$ est donné par

$$f_1 + \binom{f_1}{2} + f_1 g_1 + 1.$$

Soit

$$p(x) = x^2 + (1 + 2g_1)x + 2 \in \mathbb{C}[\![x]\!].$$

On a donc la condition nécessaire $p(f_1) = 0$. Supposons donc que f_1 soit racine de $p(x)$. Nous allons montrer que si $g_1 \notin \{-2, 1\}$, alors on a $f_1 + g_1 \neq 0$. Supposons que l'on ait $f_1 + g_1 = 0$. On a alors

$$p(f_1) = 0 \Longleftrightarrow g_1^2 - (1 + 2g_1)g_1 + 2 = 0 \Longleftrightarrow g_1^2 + g_1 - 2 = 0 \Longleftrightarrow g_1 \in \{-2, 1\}.$$

Ainsi, dans ce cas, en vertu des relations (2.26), (2.27) et (2.28) de la démonstration précédente, on voit, en procédant par récurrence sur l'espèce moléculaire M, que chaque racine du polynôme $p(x)$ donne lieu à une et une seule solution, puisque, encore une fois, on a $f_1 + g_1 \neq 0$. Or, $p(x)$ admet une et une seule racine si, et seulement si, $g_1 \in \frac{1}{2}(-1 \pm 2\sqrt{2})$. Finalement, si $g_1 \in \{-2, 1\}$, une et une seule des deux racines vérifie $f_1 + g_1 = 0$, et ainsi on obtient une solution en posant f_1 égale à l'autre racine. Par le même raisonnement qu'à la démonstration précédente, on montrerait qu'il existe au plus une solution correspondant au cas où l'on pose f_1 égale à la racine x_o vérifiant $x_o + g_1 = 0$. □

2.4.3 Exemples

1. Soient $\mathfrak{a}$ l'espèce des arbres, A, celle des arborescences (fig. 2.1 et 2.2). On a alors la relation bien connue suivante entre ces deux espèces (Bergeron, Labelle et Leroux, 1994, 1998 ; Leroux, 1988 ; Leroux et Miloudi, 1992) :

$$A + E_2(A) = \mathfrak{a} + A^2. \tag{2.29}$$

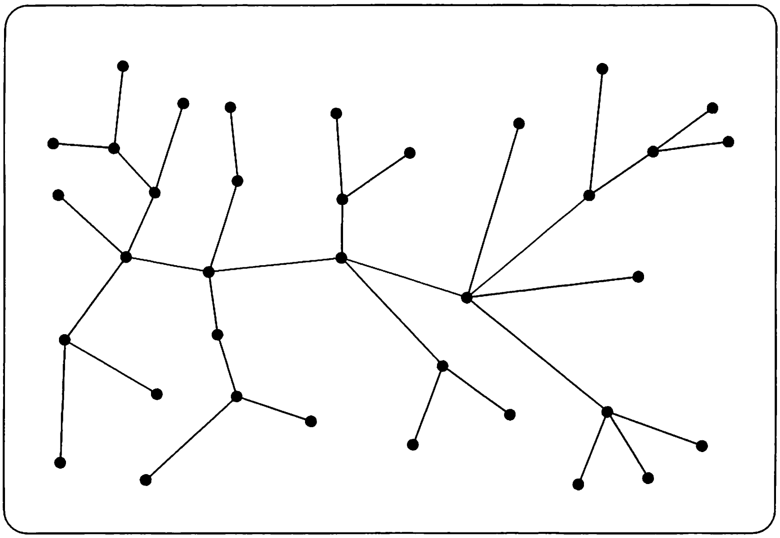

Figure 2.1 Un arbre

Soit $F(X,Y) = E_2(X) - X^2 + X - Y$. On vérifie alors que le couple $(A, \mathfrak{a})$ est solution de l'équation combinatoire $F(X,Y) = 0$.

Or, il se trouve que $F(X,Y)$ est congrue à la forme (II). On vérifie en effet que l'on a

$$-F(-X, -X + Y) = E_2(X) + Y.$$

Posons $G(X,Y) = E_2(X) + Y$. En appliquant la transformation inverse, on trouve de plus

$$F(X,Y) = -G(-X, -X + Y).$$

On en déduit immédiatement, en vertu de la relation (2.29),

$$-G(-A, -A + \mathfrak{a}) = 0,$$

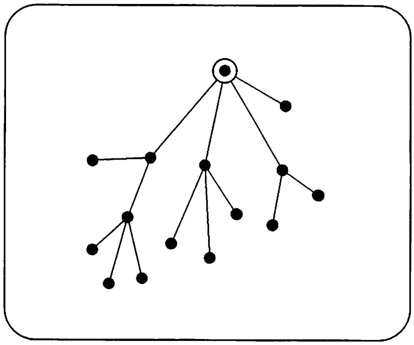

Figure 2.2 Une arborescence

c'est-à-dire

$$E_2(-A) - A + \mathfrak{a} = 0;$$

on voit donc que, par définition, la $\mathbb{C}$-espèce $-A$ est racine carrée symétrique de la $\mathbb{C}$-espèce $A - \mathfrak{a}$.

Ajoutons que cette dernière relation s'exprime également sous la forme remarquable (Bouchard, Chiricota et Labelle, 1995)

$$E_2(1 - A) = 1 - \mathfrak{a}.$$

Cette dernière équation nous permet donc de dire que la $\mathbb{C}$-espèce $1 - A$ est racine carrée symétrique de la $\mathbb{C}$-espèce $1 - \mathfrak{a}$. On notera que dans cette équation apparaît la substitution d'une $\mathbb{C}$-espèce à terme constant non nul dans une autre.

2. Soit $\mathfrak{o}$ l'espèce des *arbres orientés*, et soit $\mathfrak{O} = \mathfrak{o}^\bullet$, celle des *arborescences orientées*. Rappelons qu'un arbre orienté est un arbre dont chacune des arêtes est munie d'une orientation. On a en fait l'équation (Bergeron, Labelle et Leroux, 1994, 1998, prop. 4.1.6)

$$\mathfrak{O} = \mathfrak{o} + \mathfrak{O}^2.$$

Soit $F(X,Y) = X^2 - X + Y$. On voit donc que le couple $(\mathfrak{O}, \mathfrak{o})$ est solution de l'équation $F(X,Y) = 0$. Or, il se trouve que $F(X,Y)$ est congrue à la forme canonique $G(X,Y) = X^2 + Y$; on a en effet évidemment

$$F(X, X + Y) = X^2 + Y.$$

En appliquant la transformation inverse, on trouve alors

$$G(X, -X + Y) = F(X,Y);$$

on déduit alors immédiatement de la remarque ci-dessus

$$\mathfrak{O}^2 + (-\mathfrak{O} + \mathfrak{o}) = 0;$$

autrement dit, l'espèce $\mathfrak{O}$ est racine carrée de l'espèce $\mathfrak{O} - \mathfrak{o}$.

3. Soit $\mathfrak{s}$ l'espèce des *arbres signés*, c'est-à-dire des arbres dont chacune des arêtes est munie d'un des deux signes $+$ ou $-$, et soit $S = \mathfrak{s}^{\bullet}$ l'espèce des arborescences signées (Harary et Palmer, 1973 ; Leroux et Miloudi, 1992). On a alors

$$S + 2E_2(S) = \mathfrak{s}. \tag{2.30}$$

Soit $F(X,Y) = 2E_2(X) + X - Y$. On a alors que le couple (S, s) est solution de l'équation combinatoire $F(X,Y) = 0$. Or, il se trouve que $F(X,Y)$ est congrue à la forme $E_2(X) + Y$. On a en effet

$$\frac{1}{2}F(X, X - 2Y) = E_2(X) + Y.$$

Soit $G(X,Y) = E_2(X) + Y$. On déduit alors aisément de l'identité précédente

$$F(X,Y) = 2\,G(X,(X-Y)/2).$$

On en déduit, en vertu de l'équation (2.30),

$$E_2(S) + \frac{1}{2}(S - \mathfrak{s}) = 0;$$

autrement dit, l'espèce S est racine carrée symétrique de la $\mathbb{C}$-espèce $(\mathfrak{s} - S)/2$.

4. Par définition, l'espèce P des parenthésages commutatifs est l'espèce de structures vérifiant la relation

$$P = X + E_2(P). \tag{2.31}$$

Soit $F(X,Y) = E_2(Y) - Y + X$. On a alors, par définition, que le couple (X, P) est solution de l'équation $F(X,Y) = 0$. Or, il se trouve que $F(X,Y)$ est congrue à la forme (II) : on a en effet

$$E_2(X) + Y = F(X+Y, X).$$

Soit alors $G(X,Y) = E_2(X) + Y$. On déduit aisément de la relation ci-dessus que l'on a

$$F(X,Y) = G(Y, X-Y).$$

On en déduit finalement, par (2.31),

$$E_2(P) + (X - P) = 0,$$

c'est-à-dire que l'espèce P est racine carrée symétrique de l'espèce virtuelle $P - X$.

CHAPITRE III

RACINES MOLÉCULAIRES D'ESPÈCES DE STRUCTURES

3.1 Introduction

Nous nous proposons dans le présent chapitre de considérer une équation générale apparaissant naturellement en combinatoire.

Soit A l'espèce des arborescences, $\mathfrak{a}$ celle des arbres. On doit à P. Leroux la relation suivante entre ces deux espèces, appelée la *formule de dissymétrie pour les arbres* (Bergeron, Labelle et Leroux, 1994, 1998 ; Leroux, 1988 ; Leroux et Miloudi, 1992)[1]

$$A + E_2(A) = \mathfrak{a} + A^2.$$

Or, il se trouve (Bouchard, Chiricota et Labelle, 1995) que cette équation est en fait équivalente à l'équation

$$E_2(1 - A) = 1 - \mathfrak{a}. \tag{3.1}$$

On dit alors que l'espèce virtuelle $1 - A$ est racine carrée symétrique de l'espèce virtuelle $1 - \mathfrak{a}$.

L'espèce E_2 étant moléculaire, comme on le sait, on peut remarquer que l'équation précédente est, par le plongement canonique, de la forme

$$M(\Phi) = F, \tag{3.2}$$

M désignant une espèce moléculaire, Φ et F des $\mathbb{C}$-espèces.

Le problème général faisant l'objet du présent chapitre est, en fait, la résolution de cette équation combinatoire, l'espèce moléculaire M étant donnée, de même que la $\mathbb{C}$-espèce F, la $\mathbb{C}$-espèce Φ étant inconnue. Nous donnons en fait des conditions nécessaires et suffisantes d'existence de solutions dans le cas où F est de la forme $t + X$, avec $t \in \mathbb{C}$.

3.2 Réduction à l'équation générale $M(\Psi) = t + X$

Soit M une espèce moléculaire. Soit de plus F une $\mathbb{C}$-espèce, et soit $t = F(0)$. Alors, le fait de trouver une $\mathbb{C}$-espèce Ψ satisfaisant à l'équation

$$M(\Psi) = t + X, \tag{3.3}$$

permet d'en déduire une solution Φ à l'équation

$$M(\Phi) = F. \tag{3.4}$$

[1] Cette identité est liée à la *Dissimilarity Characteristic Formula* d'Otter.

On déduit en effet immédiatement de l'équation (3.3)

$$M(\Psi(F_+)) = t + F_+ = F.$$

et ainsi, $\Psi(F_+)$ est solution de l'équation (3.4).

Notons au passage que si l'on pose $\Psi = \xi + \Psi_+$, alors l'équation (3.3) s'écrit également sous la forme, par définition de la substitution,

$$\sum_{N \preceq M} \binom{M}{N}_\xi N(\Psi_+) = t + X.$$

Dans la suite de la présente section, nous allons à vrai dire délaisser l'équation (3.4) pour nous concentrer plutôt sur l'équation (3.3), en gardant toutefois à l'esprit que la résolution de cette dernière équation est susceptible de s'étendre au cas général.

Lemme 3.2.1. Soit P une $\mathbb{C}$-espèce polynomiale, et soit $Z_P(x_1, x_2, \ldots)$ sa série indicatrice des cycles. Soit ξ un nombre complexe arbitraire. On a alors $P(\xi) = Z_P(\xi, \xi, \ldots)$.

Démonstration. On peut sans perte de généralité, par linéarité, supposer que P est une espèce moléculaire ; on pose alors $P = M$. De plus, en vertu de la définition de la substitution généralisée (art. 1.2.2), on peut aussi supposer sans perte de généralité que ξ est un entier naturel, que nous noterons k. Dans ce cas, $M(k)$ n'est autre que le nombre de types d'isomorphie de M-structures k-coloriées ; par un résultat bien connu de la théorie de Pólya, on a alors la relation

$$M(k) = Z_M(k, k, \ldots),$$

ce qui achève la démonstration. □

Lemme 3.2.2. Soient M une espèce moléculaire, M' sa dérivée combinatoire, $t, \xi \in \mathbb{C}$. L'équation combinatoire

$$M(\xi + \Psi_+) = t + X, \tag{3.5}$$

admet une solution Ψ_+ telle que $\Psi_+(0) = 0$ si, et seulement si, les relations suivantes sont satisfaites :

$$Z_M(\xi, \xi, \ldots) = t, \quad Z_{M'}(\xi, \xi, \ldots) \neq 0. \tag{3.6}$$

Démonstration. Soit k un entier positif arbitraire. On vérifie aisément que l'on a

$$M(kT + X) = M(kT) + M'(kT)\,X + \cdots$$

On en déduit immédiatement

$$M(k + X) = M(k) + M'(k)\,X + \ldots$$

et ainsi, par prolongement algébrique, on trouve, quel que soit $\xi \in \mathbb{C}$,

$$M(\xi + X) = M(\xi) + M'(\xi)\,X + \ldots.$$

On a donc, par le lemme précédent

$$M(\xi + X) = Z_M(\xi, \xi, \ldots) + Z_{M'}(\xi, \xi, \ldots)\,X + \mathcal{O}(2), \tag{3.7}$$

où $\mathcal{O}(2)$ désigne une $\mathbb{C}$-espèce d'ordre 2.

Soit Ψ une $\mathbb{C}$-espèce satisfaisant à (3.5). On en déduit donc que la relation

$$Z_M(\xi, \xi, \ldots) = t$$

est nécessaire, puisque le terme de degré 0 de $M(\xi + X)$ n'est pas touché après substitution de la $\mathbb{C}$-espèce Ψ_+, puisque $\Psi_+(0) = 0$. Qui plus est, si on avait $Z_{M'}(\xi, \xi, \ldots) = 0$, alors le coefficient de l'espèce X de la $\mathbb{C}$-espèce $M(\xi + \Psi_+)$ obtenue par substitution de Ψ_+ dans $M(\xi + X)$ serait évidemment nul, ce qui montre bien que les conditions de (3.6) sont nécessaires. Nous allons voir qu'en fait ces conditions sont suffisantes. Soit $c = Z_{M'}(\xi, \xi, \ldots) \neq 0$. Posons

$$G(X) = \frac{1}{c}\,(M(\xi + X) - t).$$

On a alors, par définition,

$$G(X) = X + \mathcal{O}(2).$$

et ainsi, on observe immédiatement que la $\mathbb{C}$-espèce G admet un inverse pour la substitution (Bergeron, Labelle et Leroux, 1994, 1998, sect. 2.5.19). Soit H cet inverse : on a donc

$$\frac{1}{c}\,(M(\xi + H(X)) - t) = X.$$

Finalement, on pose

$$\Psi_+ = H((1/c)\,X),$$

et alors, ainsi définie, Ψ_+ est solution de l'équation (3.5). □

Notation. Soit p un polynôme à coefficients complexes en une indéterminée. On pose

$$\widehat{p} = \frac{p}{\text{p.g.c.d}(p,\, p')},$$

où p' désigne le polynôme dérivé de p. On a alors que les racines de p et celles de $\widehat{p}$ coïncident, à la différence près que celles de $\widehat{p}$ sont toutes de multiplicité 1.

Théorème 3.2.3. Soient $t \in \mathbb{C}$, M une espèce moléculaire. Posons

$$P_{M,t}(\xi) = Z_M(\xi, \xi, \ldots) - t, \quad P_{M'}(\xi) = Z_{M'}(\xi,\, \xi,\, \ldots),$$

ξ désignant cette fois-ci une indéterminée. Alors, le nombre de $\mathbb{C}$-espèces Ψ telles que $M(\Psi) = t + X$ est donné par $\deg(Q_{M,t})$, où

$$Q_{M,t} = \frac{\widehat{P}_{M,t}}{\text{p.g.c.d}(\widehat{P}_{M,t},\, P_{M'})}.$$

Démonstration. D'après la démonstration du lemme 3.2.2, le nombre de solutions Ψ à l'équation $M(\Psi) = t + X$ est précisément le nombre de racines distinctes de $P_{M,t}(\xi)$ qui *ne sont pas* racines de $P_{M'}(\xi)$. Par définition, le polynôme $Q_{M,t}$ possède précisément ces racines, et elles sont chacune de multiplicité 1. Le nombre cherché est donc bien $\deg(Q_{M,t})$. □

3.3 Exemples

Dans la présente section, nous considérons l'équation $M(\Phi) = X$, autrement dit l'équation obtenue en posant $t = 0$ dans l'équation générale $M(\Phi) = t + X$, pour certaines familles d'espèces moléculaires M.

Proposition 3.3.1. Soit F une espèce de structures et soit $Z_F(x_1, x_2, \ldots)$ sa série indicatrice des cycles. On a

$$Z_F(x_1 s, x_2 s^2, x_3 s^3, \ldots) = \sum_{n \geq 0} Z_{F_n}(x_1, x_2, x_3, \ldots) s^n.$$

Démonstration. On a en effet

$$\begin{aligned} Z_F(x_1 s, x_2 s^2, \ldots) &= \sum_{n \geq 0} Z_{F_n}(x_1 s, x_2 s^2, \ldots) \\ &= \sum_{n \geq 0} Z_{F_n}(x_1, x_2, \ldots) s^n \end{aligned}$$

puisque $Z_{F_n}(x_1 s, x_2 s^2, \ldots)$ est une combinaison linéaire de monômes de la forme

$$(x_1 s)^{\sigma_1} (x_2 s^2)^{\sigma_2} (x_3 s^3)^{\sigma_3} \cdots$$

avec $\sigma_1 + 2\,\sigma_2 + \ldots = n$. □

Corollaire. Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit F_n l'espèce F restreinte au cardinal n. On a

$$Z_{F_n}(\xi, \xi, \ldots) = [s^n] Z_F(\xi s, \xi s^2, \xi s^3, \ldots).$$

Définition 3.3.2. Soit ξ une indéterminée, et soit $n \in \mathbb{N}$. On note respectivement $\xi^{\langle n \rangle}$ et $\xi_{\langle n \rangle}$ les polynômes définis par

$$\xi^{\langle n \rangle} = \xi(\xi + 1) \cdots (\xi + n - 1), \quad \xi_{\langle n \rangle} = \xi(\xi - 1) \cdots (\xi - n + 1);$$

on dit alors de $\xi^{\langle n \rangle}$ que c'est la n^{e} *factorielle montante de* ξ et de $\xi_{\langle n \rangle}$ que c'est la n^{e} *factorielle descendante de* ξ.

3.3.1 La famille $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

Proposition 3.3.3. Soit n un entier positif et soit E_n l'espèce des ensembles de cardinal n. Alors, l'équation combinatoire

$$E_n(\Psi) = X$$

admet une et une seule solution. De plus, le terme constant de cette solution n'est autre que $-n + 1$.

Démonstration. Rappelons que la série indicatrice des cycles de l'espèce des ensembles est donnée par

$$Z_E(x_1, x_2, \ldots) = \exp(x_1 + \frac{1}{2} x_2 + \frac{1}{3} x_3 + \ldots).$$

On en déduit aisément

$$\begin{aligned} Z_E(\xi s, \xi s^2, \xi s^2, \ldots) &= \exp\left(\xi \log\left(\frac{1}{1-s}\right)\right) \\ &= \frac{1}{(1-s)^\xi}. \end{aligned}$$

On a donc, par le corollaire à la proposition 3.3.1

$$Z_{E_n}(\xi, \xi, \ldots) = [s^n]\frac{1}{(1-s)^\xi} = \frac{\xi^{\langle n \rangle}}{n!}.$$

Ainsi, on vérifie immédiatement que l'ensemble des racines du polynôme $Z_{E_n}(\xi, \xi, \ldots)$ n'est autre que l'ensemble

$$\{0, -1, \ldots, -n+1\}.$$

Comme de plus on a $E'_n = E_{n-1}$, on déduit immédiatement de ce qui précède, l'entier n étant arbitraire, que parmi les racines de $Z_{E_n}(\xi, \xi, \ldots)$, $-n+1$ est la seule qui ne soit pas racine de $Z_{E'_n}(\xi, \xi, \ldots)$. On a donc bien, par le théorème 3.2.3 avec $t = 0$, que l'équation $E_n(\Psi) = X$ admet une seule solution et que le terme constant de cette solution n'est autre que $-n+1$ (On trouvera au chapitre 5 les solutions de cette équation, tronquées à un certain ordre, pour $n \leq 6$). $\square$

3.3.2 La famille $\{E_n^\pm\}_{n\in\mathbb{N}}$

Soit $E^\pm$ l'espèce des ensembles orientés. Il est bien connu (Bergeron, Labelle et Leroux, 1994, 1998, exerc. 2.6.9) que la série indicatrice des cycles de cette espèce est donnée par

$$Z_{E^\pm} = Z_E(x_1, x_2, \ldots) + Z_E(x_1, -x_2, \ldots) - 1 - x_1.$$

Ainsi, par le corollaire à la proposition 3.3.1, on a

$$Z_{E_n^\pm}(\xi, \xi, \ldots) = [s^n]\left(\frac{1}{(1-s)^\xi} + (1+s)^\xi - 1 - \xi s\right).$$

Par suite, on en déduit, lorsque $n \geq 2$,

$$Z_{E_n^\pm}(\xi, \xi, \ldots) = \frac{\xi^{\langle n \rangle}}{n!} + \frac{\xi_{\langle n \rangle}}{n!}.$$

De plus, comme on a $(E_n^\pm)' = E_{n-1}^\pm$ lorsque $n \geq 4$, on déduit immédiatement de ce qui précède, l'entier n étant arbitraire,

$$Z_{(E_n^\pm)'}(\xi, \xi, \ldots) = \frac{\xi^{\langle n-1 \rangle}}{(n-1)!} + \frac{\xi_{\langle n-1 \rangle}}{(n-1)!}.$$

Proposition 3.3.4. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, et soit $M = E_n^\pm$. Alors, aucune des racines non nulles de $Z_M(\xi, \xi, \ldots)$ n'est racine de $Z_{M'}(\xi, \xi, \ldots)$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 4$, et soit $M = E_n^\pm$. Soit ξ_o une racine non nulle de $Z_M(\xi, \xi, \ldots)$. Nous allons montrer que ξ_o n'est pas racine de $Z_{M'}(\xi, \xi, \ldots)$. Par définition, on a

$$\xi_o(\xi_o+1)\cdots(\xi_o+n-1) + \xi_o(\xi_o-1)\cdots(\xi_o-n+1) = 0.$$

On en déduit aisément, puisque $\xi_o \neq 0$, et $\xi_o \neq n-1$,

$$(\xi_o+1)(\xi_o+2)\cdots(\xi_o+n-2) = \frac{-(\xi_o-1)(\xi_o-2)\cdots(\xi_o-n+1)}{\xi_o+n-1}.$$

Il en résulte que l'on a

$$\begin{aligned}
&(n-1)!\,\frac{Z_{M'}(\xi_o,\xi_o,\ldots)}{\xi_o}\\
&= \frac{-(\xi_o-1)(\xi_o-2)\cdots(\xi_o-n+1)}{\xi_o+n-1} + (\xi_o-1)(\xi_o-2)\cdots(\xi_o-n+2)\\
&= (\xi_o-1)(\xi_o-2)\cdots(\xi_o-n+2)\left(-\frac{\xi_o-n+1}{\xi_o+n-1}+1\right) \neq 0,
\end{aligned}$$

car $\xi_o \notin \{1,2,\ldots,n-2\}$ et $\xi_o - n + 1 \neq \xi_o + n - 1$. □

Soit $\xi \in \mathbb{C}$. Rappelons que $\Re(\xi)$ désigne alors la partie réelle de ξ.

Proposition 3.3.5. Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit $M = E_n^{\pm}$. Soit ξ_o une racine du polynôme $Z_M(\xi,\xi,\ldots)$. On a alors $\Re(\xi_o) = 0$.

Démonstration. Soit ξ_o une racine non nulle de $\xi^{(n)} + \xi_{(n)}$. On a alors

$$\left(\frac{\xi_o+1}{\xi_o-1}\right)\left(\frac{\xi_o+2}{\xi_o-2}\right)\cdots\left(\frac{\xi_o+n-1}{\xi_o-n+1}\right) = -1.$$

On en déduit immédiatement

$$\left(\frac{1+\xi_o}{1-\xi_o}\right)\left(\frac{1+\frac{1}{2}\xi_o}{1-\frac{1}{2}\xi_o}\right)\cdots\left(\frac{1+\frac{1}{k}\xi_o}{1-\frac{1}{k}\xi_o}\right)\cdots\left(\frac{1+\frac{1}{n-1}\xi_o}{1-\frac{1}{n-1}\xi_o}\right) = (-1)^{n-1}.$$

Posons

$$f(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

et soit $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Posons de plus

$$U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}, \qquad V = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}.$$

$$H = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re z < 0\}, \qquad H' = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re z > 0\}.$$

Alors, il se trouve que l'on a les inclusions

$$f(i\mathbb{R}) \subseteq S^1, \quad f(H) \subseteq U, \quad f(H') \subseteq V. \tag{3.8}$$

On voit donc que ξ appartient à la droite imaginaire si, et seulement si, quel que soit $k \in \mathbb{N}$, ξ/k est lui-même imaginaire. De même, ξ appartient au demi-plan situé à gauche de l'axe imaginaire (resp. à droite de l'axe imaginaire) si, et seulement si, quel que soit $k \in \mathbb{N}$, il en est de même du nombre ξ/k. Ainsi, ξ ne peut satisfaire à la relation (3.8) que si ξ est un nombre imaginaire pur. □

Proposition 3.3.6. Les racines non nulles de $Z_{E_n^{\pm}}(\xi,\xi,\ldots)$ sont toutes simples.

Démonstration. Soit $\xi_o = it$ une racine non nulle de $Z_{E_n^\pm}(\xi,\xi,\ldots)$; on a alors évidemment

$$(\xi_o+1)(\xi_o+2)\cdots(\xi_o+n-1)+(\xi_o-1)(\xi_o-2)\cdots(\xi_o-n+1)=0. \tag{3.9}$$

Notons d'autre part que l'on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\xi^{(n)}+\xi_{(n)}}{\xi}\right) &= \left(\frac{1}{\xi+1}+\ldots+\frac{1}{\xi+n-1}\right)(\xi+1)\cdots(\xi+n-1)+\\ &\quad+\left(\frac{1}{\xi-1}+\ldots\frac{1}{\xi-n+1}\right)(\xi-1)\cdots(\xi-n+1).\end{aligned} \tag{3.10}$$

Ainsi, il s'agit de montrer que l'identité

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{\xi_o+1}+\ldots+\frac{1}{\xi_o+n-1}\right)(\xi_o+1)\cdots(\xi_o+n-1)+\\ &\quad+\left(\frac{1}{\xi_o-1}+\ldots\frac{1}{\xi_o-n+1}\right)(\xi_o-1)\cdots(\xi_o-n+1) = 0\end{aligned} \tag{3.11}$$

est incompatible avec l'équation (3.9). Or, de (3.9), on tire la relation

$$(\xi_o-1)(\xi_o-2)\cdots(\xi_o-n+1)=-(\xi_o+1)(\xi_o+2)\cdots(\xi_o+n-1)$$

qui entraîne, en vertu de l'identité (3.11),

$$\frac{1}{1+\xi_o}+\frac{1}{2+\xi_o}+\ldots+\frac{1}{n-1+\xi_o}+\frac{1}{1-\xi_o}+\frac{1}{2-\xi_o}+\ldots+\frac{1}{n-1-\xi_o}=0.$$

On a donc, en d'autres termes,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1+\xi_o}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\xi_o/2}\right)+\ldots+\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{1+\xi_o/(n-1)}\right)+\\ &+\frac{1}{1-\xi_o}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\xi_o/2}\right)+\ldots+\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{1-\xi_o/(n-1)}\right) = 0.\end{aligned}$$

Mais alors, cette dernière identité est absurde, puisque la fonction $z\mapsto 1/(1-z)$ envoie l'axe imaginaire privé de l'origine sur l'arc de circonférence

$$\{w\in\mathbb{C}\mid |w-\frac{1}{2}|=\frac{1}{2},\ w\neq 0\}$$

et que ce dernier est complètement contenu dans le demi-plan complexe ouvert droit. □

Proposition 3.3.7. Soit $n\geq 3$ et soit $E_n^\pm$ l'espèce des ensembles orientés. Alors, l'équation combinatoire

$$E_n^\pm(\Psi)=X$$

admet exactement $n-2$ solutions si n est pair et $n-1$ solutions si n est impair. De plus, ces solutions sont de la forme

□

$$\Psi = i\,\alpha+\ldots,\qquad \alpha\in\mathbb{R}.$$

3.3.3 La famille $\{\mathrm{Ch}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

Soit Ch l'espèce des chaînes, c'est-à-dire des graphes simples connexes dont tous les sommets sont de degré ≤ 2 et du graphe vide (fig. 0.1). Cette espèce satisfait alors à l'équation

$$\mathrm{Ch} = (1+X)\sum_{n\geq 0} E_2(X^n).$$

On a donc

$$\mathrm{Ch}_n = \begin{cases} E_2(X^k) & \text{si } n = 2k, \\ X\cdot E_2(X^k) & \text{si } n = 2k+1. \end{cases}$$

Dans le cas où n est pair, on en déduit aisément, lorsque l'on pose $n = 2k$,

$$Z_{\mathrm{Ch}_n}(x_1, x_2, \ldots) = \frac{1}{2}(x_1^{2k} + x_2^k)$$

De même, dans le cas où n est impair, on trouve, lorsque l'on pose $n = 2k+1$,

$$Z_{\mathrm{Ch}_n}(x_1, x_2, \ldots) = \frac{1}{2}x_1(x_1^{2k} + x_2^k).$$

On a donc finalement

$$Z_{\mathrm{Ch}_n}(\xi, \xi, \ldots) = \begin{cases} \frac{1}{2}\xi^k(\xi^k+1), & \text{si } n = 2k \\ \frac{1}{2}\xi^{k+1}(\xi^k+1), & \text{si } n = 2k+1. \end{cases}$$

Soit $k = \lfloor n/2 \rfloor$. On a donc finalement $Z_{\mathrm{Ch}_n}(\xi, \xi, \ldots) = 0$ si, et seulement si, $\xi = 0$ ou $\xi \in \sqrt[k]{-1}$, $\sqrt[k]{-1}$ désignant l'ensemble des racines k-ièmes de -1.

D'autre part, on vérifie aisément que l'on a

$$\mathrm{Ch}_n' = \begin{cases} kX^{2k-1}, & \text{si } n = 2k \\ E_2(X^k) + kX^{2k}, & \text{si } n = 2k+1. \end{cases}$$

Posons $M = \mathrm{Ch}_n$. On déduit immédiatement de ce qui précède

$$Z_{M'}(\xi, \xi, \ldots) = \begin{cases} k\xi^{2k-1}, & \text{si } n = 2k \\ \frac{1}{2}\xi^k((2k+1)\xi^k+1), & \text{si } n = 2k+1. \end{cases}$$

Ainsi, si n est pair, 0 est l'unique racine du polynôme $Z_{M'}(\xi, \xi, \ldots)$, alors que dans le cas contraire, l'ensemble des racines de $Z_{M'}(\xi, \xi, \ldots)$ est formé du nombre 0 ainsi que des racines k-ièmes de $-1/(2k+1)$. On a donc la proposition suivante, toujours par le théorème 3.2.3.

Proposition 3.3.8. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'équation combinatoire

$$\mathrm{Ch}_n(\Phi) = X$$

n'admet de solution que si n est impair, auquel cas cette équation admet $k = (n-1)/2$ solutions dès que $n \neq 1$, les termes constants respectifs de ces solutions étant alors les racines k-ièmes de -1 ; si $n = 1$, cette équation admet une et une seule solution, à savoir l'espèce X. $\square$

3.3.4 La famille $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

Rappelons que le polynôme indicateur de cycles de l'espèce C_n est donné par

$$Z_{C_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{n}\sum_{d|n} \phi(d) x_d^{n/d}.$$

On en déduit immédiatement

$$Z_{C_n}(\xi, \xi, \ldots) = \frac{1}{n}\sum_{d|n} \phi(d)\xi^{n/d}.$$

Ainsi, il est clair que 0 est une racine de $Z_{C_n}(\xi, \xi, \ldots)$ de multiplicité 1. Or, la relation suivante est bien connue

$$C_n' = L_{n-1},$$

L désignant ici l'espèce des ordres linéaires. Posons $M = C_n$. On a donc dans le cas présent

$$Z_{M'}(\xi, \xi, \ldots) = \xi^{n-1}$$

puisque, comme chacun sait, $Z_{L_{n-1}}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = x_1^{n-1}$. On voit donc que, dans ce cas-ci, 0 est la seule racine du polynôme $Z_{M'}(\xi, \xi, \ldots)$, et ainsi, il en résulte qu'aucune racine non nulle de $Z_M(\xi, \xi, \ldots)$ ne peut être racine de $Z_{M'}(\xi, \xi, \ldots)$. Ainsi, pour achever de démontrer la conjecture qui suit, il reste donc, par le théorème 3.2.3, à montrer que chacune des racines de $Z_M(\xi, \xi, \ldots)$ est de multiplicité 1. Ceci fait précisément l'objet de la conjecture énoncée ci-après, conjecture que nous avons vérifiée par ordinateur à l'aide du logiciel Maple pour plus des 23 000 premières valeurs de n.

Conjecture 3.3.1. Soit n un entier positif et soit C_n l'espèce des cycles de cardinal n. Alors, l'équation

$$C_n(\Psi) = X$$

admet exactement $n-1$ solutions. □

3.3.5 La famille $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

Soit n un entier positif et soit P_n l'espèce des polygones d'ordre n. On obtient alors la série indicatrice de cycles de cette dernière espèce par calcul du polynôme indicateur de cycles de l'action du groupe diédral D_n sur l'ensemble S des sommets d'un polygone arbitraire (Bergeron, Labelle et Leroux, 1994, 1998, app. 1, exerc. 6) ; on a ainsi

$$Z_{P_n}(x_1, x_2, \ldots) = \begin{cases} \frac{1}{2}Z_{C_n}(x_1, x_2, \ldots) + \frac{1}{4}(x_1^2 x_2^{(n-2)/2} + x_2^{n/2}), & \text{si } n \equiv 0 \pmod 2, \\ \frac{1}{2}Z_{C_n}(x_1, x_2, \ldots) + \frac{1}{2}x_1 x_2^{(n-1)/2}, & \text{si } n \equiv 1 \pmod 2. \end{cases}$$

On a donc

$$Z_{P_n}(\xi, \xi, \ldots) = \frac{1}{2}Z_{C_n}(\xi, \xi, \ldots) + \begin{cases} \frac{1}{4}\xi^{n/2}(\xi+1), & \text{si } n \equiv 0 \pmod 2 \\ \frac{1}{2}\xi^{(n+1)/2}, & \text{si } n \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

Or, on a,

$$P_n' = \mathrm{Ch}_{n-1}.$$

Ainsi, par le théorème 3.2.3, si on réussit à montrer qu'aucune des racines non nulles du polynôme $Z_{P_n}(\xi, \xi, \ldots)$ n'est racine k-ième de -1, avec $k = \lfloor n/2 \rfloor$, et si de plus on réussit à montrer que chacune des racines de ce même polynôme est de multiplicité 1, on aura que l'équation combinatoire $P_n(\Psi) = X$ admet exactement $n-1$ solutions. Les recherches se poursuivent dans le but, par exemple, de vérifier cette conjecture par ordinateur.

CHAPITRE IV

CALCUL DU DÉVELOPPEMENT DE $\mathbb{C}$-ESPÈCES PSEUDO-MOLÉCULAIRES ET ITÉRATION DE NEWTON

4.1 Introduction

Comme on l'a vu au chapitre 1, on obtient la définition de la substitution d'une $\mathbb{C}$-espèce Φ à terme constant non nécessairement nul dans une $\mathbb{C}$-espèce moléculaire en définissant d'abord la substitution de la $\mathbb{C}$-espèce $\xi + X$, lorsque l'on pose $\xi = \Phi(0)$. Le calcul des $\mathbb{C}$-espèces pseudo-moléculaires permet par conséquent, par linéarité, de se ramener à la substitution mieux connue d'une $\mathbb{C}$-espèce à terme constant nul dans une $\mathbb{C}$-espèce arbitraire. On voit donc que le calcul de telles $\mathbb{C}$-espèces représente un important outil de calcul de racines moléculaires.

Dans cette perspective, nous présentons d'abord des méthodes de calcul générales, puis des résultats portant sur certaines familles d'espèces moléculaires ; nous terminons par une application de la méthode d'itération de Newton au calcul de racines moléculaires.

4.2 Méthodes générales de calcul des coefficients des $\mathbb{C}$-espèces pseudo-moléculaires

4.2.1 Méthode matricielle

Soient M, N deux espèces moléculaires arbitraires. Nous allons maintenant présenter une méthode de calcul des polynômes $\binom{M}{N}_\xi$ définis à la section (1.2). Notons d'abord que l'on pose

$$\binom{M}{N} = \binom{M}{N}_1.$$

Théorème 4.2.1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Considérons la matrice infinie $\boldsymbol{P}$ dont les lignes et les colonnes sont indicées par les espèces moléculaires

$$\boldsymbol{P} = \left[\binom{M}{N}\right]_{N \preceq M},$$

où M correspond aux lignes et N aux colonnes.

On a alors

$$\binom{M}{N}_k = (\boldsymbol{P}^k)_{M,N}. \tag{4.1}$$

Démonstration. Soit $i, j \in \mathbb{N}$. On a d'une part,

$$M((i+j)+X) = \sum_{N \preceq M} \binom{M}{N}_{i+j} N(X).$$

D'autre part, on a, par associativité (prop. 1.2.15),

$$\begin{aligned} M(i+(j+X)) &= \sum_{N \preceq M} \binom{M}{N}_i N(j+X) \\ &= \sum_{P \preceq N \preceq M} \binom{M}{N}_i \binom{N}{P}_j P(X). \end{aligned}$$

On en déduit donc immédiatement

$$\binom{M}{N}_{i+j} = \sum_{N \preceq P \preceq M} \binom{M}{P}_i \binom{P}{N}_j.$$

Il suffit alors de procéder par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ pour montrer que l'identité (4.1) est bien satisfaite. □

Il est intéressant de noter que le théorème précédent fournit une autre démonstration de ce que les coefficients $\binom{M}{N}_k$ sont des fonctions polynomiales de la variable k.

Corollaire. Soient M, N des espèces moléculaires. Alors $\binom{M}{N}_k$ est une fonction polynomiale de k.

Démonstration. Sachant que $\binom{M}{M} = 1$, quel que soit $M \in \mathfrak{M}$, on en déduit la relation $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{Q}$, avec $\boldsymbol{I}$ la matrice identité et $\boldsymbol{Q}$ une matrice triangulaire inférieure dont tous les coefficients de la diagonale sont nuls. Par le lemme précédent, il suffit de montrer que le coefficient d'indice (M, N) de la matrice $\boldsymbol{P}^k$ est une fonction polynomiale de la variable k. Notons tout d'abord que pour tout entier positif ν, les ν premières diagonales de la matrice $\boldsymbol{Q}^\nu$ sont nulles. Soit alors k un entier positif arbitraire. On a évidemment

$$\boldsymbol{P}^k = (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{Q})^k.$$

On en déduit donc

$$(\boldsymbol{P}^k)_{M,N} = \sum_{\nu \geq 0} \binom{k}{\nu} (\boldsymbol{Q}^\nu)_{M,N}, \tag{4.2}$$

et ainsi, cette dernière somme étant en fait finie, par la remarque ci-dessus, on voit que le coefficient d'indice (M, N) de la matrice $\boldsymbol{P}^k$ est bien une fonction polynomiale de la variable k. □

Remarque. Les coefficients de la matrice $\boldsymbol{Q}$ étant des entiers positifs ou nuls, on déduit immédiatement de la relation (4.2) ci-dessus que, quelles que soient les espèces moléculaires M, N, le polynôme $\binom{M}{N}_\xi$ est une combinaison linéaire à coefficients entiers positifs ou nuls des polynômes $\binom{\xi}{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$.

Nous donnons au tableau 4.1 la matrice des coefficients $\binom{M}{N}$ correspondant aux espèces moléculaires M de degré 4 ou moins. Nous avons ordonné ces espèces moléculaires comme suit : 1, X, E_2, X^2, E_3, C_3, $X\,E_2$, X^3, E_4, $E_4^\pm$, $E_2(E_2)$, $X\,E_3$, E_2^2, P_4^{bic}, C_4, $X\,C_3$, $X^2\,E_2$, $E_2(X^2)$, X^4. Ainsi, si l'on note M_i l'élément de rang i de

$$
\begin{bmatrix}
\underline{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\underline{1} & \underline{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\underline{1} & \underline{2} & 0 & \underline{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\underline{1} & \underline{3} & 0 & \underline{3} & 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\underline{1} & \underline{4} & 0 & \underline{6} & 0 & 0 & 0 & \underline{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{1}
\end{bmatrix}
$$

Tableau 4.1 Matrice des coefficients $\binom{M}{N}$ pour les espèces moléculaires de degré 4 ou moins.

la liste précédente, pour $1 \leq i \leq 19$, alors l'élément en position (i,j) de cette table est le coefficient $\binom{M_i}{M_j}$. Nous avons souligné les coefficients de cette matrice rangés sur les lignes correspondant aux espèces $1, X, X^2, X^3, X^4, X^5$; c'est donc dire que ces nombres ne sont autres que les coefficients du binôme habituels. On trouvera à l'appendice A la table des coefficients des $\mathbb{C}$-espèces $M(\xi + X)$, pour les espèces moléculaires M de degré ≤ 5.

4.2.2 Méthode complémentaire

Tout au long du présent article, nous noterons i, j des entiers positifs ou nuls arbitraires.

La proposition 4.2.2 plus bas fournit une autre méthode de calcul des polynômes $\binom{M}{N}_\xi$, cette méthode se distinguant de celle de l'article précédent, entre autres choses, en ce qu'elle ne fait pas intervenir la matrice $\boldsymbol{P}$. En guise de préliminaires à cette proposition, rappelons que toute espèce de structures bi-sorte s'exprime linéairement par rapport à la base des espèces moléculaires bi-sortes, à isomorphisme près. Ainsi, l'espèce $M(T+X)$, étant manifestement une espèce bi-sorte, est en fait, à isomorphisme près, une combinaison linéaire à coefficients entiers positifs ou nuls d'espèces moléculaires bi-sortes. Nous pourrons donc dans ce qui suit, par linéarité, nous ramener à considérer une espèce moléculaire bi-sorte plutôt que l'espèce $M(T+X)$. Posons $n = i+j$, $M = X^n/H$, avec $H \leq S_n$. Soit alors $S_{i,j}$ le sous-groupe de S_n formé des permutations σ de S_n telles que $\sigma([i]) = [i]$ et $\sigma([n] \setminus [i]) = [n] \setminus [i]$. On a alors en fait l'identité (Bergeron, Labelle et Leroux, 1994, 1998, exerc. 2.6.16)

$$M(T+X) = \sum_{i+j=n} \sum_{\tau \Subset S_{i,j} \backslash S_n / H} \frac{T^i X^j}{\tau H \tau^{-1} \cap S_{i,j}} \tag{4.3}$$

où $\tau \Subset S_{i,j} \backslash S_n / H$ signifie que τ parcourt un système de représentants des classes bilatérales de $S_{i,j}$ et H dans S_n. En regroupant les termes correspondant à des sous-groupes conjugués de $S_{i,j}$, on obtient alors

$$M(T+X) = \sum_{i+j=n} \sum_{K \Subset \mathrm{Conj}(S_{i,j})} a_{i,j}(K) \frac{T^i X^j}{K}$$

pour certains coefficients entiers positifs $a_{i,j}(K)$, l'indice K parcourant un système de représentants de l'ensemble, noté $\mathrm{Conj}(S_{i,j})$, des classes de conjugaison de sous-groupes de $S_{i,j}$. Puisque

$$\begin{aligned} M(T+X)|_{T:=k} &\equiv M(k+X) \\ &\equiv \sum_{N \preceq M} \binom{M}{N}_k N(X), \end{aligned}$$

on voit que le calcul des $\binom{M}{N}_k$ se ramène à analyser

$$\left.\frac{T^i X^j}{K}\right|_{T:=k}.$$

Dans ce qui suit, nous noterons π_1 (resp. π_2) la projection canonique de $S_{i,j}$ sur S_i (resp. S_j). De plus, soient $\varphi : [i] \to \mathbb{N}^*$ une fonction arbitraire, K un sous-groupe de $S_{i,j}$. Nous posons alors

$$K^{\varphi} = \{\kappa = (\kappa_1, \kappa_2) \in K \mid \varphi \circ \kappa_1^{-1} = \varphi\} \leq S_{i,j}.$$

Proposition 4.2.2. Soit $K \leq S_{i,j}$. On a alors

$$\left.\frac{T^i X^j}{K}\right|_{T:=k} = \sum_{\lambda \vdash i} c_\lambda(k) \sum_{\varphi \Subset (\mathbb{N}^*)^i / \pi_1(K)} \frac{X^j}{\pi_2(K^\varphi)}, \tag{4.4}$$

où $\lambda = 1^{m_1} 2^{m_2} \cdots i^{m_i}$ parcourt l'ensemble des partages de i, $|\lambda| = m_1 + m_2 + \ldots + m_i$,

$$c_\lambda(k) = \frac{k(k-1)\cdots(k-|\lambda|+1)}{m_1!\, m_2! \cdots m_i!} \tag{4.5}$$

et où la notation $\varphi \Subset (\mathbb{N}^*)^i / \pi_1(K)$ signifie que la fonction $\varphi : [i] \to \mathbb{N}^*$ parcourt un système de représentants des orbites de l'action naturelle du groupe $\pi_1(K)$ sur $(\mathbb{N}^*)^i$, définie par $\kappa_1 \cdot \varphi = \varphi \circ \kappa_1^{-1}$. □

Avant de démontrer ce résultat, donnons le résultat principal de cet article, qui en est une conséquence immédiate, par regroupement des termes semblables.

Proposition 4.2.3. Soit $M = M(X)$ une espèce moléculaire. Posons $M = X^n/H$, avec $H \leq S_n$. On a le développement

$$M(\xi + X) = \sum_{N \preceq M} \binom{M}{N}_\xi N,$$

où, pour $N = X^j/L$, $L \leq S_{i,j}$, on a,

$$\binom{M}{N}_\xi = \sum_{\lambda,K} a_{i,j}(K) c_\lambda(\xi) m(K),$$

où $\lambda = 1^{m_1}2^{m_2}\cdots i^{m_i} \vdash i$, $K \in \mathrm{Conj}(S_{i,j})$, et où

$$m(K) = |\{\varphi \in (\mathbb{N}^*)^i/\pi_1(K) \mid \pi_2(K^\varphi) \text{ est conjugué à } L\}|,$$

$$a_{i,j}(K) = |\{\tau \in S_{i,j}\backslash S_n/H \mid \tau H \tau^{-1} \cap S_{i,j} \text{ est conjugué à } K\}|,$$

et

$$c_\lambda(k) = \frac{k(k-1)\cdots(k-|\lambda|+1)}{m_1!\, m_2! \cdots m_i!}.$$

Le reste de cet article est consacré à la démonstration de la proposition 4.2.2 ci-haut.

Soit T une espèce de singletons auxiliaire. Donnons-nous une famille $\{t_\iota\}$ d'indéterminées commutatives indicée par l'ensemble $\mathbb{N}^*$ des entiers positifs. Pour $\iota \in \mathbb{N}^*$, on note alors T_{t_ι} l'espèce T de poids t_ι. On pose alors

$$T_{\mathbf{t}} = T_{t_1} + T_{t_2} + T_{t_3} + \cdots$$

Soient i, j deux entiers positifs et soit K un sous-groupe arbitraire de $S_{i,j}$. Posons

$$F(T,X) = \frac{T^i X^j}{K}.$$

Nous nous proposons en fait de substituer l'espèce $T_{\mathbf{t}}$ à T dans $F(T,X)$. L'espèce pondérée obtenue est alors notée $F(T_{\mathbf{t}},X)$, ou encore

$$\left.\frac{T^i X^j}{K}\right|_{T:=T_{t_1}+T_{t_2}+\cdots}.$$

Soit $U = (U_1, U_2)$, un objet de la catégorie $\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{B}$ tel que $|U_1| = i$, $|U_2| = j$. Par définition, une $F(T_{\mathbf{t}},X)$-structure sur U est un couple (s,φ), s étant une $F(T,X)$-structure sur U et φ une fonction de U_1 dans $\mathbb{N}^*$, le poids étant donné par

$$w(s,\varphi) = t_\varphi = t_{\varphi(1)}\, t_{\varphi(2)} \cdots t_{\varphi(i)}.$$

Soit $V = (V_1, V_2) \in \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{B}$ tel que $|V_1| = i$, $|V_2| = j$, et soit $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$, où σ_1 (resp. σ_2) est une bijection de U_1 sur V_1, (resp. de U_2 sur V_2). Si l'on pose $(s,\varphi) = (\alpha K, \varphi)$, α désignant un couple (α_1, α_2) tel que α_1 (resp. α_2) est une bijection de $[i]$ sur U_1 (resp. de $[j]$ sur U_2), alors le transport de structures est donné par

$$\sigma \cdot (\alpha K, \varphi) = ((\sigma \circ \alpha)K, \varphi \circ \sigma_1^{-1}).$$

Nous allons maintenant définir une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathrm{Mon}(t_1, t_2, \ldots)$ des monômes commutatifs en les indéterminées t_1, t_2, t_3, ... Soit $\mu \in \mathrm{Mon}(t_1, t_2, \ldots)$ arbitraire. Posons

$$\mu = t_{i_1}^{\alpha_1} t_{i_2}^{\alpha_2} \cdots t_{i_k}^{\alpha_k}, \qquad 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k, \quad \alpha_i \in \mathbb{N}^*, i = 1, \ldots k,$$

où k désigne un certain entier positif. On note alors $\deg(\mu)$ le degré total de μ, c'est-à-dire

$$\deg(\mu) = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k.$$

Il est clair que le degré total détermine une partition de l'ensemble $\mathrm{Mon}(t_1, t_2, \ldots)$, c'est-à-dire que si l'on note $\mathrm{Mon}_i(t_1, t_2, \ldots)$ le sous-ensemble de $\mathrm{Mon}(t_1, t_2, \ldots)$ des monômes de degré total i, alors on a

$$\mathrm{Mon}(t_1, t_2, \ldots) = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{Mon}_i(t_1, t_2, \ldots).$$

Rappelons d'abord qu'un monôme peut toujours être vu comme une fonction de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}$ à support fini ou, plus simplement, comme une fonction d'un certain sous-ensemble fini de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$. Soit en effet $\mu = t_{i_1}^{\alpha_1} t_{i_2}^{\alpha_2} \cdots t_{i_k}^{\alpha_k}$ avec $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$, α_1, α_2, ..., $\alpha_k \in \mathbb{N}^*$. Il correspond alors à ce monôme par la bijection canonique la fonction φ de l'ensemble $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\varphi(i_j) = \alpha_j$, pour $j = 1, 2, \ldots, k$. De plus, cette dernière fonction correspond canoniquement à la fonction $\overline{\varphi}$ de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}$ dont le support n'est autre que l'ensemble $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ et dont la restriction à ce dernier coïncide avec φ. Nous allons donc désormais identifier un monôme donné et la fonction de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}$ qui lui est associée par la bijection canonique que nous venons de décrire, ce qui nous permettra de parler du support d'un monôme, que nous noterons $\mathrm{supp}(\mu)$, μ désignant un monôme arbitraire. Ajoutons qu'ainsi défini, le support d'un monôme donné μ est en fait l'ensemble des indices des indéterminées qui sont facteurs de μ.

Nous allons définir une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathrm{Mon}_i(t_1, t_2, \ldots)$. Soient μ, $\nu \in \mathrm{Mon}_i(t_1, t_2, \ldots)$, φ (resp. ψ) la fonction associée à μ (resp. ν). Alors, on dit que μ et ν sont équivalents s'il existe une bijection β de l'ensemble $\mathrm{supp}(\mu)$ sur l'ensemble $\mathrm{supp}(\nu)$ telle que $\psi \circ \beta = \varphi$. On note alors $\mu \equiv \nu$. On vérifiera sans peine qu'il s'agit bien d'une relation d'équivalence. Qui plus est, il appert que les monômes de la forme $\mu = t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2} \cdots t_k^{\alpha_k}$ avec $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \alpha_k$, $\deg(\mu) = i$, $k \in \mathbb{N}$, forment un système de représentants des classes d'équivalence de cette dernière relation, comme on s'en convainc sans trop de peine. On a alors la bijection canonique entre ces représentants et l'ensemble des partages de i, à savoir la bijection

$$\mu = t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2} \cdots t_{|\mu|}^{\alpha_{|\mu|}} \mapsto (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k).$$

Soit λ un partage arbitraire de i. On peut donc parler de la classe du monôme correspondant à λ par la bijection ci-dessus. Cette classe sera en fait notée M_λ.

Définition 4.2.4. Soient $i \in \mathbb{N}$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ un partage de i, $\mu \in \mathrm{Mon}_i(t_1, t_2, \ldots)$, $\nu = t_1^{\lambda_1} t_2^{\lambda_2} \cdots t_k^{\lambda_k}$. On dit alors que μ *est de type* λ si $\mu \equiv \nu$. ◇

La proposition suivante donne la décomposition moléculaire de l'espèce pondérée $F(T_{\mathbf{t}}, X)$.

Proposition 4.2.5. Soit $K \leq S_{i,j}$. On a

$$\left.\frac{T^i X^j}{K}\right|_{T:=T_{t_1}+T_{t_2}+\cdots} = \sum_{\lambda \vdash i} \sum_{\mu \in M_\lambda} \sum_{\substack{\varphi \in (\mathbb{N}^*)^i/\pi_1(K) \\ t_\varphi = \mu}} \left(\frac{T^i X^j}{K^\varphi}\right)_\mu . \tag{4.6}$$

Démonstration. Nous allons d'abord répertorier les types d'isomorphie de $F(T_{\mathfrak{t}}, X)$-structures. A cette fin, on peut, sans perte de généralité, se ramener à considérer l'ensemble

$$F(T_{\mathfrak{t}}, X)[i, j],$$

où on note $[i, j] = [[i], [j]]$.

Notons d'abord que l'ensemble $F(T, X)[i, j]$ n'est autre que l'ensemble $S_{i,j}/K$. De plus, on sait qu'une espèce pondérée ne peut être moléculaire que si sa fonction de poids est constante ; on peut donc supposer le poids donné et se borner à considérer un type d'isomorphie d'espèce non pondérée. Soit donc λ un partage arbitraire de i et soit μ un monôme de type λ. Soient alors $\mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in S_{i,j}/K$ deux structures de poids μ. La question qui se pose est donc de savoir sous quelles conditions $\mathfrak{s}$ et $\mathfrak{t}$ sont isomorphes. Posons $\mathfrak{s} = (s, \varphi)$, $\mathfrak{t} = (t, \psi)$, où $s, t \in S_{i,j}/K$, $\varphi, \psi : [i] \to \mathbb{N}^*$. Soit $h \in S_{i,j}$. On a alors, par définition,

$$h \cdot (s, \varphi) = (hs, \varphi \circ h_1^{-1}).$$

Ainsi, si $h \in K$, on a

$$h \cdot (s, \varphi) = (s, \varphi \circ h_1^{-1}),$$

et ainsi on peut déjà observer que $\mathfrak{s}$ et $\mathfrak{t}$ ne peuvent être isomorphes que si $s = t$. Dans ce dernier cas, on a alors, par définition, que si $\mathfrak{s} \sim \mathfrak{t}$, alors il existe $h \in K$ tel que $\psi = \varphi \circ h_1^{-1}$. On vérifie aisément que cette condition est aussi suffisante. Ainsi, on voit que $\mathfrak{s} \sim \mathfrak{t}$ si, et seulement si, $s = t$ et $\psi = \varphi \circ k_1^{-1}$, pour un certain $k_1 \in \pi_1(K)$. Ceci revient à dire que $(s, \varphi) \sim (s, \psi)$ si, et seulement si, $\varphi \equiv \psi \pmod{\pi_1(K)}$. On voit donc que les types d'isomorphie sont en bijection avec les classes à droite de l'ensemble quotient $(\mathbb{N}^*)^i/\pi_1(K)$; il suffit donc de choisir un système de représentants de cet ensemble quotient pour ainsi obtenir tous les types d'isomorphie des structures de poids μ. Finalement, l'espèce moléculaire associée à un représentant donné $\mathfrak{s}= (s, \varphi)$ est l'espèce

$$\frac{T^i X^j}{K^\varphi},$$

puisque, comme on le vérifie aisément, K^φ est en fait le stabilisateur de $\mathfrak{s}$. □

Lemme 4.2.6. On a

$$\left.\frac{T^i X^j}{K}\right|_{T:=1} = \frac{X^j}{\pi_2(K)}.$$

Démonstration. Posons d'abord

$$F(T, X) = \frac{T^i X^j}{K}, \qquad F(1, X) = \left.\frac{T^i X^j}{K}\right|_{T:=1}.$$

Soit U un ensemble de cardinal j arbitraire. On peut alors, par la bijection canonique, identifier les éléments de l'ensemble $F(1, X)[U]$ et les éléments de l'ensemble des types d'isomorphie par rapport à T de l'ensemble $F(T, X)[[i,], U]$. On vérifie alors aisément qu'un élément arbitraire de ce dernier ensemble est de la forme $S_i \times \alpha_2\,\pi_2(K)$, pour une certaine bijection $\alpha_2 : [j] \xrightarrow{\sim} U$, $\alpha_2\pi_2(K)$ désignant, rappelons-le, l'ensemble

$$\{\alpha_2 \circ k_2 \mid k_2 \in \pi_2(K)\}.$$

On a alors la bijection naturelle suivante entre les espèces $F(1,X)$ et $X^j/\pi_2(K)$:

$$\begin{array}{rccc} \alpha_U : & \left.\dfrac{T^i\,X^j}{K}\right|_{T:=1}[U] & \longrightarrow & \dfrac{X^j}{\pi_2(K)}[U] \\ & S_i \times \alpha_2\,\pi_2(K) & \mapsto & \alpha_2\,\pi_2(K), \end{array}$$

ce qui achève la démonstration. □

Proposition 4.2.7. Soit $K \leq S_{i,j}$. On a

$$\left.\frac{T^i\,X^j}{K}\right|_{T:=T_{t_1}+T_{t_2}+\dots,\,T=1} = \sum_{\lambda\vdash i}\sum_{\mu\in M_\lambda}\sum_{\substack{\varphi\in(\mathbb{N}^*)^i/\pi_1(K)\\ t_\varphi=\mu}}\left(\frac{X^j}{\pi_2(K^\varphi)}\right)_\mu \tag{4.7}$$

Démonstration. Cette proposition résulte immédiatement de la proposition 4.2.5 et, par linéarité, du lemme précédent. □

Dans les exemples suivants, on convient, lorsqu'on a comme indice de sommation un partage donné λ, que le monôme μ apparaissant en indice du terme de la sommation considérée décrit l'ensemble des monômes de type λ.

Exemple 4.2.8. Soit

$$F(T,X) = \frac{T^2\,X^2}{\langle(1,2)\,(3,4)\rangle} = E_2(T\,X).$$

On a alors

$$F(T_{\mathfrak{t}},X) = \sum_{1^2}\left(\frac{X^2}{\pi_2(K)}\right)_{t_1^2} + \sum_{1\,2}\left(\frac{X^2}{\{\mathrm{id}_2\}}\right)_{t_1t_2}.$$

Si l'on pose $t_1 = \cdots = t_\xi = 1$, $t_k = 0$ si $k > \xi$ dans l'identité ci-dessus, on trouve

$$F(T_{\mathfrak{t}},X) = \xi E_2(X) + \frac{\xi(\xi-1)}{2}X^2.$$

Exemple 4.2.9. Soit

$$F(T,X) = \frac{T^3\,X^3}{\langle(2,3)(5,6)\rangle}.$$

On a alors, par (4.6),

$$\left.\frac{T^3\,X^3}{K}\right|_{T=T_{\mathfrak{t}}} = \sum_{1^3}\left(\frac{T^3\,X^3}{K}\right)_{t_1^3} + \sum_{1^2\,2}\left(\left(\frac{T^3\,X^3}{K}\right)_{t_1^2t_2} + \left(\frac{T^3\,X^3}{\{\mathrm{id}_3\}}\right)_{t_1^2t_2}\right) + \sum_{1\,2\,3}\left(\frac{T^3\,X^3}{\{\mathrm{id}_3\}}\right)_{t_1t_2t_3}.$$

De plus, dans le cas où on a $t_1 = t_2 = \ldots = t_\xi = 1$, $t_\kappa = 0$, $\kappa > \xi$, on trouve

$$F(T_{\mathfrak{t}},X) = \xi\,\frac{X^3}{\pi_2(K)} + \xi\,(\xi-1)\left(\frac{X^3}{\pi_2(K)} + X^3\right) + \binom{\xi}{3}X^3.$$

Démonstration de la proposition 4.2.2. On peut d'abord noter que si μ est un monôme dont le support contient un nombre supérieur à k, alors, après avoir posé $t_1 = t_2 = \ldots = t_k$, $t_j = 0$, $j > k$ dans μ, on aura évidemment $\mu = 0$, de sorte que l'espèce

$$\left(\frac{T^i X^j}{\pi_2(K^\varphi)}\right)_\mu$$

sera en fait pondérée par la fonction identiquement nulle. Ainsi, par la proposition 4.2.7, parmi les termes du second membre de (4.7), seuls ceux qui sont pondérés par un monôme à support inclus dans l'ensemble $[k]$ subsistent lorsque l'on pose $t_1 = t_2 = \ldots = t_k = 1$, $t_j = 0$, $j > k$. Soit donc λ un partage arbitraire de i. Désignons par $M_\lambda^{(k)}$ le sous-ensemble de M_λ formé des monômes dont le support est inclus dans $[k]$. Pour tout $\mu \in M_\lambda^{(k)}$, on a évidemment $\mu(1,\ldots,1) = 1$, $\mu(1,1,\ldots,1)$ désignant l'évaluation en $(1,1,\ldots,1)$ du monôme μ. On a donc, dans le cas présent,

$$\left(\frac{T^i X^j}{\pi_2(K^\varphi)}\right)_\mu = \frac{T^i X^j}{\pi_2(K^\varphi)}.$$

Ainsi, par ce qui précède, on voit que le terme du second membre de (4.7) correspondant au partage λ, à savoir la somme

$$\sum_{\mu \in M_\lambda} \sum_{\substack{\varphi \in (\mathbb{N}^*)^i/\pi_1(K) \\ t_\varphi = \mu}} \left(\frac{X^j}{\pi_2(K^\varphi)}\right)_\mu, \tag{4.8}$$

devient en fait une somme finie d'espèces ordinaires. On a alors que la famille

$$\left(\frac{X^j}{\pi_2(K^\varphi)}\right)_{\mu \in M_\lambda},$$

où $\varphi \in (\mathbb{N}^*)^i/\pi_1(K)$, donne lieu après les substitutions que l'on sait à une seule et même espèce de structures, comme on s'en convainc immédiatement. Soit $c_\lambda(k)$ le cardinal de $M_\lambda^{(k)}$. La remarque précédente nous permet donc de nous ramener au calcul de $c_\lambda(k)$, puisque cette remarque permet d'achever de montrer l'identité (4.4). Nous allons montrer qu'en fait $c_\lambda(k)$ vérifie l'identité (4.5). Posons $\lambda = 1^{m_1} 2^{m_2} \cdots i^{m_i}$. Alors, à un monôme appartenant à $M_\lambda^{(k)}$ correspond par une bijection canonique un vecteur à i coordonnées de parties disjointes de $[k]$. Soit en effet $\mu \in M_\lambda^{(k)}$. Au monôme μ on peut faire correspondre le vecteur $(P_1, P_2, \ldots, P_i)$ de parties de $[k]$ tel que, pour j entre 1 et i, P_j désigne l'ensemble des indices des indéterminées de μ de degré j. On se convaincra sans trop de peine qu'il s'agit bien là d'une bijection. Ainsi, on a

$$c_\lambda(k) = \binom{k}{m_1}\binom{k-m_1}{m_2}\cdots\binom{k-\sum_{j=1}^{i-1} m_j}{m_i}.$$

On en déduit immédiatement

$$\begin{aligned} c_\lambda(k) &= \frac{k!}{m_1!\,(k-m_1)!}\,\frac{(k-m_1)!}{m_2!\,(k-m_1-m_2)!}\cdots\frac{k-\sum_{k=1}^{i-1} m_k}{m_i!\,(k-\sum_{j=1}^{i} m_j)!} \\ &= \frac{k!}{\left(\prod_{j=1}^{i} m_j!\right)(k-\sum_{j=1}^{i} m_j)!} \\ &= \frac{k(k-1)\cdots(k-|\lambda|+1)}{m_1!\,m_2!\cdots m_i!}, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. □

4.3 Formules d'addition pour quelques familles d'espèces moléculaires

4.3.1 La famille $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

Proposition 4.3.1. Soient $n \in \mathbb{N}$, E_n l'espèce des ensembles restreinte au cardinal n, T, X deux espèces de singletons. On a

$$E_n(T+X) \;=\; \sum_{i=0}^{n} E_{n-i}(X)E_i(T).$$

Démonstration. Soit en effet $U = (U_1, U_2) \in \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{B}$ tel que $|U_1| + |U_2| = n$. Alors, l'ensemble $E_n(T+X)[U]$ n'est autre que le singleton $\{(U_1, U_2)\}$. □

Soient ξ une indéterminée, $n \in \mathbb{N}$. Rappelons que la notation $\left(\!\binom{\xi}{n}\!\right)$ désigne le polynôme défini par

$$\left(\!\!\binom{\xi}{n}\!\!\right) = \frac{\xi(\xi+1)\cdots(\xi+n-1)}{n!},$$

cette notation suggérant, par analogie avec les coefficients du binôme, que, lorsque ce polynôme est évaluée en des valeurs entières positives k, le nombre $\left(\!\binom{k}{n}\!\right)$ n'est autre que le nombre de combinaisons avec répétitions de k objets pris n à n.

Proposition 4.3.2. Soit $\xi \in \mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned} E_n(\xi+X) &= \frac{\xi^{(n)}}{n!} + \frac{\xi^{(n-1)}}{(n-1)!}X + \ldots + E_n(X) \\ &= \left(\!\!\binom{\xi}{n}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{\xi^{n-1}}{n-1}\!\!\right) X + \ldots + E_n(X) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \left(\!\!\binom{\xi}{n-i}\!\!\right) E_i(X). \end{aligned}$$

Démonstration. On peut, par unicité du prolongement algébrique, se ramener à montrer cette identité dans le cas où la variable ξ prend des valeurs entières positives. Posons donc $\xi = k$, $k \in \mathbb{N}$. Soit de plus i tel que $0 \le i \le n$. On se convainc alors aisément que l'ensemble des types d'isomorphie de structures d'espèce $E_n(k+X)$ sur les ensembles sous-jacents de cardinal i est en bijection avec l'ensemble des combinaisons avec répétitions de k éléments pris $n-i$ à $n-i$, ce dernier ensemble étant de cardinal $\left(\!\binom{k}{n-i}\!\right)$. □

Proposition 4.3.3 (Yeh, 1985). Soient $n, k \in \mathbb{N}$. On a

$$E_n(kX) = \sum_{\iota=1}^{\min(n,k)} \binom{k}{\iota} \sum_{\lambda \models_\iota n} \prod_{\kappa=1}^{\iota} E_{\lambda_\kappa}(X).$$

la notation $\lambda \models_\iota n$ signifiant que la variable λ décrit l'ensemble des compositions de n à i parts.

Démonstration. Cette relation exprime que l'on peut classifier les types d'isomorphie de $E_n(kX)$-structures selon le nombre de couleurs apparaissant ; une fois fixé le nombre de couleurs, on a une partition de l'ensemble des types d'isomorphie ayant ce nombre de couleurs en faisant correspondre à chaque partie de $[k]$ de cardinal égal à ce nombre l'ensemble des types d'isomorphie ayant cet ensemble de couleurs comme ensemble de coloration : il suffit alors de parcourir l'ensemble des compositions ayant comme nombre de parts ce nombre de couleurs pour obtenir de la sorte tous les types d'isomorphie de la classe correspondante. □

4.3.2 La famille $\{\mathrm{Ch}_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$

Soit Ch l'espèce des chaînes. Soit n un entier positif ou nul arbitraire. Nous donnons d'abord la décomposition moléculaire de l'espèce $\mathrm{Ch}_n(T+X)$.

Proposition 4.3.4. Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit Ch_n l'espèce des chaînes restreinte au cardinal n. Posons $\nu = \lfloor n/2 \rfloor$. Alors, si n est pair, on a

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ch}_n(T+X)\\ &= \sum_{i=0}^{\nu}\binom{\nu}{i}E_2(T^{\nu-i}X^i) + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\left(\binom{n}{i} - ((i+1) \bmod 2)\binom{\nu}{\lfloor i/2 \rfloor}\right)T^{n-i}X^i;\end{aligned}$$

si n est impair, on a

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ch}_n(T+X)\\ &= \sum_{i=0}^{\nu}\binom{\nu}{i}TE_2(T^{\nu-i}X^i) + \sum_{i=0}^{\nu}\binom{\nu}{i}E_2(T^{\nu-i}X^i)X + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\left(\binom{n}{i} - \binom{\nu}{\lfloor i/2 \rfloor}\right)T^{n-i}X^i.\end{aligned}$$

Démonstration. L'idée de la démonstration consiste en fait à classifier les types d'isomorphie selon que les espèces moléculaires correspondantes sont isomorphes. On obtient ainsi une partition de l'ensemble des types d'isomorphie de $\mathrm{Ch}_n(T+X)$-structures. Une fois cette partition obtenue, on en dénombre chacune des classes. Notons d'abord à cette fin que l'on a une bijection canonique évidente entre l'ensemble des types d'isomorphie de $\mathrm{Ch}_n(T+X)$-structures et l'ensemble des classes « miroir » de mots de longueur n sur l'alphabet $\{T, X\}$, la classe miroir d'un mot étant l'ensemble formé du mot et de son mot miroir. Ainsi, ou bien une classe miroir est un singleton, auquel cas l'unique élément de cette classe est un palindrome, ou bien cette classe est formé de deux mots, chacun d'eux étant le mot miroir de l'autre. Soit alors θ un type d'isomorphie de $\mathrm{Ch}_n(T+X)$-structures, soit $M(\theta)$ la classe miroir correspondant par la bijection canonique ci-dessus, et soit $i = |M(\theta)|_X$, c'est-à-dire que i désigne le nombre d'occurrences de la lettre X d'un mot quelconque de $M(\theta)$. Considérons d'abord le cas où n est pair. Posons alors $\nu = n/2$. Alors, si $M(\theta)$ est un palindrome, on se convainc aisément que l'espèce moléculaire correspondant à θ est isomorphe à l'espèce $E_2(T^iX^{\nu-i})$, tandis que, dans le cas contraire, on se convainc là encore aisément que l'espèce moléculaire correspondante est isomorphe à l'espèce $T^{n-i}X^i$. On voit donc que la famille

$$\{E_2(T^iX^{\nu-i})\}_{i=0}^{\nu} \cup \{T^{n-i}X^i\}_{i=0}^{n}$$

forme un tel système de représentants. Il s'agit, ainsi, de dénombrer, pour chacun de ces représentants, le cardinal de la classe correspondante. Considérons d'abord le cas où un représentant donné appartient à la première des deux familles d'espèces moléculaires ci-dessus, c'est-à-dire le cas où le représentant est l'espèce moléculaire $E_2(T^iX^{\nu-i})$, pour $i \in \mathbb{N}$, $i \leq \nu$. On vérifie alors aisément que dans ce cas, le cardinal de la classe correspondante n'est autre que le nombre de palindromes sur l'alphabet $\{T, X\}$ comptant $2i$ occurrences de la lettre T, et ainsi, ce nombre est bien $\binom{\nu}{i}$, l'ensemble des tels palindromes étant en bijection avec l'ensemble des mots de longueur $n/2$ sur le même alphabet, comptant i occurrences de la lettre T, cette bijection étant tout simplement obtenu en faisant correspondre à un palindrome du premier ensemble son préfixe de longueur $n/2$. D'autre part, si un représentant donné appartient à la deuxième famille ci-dessus, alors la classe de la famille correspondante est une paire de mots, chacun d'eux étant le mot miroir de l'autre, comme nous l'avons dit plus haut. Ainsi, soit $i \in \mathbb{N}$, $i \leq n$. On se convainc alors aisément que le cardinal de la classe correspondant à l'espèce $T^{n-i}X^i$ n'est autre que le cardinal de l'ensemble des classes miroir qui sont des paires de mots, chacun de ces mots comptant i occurrences de la lettre X. Montrons que le cardinal de cet ensemble est le nombre

$$\frac{1}{2}\left(\binom{n}{i} - \binom{\nu}{\lfloor i/2 \rfloor}\right).$$

On note en effet que la différence

$$\binom{n}{i} - \binom{\nu}{\lfloor i/2 \rfloor}$$

n'est autre que le cardinal du complément de l'ensemble des palindromes. Il suffit alors de diviser ce nombre par 2 pour obtenir le nombre cherché. D'autre part, si n est impair, on vérifie sans trop de peine, lorsque l'on pose $\nu = (n-1)/2$, que la famille

$$\{TE_2(T^{\nu-i}X^i)\}_{i=0}^{\nu} \cup \{E_2(T^{\nu-i}X^i)X\}_{i=0}^{\nu} \cup \{T^{n-i}X^i\}_{i=0}^{n}$$

forme un système de représentants de la partition de l'ensemble des types d'isomorphie de $\mathrm{Ch}_n(T+X)$-structures, définie plus haut. En effet, encore une fois, ou bien la classe miroir correspondant à θ est un palindrome, ou bien la classe miroir est une paire de mots, chacun d'eux étant le mot miroir de l'autre. Dans le premier cas, on distingue alors deux sous-cas, selon que la position centrale de $M(\theta)$ est la lettre T ou la lettre X. Ainsi, si $M(\theta)$ est un palindrome et si la position centrale de $M(\theta)$ est occupée par la lettre X, l'espèce moléculaire correspondant à θ est l'espèce $TE_2(T^{\nu-i}X^i)$, alors que si la position centrale de $M(\theta)$ est occupée par la lettre X, l'espèce moléculaire qui lui correspond est l'espèce $E_2(T^{\nu-i}X^i)X$; si $M(\theta)$ est une classe formée de deux mots, chacun d'eux étant le mot miroir de l'autre, l'espèce moléculaire correspondant à θ est l'espèce $T^{n-i}X^i$. Finalement on montrerait, en utilisant les même idées que ci-dessus, que les cardinaux des classes correspondant à chacun de ces représentants sont bien ceux apparaissant comme coefficient de la décomposition moléculaire correspondant au présent cas. $\square$

Proposition 4.3.5. Soient $n \in \mathbb{N}$, Ch_n l'espèce Ch restreinte au cardinal n. Posons $\nu = \lfloor n/2 \rfloor$. Soit de plus $\xi \in \mathbb{C}$. Alors, si n est pair, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Ch}_n(\xi + X) \\ = \sum_{i=0}^{\nu} \binom{\nu}{i} \xi^{\nu-i} E_2(X^i) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}\xi^{n-k} - ((k+1) \bmod 2)\binom{\nu}{\lfloor k/2 \rfloor}\xi^{\nu-\lfloor k/2 \rfloor}\right) X^k;\end{aligned}$$

si n est impair, on a

$$\mathrm{Ch}_n(\xi + X) = \sum_{i=0}^{\nu} \binom{\nu}{i} \xi^{\nu-i+1} E_2(X^i) + \sum_{i=0}^{\nu} \binom{\nu}{i} \xi^{\nu-i} X E_2(X^i) +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}\xi^{n-k}-\binom{\nu}{\lfloor k/2\rfloor}\xi^{\nu-\lfloor k/2\rfloor+((k+1)\bmod 2)}\right)X^k.$$

Démonstration. Ces équations se déduisent aisément de la proposition précédente, par unicité du prolongement algébrique, en notant que l'on a, d'une part, quels que soient $i, j, k \in \mathbb{N}$,

$$E_2(T^iX^j)\big|_{T:=k} = k^iE_2(X^j) + \binom{k}{2}X^{2j}$$

et, d'autre, part

$$T^iX^j\big|_{T:=k} = k^iX^j.$$

□

Corollaire. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $\nu = \lfloor n/2 \rfloor$. Alors, si n est pair, on a

$$\binom{\mathrm{Ch}_n}{E_2(X^i)}_\xi = \binom{\nu}{i}\xi^{\nu-i}, \quad i = 0,1,\ldots,\nu,$$

$$\binom{\mathrm{Ch}_n}{X^k}_\xi = \frac{1}{2}\left(\binom{n}{k}\xi^{n-k} - ((k+1) \bmod 2)\binom{\nu}{\lfloor k/2\rfloor}\xi^{\nu-\lfloor k/2\rfloor}\right), \quad k = 0,1,\ldots,n;$$

si n est impair, on a

$$\binom{\mathrm{Ch}_n}{E_2(X^i)}_\xi = \binom{\nu}{i}\xi^{\nu-i+1}, \quad i = 0,1,\ldots,\nu,$$

$$\binom{\mathrm{Ch}_n}{XE_2(X^i)}_\xi = \binom{\nu}{i}\xi^{\nu-i}, \quad i = 0,1,\ldots,\nu,$$

$$\binom{\mathrm{Ch}_n}{X^k}_\xi = \frac{1}{2}\left(\binom{n}{k} - \binom{\nu}{\lfloor k/2\rfloor}\xi^{n-k}\right), \quad k = 0,1,\ldots,n.$$

Démonstration. Résulte immédiatement de la proposition précédente, par définition des coefficients $\binom{\mathrm{Ch}_n}{N}$, pour $N \in \mathfrak{M}$. □

4.3.3 La famille $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$

Soit C l'espèce des cycles. Soient $i, j \in \mathbb{N}$. Rappelons d'abord qu'un mot de Lyndon construit sur un alphabet ordonné est un mot primitif, minimal par rapport à l'ordre lexicographique. Désignons alors par $\lambda_{i,j}$ le nombre de mots de Lyndon sur un alphabet ordonné à deux lettres, comptant i occurrences de la première lettre et j occurrences de la deuxième lettre. La proposition suivante est un cas particulier d'une équation générale bien connue (G. Labelle, 1992 ; Pineau, 1996). Nous allons en donner ici une démonstration combinatoire ; plus précisément, nous donnons une interprétation combinatoire des coefficients de la décomposition moléculaire faisant l'objet de cette proposition.

Proposition 4.3.6. Soit $n \in \mathbb{N}$, et soient T et X des espèces de singletons. Alors, on a

$$C_n(T+X) = \sum_{d|n}\sum_{i+j=d}\lambda_{i,j}C_{n/d}(T^iX^j).$$

Démonstration. L'idée de la démonstration consiste en fait à répertorier les types d'isomorphie de $C_n(T+X)$-structures. On considère ensuite la partition de l'ensemble des types d'isomorphie en convenant que deux types d'isomorphie appartiennent à une même classe si les espèces moléculaires qui leur correspondent sont isomorphes. Or, on a une bijection canonique évidente entre les présents types d'isomorphie et les mots circulaires sur l'alphabet $\{T, X\}$, avec $T < X$. Ainsi, soit θ un type d'isomorphie de $C_n(T+X)$-structures et soit $\Sigma(\theta)$ le mot circulaire qui lui correspond. Soit alors d la longueur de la racine primitive de $\Sigma(\theta)$ (Lothaire, 1983), $i = |\Sigma(\theta)|_X$, $j = |\Sigma(\theta)|_Y$. On se convainc alors aisément que l'espèce moléculaire correspondant à θ est isomorphe à l'espèce $C_{n/d}(T^i X^j)$, ce qui montre bien, θ étant arbitraire, que le coefficient de $C_{n/d}(T^i X^j)$ est, par définition, λ_{ij}. □

Soit $k \in \mathbb{N}$, et soit A_k un alphabet ordonné à k lettres ; posons alors $B_k = A_k \cup \{*\}$, le symbole $*$ désignant une lettre n'appartenant pas à l'alphabet A_k. Soient alors $i, j \in \mathbb{N}$. On note alors $(B_k^*)_{i,j}$ l'ensemble des mots du langage B_k^* défini par

$$(B_k^*)_{i,j} = \{w \in B_k^* \mid |w|_{A_k} = i,\ |w|_* = j\}.$$

On désigne alors par $\beta_{i,j}(k)$ le cardinal de l'ensemble ci-dessus. De plus, nous notons $\gamma_{i,j}(k)$ le nombre de mots primitifs de $(B_k^*)_{i,j}$, et $\lambda_{i,j}(k)$ le nombre de Lyndon de $(B_k^*)_{i,j}$. Notons que, pour i, j donnés, les nombres $\lambda_{i,j}(k)$ sont des fonctions polynomiales de la variable k (cf. prop. 4.3.8). Il est donc loisible, par unicité du prolongement algébrique, de noter $\lambda_{i,j}(\xi)$, pour $\xi \in \mathbb{C}$, la valeur de la fonction en ξ du prolongement de $\lambda_{i,j}$ vue comme fonction polynomiale de la variable entière positive k.

Proposition 4.3.7. Soit $\xi \in \mathbb{C}$. On a

$$C_n(\xi + X) = \sum_{d|n} \sum_{i+j=d} \lambda_{i,j}(\xi)\, C_{n/d}(X^j),$$

Démonstration. On peut, par unicité du prolongement algébrique, démontrer cette équation dans le cas où la variable ξ prend des valeurs entières positives ou nulles. Soit alors $\xi = k$, avec $k \in \mathbb{N}$. L'idée de la démonstration est alors en fait la même qu'à la démonstration précédente. Il s'agit là encore de répertorier les types d'isomorphie de $C_n(k+X)$-structures. Comme de plus on a une bijection canonique entre ce dernier ensemble et les mots circulaires sur l'alphabet $\{1, 2, \ldots, k\} \cup \{X\}$, on convient alors que deux types d'isomorphie appartiennent à une classe de la partition considérée si les espèces moléculaires qui leur correspondent sont isomorphes. Ainsi, soit θ un type d'isomorphie, soit $\Sigma(\theta)$ le mot circulaire qui lui correspond par la bijection mentionnée plus haut. Soit alors d la longueur de la racine primitive de $\Sigma(\theta)$, $i = |\Sigma(\theta)|_{[k]}$, $j = |\Sigma(\theta)|_X$. On se convainc alors aisément que l'espèce moléculaire qui correspond à θ est l'espèce $C_{n/d}(X^j)$. Ainsi, on a bien que la classe de θ par rapport à la relation ci-dessus compte $\lambda_{i,j}(k)$ éléments, ce qui achève la démonstration, le type d'isomorphie τ étant arbitraire. □

Proposition 4.3.8. Soit $\xi \in \mathbb{C}$ et soient $i, j \in \mathbb{N}$. On a

$$\lambda_{i,j}(\xi) = \frac{1}{i+j} \sum_{\delta|(i+j)} \mu(\delta) \binom{(i+j)/\delta}{j/\delta} \xi^{i/\delta}.$$

Démonstration. On peut encore une fois se ramener à supposer, par unicité du prolongement algébrique, que la variable ξ prend des valeurs entières positives ou nulles.

Ainsi, soit $\xi = k$, avec $k \in \mathbb{N}$. Soit alors L un langage arbitraire, et soit $L_{\mathfrak{p}}$ l'ensemble des mots primitifs de L. Alors, l'application

$$(B_k^*)_{i,j} \to \bigsqcup_{d|(i,j)} ((B_k^*)_{i/d,j/d})_{\mathfrak{p}}$$

définie en faisant correspondre à un mot du premier ensemble la racine primitive de ce mot, est une bijection. Il suffit en effet pour s'en convaincre de noter que si w est un mot du premier ensemble, si u désigne la racine primitive de w, et si d désigne la longueur de u, alors on a

$$d\,|u|_{[k]} = i,\ d\,|u|_X = j,$$

et ainsi, on a bien $d \mid (i,j)$, ce qui montre que cette application est bien définie ; pour montrer, d'autre part, que cette application est une bijection, il suffit simplement de noter que la réciproque de cette application est obtenue en faisant correspondre à un mot du deuxième ensemble ci-dessus la puissance de ce mot de longueur $i+j$. Soit alors $\beta_{i,j}(k) = |(B_k^*)_{i,j}|$, $\gamma_{i/d,j/d}(k) = |((B_k^*)_{i/d,j/d})_{\mathfrak{p}}|$, les indices i et j étant arbitraires. On déduit alors immédiatement de ce qui précède

$$\beta_{i,j}(k) = \sum_{d|(i,j)} \gamma_{i/d,j/d}(k);$$

on obtient alors aisément, par la méthode d'inversion de Möbius (Berge, 1968 ; Stanley, 1986),

$$\gamma_{i,j}(k) = \sum_{d|(i,j)} \mu(d)\beta_{i/d,j/d}(k).$$

L'identité à démontrer résulte alors immédiatement de l'identité ci-dessus et de ce que l'on a $(i+j)\lambda_{i,j}(k) = \gamma_{i,j}(k)$. □

Corollaire. Soit $n \in \mathbb{N}$, soit d un diviseur de n. On a alors, pour $j \in \mathbb{N}$, $0 \le j \le n$,

$$\left(\begin{matrix} C_n \\ C_{n/d}(X^j) \end{matrix}\right)_\xi = \lambda_{d-j,j}(\xi).$$

Démonstration. Par définition, $\left(\begin{smallmatrix} C_n \\ C_{n/d}(X^j) \end{smallmatrix}\right)_\xi$ n'est autre que le coefficient de $C_{n/d}(X^j)$ de la décomposition moléculaire de $C_n(\xi + X)$ donnée par la proposition précédente. □

4.3.4 La famille $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$

Tout au long du présent article, A désignera, sauf mention expresse du contraire, un ensemble fini arbitraire, que nous appellerons un *alphabet*, et dont les éléments sont appelés des *lettres*. Rappelons que A^* désigne alors le monoïde libre engendré par A ; on dit alors d'un élément de A^* que c'est un *mot construit sur A*, ou encore, que c'est un *mot sur A*. De plus, on appelle *langage* tout sous-ensemble de A^*. Lorsque nous nous donnerons un langage arbitraire, nous supposerons implicitement donné le monoïde dont ce langage est un sous-ensemble, ou, plus précisément, l'alphabet par lequel ce monoïde est engendré. De même, lorsque nous parlerons d'un mot sans plus de précision, nous supposerons implicitement ce mot élément d'un langage arbitraire.

Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit P_n l'espèce des polygones restreinte au cardinal n. Soit T une espèce de singletons auxiliaire. Nous allons établir l'équation

$$P_n(T+X) = \sum_{d|n} \sum_{i+j=d} \left(\sigma_{i,j} C_{n/d}(T^i X^j) + \tau_{i,j} C_{n/d}(T^i X^j)/\mathbb{Z}_2\right), \tag{4.9}$$

où $\sigma_{i,j}$ (resp. $\tau_{i,j}$) désigne le nombre de classes diédrales *non palindromes* (resp. *palindromes*) de mots sur l'alphabet $\{T, X\}$ comptant i occurrences de la lettre T et j occurrences de la lettre X. Intuitivement, une *classe diédrale palindrome* est la classe de conjugaison d'un *mot circulairement palindrome*, un mot circulaire étant dit *circulairement palindrome* s'il est identique à la classe de conjugaison du mot miroir de l'un quelconque de ses représentants ; en termes simples, ceci revient à dire que si l'on se donne un tel mot circulaire C, alors C est identique au mot circulaire correspondant à l'orientation opposée de C, ou encore, au sens de parcours opposé de C. D'autre part, une *classe diédrale non palindrome* est, en termes simples, une paire de mots circulaires *non palindromes* dont chacun des éléments est l'« opposé » de l'autre, autrement dit est le mot circulaire obtenu en inversant le sens de parcours de l'autre mot circulaire, un mot circulaire étant dit *non palindrome* lorsque celui-ci est différent du mot circulaire opposé, autrement dit de la classe de conjugaison du mot miroir de l'un quelconque de ses représentants. De plus, pour $n \in \mathbb{N}$, une structure d'espèce $C_n(T^iX^j)/\mathbb{Z}_2$ sur un ensemble donné de cardinal n est une paire de $C_n(T^iX^j)$-structures dont chacun des éléments est obtenu de l'autre en inversant le sens de parcours de la C_n-structure environnante et, simultanément, en inversant l'ordre des éléments de chacun des membres de la C_n-assemblée, ces membres étant des T^iX^j-structures, c'est-à-dire des listes. On a en fait, d'une part,

$$\tau_{i,j} = \begin{cases} \pi_{i,j}, & \text{si } n \equiv 1 \pmod 2 \\ \frac{1}{2}(\pi_{i,j} + \delta_{i,j}), & \text{sinon,} \end{cases} \tag{4.10}$$

où

$$\pi_{i,j} = \sum_{d|(i,j)} \mu(d)\, p_{i/d,j/d}, \tag{4.11}$$

$$\delta_{i,j} = \sum_{d|(i,j)} \mu(d)\, p_{i/d-1,j/d} + \sum_{d|(i,j)} \mu(d)\, p_{i/d,j/d-1}, \tag{4.12}$$

et, d'autre part, on a $\sigma_{i,j} = (\lambda_{i,j} - \tau_{i,j})/2$. De plus, on a posé, dans les équations ci-dessus, pour $i, j \in \mathbb{N}^*$,

$$p_{i,j} = \begin{cases} \dbinom{\lfloor (i+j)/2 \rfloor}{\lfloor i/2 \rfloor, \lfloor j/2 \rfloor}, & \text{si } ij \equiv 0 \pmod 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.13}$$

De plus, nous allons établir l'équation

$$P_n(k+X) = \sum_{d|n} \sum_{i+j=d} \Big(\sigma_{i,j}(k) C_{n/d}(X^j) + \tau_{i,j}(k) C_{n/d}(X^j)/\mathbb{Z}_2 \Big). \tag{4.14}$$

Là encore, $\sigma_{i,j}(k)$ et $\tau_{i,j}(k)$ désignent respectivement le nombre de classes diédrales non palindromes et palindromes, quoique cette fois-ci le langage est celui des mots sur l'alphabet $\{1, 2, \ldots, k\} \cup \{*\}$ comptant i occurrences de lettres appartenant à l'ensemble $\{1, 2, \ldots, k\}$ et j occurrences du symbole $*$. De plus, pour $n \in \mathbb{N}$, $j \leq n$, l'espèce $C_n(X^j)/\mathbb{Z}_2$ correspond au cas particulier où on pose $i = 0$ dans la définition de l'espèce $C_n(T^iX^j)/\mathbb{Z}_2$. Les entiers positifs ou nuls i et j étant arbitraires, posons

$$p_{i,j}(k) = \begin{cases} k^{i \bmod 2} \dbinom{\lfloor (i+j)/2 \rfloor}{\lfloor j/2 \rfloor} k^{\lfloor (i+j)/2 \rfloor - \lfloor j/2 \rfloor}, & \text{si } (i+j+1)j \equiv 0 \pmod 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a alors en fait d'une part, dans ce cas-ci,

$$\tau_{i,j}(k) = \begin{cases} \pi_{i,j}(k), & \text{si } i+j \equiv 1 \pmod 2 \\ \frac{1}{2}(\pi_{i,j}(k) + \delta_{i,j}(k)), & \text{sinon.} \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} \pi_{i,j}(k) &= \sum_{d|(i,j)} \mu(d)\, p_{i/d,j/d}(k) \\ \delta_{i,j}(k) &= \sum_{d|(i,j)} \mu(d)\big(k\, p_{i/d-1,j/d}(k) + p_{i/d,j/d-1}(k)\big). \end{aligned}$$

et, d'autre part, $\sigma_{i,j}(k) = (\lambda_{i,j}(k) - \tau_{i,j}(k))/2$.

Tout ce qui suit a essentiellement pour but de démontrer les équations (4.9) et (4.14) ci-dessus et d'établir les formules de calcul des coefficients $\sigma_{i,j}$, $\tau_{i,j}$, $\sigma_{i,j}(k)$, $\tau_{i,j}(k)$. A cette fin, nous donnons d'abord une interprétation combinatoire de ces coefficients, autrement dit, nous montrons que ces coefficients sont en fait les cardinaux d'ensembles précis. Nous établissons ensuite des bijections canoniques entre ces derniers ensembles et des ensembles pour lesquels nous donnons ensuite des formules de dénombrement. Concernant ces formules de dénombrement, mentionnons deux résultats fondamentaux qui y sont utilisés à maintes reprises comme outils de dénombrement, à savoir l'unicité de la racine primitive de tout mot (Lothaire, 1983, prop. 1.3.1), ainsi que la méthode d'inversion de Möbius (Berge, 1968 ; Stanley, 1986). Rappelons qu'un mot est dit *racine* d'un autre mot si ce dernier est puissance du premier, et qu'un mot est dit *primitif* s'il n'est pas puissance d'un mot strictement plus court.

Définition 4.3.9. Soit w un mot. On note alors $\widetilde{w}$ le mot obtenu en inversant l'ordre des lettres de w. Plus précisément, si l'on pose $w = a_1 a_2 \cdots a_n$, avec $n \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$, alors $\widetilde{w} = a_n a_{n-1} \ldots a_1$. On dit alors de $\widetilde{w}$ que c'est le *mot miroir* de w.

Définition 4.3.10. On dit qu'un mot w est un *palindrome* s'il satisfait à $w = \widetilde{w}$.

Désormais, nous noterons ρ l'application de l'ensemble A^* dans lui-même définie par

$$\rho(au) = ua, \qquad a \in A, \quad u \in A^*. \tag{4.15}$$

et par $\rho(\epsilon) = \epsilon$, ϵ désignant le mot vide. On vérifie alors aisément que ρ est une permutation de A^*, sa réciproque n'étant autre que la fonction σ définie par

$$\sigma(ua) = au, \qquad a \in A, \quad u \in A^*;$$

on note alors $\rho^{-1} = \sigma$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit ρ_n la restriction de ρ à l'ensemble A^n. Alors, il est évident que ρ_n détermine une permutation de A^n dans son image. Ainsi, il est bien connu que l'ensemble des itérées de la fonction ρ_n détermine une action de groupe du groupe cyclique engendré par ρ_n sur l'ensemble A^n. Ceci nous permettra donc dans la suite d'adopter la notation $\rho \cdot w$, $w \in A^*$, pour désigner le mot $\rho(w)$. D'autre part, pour $k \in \mathbb{N}$, nous poserons respectivement $\rho^k = \rho^{\langle k \rangle}$ et $\rho^{-k} = (\rho^{-1})^{\langle k \rangle}$, le symbole $\langle k \rangle$ désignant l'itérée d'ordre k de chacune de ces fonctions.

Définition 4.3.11. Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que deux mots $w, w' \in A^n$ sont *conjugués* s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $w' = \rho^k \cdot w$. On note alors $w \sim w'$.

Soit L un langage. On pose alors

$$\widetilde{L} = \{\widetilde{w} \mid w \in L\}.$$

Définition 4.3.12. On dit qu'un mot w est *circulairement palindrome* si $w \sim \widetilde{w}$.

Soit L un langage. Nous allons dans la suite désigner par $\mathcal{P}(L)$ et $\mathcal{CP}(L)$ les sous-langages de L formés respectivement des palindromes de L et des mots circulairement palindromes de L ; autrement dit, nous posons

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(L) &= \{w \in L \mid w = \widetilde{w}\}, \\ \mathcal{CP}(L) &= \{w \in L \mid w \sim \widetilde{w}\}. \end{aligned}$$

Définition 4.3.13. On dit qu'un langage L est *itératif* si, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$ et quel que soit le mot w, alors $w \in L$ si, et seulement si, $w^n \in L$.

On doit à J. Berstel et C. Reutenauer (Berstel et Reutenauer, 1990) la notion suivante de *langage cyclique*.

Définition 4.3.14. On dit qu'un langage L est *cyclique* s'il vérifie les propriétés suivantes :

i) quels que soient les mots w, w' tels que $w \sim w'$, alors $w \in L$ si, et seulement si, $w' \in L$,

ii) quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, quel que soit le mot w, alors $w \in L$ si, et seulement si, $w^n \in L$.

En d'autres termes, un langage cyclique est un langage itératif ayant la propriété d'être fermé par conjugaison.

Désormais, sauf mention expresse du contraire, nous noterons L un langage itératif arbitraire.

Lemme 4.3.15. Soit w un mot circulairement palindrome et soit w' tel que $w \sim w'$. Alors, $\widetilde{w}' \sim \widetilde{w}$. Plus précisément, soit $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k < n$, tel que $w' = \rho^k \cdot w$. Alors, $\rho^k \cdot \widetilde{w}' = \widetilde{w}$.

Démonstration. Soit $w = uv$ avec $|u| = k$. On a alors $w' = \rho^k \cdot w = vu$, et ainsi, on a

$$\rho^k \cdot \widetilde{w}' = \rho^k \cdot \widetilde{u}\widetilde{v} = \widetilde{v}\widetilde{u} = \widetilde{w},$$

ce qui achève la démonstration. □

Proposition 4.3.16. Le langage $\mathcal{CP}(L)$ des mots circulairement palindromes de L est cyclique.

Démonstration. Montrons d'abord la propriété (i) de la définition de langage cyclique. Soit $w \in \mathcal{CP}(L)$ et soit w' tel que $w \sim w'$. Nous allons montrer que w' appartient aussi à $\mathcal{CP}(L)$. Soit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $w' = \rho^k \cdot w$ et soit $l \in \mathbb{Z}$ tel que $w = \rho^l \cdot \widetilde{w}$. On a alors, par le lemme 4.3.15,

$$\widetilde{w}' = \rho^{-k} \cdot \widetilde{w}.$$

On déduit alors de ce qui précède

$$w' = \rho^k \cdot w = \rho^k \cdot (\rho^l \cdot \widetilde{w}) = \rho^{k+l} \cdot (\rho^k \cdot \widetilde{w}') = \rho^{2k+l} \cdot \widetilde{w}',$$

et ainsi, on a bien $w' \in \mathcal{CP}(L)$.

Montrons d'autre part la propriété (ii) de la définition de langage cyclique. Soit w un mot, et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons d'abord que w appartient à $\mathcal{CP}(L)$. Posons $w' = w^n$. Nous allons montrer que w' appartient lui aussi à $\mathcal{CP}(L)$. Par définition, il existe $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k < n$, tel que $w = \rho^k \cdot \widetilde{w}$. Posons alors $w = uv$, avec $|u| = n - k$, $|v| = k$. On a alors, puisque $\widetilde{w}' = \widetilde{w}^n$,

$$w^n = (\rho^k \cdot \widetilde{w})^n = (\rho^k \cdot (\widetilde{v}\widetilde{u}))^n = (\widetilde{u}\widetilde{v})^n = \widetilde{u}(\widetilde{v}\widetilde{u})^{n-1}\widetilde{v} = \rho^k \cdot (\widetilde{w})^n = \rho^k \cdot \widetilde{w}'$$

ce qui achève de montrer que w^n appartient à $\mathcal{CP}(L)$. Réciproquement, soit w un mot tel que w^n appartienne à $\mathcal{CP}(L)$. Soit alors $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k < n$, tel que $w^n = \rho^k \cdot \widetilde{w}'$. On a alors, avec les mêmes notations que ci-dessus,

$$w^n = \rho^k \cdot (\widetilde{v}\widetilde{u})^n = \widetilde{u}(\widetilde{v}\widetilde{u})^{n-1}\widetilde{v} = (\widetilde{u}\widetilde{v})^n = (\rho^k \cdot \widetilde{w})^n,$$

et ainsi on a bien $w = \rho^k \cdot \widetilde{w}$, chacun de ces mots étant préfixe de même longueur d'un même mot. □

Lemme 4.3.17. Soit w un mot. Alors, w est un palindrome si, et seulement si, quels que soient les mots u, v, u', v' tels que $w = uv = u'v'$ et que $|u| = |v'|$, on a $\widetilde{u} = v'$, $\widetilde{v} = u'$.

Démonstration. On a en effet, puisque $w = \widetilde{w}$, par définition, $u'v' = w = \widetilde{w} = \widetilde{v}\widetilde{u}$, de sorte qu'on a bien $u' = \widetilde{v}$, $v' = \widetilde{u}$, sachant que $|u| = |v'|$, $|v| = |u'|$. □

Définition 4.3.18. Soit w un mot circulairement palindrome, et soit $k \in \mathbb{N}$. On dit alors de k que c'est une *position de symétrie* de w s'il existe un palindrome u de longueur k et un palindrome $v \neq \epsilon$ tels que $w = uv$.

Définition 4.3.19. On dit d'un mot w que c'est un *dexterpalindrome* s'il admet 1 parmi ses positions de symétrie.

En d'autres termes, un dexterpalindrome est un mot de la forme au, avec a une lettre, u, un palindrome. Soit L un langage. Nous noterons $\mathcal{D}(L)$ l'ensemble des dexterpalindromes de L.

Proposition 4.3.20. Soit w un mot circulairement palindrome, et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

i) toute position de symétrie de w est elle-même une position de symétrie de w^n ;

ii) si k est une position de symétrie de w^n telle que $k \leq |w|$, alors k est une position de symétrie de w.

Démonstration. (i) Soit k une position de symétrie de w. Posons $w = uv$, avec $|u| = k$. Soit de plus $w' = w^n$. On a alors évidemment $w' = (uv)^n$. Or, par hypothèse, u est un palindrome; il reste donc à montrer qu'il en est de même de vw^{n-1}. Soit $v' = vw^{n-1}$. On a

$$\widetilde{v}' = \widetilde{w}^{n-1}\widetilde{v} = (\widetilde{v}\widetilde{u})^{n-1}\widetilde{v} = (vu)^{n-1}v = v(uv)^{n-1} = v',$$

ce qui achève de montrer que v' est un palindrome et, par le fait même, que k est une position de symétrie de w^n.

(ii) Posons $w' = w^n$, $w = uv$, avec $|u| = k$, $w^n = uv'$. On a alors évidemment $v' = vw^{n-1}$. Le mot u étant par définition un palindrome, il reste donc à montrer qu'il en est de même du mot v. Or, v' étant un palindrome, par hypothèse, on déduit de l'identité $v(uv)^{n-1} = (vu)^{n-1}v$, en vertu du lemme 4.3.17, que $v = \widetilde{v}$, ce qui montre bien que v est lui-même un palindrome. □

Corollaire 1. Soit L un langage itératif. Alors, l'ensemble $\mathcal{P}(L)$ des palindromes de L forme un sous-langage itératif de L.

Démonstration. Soit w un palindrome. Alors, par définition, 0 est position de symétrie de w. Ainsi, par la proposition précédente, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, 0 est aussi position de symétrie de w^n, ce qui montre bien que w^n est lui-même un palindrome.

Réciproquement, soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit w un mot tel que w^n soit un palindrome. Ainsi, 0 est, par définition, position de symétrie de w^n. Mais alors, on a évidemment $0 \leq |w|$, ce qui implique, par la proposition précédente, que 0 est position de symétrie de w, et donc que w est lui-même un palindrome. □

Corollaire 2. Soit L un langage itératif. Alors, l'ensemble $\mathcal{D}(L)$ des dexterpalindromes de L forme un sous-langage itératif de L.

Démonstration. On montrerait, par un raisonnement semblable à celui utilisé à la démonstration du corollaire précédent, que si un mot w admet 1 parmi ses positions de symétrie, alors, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, il en est de même de w^n.

Réciproquement, si un mot v admet 1 parmi ses positions de symétrie et si ce même mot admet une racine w d'un certain ordre, alors on a évidemment $1 \leq |w|$, et ainsi, par le lemme précédent, 1 est bien une position de symétrie de w. □

Définition 4.3.21. Soit L un langage, et soit $L/{\sim}$ l'ensemble des classes de conjugaison de L. Soit alors $\alpha : \mathbb{Z}_2 \times L/{\sim} \to L/{\sim}$ l'action de groupe définie par

$$\tau \cdot [w] = [\widetilde{w}]$$

lorsque l'on pose $\mathbb{Z}_2 = \{1, \tau\}$, avec $\tau^2 = 1$. On dit alors d'une classe obtenue en faisant la réunion des classes appartenant à une même orbite de cette action que c'est une *classe diédrale.* On note alors $\mathfrak{D}(L)$ l'ensemble des classes diédrales de L.

On voit immédiatement que toute classe diédrale est obtenue en faisant la réunion d'au plus deux classes de conjugaison, toute orbite étant un ensemble de la forme $\mathbb{Z}_2 \cdot [w]$, pour un certain $w \in L$. En fait, on vérifie aisément qu'une classe diédrale Δ coïncide avec une classe de conjugaison si, et seulement si, un représentant arbitraire de cette classe est un mot circulairement palindrome. Autrement dit, les classes diédrales palindromes ne sont autres que les invariants de l'action α de la définition ci-dessus. Soit $\mathfrak{P}(L)$ l'ensemble des classes diédrales palindromes. Posons

$$\mathfrak{C}(L) = \mathfrak{D}(L) \setminus \mathfrak{P}(L).$$

On dit alors d'un élément de $\mathfrak{C}(L)$ que c'est un *classe diédrale non palindrome.* De plus, nous notons $\mathfrak{C}_{\mathfrak{p}}(L)$ le sous-ensemble de $\mathfrak{C}(L)$ formé des classes diédrales non palindromes primitives et $\mathfrak{P}_{\mathfrak{p}}(L)$ le sous-ensemble de $\mathfrak{P}(L)$ formé des classes diédrales palindromes primitives, une classe diédrale étant dite primitive si l'un quelconque de ses représentants est primitif.

Comme on le verra tout de suite après, l'espèce que nous allons maintenant définir a ceci de remarquable qu'elle apparaît dans la décomposition moléculaire de l'espèce $P_n(T+X)$.

Définition 4.3.22. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $i, j \in \mathbb{N}$, $U \in \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{B}$. Alors, l'espèce notée $C_n(T^iX^j)/\mathbb{Z}_2$ est définie par

$$C_n(T^iX^j)/\mathbb{Z}_2[U] = C_n(T^iX^j)[U]/\mathbb{Z}_2 \tag{4.16}$$

l'action du groupe $\mathbb{Z}_2$ sur l'ensemble $C_n(T^iX^j)[U]$ étant définie par

$$\tau \cdot [((\lambda_1, \mu_1), \ldots, (\lambda_n, \mu_n))] = [((\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\mu}_n), (\widetilde{\lambda}_n, \widetilde{\mu}_{n-1}), \ldots, (\widetilde{\lambda}_2, \widetilde{\mu}_1))]$$

lorsque l'on pose $\mathbb{Z}_2 = \{1, \tau\}$; autrement dit, l'action de τ sur la classe de conjugaison du mot $((\lambda_1, \mu_1), \ldots, (\lambda_n, \mu_n))$ lui fait correspondre la classe de conjugaison du mot $((\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\mu}_n), (\widetilde{\lambda}_n, \widetilde{\mu}_{n-1}), \ldots, (\widetilde{\lambda}_2, \widetilde{\mu}_1))$ (cf. fig. 4.1).

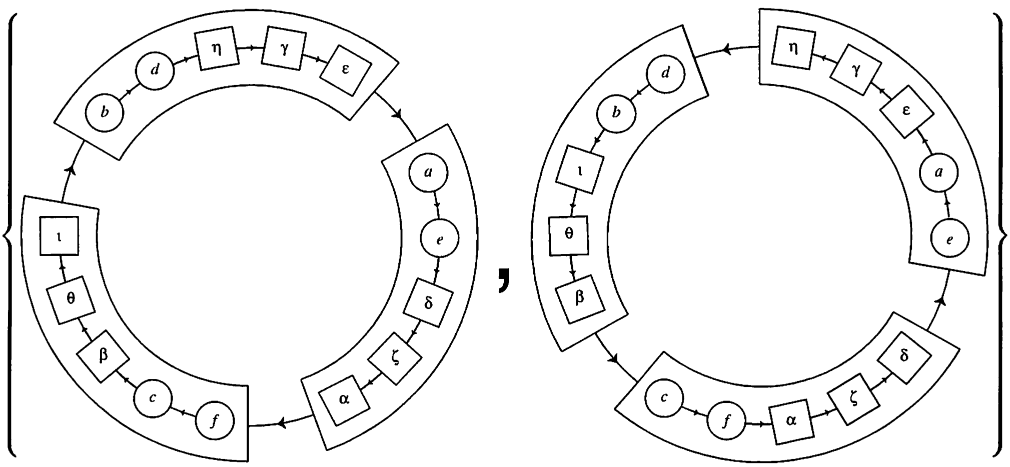

Figure 4.1 Une $C_3(T^2X^3)/\mathbb{Z}_2$-structure

Proposition 4.3.23. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, P_n l'espèce des polygones restreinte au cardinal n. On a alors

$$P_n(T+X) = \sum_{d|n} \sum_{i+j=d} \left(\sigma_{i,j} C_{n/d}(T^iX^j) + \tau_{i,j} C_{n/d}(T^iX^j)/\mathbb{Z}_2\right), \tag{4.17}$$

où on a posé $\sigma_{i,j} = |\mathfrak{C}_\mathfrak{p}(A^*_{i,j})|$, $\tau_{i,j} = |\mathfrak{P}_\mathfrak{p}(A^*_{i,j})|$, avec $A = \{T, X\}$.

Démonstration. L'idée de la démonstration consiste en fait à répertorier les types d'isomorphie de $P_n(T+X)$-structures. Or, il est bien connu qu'on obtient une partition de l'ensemble des types d'isomorphie de structures d'une espèce donnée en convenant que deux types d'isomorphie appartiennent à la même classe de cette partition si les espèces moléculaires qui leur correspondent sont isomorphes. Il est alors loisible d'établir un système de représentants des classes de cette même partition et alors, une fois établi ce système de représentants, de dénombrer, pour un représentant donné, les types d'isomorphie dont les espèces moléculaires correspondantes sont isomorphes à l'espèce correspondant au représentant donné (cf. fig. 4.2, 4.3, 4.4). On obtient ainsi le coefficient de cette dernière espèce moléculaire apparaissant dans la décomposition moléculaire de l'espèce de structures donnée.

Ainsi, dans le cas présent, la famille d'espèces moléculaires

$$\bigcup_{d|n}\bigcup_{i+j=d}\{C_{n/d}(T^iX^j), C_{n/d}(T^iX^j)/\mathbb{Z}_2\}$$

donne lieu à un tel système de représentants, lorsqu'on fait correspondre à chacun de ses éléments le type d'isomorphie qui lui correspond. On se convainc en effet aisément que l'ensemble des types d'isomorphie est en bijection canonique avec les classes diédrales de mots sur l'alphabet $\{T, X\}$. Soit alors θ un type d'isomorphie de $P_n(T+X)$-structures, et soit $\Delta(\theta)$ la classe diédrale correspondant par cette dernière bijection à θ. Alors, $\Delta(\theta)$ est soit une classe diédrale palindrome, soit une classe diédrale non palindrome. Soit alors $i = |\Delta(\theta)|_T$, $j = |\Delta(\theta)|_X$, et soit $d = i+j$. Alors, on se convainc sans trop de peine que l'espèce moléculaire correspondant à θ est isomorphe, dans le premier cas, à l'espèce $C_{n/d}(T^iX^j)/\mathbb{Z}_2$ et, dans le deuxième cas, à l'espèce $C_{n/d}(T^iX^j)$. Ainsi, par définition, on a bien, dans le premier cas, que $\sigma_{i,j}$ est le coefficient de $C_{n/d}(T^iX^j)/\mathbb{Z}_2$ et, dans le deuxième cas, que $\tau_{i,j}$ est le coefficient de $C_{n/d}(T^iX^j)$, ce qui achève la démonstration, θ étant arbitraire. $\square$

Exemple 4.3.24. On a, dans le cas où $n = 10$ dans la proposition précédente,

$$\begin{aligned} &P_{10}(T+X)\\ &\quad= P_{10}(T) + (T^9X)/\mathbb{Z}_2 + C_2(T^4X)/\mathbb{Z}_2 + 4\,T^7X^3 + 4\,(T^7X^3)/\mathbb{Z}_2 + 6\,T^6X^4 +\\ &\qquad + 8\,(T^6X^4)/\mathbb{Z}_2 + 2\,C_2(T^3X^2)/\mathbb{Z}_2 + 10\,T^5X^5 + 5\,(T^5X^5)/\mathbb{Z}_2 + C_5(TX)/\mathbb{Z}_2 +\\ &\qquad + 6\,T^4X^6 + 8\,(T^4X^6)/\mathbb{Z}_2 + 2\,C_2(T^2X^3)/\mathbb{Z}_2 + 4\,T^3X^7 + 4\,(T^3X^7)/\mathbb{Z}_2 +\\ &\qquad + 4\,(T^2X^8)/\mathbb{Z}_2 + C_2(TX^4)/\mathbb{Z}_2 + P_{10}(X). \end{aligned}$$

On a donc, en particulier, $\tau_{6,4} = 8$ (fig. 4.2), $\sigma_{6,4} = 6$ (fig. 4.3), $\tau_{2,3} = 2$ (fig. 4.4).

Soient $i, j \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $A_k = \{1, 2, \ldots, k\}$, et soit $B_k = A_k \cup \{*\}$, c'est-à-dire que B_k est l'alphabet obtenu en adjoignant à A_k le symbole $*$. Soit alors $(B_k^*)_{i,j}$ le sous-ensemble de B_k^* formé des mots comptant i occurrences de lettres appartenant à l'alphabet A_k et j occurrences du symbole $*$. On note alors $p_{i,j}(k)$ le nombre de palindromes de $(B_k^*)_{i,j}$; en particulier, on pose $p_{i,j} = p_{i,j}(1)$. Soit $n = i + j$. On a en fait l'identité (cf. lemme 4.3.41)

$$p_{i,j}(k) = \begin{cases} k^{i \bmod 2}\dbinom{\lfloor n/2\rfloor}{\lfloor j/2\rfloor}k^{\lfloor n/2\rfloor - \lfloor j/2\rfloor}, & \text{si } (n+1)j \equiv 0 \pmod 2,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Proposition 4.3.25. Soit $A = \{1, *\}$. Soient $i, j \in \mathbb{N}$, $\tau_{i,j} = |\mathfrak{P}_{\mathfrak{p}}(A^*_{i,j})|$. Posons $n = i + j$. On a alors

$$\tau_{i,j} = \begin{cases} \pi_{i,j}, & \text{si } n \equiv 1 \pmod 2\\ \frac{1}{2}(\pi_{i,j} + \delta_{i,j}), & \text{sinon,}\end{cases}$$

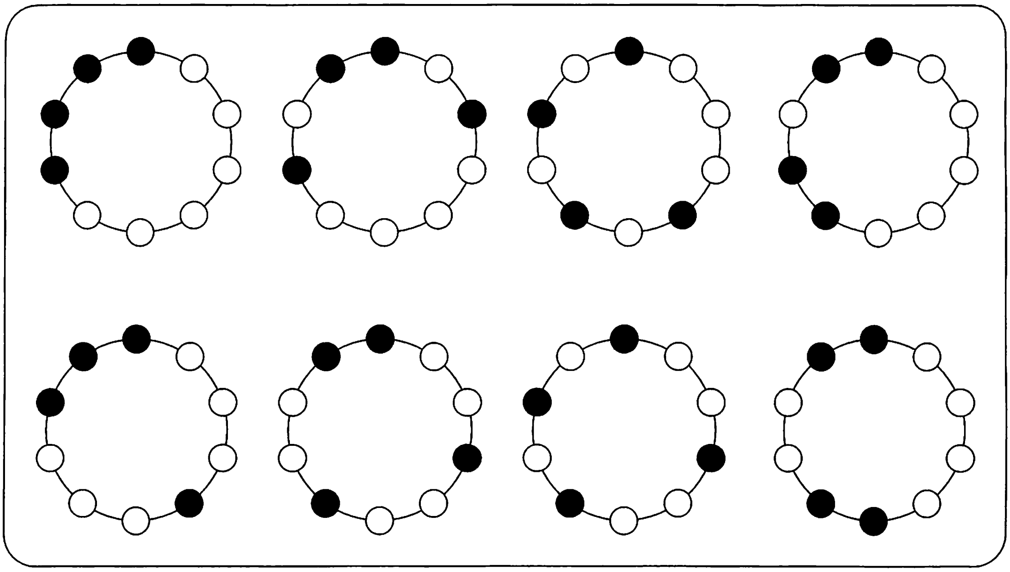

Figure 4.2 Types d'isomorphie de $P_{10}(T+X)$-structures associés à l'espèce $(T^6\,X^4)/\mathbb{Z}_2$

où

$$\begin{aligned}\pi_{i,j} &= \sum_{d|(i,j)} \mu(d)\, p_{i/d,j/d},\\ \delta_{i,j} &= \sum_{d|(i,j)} \mu(d)\, p_{i/d-1,j/d} + \sum_{d|(i,j)} \mu(d)\, p_{i/d,j/d-1}.\end{aligned}$$

Proposition 4.3.26. Soient $k, n \in \mathbb{N}$. On a

$$P_n(k+X) = \sum_{d|n} \sum_{i+j=d} \Big(\sigma_{i,j}(k) C_{n/d}(X^j) + \tau_{i,j}(k) C_{n/d}(X^j)/\mathbb{Z}_2\Big) \tag{4.18}$$

où $\sigma_{i,j}(k) = |\mathfrak{C}_p((B_k^*)_{i,j})|$, $\tau_{i,j}(k) = |\mathfrak{P}_p((B_k^*)_{i,j})|$, avec $B_k = A_k \cup \{*\}$, $A_k = \{1, 2, \ldots, k\}$,

$$(B_k^*)_{i,j} = \{w \in B_k^* \mid |w|_{A_k} = i,\ |w|_* = j\}.$$

Démonstration. L'idée de la démonstration est la même qu'à la démonstration de la proposition 4.3.23. Autrement dit, on obtient une partition de l'ensemble des types d'isomorphie de $P_n(k+X)$-structures en convenant que deux types d'isomorphie appartiennent à la même classe si les espèces moléculaires qui leur correspondent sont isomorphes ; il s'agit alors d'établir un système de représentants des classes de cette partition. Une fois ce système de représentants établi, on dénombre, pour chaque représentant, les types d'isomorphie dont les espèces moléculaires correspondantes sont isomorphes à l'espèce correspondant au représentant donné. Le nombre ainsi obtenu est alors le coefficient de l'espèce moléculaire correspondant au représentant donné, apparaissant dans la décomposition moléculaire de $P_n(k+X)$. Ainsi, dans le cas présent,

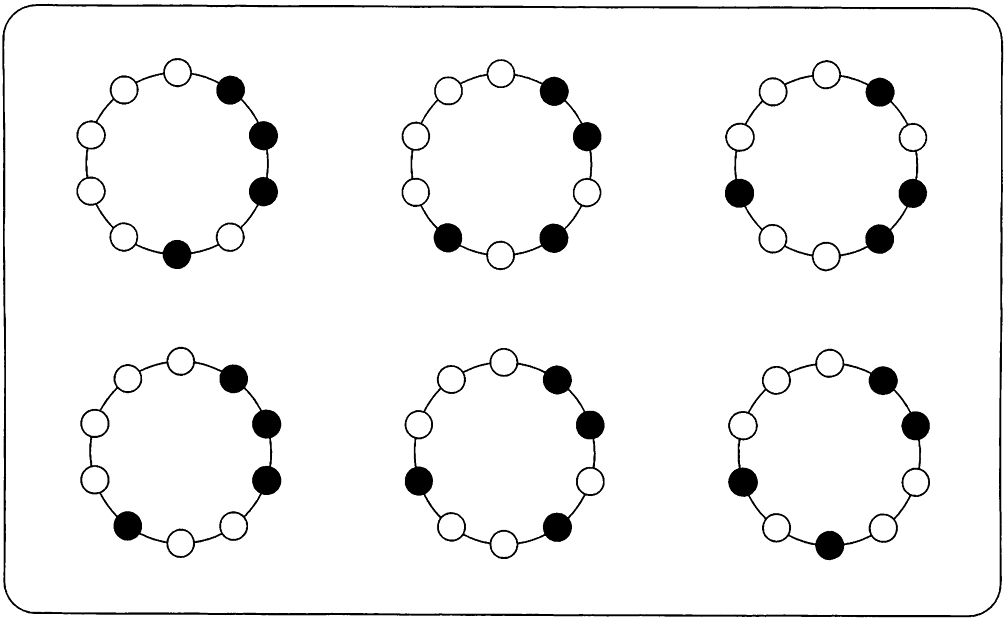

Figure 4.3 Types d'isomorphie de $P_{10}(T + X)$-structures associés à l'espèce $T^6\,X^4$

montrons que la famille d'espèces moléculaires

$$\bigcup_{d|n} \bigcup_{i+j=d} \{C_{n/d}(X^j), C_{n/d}(X^j)/\mathbb{Z}_2\} \tag{4.19}$$

forme un tel système de représentants. Or, on se convainc aisément que chacune des espèces moléculaires ci-dessus est isomorphe à une sous-espèce moléculaire de $P_n(k + X)$. Réciproquement, soit θ un type d'isomorphie de $P_n(k + X)$-structures arbitraire. Montrons que l'espèce moléculaire correspondant à θ est isomorphe à une espèce de la famille (4.19) ci-dessus. Notons d'abord pour ce faire qu'on a une bijection canonique évidente entre les types d'isomorphie de $P_n(k + X)$-structures et les classes diédrales de $A^*_{i,j}$. Ainsi, soit $D(\theta)$ la classe diédrale correspondant par cette bijection à θ. Alors, ou bien $D(\theta)$ est palindrome, ou bien $D(\theta)$ est non palindrome. Soit alors d l'ordre de la racine d'un représentant quelconque de $D(\theta)$, soit $\nu = |D(\theta)|_X$, et soit $j = \nu/d$. On se convainc alors aisément que l'espèce correspondant à θ est, dans le premier cas, isomorphe à l'espèce moléculaire $C_{n/d}(X^j)/\mathbb{Z}_2$ et, dans le deuxième cas, est isomorphe à l'espèce moléculaire $C_{n/d}(X^j)$. Ainsi, θ étant arbitraire, on a bien que tout type d'isomorphie de $P_n(k+X)$-structures est isomorphe à une espèce moléculaire de la famille (4.19). On voit de plus que, par définition, le nombre de types d'isomorphie de $P_n(k+X)$-structures dont l'espèce moléculaire correspondante est isomorphe à l'espèce moléculaire correspondant à θ n'est autre que $\sigma_{i,j}(k)$, dans le premier cas, et $\tau_{i,j}(k)$ dans le deuxième cas. On se convainc en effet aisément qu'un type d'isomorphie θ' appartient à la même classe que θ si, et seulement si, l'ordre de la racine d'un représentant quelconque de $D(\theta')$ est d, $|D(\theta')|_X = j$, et $D(\theta')$ est, selon le cas, palindrome ou non palindrome. □

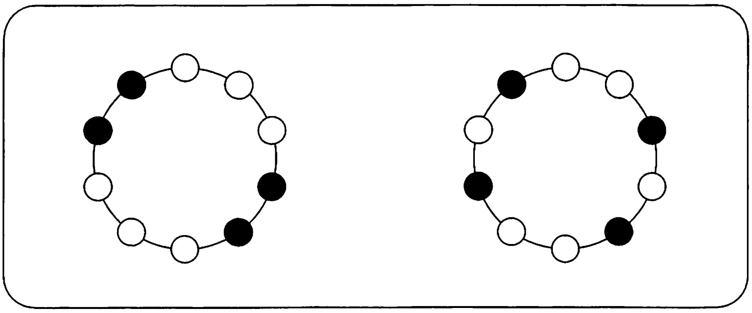

Figure 4.4 Types d'isomorphie de $P_{10}(T + X)$-structures associés à l'espèce $C_2(T^3X^2)/\mathbb{Z}_2$

Proposition 4.3.27. Soient $i, j \in \mathbb{N}$, $n = i + j$. On a

$$\tau_{i,j}(k) = \begin{cases} \pi_{i,j}(k), & \text{si } n \equiv 1 \pmod 2 \\ \frac{1}{2}(\pi_{i,j}(k) + \delta_{i,j}(k)), & \text{sinon.} \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} \pi_{i,j}(k) &= \sum_{d|(i,j)} \mu(d)\, p_{i/d,j/d}(k) \\ \delta_{i,j}(k) &= \sum_{d|(i,j)} \mu(d)\big(k\, p_{i/d-1,j/d}(k) + p_{i/d,j/d-1}(k)\big). \end{aligned}$$

Nous allons maintenant dans ce qui suit établir les propositions 4.3.25 et 4.3.27 plus haut. Nous allons en fait d'abord présenter un résultat général à l'effet que l'ensemble $\mathfrak{P}_{\mathrm{p}}(L_n)$ des classes diédrales palindromes primitives de L_n, avec $n \in \mathbb{N}$, $L_n = L \cap A^n$, est en bijection canonique avec l'ensemble $\mathcal{P}(L_n)$ des palindromes primitifs de L_n, lorsque n est impair, tandis que, dans le cas où n est pair, chaque classe diédrale palindrome primitive admet exactement deux représentants, ces représentants étant soit deux palindromes, soit deux dexterpalindromes, deux classes distinctes donnant lieu, toujours dans le cas où n est pair, à deux paires de mots disjoints. Ainsi, dans ce dernier cas, on obtient, comme on le verra, une bijection canonique de l'ensemble $\mathfrak{P}_{\mathrm{p}}(L_n)$ sur l'ensemble $(\mathcal{P}_{\mathrm{p}}(L_n) \cup \mathcal{D}_{\mathrm{p}}(L_n))/\!\sim$. On est alors ainsi ramené, selon le cas, au dénombrement d'un de ces deux ensembles.

Définition 4.3.28. Soit $w, w' \in L$. On dit alors que w' est un *facteur central* de w s'il existe $u, v \in L$ tels que $|u| = |v|$ et tels que l'on ait $w = uw'v$.

Lemme 4.3.29. Soit w un palindrome. Alors, tout facteur central de w est lui-même un palindrome.

Démonstration. Evident. $\square$

Lemme 4.3.30. Soit w un mot circulairement palindrome primitif. Alors, l'ensemble des positions de symétrie de w se réduit à un élément.

Démonstration. Notons d'abord qu'un mot est primitif si, et seulement si, ses conjugués sont distincts deux à deux. Nous allons en fait montrer que w admet une et une seule factorisation de la forme $w_1 w_2$, avec w_1, w_2 des palindromes, $w_2 \neq \epsilon$, cette propriété entraînant évidemment l'énoncé à démontrer. Soient donc u, v, u', v', $v \neq \epsilon$, $v' \neq \epsilon$ des palindromes tels que l'on ait $w = uv = u'v'$. On en déduit alors immédiatement $\widetilde{w} = \widetilde{v}\widetilde{u} = \widetilde{v}'\widetilde{u}'$. Or, les mots u, v, u', v' étant par hypothèse des palindromes, on a $\widetilde{v}\widetilde{u} = vu$, $\widetilde{v}'\widetilde{u}' = v'u'$. Ainsi, les mots vu, $v'u'$ étant évidemment deux conjugués de w qui, comme on vient de le voir, sont identiques, on en conclut, w étant primitif, que $u = u'$, $v = v'$, ce qui achève de montrer l'unicité de la factorisation de w de la forme mentionné plus haut. □

Soit w un mot circulairement palindrome primitif. On peut alors, en vertu du lemme ci-dessus, parler de *la* position de symétrie de w. Dans la suite, nous noterons $\mathrm{sym}(w)$ cette position de symétrie.

Lemme 4.3.31. Soit w un mot circulairement palindrome primitif de longueur n, et soit $k = \mathrm{sym}(w)$. Alors, on a

$$\mathrm{sym}(\rho \cdot w) \equiv k - 2 \pmod{n}. \tag{4.20}$$

Démonstration. Notons d'abord que ce lemme est vrai dans le cas où $n = 1$, l'anneau des entiers admettant de toute évidence une seule classe de congruence modulo 1. Ceci nous permet donc de supposer désormais sans perte de généralité $n \geq 2$. Ainsi, si $k = 0$, on pose $w = aua$, avec $a \in A$, $u \in A^*$, puisque dans ce cas w est un palindrome. On a alors $\rho \cdot w = \rho \cdot (a\, u\, a) = u\, a^2$, et ainsi, u étant un palindrome, par le lemme 4.3.29, on en déduit immédiatement

$$\mathrm{sym}(\rho \cdot w) = |u| = n - 2 \equiv -2 \pmod{n}.$$

D'autre part, si $k = 1$, on pose $w = au$, avec $a \in A$, $u \in \mathcal{P}(A^+)$; on a alors évidemment $\rho \cdot w = u\, a$, et ainsi on en déduit immédiatement

$$\mathrm{sym}(\rho \cdot w) = |u| = n - 1 \equiv -1 \pmod{n}.$$

Finalement, si $k \geq 2$, on pose $w = uv$, avec $|u| = k$. Alors, u étant par hypothèse un palindrome, on a, lorsque l'on pose $u = au'a$, avec $a \in A$, $\rho \cdot w = u'ava$. Ainsi, on en déduit, u' étant un palindrome, par le lemme 4.3.29, et v étant lui-même par hypothèse un palindrome,

$$\mathrm{sym}(\rho \cdot w) = |u'| = |u| - 2 = k - 2.$$

On a donc bien dans ce cas-ci également $\mathrm{sym}(\rho \cdot w) \equiv k - 2 \pmod{n}$, ce qui achève la démonstration. □

Proposition 4.3.32. Soit w un mot circulairement palindrome primitif de longueur n, et soit $k = \mathrm{sym}(w)$. On a alors, quel que soit $\nu \in \mathbb{Z}$,

$$\mathrm{sym}(\rho^{\nu} \cdot w) \equiv k - 2\nu \pmod{n}. \tag{4.21}$$

Démonstration. Montrons cette assertion en procédant par récurrence sur ν. Si $\nu = 0$, alors la relation à démontrer est évidemment vraie. Supposons donc qu'il en soit de même pour ν donné, $\nu \geq 0$. On a alors, par hypothèse de récurrence, d'une part, et par le lemme 4.3.31 d'autre part,

$$\begin{aligned} \operatorname{sym}(\rho^{\nu+1} \cdot w) &= \operatorname{sym}(\rho \cdot (\rho^{\nu} \cdot w)) \\ &\equiv \operatorname{sym}(\rho^{\nu} \cdot w) - 2 \pmod{n} \\ &\equiv k - 2(\nu + 1) \pmod{n}, \end{aligned}$$

ce qui achève de montrer que l'identité (4.21) est satisfaite pour $\nu \in \mathbb{N}$.

D'autre part, on déduit du lemme 4.3.31,

$$\operatorname{sym}(w) = \operatorname{sym}(\rho \cdot (\rho^{-1} \cdot w)) \equiv \operatorname{sym}(\rho^{-1} \cdot w) - 2 \pmod{n}$$

et ainsi, on a

$$\operatorname{sym}(\rho^{-1} \cdot w) \equiv \operatorname{sym}(w) + 2 \pmod{n}.$$

Ainsi, on montrerait, en procédant par récurrence sur ν, comme ci-dessus, que quel que soit $\nu \in \mathbb{N}$, on a

$$\operatorname{sym}(\rho^{-\nu} \cdot w) \equiv k + 2\nu \pmod{n},$$

ce qui achève la démonstration. □

Notons que les positions de symétrie des conjugués successifs d'un mot circulairement palindrome primitif donné ne dépend que de la position de symétrie de ce mot. Plus précisément, quels que soient les mots circulairement palindromes primitifs w, w', si $|w| = |w'|$ et si les positions de symétrie respectives de w et de w' coïncident, alors on voit, par la proposition ci-dessus, que pour $\nu \in \mathbb{Z}$, les positions de symétrie respectives de $\rho^{\nu} \cdot w$ et de $\rho^{\nu} \cdot w'$ coïncident. D'autre part, on vérifie immédiatement, en vertu du lemme précédent, que la position de symétrie d'un conjugué de w ne dépend que de la classe de congruence modulo n de l'ordre d'itération de ce conjugué, n désignant la longueur de w. Autrement dit, soient $\nu, \nu' \in \mathbb{Z}$. Si ν et ν' appartiennent à la même classe de congruence modulo n, alors les positions de symétrie respectives des mots $\rho^{\nu} \cdot w$ et $\rho^{\nu'} \cdot w$ sont les mêmes.

Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Soit l'application

$$\varphi_{k,n} : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

obtenue en posant, pour $\nu \in \mathbb{Z}$, $\varphi_{k,n}(\overline{\nu}) \equiv k - 2\nu \pmod{n}$, $\overline{\nu}$ désignant la classe de congruence modulo n de ν.

Proposition 4.3.33. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Si n est impair, $\varphi_{k,n}$ est une bijection ; dans le cas contraire, on a

$$\operatorname{Im}(\varphi_{k,n}) = \{i \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \mid i \equiv k \pmod{2}\}.$$

Démonstration. Soit l'application $\psi_{k,n} : \mathbb{Z} \to \{0, 1, \ldots, n-1\}$ obtenue en posant, pour $\nu \in \mathbb{Z}$, $\psi_{k,n}(\nu) \equiv k - 2\nu \pmod{n}$. On a alors évidemment $\operatorname{Im}(\psi_{k,n}) = \operatorname{Im}(\varphi_{k,n})$. Or, on vérifie aisément que $\psi_{k,n}$ est surjective lorsque n est impair. Le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ étant évidemment d'ordre n, on en déduit immédiatement que $\varphi_{k,n}$ est bijective, ce qui achève la démonstration dans ce cas.

D'autre part, si n est pair, on vérifie aisément que l'on a

$$\operatorname{Im}(\psi_{k,n}) = \{i \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \mid i \equiv k \pmod{2}\}$$

et ainsi, on a bien dans ce cas également

$$\mathrm{Im}(\varphi_{k,n}) = \{i \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \mid i \equiv k \pmod 2\},$$

ce qui achève la démonstration. □

Corollaire 1. Soit w un mot circulairement palindrome primitif de longueur n, et soit $k = \mathrm{sym}(w)$. Alors,

i) si n est impair, l'ensemble des positions de symétrie respectives des conjugués de w est $\{0, 1, \ldots, n-1\}$;

ii) si n est pair, l'ensemble des positions de symétrie respectives des conjugués de w est le sous-ensemble de $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ formé des entiers de même parité que k, autrement dit, est l'ensemble

$$\{i \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \mid i \equiv k \pmod 2\}.$$

Démonstration. On vérifie en effet aisément que l'ensemble des positions de symétrie des conjugués de w n'est autre que l'image de l'application $\varphi_{k,n}$. Ainsi, en vertu de la proposition précédente, si n est impair, cet ensemble coïncide bien avec l'ensemble $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, $\varphi_{k,n}$ étant dans ce cas surjective, alors que si n est pair, le présent ensemble est bien l'ensemble $\{i \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \mid i \equiv k \pmod 2\}$. □

Corollaire 2. Soit w un mot circulairement palindrome primitif de longueur n. Alors, si n est pair, soit w admet exactement deux de ses conjugués qui soient des palindromes, soit il n'en admet aucun, auquel cas il admet exactement deux conjugués qui soient des dexterpalindromes. Si n est impair, w admet exactement un de ses conjugués qui soit un palindrome.

Démonstration. Soit $k = \mathrm{sym}(w)$. Alors, on sait, par la proposition 4.3.32, que la position de symétrie du conjugué $\rho^\nu \cdot w$ de w, pour $\nu \in \mathbb{Z}$, n'est autre que $\varphi_{k,n}(\nu)$. Ainsi, si n et k sont pairs, on voit, par la proposition précédente, que deux des conjugués de w admettent une position de symétrie égale à 0, à savoir les conjugués obtenus en posant respectivement $\nu = k/2$ et $\nu = (n+k)/2$ dans $\rho^\nu \cdot w$. On vérifie de plus aisément que ce sont les seules valeurs comprises entre 0 et $n-1$ qui vérifient cette propriété. D'autre part, si n est pair et k impair, alors, toujours par la proposition précédente, on vérifie qu'aucun des conjugués de w ne peut être un palindrome, aucun des conjugués n'admettant une position de symétrie égale à 0 ; dans ce dernier cas, il existe alors toutefois exactement deux conjugués qui soient des dexterpalindromes, à savoir les conjugués obtenus en posant respectivement $\nu = (k-1)/2$ et $\nu = (n+k-1)/2$ dans $\rho^\nu \cdot w$, ces deux valeurs étant les seules qui soient telles que l'on ait $k - 2\nu \equiv 1 \pmod n$. Finalement, dans le cas où n est impair, on vérifie aisément que w admet un et un seul de ses conjugués qui soit un palindrome, l'application $\varphi_{k,n}$ étant évidemment dans ce cas injective. □

Soit L un langage. Nous noterons $\mathcal{P}_{\mathrm{p}}(L)$ (resp. $\mathcal{D}_{\mathrm{p}}(L)$) l'ensemble des palindromes primitifs de L (resp. des dexterpalindromes primitifs de L).

Définition 4.3.34. On dit qu'un langage L est *palindrome* si $L = \widetilde{L}$.

Théorème 4.3.35. Soit $L \subseteq A^*$ un langage palindrome *fermé par conjugaison*, autrement dit, vérifiant la propriété (i) de la définition de langage cyclique (déf. 4.3.14). Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit $L_n = L \cap A^n$. Alors,

i) si n est impair, l'ensemble $\mathcal{P}_{\mathrm{p}}(L_n)$ constitue un système de représentants de l'ensemble des classes diédrales palindromes primitives de L_n ;

ii) si n est pair, l'application canonique

$$\phi : \mathfrak{P}_{\mathrm{p}}(L_n) \to (\mathcal{P}_{\mathrm{p}}(L_n) \cup \mathcal{D}_{\mathrm{p}}(L_n))/\!\sim,$$

c'est-à-dire la fonction ϕ obtenue en posant, pour une classe diédrale palindrome primitive donnée Δ,

$$\phi(\Delta) = \Delta \cap (\mathcal{P}_{\mathrm{p}}(L_n) \cup \mathcal{D}_{\mathrm{p}}(L_n)),$$

est une bijection, $(\mathcal{P}_{\mathrm{p}}(L_n) \cup \mathcal{D}_{\mathrm{p}}(L_n))/\!\sim$ désignant l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathcal{P}_{\mathrm{p}}(L_n) \cup \mathcal{D}_{\mathrm{p}}(L_n)$ par rapport à la relation de conjugaison.

Démonstration. Soit Δ une classe diédrale palindrome primitive, et soit w un représentant arbitraire de Δ. On a alors, Δ étant palindrome, $\Delta = [w]$, $[w]$ désignant la classe de conjugaison de w. Considérons d'abord le cas où n est impair. Il résulte alors immédiatement du corollaire 2 à la proposition 4.3.33 que Δ admet un unique représentant qui soit un palindrome, à savoir l'unique palindrome qui soit conjugué à w. On voit donc, Δ étant arbitraire, que l'application faisant correspondre à Δ l'unique représentant de cette classe qui soit un palindrome est bien définie, en tant qu'application de l'ensemble $\mathfrak{P}_{\mathrm{p}}(L_n)$ dans $\mathcal{P}(L_n)$. L'assertion (i) résulte alors immédiatement de ce que cette application est bijective, la bijection réciproque étant obtenue en faisant correspondre à un mot de $\mathcal{P}(L_n)$ la classe diédrale de ce mot. D'autre part, si n est pair, alors il résulte du corollaire 2 à la proposition 4.3.33 ci-dessus que dans ce cas soit Δ admet exactement deux de ses conjugués qui soient des palindromes, soit elle admet exactement deux de ses conjugués qui soient des dexterpalindromes, ce qui montre bien que l'application ϕ est bien définie. On montre en fait aisément que ϕ est une bijection, la bijection réciproque étant obtenue en faisant correspondre à une paire de mots de son codomaine la classe de conjugaison de l'un quelconque de ces mots. □

Corollaire. Soit $L \subseteq A^*$ un langage palindrome, fermé par conjugaison. Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit $L_n = L \cap A^n$. Alors, si n est impair, on a $|\mathfrak{P}_{\mathrm{p}}(L_n)| = |\mathcal{P}_{\mathrm{p}}(L_n)|$; si n est pair, on a

$$2\,|\mathfrak{P}_{\mathrm{p}}(L_n)| = |\mathcal{P}_{\mathrm{p}}(L_n)| + |\mathcal{D}_{\mathrm{p}}(L_n)|.$$

Démonstration. Le cas où n est impair est immédiat. D'autre part, si n est pair, l'identité correspondante résulte immédiatement du théorème précédent, sachant que les ensembles $\mathcal{P}_{\mathrm{p}}(L_n)$ et $\mathcal{D}_{\mathrm{p}}(L_n)$ sont disjoints. □

Soit A un alphabet ordonné à deux lettres, et soient $i, j \in \mathbb{N}$. On note alors

$$A^*_{i,j} = \{w \in A^* \mid |w|_1 = i,\ |w|_2 = j\}$$

où $|w|_1$ (resp. $|w|_2$) désigne le nombre d'occurrences de la première lettre de A (resp. de la deuxième lettre de A) apparaissant dans w. Alors, nous noterons $\tau_{i,j}$ le cardinal de l'ensemble $\mathfrak{P}_{\mathrm{p}}(A^*_{i,j})$ des classes diédrales palindromes primitives de $A^*_{i,j}$. De plus, nous noterons $\pi_{i,j}$ (resp. $\delta_{i,j}$) le cardinal de l'ensemble $\mathcal{P}_{\mathrm{p}}(A^*_{i,j})$ (resp. $\mathcal{D}_{\mathrm{p}}(A^*_{i,j})$).

Proposition 4.3.36. Soient $i, j \in \mathbb{N}$. Posons $n = i + j$. On a alors

$$\tau_{i,j} = \begin{cases} \pi_{i,j}, & \text{si } n \equiv 1 \pmod 2 \\ \frac{1}{2}(\pi_{i,j} + \delta_{i,j}), & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.22}$$

Démonstration. On vérifie d'abord aisément que le langage $A^*_{i,j}$ est palindrome et fermé par conjugaison. Cette proposition résulte alors immédiatement, par définition des nombres $\tau_{i,j}$, $\pi_{i,j}$ et $\delta_{i,j}$, du corollaire au théorème 4.3.35 ci-dessus. □

Nous allons maintenant établir des formules de calcul des nombres $\pi_{i,j}$ et $\delta_{i,j}$. On en déduira immédiatement, en vertu de la proposition ci-dessus, des formules pour les nombres $\tau_{i,j}$.

Soit A un alphabet ordonné à deux lettres. Nous notons alors $p_{i,j}$ le cardinal de l'ensemble $\mathcal{P}(A^*_{i,j})$.

Lemme 4.3.37. Soient $i, j \in \mathbb{N}$. On a

$$p_{i,j} = \begin{cases} \binom{\lfloor (i+j)/2 \rfloor}{\lfloor i/2 \rfloor, \lfloor j/2 \rfloor}, & \text{si } ij \equiv 0 \pmod 2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.23}$$

Démonstration. Soit A un alphabet ordonné à deux lettres. Nous allons montrer que $p_{i,j}$ ainsi définie est bien le cardinal de l'ensemble $\mathcal{P}(A^*_{i,j})$. On peut évidemment à cette fin poser, sans perte de généralité, $A = \{0, 1\}$, avec $0 < 1$. Posons $n = i + j$. Notons d'abord que tout palindrome de longueur paire doit évidemment être tel que le nombre d'occurrences de chacune des lettres dont il est formé soit pair. C'est donc dire que si i et j sont tous deux impairs, alors $p_{i,j} = 0$. Considérons donc maintenant le cas où on a $ij \equiv 0 \pmod 2$, c'est-à-dire le cas où le nombre d'occurrences d'au moins une parmi les deux lettres est pair. Considérons d'abord le cas où on a $i \equiv 0 \pmod 2$, $j \equiv 0 \pmod 2$. On obtient alors une bijection canonique entre les ensembles $\mathcal{P}(A^*_{i,j})$ et $A^*_{i/2,j/2}$ en faisant correspondre à un mot w de longueur $n = i + j$ du premier ensemble son préfixe de longueur $n/2$. Ainsi, on a dans ce cas

$$p_{i,j} = \binom{n/2}{i/2, j/2}$$

mots. Considérons finalement le cas où le nombre d'occurrences d'une des deux lettres est impair. Supposons en fait que l'on ait $i \equiv 1 \pmod 2$. On se convainc alors aisément que tout palindrome w doit dans ce cas être tel que la position du milieu de w soit occupée par la lettre dont le nombre d'occurrences est impair, à savoir dans le cas présent par 0. Ainsi, par un raisonnement analogue au raisonnement ci-dessus, on se convainc aisément qu'on obtient une bijection entre les ensembles $\mathcal{P}(A^*_{i,j})$ et $A^*_{(i-1)/2,j/2}$ en faisant correspondre à un mot de $\mathcal{P}(A^*_{i,j})$ son préfixe de longueur $(n-1)/2$. On a donc dans ce cas

$$p_{i,j} = \binom{(n-1)/2}{(i-1)/2, j/2}.$$

Finalement, par un argument symétrique, on obtient, dans le cas où on a $j \equiv 1 \pmod 2$,

$$p_{i,j} = \binom{(n-1)/2}{i/2, (j-1)/2}.$$

Ainsi, on obtient bien la relation

$$p_{i,j} = \binom{\lfloor n/2 \rfloor}{\lfloor i/2 \rfloor, \lfloor j/2 \rfloor}$$

dans tous les cas où le nombre d'occurrences d'au moins une des deux lettres est pair.□

Soient encore une fois $i, j \in \mathbb{N}$. Posons $n = i + j$. Dans le cas particulier où A est un alphabet ordonné à deux lettres, nous noterons $\pi_{i,j} = |\mathcal{P}_{\mathrm{p}}(A^*_{i,j})|$.

Proposition 4.3.38. Soient $i, j \in \mathbb{N}$. On a

$$\pi_{i,j} = \sum_{d|(i,j)} \mu(d)\, p_{i/d,j/d}. \tag{4.24}$$

Démonstration. Soit A un alphabet ordonné à deux lettres. On peut en fait poser sans perte de généralité $A = \{0, 1\}$, avec $0 < 1$. Nous allons d'abord montrer qu'il existe une bijection canonique entre l'ensemble $\mathcal{P}(A^*_{i,j})$ et la réunion

$$\bigcup_{d|(i,j)} \mathcal{P}_{\mathfrak{p}}(A^*_{i/d,j/d}). \tag{4.25}$$

Soit en effet $w \in \mathcal{P}(A^*_{i,j})$. Il résulte alors immédiatement de ce que $\mathcal{P}(A^*)$ est un langage itératif (prop. 4.3.20, cor. 1) que la racine primitive de w est elle-même un palindrome. Soit alors u la racine primitive de w, et soit d l'ordre de u en tant que racine de w. Il résulte alors immédiatement des relations

$$d\,|u|_0 = i, \qquad d\,|u|_1 = j,$$

que d est un diviseur commun à i et j. On déduit alors aisément de ces mêmes relations que $u \in \mathcal{P}_{\mathfrak{p}}(A^*_{i/d,j/d})$. Ainsi, le mot w étant un élément arbitraire de $\mathcal{P}(A^*_{i,j})$, on voit donc que l'application faisant correspondre au mot w sa racine primitive appartient bien à l'ensemble (4.25). En fait, on se convainc aisément que l'application ainsi définie est bien une bijection, la bijection réciproque étant obtenue en faisant correspondre à un mot $v \in \mathcal{P}_{\mathfrak{p}}(A^*_{i/d,j/d})$, pour un certain d tel que $d \mid (i,j)$, le mot v^d. On en déduit immédiatement l'identité

$$p_{i,j} = \sum_{d|(i,j)} \pi_{i/d,j/d}.$$

L'identité à démontrer s'obtient alors en appliquant la méthode d'inversion de Möbius à l'identité ci-dessus. □

Soit $\mathcal{D}_{\mathfrak{p}}(A^*_{i,j})$ l'ensemble des dexterpalindromes primitifs de $A^*_{i,j}$. On pose alors, dans le cas où A est un alphabet ordonné à deux lettres, $\delta_{i,j} = |\mathcal{D}_{\mathfrak{p}}(A^*_{i,j})|$.

Proposition 4.3.39. Soient $i, j \in \mathbb{N}$. On a

$$\delta_{i,j} = \sum_{d|(i,j)} \mu(d)\, p_{i/d-1,j/d} + \sum_{d|(i,j)} \mu(d)\, p_{i/d,j/d-1}. \tag{4.26}$$

Démonstration. Encore une fois, on peut sans perte de généralité poser $A = \{0, 1\}$, avec $0 < 1$. Soit alors $\Delta_0(A^*_{i,j})$ (resp. $\Delta_1(A^*_{i,j})$) l'ensemble des dexterpalindromes primitifs de $A^*_{i,j}$ commençant par le chiffre 0 (resp. le chiffre 1). On a alors évidemment

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{p}}(A^*_{i,j}) = \Delta_0(A^*_{i,j}) \sqcup \Delta_1(A^*_{i,j}),$$

c'est-à-dire que l'ensemble $\mathcal{D}_{\mathfrak{p}}(A^*_{i,j})$ est réunion disjointe des ensembles $\Delta_0(A^*_{i,j})$ et $\Delta_1(A^*_{i,j})$. On en déduit immédiatement la relation

$$\delta_{i,j} = |\Delta_0(A^*_{i,j})| + |\Delta_1(A^*_{i,j})|.$$

On peut donc se ramener à montrer les identités

$$|\Delta_0(A^*_{i,j})| = \sum_{d|(i,j)} \mu(d)\, p_{i/d-1,j/d}$$
$$|\Delta_1(A^*_{i,j})| = \sum_{d|(i,j)} \mu(d)\, p_{i/d,j/d-1}.$$

Montrons la première de ces deux identités, la deuxième se démontrant par des arguments symétriques. Soit $D_0(A^*_{i,j})$ l'ensembles des dexterpalindromes de $A^*_{i,j}$ commençant par le chiffre 0. Alors, par un raisonnement analogue à un raisonnement employé à la démonstration de la proposition précédente, l'application allant de l'ensemble $D_0(A^*_{i,j})$ dans la réunion

$$\bigsqcup_{d|(i,j)} \Delta_0(A^*_{i/d,j/d}),$$

obtenue en faisant correspondre à un mot de l'ensemble $\Delta_0(A^*_{i,j})$ la racine primitive de ce mot, est une bijection. Soit en effet $w \in D_0(A^*_{i,j})$ et soit u la racine primitive de w. Il est alors évident que tout préfixe de w commence lui-même par le chiffre 0 et ainsi, en particulier, en est-il de même de u. Comme de plus on sait, par le corollaire 2 à la proposition 4.3.20, que l'ensemble des dexterpalindromes forme un langage itératif, on a bien que u est lui-même un dexterpalindrome. Ainsi, soit d l'ordre de u en tant que racine de w. On a alors évidemment

$$d\,|u|_0 = i, \quad d\,|u|_1 = j,$$

ce qui montre bien que d est un diviseur commun à i et j et que, de plus, on a $u \in A^*_{i/d,j/d}$. Ainsi, en vertu de ce qui précède, on a bien que u appartient à l'ensemble $\Delta_0(A^*_{i/d,j/d})$, pour un certain d tel que $d \mid (i,j)$. Finalement, pour montrer que cette application est bien une bijection, il suffit de noter que l'application faisant correspondre à un mot $v \in \Delta_0(A^*_{i/\delta,j/\delta})$, pour un certain δ tel que $\delta \mid (i,j)$, le mot v^δ, est la réciproque de cette application.

Ainsi, on en déduit immédiatement l'identité

$$|D_0(A^*_{i,j})| = \sum_{d|(i,j)} |\Delta_0(A^*_{i/d,j/d})|.$$

Comme de plus on a une bijection évidente entre les ensembles $D_0(A^*_{i,j})$ et $\mathcal{P}(A^*_{i-1,j})$, cette bijection étant obtenue en faisant correspondre à un mot $w \in D_0(i,j)$ son suffixe de longueur $n-1$, lorsque l'on pose $n = i+j$, on en déduit l'identité

$$p_{i-1,j} = \sum_{d|(i,j)} |\Delta_0(A^*_{i/d,j/d})|.$$

Il suffit alors, pour obtenir l'identité à démontrer, d'appliquer la méthode d'inversion de Möbius à l'identité ci-dessus. □

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Nous notons alors A_k un alphabet ordonné arbitraire à k lettres, et B_k un alphabet obtenu en adjoignant une lettre à A_k, c'est-à-dire en posant $B_k = A_k \cup \{*\}$, le symbole $*$ désignant une lettre n'appartenant pas à l'ensemble A_k. Soient $i, j \in \mathbb{N}$. Nous posons alors

$$(B_k^*)_{i,j} = \{w \in B_k^* \mid |w|_{A_k} = i,\ |w|_* = j\}.$$

Nous notons alors, de manière analogue à ce que nous faisons plus haut, $\pi_{i,j}(k)$ le cardinal de l'ensemble $\mathfrak{P}_{\mathrm{p}}((B_k^*)_{i,j})$; de même, nous notons $\pi_{i,j}(k)$ (resp. $\delta_{i,j}(k)$) le cardinal de l'ensemble $\mathcal{P}_{\mathrm{p}}((B_k^*)_{i,j})$ (resp. $\mathcal{D}_{\mathrm{p}}((B_k^*)_{i,j})$). Finalement, nous noterons $p_{i,j}(k)$ le cardinal de l'ensemble $\mathcal{P}((B_k)_{i,j}^*)$ des palindromes de $(B_k^*)_{i,j}$.

On a alors la proposition suivante, analogue à la proposition 4.3.36 plus haut.

Proposition 4.3.40. Soient $i, j, k \in \mathbb{N}$. Posons $n = i + j$. On a alors

$$\tau_{i,j}(k) = \begin{cases} \pi_{i,j}(k), & \text{si } n \equiv 1 \pmod 2 \\ \frac{1}{2}(\pi_{i,j}(k) + \delta_{i,j}(k)), & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.27}$$

Démonstration. On vérifie en effet aisément que le langage $(B_k^*)_{i,j}$ est palindrome et fermé par conjugaison. Cette proposition résulte alors immédiatement, par définition des nombres $\tau_{i,j}(k)$, $\pi_{i,j}(k)$ et $\delta_{i,j}(k)$, du corollaire au théorème 4.3.35. □

Comme nous l'avons fait pour les nombres $\delta_{i,j}$, $\tau_{i,j}$, nous allons maintenant établir des formules de calcul des nombres $\pi_{i,j}(k)$ et $\delta_{i,j}(k)$. On en déduira donc du même coup, en vertu de la proposition ci-dessus, des formules pour les nombres $\tau_{i,j}(k)$.

Lemme 4.3.41. Soient $i, j \in \mathbb{N}$. Posons $n = i + j$. On a

$$p_{i,j}(k) = \begin{cases} k^{i \bmod 2} \binom{\lfloor n/2 \rfloor}{\lfloor j/2 \rfloor} k^{\lfloor n/2 \rfloor - \lfloor j/2 \rfloor}, & \text{si } (n+1)j \equiv 0 \pmod 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.28}$$

Démonstration. Soit $B_k = A_k \cup \{*\})$, A_k désignant un alphabet ordonné à k lettres, et le symbole $*$ désignant une lettre n'appartenant pas à A_k. On peut évidemment supposer sans perte de généralité que A_k est l'alphabet $\{1, 2, \ldots, k\}$. Notons d'abord que si n est pair et j impair, alors on a bien $\mathcal{P}((B_k)_{i,j}^*) = \emptyset$, puisque, dans le cas contraire, le nombre d'occurrences du symbole $*$ d'un mot quelconque de $\mathcal{P}((B_k)_{i,j}^*)$ serait impair, ce qui est absurde, sachant que par hypothèse la longueur de ce mot serait paire. Nous allons donc supposer sans perte de généralité n impair ou j pair. Considérons d'abord le cas où n et j sont tous deux pairs. On peut en fait, par le même raisonnement qu'à la démonstration du lemme 4.3.37, se ramener à dénombrer les mots de longueur $n/2$ comptant exactement $j/2$ occurrences du symbole $*$ et dont les autres symboles appartiennent à l'ensemble $\{1, 2, \ldots, k\}$. Notons d'abord que l'on a

$$(B_k)_{i,j}^* = \bigcup_{\substack{B \subseteq [n/2] \\ |B| = j/2}} \{w \mid w|_B = K_*\} \tag{4.29}$$

K_* désignant la fonction constante $K : B \to \{*\}$. Intuitivement, on se donne une partie de cardinal $j/2$ de l'ensemble $[n/2]$ correspondant aux positions occupées par le symbole $*$. Il est alors aisé de dénombrer l'ensemble des mots dont les positions du symbole $*$ sont donnés ; il suffit en effet de dénombrer les mots de longueur $n/2 - j/2$ dont les lettres appartiennent à l'alphabet $\{1, 2, \ldots, k\}$. On obtient alors la bijection réciproque en rangeant les lettres d'un mot de cet ensemble dans les positions inoccupées par le symbole $*$, en respectant l'ordre des lettres. Ce nombre ne dépend évidemment pas de B ; on a en fait, par un résultat bien connu, $k^{n/2-j/2}$ tel mots. On en déduit donc, par (4.29), que le cardinal de l'ensemble $(B_k)_{i,j}^*$ est donné par

$$\binom{n/2}{j/2} k^{n/2-j/2}.$$

Considérons maintenant le cas où n est pair. On peut à nouveau subdiviser ce cas selon que j est pair ou impair. Si j est pair, il est clair que la position centrale d'un mot quelconque de $\mathcal{P}((B_k)^*_{i,j})$ ne peut être occupée par le symbole $*$. Ainsi, on a dans ce cas une bijection entre les mots de $(B_k)^*_{i,j}$ et les mots de $(B_k)^*_{i/2,j/2}$ dont la dernière lettre appartient à l'alphabet $\{1, 2, \ldots, k\}$. En fait, on a la partition suivante de $(B_k)^*_{i/2,j/2}$:

$$(B_k)^*_{i/2,j/2} = \bigcup_{\alpha \in [k]} (B_k)^*_{i/2,j/2}, \tag{4.30}$$

c'est-à-dire qu'une fois donnée le chiffre occupant la position centrale, une bijection est donnée en faisant correspondre à un mot de cet ensemble son préfixe de longueur $(n-1)/2$. Le cardinal de cet ensemble étant évidemment, dans ce cas, par le même argument que dans le premier cas,

$$k^{(n-1)/2-j/2}\binom{(n-1)/2}{j/2}$$

on obtient finalement, par (4.30),

$$|(B_k)^*_{i,j}| = k \cdot k^{(n-1)/2-j/2}\binom{(n-1)/2}{j/2} = k^{(n+1)/2-j/2}\binom{(n-1)/2}{j/2}.$$

Finalement, si j est impair, alors, n étant pair par hypothèse, la position centrale d'un mot quelconque de $(B_k)^*_{i,j}$ doit être occupée par le symbole $*$. On a donc dans ce cas une bijection entre l'ensemble $(B_k)^*_{i,j}$ et l'ensemble $(B_k)^*_{i/2,(j-1)/2}$, obtenu en faisant correspondre à un mot du premier ensemble son préfixe de longueur $(n-1)/2$. On obtient dans ce cas

$$|(B_k^*)_{i,j}| = \binom{(n-1)/2}{(j-1)/2} k^{(n-1)/2-(j-1)/2}.$$

Ainsi, comme on le vérifie aisément, on obtient bien dans chaque cas l'identité à démontrer. □

Proposition 4.3.42. Soient $i, j, k \in \mathbb{N}$. Alors, on a

$$\pi_{i,j}(k) = \sum_{d|(i,j)} \mu(d)\, p_{i/d,j/d}(k). \tag{4.31}$$

Démonstration. On obtient une bijection entre l'ensemble $\mathcal{P}((B_k)^*_{i,j})$ et l'ensemble

$$\bigsqcup_{d|(i,j)} \mathcal{P}_{\mathfrak{p}}((B_k)^*_{i/d,j/d}) \tag{4.32}$$

en faisant correspondre à un mot du premier ensemble la racine primitive de ce mot ; on obtient bien, ce faisant, un palindrome, par le corollaire 1 à la proposition 4.3.20. Soit donc $w \in \mathcal{P}((B_k)^*_{i,j})$, et soit u la racine primitive de w. Soit alors d l'ordre de u en tant que racine de w. On a alors évidemment

$$d\,|u|_{A_k} = i,\ d\,|u|_* = j,$$

et ainsi, on a bien $d \mid (i,j)$, ce qui achève de montrer que la présente application est bien définie. Finalement, on se convainc aisément qu'il s'agit bien d'une bijection, la bijection réciproque étant obtenue en faisant correspondre à un mot de l'ensemble (4.32) la puissance de ce mot de longueur n. On en déduit alors immédiatement l'identité

$$p_{i,j}(k) = \sum_{d|(i,j)} \pi_{i/d,j/d}(k).$$

L'identité à démontrer est alors obtenue en appliquant la méthode d'inversion de Möbius à l'identité ci-dessus. □

Soient $i, j, k \in \mathbb{N}$. Nous allons noter dans ce qui suit $d_{i,j}(k)$ le cardinal de l'ensemble $\mathcal{D}((B_k^*)_{i,j})$.

Lemme 4.3.43. Soient $i, j, k \in \mathbb{N}$. On a

$$d_{i,j}(k) = k\, p_{i-1,j}(k) + p_{i,j-1}(k). \tag{4.33}$$

Démonstration. Posons $n = i + j$. On a alors la bijection canonique suivante entre l'ensemble $\mathcal{D}((B_k)^*_{i,j})$ et l'ensemble

$$\bigsqcup_{\alpha\in[k]} \mathcal{P}((B_k)^*_{i-1,j}) \sqcup \mathcal{P}((B_k)^*_{i,j-1}),$$

obtenue en faisant correspondre à un mot $w \in \mathcal{D}((B_k)^*_{i,j})$ le couple formé du suffixe de longueur $n-1$ de w et du premier symbole de ce même mot, dans le cas où ce symbole appartient à l'ensemble $\{1, 2, \ldots, k\}$, et en faisant correspondre à w son suffixe de longueur $n-1$ sinon. On se convainc aisément qu'il s'agit bien d'une bijection, et ainsi, on en déduit immédiatement l'identité à démontrer. □

Proposition 4.3.44. Soient $i, j, k \in \mathbb{N}$. On a

$$\delta_{i,j}(k) = \sum_{d|(i,j)} \mu(d)\big(k\, p_{i/d-1,j/d}(k) + p_{i/d,j/d-1}(k)\big). \tag{4.34}$$

Démonstration. Là encore, on utilise l'unicité de la racine primitive d'un mot. Comme de plus on sait que l'ensemble des dexterpalindromes forme un langage itératif, alors l'application

$$\mathcal{D}((B_k)^*_{i,j}) \to \bigsqcup_{d|(i,j)} \mathcal{D}_{\mathrm{p}}((B_k)^*_{i/d,j/d})$$

obtenue en faisant correspondre, à tout mot du premier ensemble, la racine primitive de ce mot, est bien définie, et est en fait une bijection, par le raisonnement habituel.

On en déduit immédiatement

$$d_{i,j}(k) = \sum_{d|(i,j)} \delta_{i/d,j/d}(k)$$

et ainsi, par le lemme 4.3.43, on a

$$k\, p_{i-1,j}(k) + p_{i,j-1}(k) = \sum_{d|(i,j)} \delta_{i/d,j/d}(k).$$

Finalement, on applique une fois de plus la méthode d'inversion de Möbius à cette dernière identité, et ainsi on trouve bien l'identité à démontrer. □

4.4 Itération de Newton

Soient M une espèce moléculaire, t un nombre complexe arbitraire. Nous avons vu à la section 3.2 qu'il existe un nombre complexe ξ tel que l'on ait

$$Z_M(\xi,\xi,\dots) = t, \qquad Z_{M'}(\xi,\xi,\dots) \neq 0 \tag{4.35}$$

si, et seulement si, il existe une $\mathbb{C}$-espèce Φ vérifiant l'équation

$$M(\Phi) = t + X. \tag{4.36}$$

Nous allons présenter une méthode itérative permettant le calcul de solutions dans ce cas ; cette méthode fait l'objet de la proposition 4.4.2 plus bas.

Soit Φ une $\mathbb{C}$-espèce arbitraire. Rappelons que l'on note

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2 + \dots$$

où, pour $k \in \mathbb{N}$, Φ_k désigne la partie homogène de degré k de Φ. De même, on note, quel que soit $k \in \mathbb{N}$,

$$\Phi_{\leq k} = \Phi_0 + \Phi_1 + \dots + \Phi_k.$$

Lemme 4.4.1. Soit M une espèce moléculaire, et soient X et Y deux espèces de singletons. Alors, on a

$$M(X+Y) = M(X) + M'(X)\cdot Y + R(X,Y)$$

où $R(X,Y)$ est nulle ou de degré ≥ 2 par rapport à Y.

Démonstration. Soit n le degré de M. Il s'agit en fait de montrer que les restrictions aux bi-cardinaux $(n,0)$ et $(n-1,1)$ de l'espèce $M(X+Y)$ sont respectivement isomorphes aux espèces $M(X)$ et $M'(X)\cdot Y$. Or, ceci est clair dans le premier cas. Montrons donc le deuxième des deux isomorphismes précédents, à savoir

$$(M(X+Y))_{n-1,1} \cong M'(X)\cdot Y, \tag{4.37}$$

où $(M(X+Y))_{n-1,1}$ désigne la restriction au bi-cardinal $(n-1,1)$ de l'espèce $M(X+Y)$. Soit $U = (U_1, U_2) \in \boldsymbol{B}^2$ tel que $|U_1| = n-1$ et $|U_2| = 1$. Posons $U_2 = \{y\}$. Soit alors $\sigma_U : U \xrightarrow{\sim} U_1 \cup \{*\}$ telle que $\sigma_U(x) = x$, pour tout $x \in U_1$, et $\sigma_U(y) = *$. On vérifie alors aisément, le bi-ensemble U étant arbitraire, que l'application

$$\begin{array}{rccc} \alpha_U : & (M(X+Y))_{n-1,1}[U] & \to & M'(X)\cdot Y[U] \\ & s & \mapsto & (M(X+Y)[\sigma_U](s), \{y\}), \end{array}$$

définit un isomorphisme naturel entre les espèces $(M(X+Y))_{n-1,1}$ et $M'(X)\cdot Y$ □

Soit Ψ une $\mathbb{C}$-espèce, et soit $t \in \mathbb{C}$. Nous allons dans ce qui suit noter Ψ_t^+ la $\mathbb{C}$-espèce définie par

$$\Psi_t^+ = \Psi - \frac{M(\Psi) - t - X}{M'(\Psi)}.$$

Proposition 4.4.2. Soit $t \in \mathbb{C}$, et soit M une espèce moléculaire. S'il existe une $\mathbb{C}$-espèce Φ telle que $M(\Phi) = t + X$, alors, quel que soit $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\Phi_{\leq 2k+1} = \left.(\Phi_{\leq k})_t^+\right|_{\leq 2k+1}. \tag{4.38}$$

Démonstration. Soit, par hypothèse, $\xi \in \mathbb{C}$ (lemme 3.2.2) tel que

$$Z_M(\xi, \xi, \ldots) = t, \qquad Z_{M'}(\xi, \xi, \ldots) \neq 0.$$

Posons alors, ξ étant arbitraire, $\Phi(0) = \xi$. Soit alors $k \in \mathbb{N}$. Supposons par récurrence sur k que $\Phi_{\leq k}$ soit connu. Nous allons montrer qu'on peut en déduire la partie $\Phi_{k+1} + \cdots + \Phi_{2k+1}$ de Φ. On a, par le lemme 4.4.1,

$$\begin{aligned} M(\Phi_{\leq 2k+1}) &= M(\Phi_{\leq k} + (\Phi_{\leq 2k+1} - \Phi_{\leq k})) \\ &= M(\Phi_{\leq k}) + M'(\Phi_{\leq k}) \cdot (\Phi_{\leq 2k+1} - \Phi_{\leq k}) + O(X^{2(k+1)}) \end{aligned}$$

et ainsi, on en déduit immédiatement,

$$M(\Phi_{\leq 2k+1})|_{\leq 2k+1} = M(\Phi_{\leq k})|_{\leq 2k+1} + M'(\Phi_{\leq k}) \cdot (\Phi_{\leq 2k+1} - \Phi_{\leq k})|_{\leq 2k+1} \,.$$

On a alors, par définition de Φ

$$t + X = M(\Phi_{\leq k}) + M'(\Phi_{\leq k}) \cdot (\Phi_{\leq 2k+1} - \Phi_{\leq k}) + O(X^{2(k+1)}).$$

On en déduit aisément la suite d'égalités

$$\begin{aligned} t + X - M(\Phi_{\leq k})|_{\leq 2k+1} &= M'(\Phi_{\leq k})(\Phi_{\leq 2k+1} - \Phi_{\leq k})|_{\leq 2k+1} \,, \\ \Phi_{\leq 2k+1} - \Phi_{\leq k} &= \left.\frac{t + X - M(\Phi_{\leq k})}{M'(\Phi_{\leq k})}\right|_{\leq 2k+1} , \\ \Phi_{\leq 2k+1} &= \Phi_{\leq k} - \left.\frac{M(\Phi_{\leq k}) - t - X}{M'(\Phi_{\leq k})}\right|_{\leq 2k+1} \\ &= (\Phi_{\leq k})_t^+|_{\leq 2k+1} \,, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. $\square$

CHAPITRE V

MISE EN APPLICATION DE FONCTIONS DE CALCUL DU DÉVELOPPEMENT DES $\mathbb{C}$-ESPÈCES CYCLO-ENSEMBLISTES ET APPLICATION AU CALCUL DES RACINES SYMÉTRIQUES ET DES RACINES CYCLIQUES

5.1 Introduction

Nous donnons d'abord principalement dans ce chapitre deux fonctions écrites en langage Maple, à savoir les fonctions *expand/E* et *expand/C*, qui, en s'adjoignant à la fonction *expand* de ce même langage, permettent le calcul du développement des $\mathbb{C}$-*espèces cyclo-ensemblistes* en un nombre arbitraire de variables. Notons que chacune de ces fonctions utilisent un certain nombre de fonctions auxiliaires que nous donnons également ; ces fonctions auxiliaires sont en fait des mises en application de formules données au chapitre IV. Une fois ces fonctions mis en place, l'itération de Newton, appliquée au calcul de racines symétriques et de racines cycliques, devient ensuite une traduction à peu près immédiate de la méthode de la section 4.4.

5.2 Définitions

La classe $\mathcal{E}$ des espèces ensemblistes est la plus petite classe d'espèces contenant l'espèce E, qui soit stable pour les lois de composition suivantes, dans le cas des espèces ordinaires :

i) addition (de famille sommable),

ii) multiplication,

iii) composition partitionnelle,

iv) dérivation,

v) prise de composante moléculaire.

On obtient l'analogue de la classe $\mathcal{E}$ au contexte des $\mathbb{C}$-espèces en ajoutant aux lois de composition ci-dessus la multiplication par un scalaire complexe. De même, on a l'analogue de la classe $\mathcal{E}$ au contexte des espèce multi-sortes en remplaçant l'ensemble formée de l'espèce E par un ensemble d'espèces multi-sortes ensemblistes. Par abus de langage, nous parlerons dans chaque cas de la *classe des $\mathbb{C}$-espèces*.

Plus généralement, soit $\mathcal{F}$ une famille de $\mathbb{C}$-espèces unisortes ou multisortes. On dit alors de la plus petite classe d'espèces contenant $\mathcal{F}$ et qui soit stable pour les lois de composition ci-dessus que c'est la *classe des espèces de genre $\mathcal{F}$* ; cette classe se note

$\mathcal{C} = \mathcal{CF}$, cette classe pouvant être formé d'espèces, ou de $\mathbb{C}$-espèces, ou même de $\mathbb{C}$-espèces multi-sortes, selon qu'on adjoint ou non aux lois de composition ci-dessus la multiplication par un scalaire complexe ou qu'on prenne ou non comme « ensembles de générateurs » des espèces uni-sortes ou multi-sortes

Remarque. Si $F \in \mathcal{C}(\mathcal{F})$ et $F(0) \neq 0$ (dans $\mathbb{C}$), alors F admet un inverse dans $\mathcal{C}(\mathcal{F})$. On a en effet

$$F^{-1} = \frac{1}{F(0) + F_+} = \frac{1}{F(0)\,(1 - (-(F_+/F(0))))} = \frac{1}{F(0)} \sum_{k \geq 0} \left(-\frac{F_+}{F(0)}\right)^k.$$

5.3 Les espèces cyclo-ensemblistes

Comme nous l'avons déjà dit plus haut, les fonctions *expand/E* et *expand/C* qui suivent, en s'« adjoignant » à la fonction *expand* du langage Maple, permettent le calcul du développement des $\mathbb{C}$-espèces cyclo-ensemblistes, c'est-à-dire des $\mathbb{C}$-espèce de genre $\mathcal{F}$, avec $\mathcal{F} = \{E, C\}$.

Donnons d'abord les fonctions auxiliaires utilisées à la fois par la fonction *expand/E* et par la fonction *expand/C*.

– La fonction suivante effectue la somme des termes constants du paramètre S. Le nom de cette fonction est formé des initiales de « *somme des termes constants.* La variable *tc* désigne le « terme courant ».

```
stc := proc(S)
    local i, tc, resultat;
      resultat := 0 ;
      if not type(S, ' + ') then iftype(S, constant) then S fi
      elsefor i to nops(S) do
            tc := op(i, S) ; iftype(tc, constant) then resultat := resultat + tc fi
         od
      fi;
      resultat
    end
```

Exemple.

```
>  stc(2 + X + Y + sin(1)) ;
```

$$2 + \sin(1)$$

– La fonction suivante effectue le produit des facteurs constants du monôme m. Ici, *pfc* est formé des initiales de « *produit des facteurs constants* ». Le paramètre m désigne un « *monôme généralisé* », c'est-à-dire une $\mathbb{C}$-espèce ensembliste formé d'un seul terme. La variable *fc* désigne le *facteur courant.*

```
pfc := proc(m)
    local i, fc, resultat;
      resultat := 1 ;
      for i to nops(m) do
         fc := op(i, m) ; iftype(fc, constant) then resultat := resultat × fc fi
      od;
      resultat
    end
```

Exemple.

```
>  pfc(2 * X * ln(2) * Y * E2(X));
```

$$2\ln(2)$$

5.3.1 La fonction *expand/E*

Avant d'en arriver à la fonction *expand/E* proprement dite, donnons-en d'abord les fonctions auxiliaires.

– La fonction suivante retourne le développement de $E_n(\xi + x)$. Le paramètre x désigne une espèce ensembliste arbitraire, alors que le paramètre ξ désigne aussi bien une variable « indéterminée » qu'un paramètre numérique.

```
Enxipx := proc(n, ξ, x)
    local i, j, resultat;
      if n = 0 then 1
      elif n = 1 then ξ + x
      else
        resultat := mul(ξ + j, j = 0..n − 1)/n! +
                        mul(ξ + j, j = 0..n − 2) × x/(n − 1)!;
        resultat := resultat +
          add(mul(ξ + j, j = 0..n − 1 − i) × E(i, x)/(n − i)!, i = 2..n);
        resultat
      fi
    end
```

Exemple.

```
>  Enxipx(2,2,X + Y);
```

$$3 + 2X + 2Y + \mathrm{E}(2,\, X + Y)$$

– La fonction suivante retourne l'expression obtenue en substituant à X la valeur du paramètre x dans le développement de $E_n(kX)$.

```
dm := proc(n, k, x)
    local resultat, comp, λ, i, terme;
      with(combinat);
      resultat := 0;
      comp := composition(n, k);
      for λ in comp do
        terme := 1;
        for i to k  do if λ_i = 1 then terme := terme × x
          else terme := terme × E(λ_i, x) fi od;
        resultat := resultat + terme
      od;
      resultat
    end
```

```
>  dm(4,2,X);
```

$$2\,\mathrm{E}(3,\, X)\, X + \mathrm{E}(2,\, X)^2$$

– La fonction suivante retourne l'expression obtenue en substituant à X la valeur du paramètre x dans le développement de $E_n(k+X)$.

$Enkx$:= **proc**(n, k, x)
  local i, j, dec;
    with($combinat$) ;
    dec := add(binomial(k, i) × dm(n, i, x), i = 1..n) ;
    dec
  end

Exemple.

```
> Enkx(10,2,X) ;
```

$$2\,\mathrm{E}(10,\,X) + 2\,\mathrm{E}(6,\,X)\,\mathrm{E}(4,\,X) + 2\,\mathrm{E}(8,\,X)\,\mathrm{E}(2,\,X) + 2\,\mathrm{E}(9,\,X)\,X + 2\,\mathrm{E}(7,\,X)\,\mathrm{E}(3,\,X) + \mathrm{E}(5,\,X)^2$$

– La fonction suivante retourne le polynôme $Z_{E_n}(\xi,\xi,\ldots)$. Le nom de cette fonction renvoie aux initiales de « *polynôme indicateur de cycles* ».

$picE$:= **proc**(n, ξ) **local** k; mul($\xi + k$, k = 0..$n-1$)/n! **end**

Exemple.

```
> picE(2,xi) ;
```

$$\frac{1}{2}\,\xi\,(\xi+1)$$

La fonction suivante est la fonction principale de calcul du développement d'une $\mathbb{C}$-espèce ensembliste.

$expand/E$:= **proc**(i, x)
  local k, n, y, pm, ξ;
    y := expand(x) ;
    if type(y, ' + ') **then**
      ξ := stc(y) ;
      if $\xi \neq 0$ **then** expand(Enxipx(i, ξ, $y - \xi$))
      elif $i = 1$ **then** y
      else
        n := op(1, y) ;
        y := $y - n$;
        if $i = 2$ **then** expand(E(2, n) + $y \times n$ + E(2, y))
        else expand(E(i, n) + E($i-1$, n) × y
          + sum('E($i-k$, n) × E(k, y)', 'k' = 2..$i-2$)
          + n × E($i-1$, y) + E(i, y))
        fi
      fi
    elif type(y, ' * ') **then**
      n := pfc(y) ; **if** $n \neq 1$ **then** expand(Enkx(i, n, y/n)) **else** E(i, y) **fi**
    elif type(y, $constant$) **then** picE(i, y)
    else E(i, y)
    fi
  end

Exemples.

```
> expand(E(1,3 + E(2,X + Y))) ;
```

$$3 + \mathrm{E}(2,\, X) + Y\, X + \mathrm{E}(2,\, Y)$$

```
> expand(E(2,2 + E(2,X[1] + X[2]))) ;
```

$$3 + 2\,\mathrm{E}(2,\, X_1) + 2\,X_2\,X_1 + 2\,\mathrm{E}(2,\, X_2) + \mathrm{E}(2,\, \mathrm{E}(2,\, X_1)) + \mathrm{E}(2,\, X_1)\,X_2\,X_1 + \mathrm{E}(2,\, X_1)\,\mathrm{E}(2,\, X_2) + \mathrm{E}(2,\, X_2\,X_1) + \mathrm{E}(2,\, X_2)\,X_2\,X_1 + \mathrm{E}(2,\, \mathrm{E}(2,\, X_2))$$

```
> expand(E(2, 2 * X * E(2,X))) ;
```

$$2\,\mathrm{E}(2,\, \mathrm{E}(2,\, X)\,X) + \mathrm{E}(2,\, X)^2\,X^2$$

```
> expand(E(3,3 + X)) ;
```

$$10 + 6\,X + 3\,\mathrm{E}(2,\, X) + \mathrm{E}(3,\, X)$$

5.3.2 La fonction *expand/C*

Avant d'en arriver à la fonction *expand/C* elle-même, donnons-en d'abord les fonctions auxiliaires.

– La fonction suivante retourne le nombre de mots de Lyndon construits sur un alphabet ordonné à deux lettres, comptant i occurrences de la première lettre et j occurrences de la deuxième lettre.

```
nml := proc(i, j)
    local pgcd, somme, k, d, diviseurs, nombre;
        with(numtheory) ;
        pgcd := igcd(i, j) ;
        diviseurs := [op(divisors(pgcd))] ;
        nombre := 0 ;
        somme := i + j ;
        for k to nops(diviseurs) do
            d := diviseurs_k ;
            nombre := nombre + mobius(d) × binomial(somme/d, i/d)
        od;
        RETURN(nombre/somme)
    end
```

– La fonction suivante retourne la décomposition moléculaire de l'espèce bi-sorte $C_n(T + X)$.

```
dmcd := proc(T, X, n)
    local d, diviseurs, dm, i;
        with(numtheory) ;
        dm := 0 ;
        diviseurs := divisors(n) ;
        diviseurs := diviseurs minus {n} ;
        for d in diviseurs do
            for i from 0 to d do dm := dm + nml(i, d − i) × C(n/d, T^i × X^(d−i)) od
        od;
```

$$
\begin{array}{l}
\quad\quad \textbf{for } i \textbf{ from } 0 \textbf{ to } n \textbf{ do } dm := dm + \mathrm{nml}(i,\, n-i) \times T^{i} \times X^{(n-i)} \textbf{ od};\\
\quad\quad \mathrm{RETURN}(dm)\\
\quad \textbf{end}
\end{array}
$$

Exemple.

```
>  dmcd(T,X,6) ;
```

$$
\mathrm{C}(6,\, X) + \mathrm{C}(6,\, T) + \mathrm{C}(3,\, T\, X) + \mathrm{C}(2,\, T\, X^2) + \mathrm{C}(2,\, T^2\, X) + T\, X^5 + 2\, T^2\, X^4 \\ + 3\, T^3\, X^3 + 2\, T^4\, X^2 + T^5\, X
$$

– La fonction suivante retourne le nombre de mots de Lyndon de longueur n construits sur un alphabet à k lettres.

$$
\begin{array}{l}
\mathit{lyndon} := \textbf{proc}(n,\, k)\\
\quad \textbf{local } d,\, \mathit{diviseurs},\, \mathit{resultat};\\
\quad\quad \mathrm{with}(\mathit{numtheory});\\
\quad\quad \mathit{resultat} := 0;\\
\quad\quad \mathit{diviseurs} := \mathrm{divisors}(n);\\
\quad\quad \textbf{for } d \textbf{ in } \mathit{diviseurs} \textbf{ do } \mathit{resultat} := \mathit{resultat} + \mathrm{mobius}(n/d) \times k^{d} \textbf{ od};\\
\quad\quad \mathit{resultat} := \mathit{resultat}/n;\\
\quad\quad \mathit{resultat}\\
\quad \textbf{end}
\end{array}
$$

– La fonction suivante retourne le développement de la $\mathbb{C}$-espèce obtenue en substituant la valeur du paramètre x à X dans la $\mathbb{C}$-espèce $C_n(kX)$.

$$
\begin{array}{l}
\mathit{Cnkx} := \textbf{proc}(n,\, k,\, x)\\
\quad \textbf{local } d,\, \mathit{diviseurs},\, \mathit{dec};\\
\quad\quad \mathrm{with}(\mathit{numtheory});\\
\quad\quad \mathit{diviseurs} := \mathrm{divisors}(n);\\
\quad\quad \mathit{diviseurs} := \mathit{diviseurs} \mathrm{\ minus\ } \{1\};\\
\quad\quad \mathit{dec} := \mathrm{lyndon}(n,\, k) \times x^{n};\\
\quad\quad \mathit{dec} := \mathit{dec} + \mathrm{add}(\mathrm{lyndon}(n/d,\, k) \times \mathrm{C}(d,\, x^{(n/d)}),\, d = \mathit{diviseurs});\\
\quad\quad \mathit{dec}\\
\quad \textbf{end}
\end{array}
$$

Exemple.

```
>  Cnkx(3,3,X) ;
```

$$
8\, X^3 + 3\, C(3,\, X)
$$

– La fonction suivante retourne le nombre de mots de Lyndon μ tels que $|\mu|_{A_k} = i$, $|\mu|_* = j$, avec A_k un alphabet ordonné à k lettres.

$$
\begin{array}{l}
\alpha := \textbf{proc}(i,\, j,\, k)\\
\quad \textbf{local } d,\, \delta,\, \mathit{resultat};\\
\quad\quad \mathrm{with}(\mathit{numtheory});\\
\quad\quad d := i + j;\\
\quad\quad \mathit{resultat} := \mathrm{add}(\mathrm{mobius}(\delta) \times \mathrm{binomial}(d/\delta,\, j/\delta) \times k^{(i/\delta)},\\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad \delta = \mathrm{divisors}(\mathrm{igcd}(i,\, j)));\\
\quad\quad \mathit{resultat}/d\\
\quad \textbf{end}
\end{array}
$$

Exemple.

```
> alpha(3,3,3);
```

$$89$$

– La fonction suivante retourne le développement de la $\mathbb{C}$-espèce obtenue par substitution du paramètre x à X dans la $\mathbb{C}$-espèce $C_n(\xi + X)$.

$Cnxipx := \textbf{proc}(n,\ \xi,\ x)$
  $\textbf{local}\, i,\ j,\ d,\ diviseurs,\ resultat;$
    $\mathrm{with}(numtheory);$
    $\textbf{if}\, n = 0\, \textbf{then}\, 1$
    $\textbf{elif}\, n = 1\, \textbf{then}\, \xi + x$
    $\textbf{elif}\, n = 2\, \textbf{then}\, 1/2 \times \xi \times (\xi + 1) + \xi \times x + \mathrm{E}(2,\ x)$
    $\textbf{else}$
      $diviseurs := \mathrm{divisors}(n)\ \mathrm{minus}\, \{n\};$
      $\textbf{if}\, n \bmod 2 = 0\ \ \textbf{then}\, diviseurs := diviseurs\ \mathrm{minus}\, \{1/2 \times n\}\, \textbf{fi};$
      $resultat :=$
        $\mathrm{add}(\mathrm{add}(\alpha(i,\ d - i,\ \xi) \times \mathrm{C}(n/d,\ x^{(d-i)}),\ i = 0..d - 1) + \alpha(d,\ 0,\ \xi),$
          $d = diviseurs);$
      $\textbf{if}\, n \bmod 2 = 0\ \ \textbf{then}\, resultat := resultat$
        $+ \mathrm{add}(\alpha(i,\ 1/2 \times n - i,\ \xi) \times \mathrm{E}(2,\ x^{(d-i)}),\ i = 0..1/2 \times n - 1)$
        $+ \alpha(1/2 \times n,\ 0,\ \xi)$
      $\textbf{fi};$
      $resultat + \mathrm{add}(\alpha(i,\ n - i,\ \xi) \times x^{(n-i)},\ i = 0..n)$
    $\textbf{fi}$
  $\textbf{end}$

Exemple.

```
> Cnxipx(3,3,X);
```

$$\mathrm{C}(3,\ X) + 11 + 3\,X^2 + 9\,X$$

– La fonction suivante retourne le polynôme $Z_{C_n}(\xi, \xi, \ldots)$.

$picC := \textbf{proc}(n,\ \xi)$
  $\textbf{local}\, d;$
  $\mathrm{with}(numtheory);$
  $\mathrm{add}(\phi(d) \times \xi^{(n/d)},\ d = \mathrm{divisors}(n))/n$
  $\textbf{end}$

Exemples.

```
> picC(2,xi);
```

$$\frac{1}{2}\,\xi^2 + \frac{1}{2}\,\xi$$

```
> picC(3,xi);
```

$$\frac{1}{3}\,\xi^3 + \frac{2}{3}\,\xi$$

```
> picC(4,xi);
```

$$\frac{1}{4}\,\xi^4 + \frac{1}{4}\,\xi^2 + \frac{1}{2}\,\xi$$

```
> picC(5,xi);
```

$$\frac{1}{5}\xi^5 + \frac{4}{5}\xi$$

```
> picC(6,xi);
```

$$\frac{1}{6}\xi^6 + \frac{1}{6}\xi^3 + \frac{1}{3}\xi^2 + \frac{1}{3}\xi$$

Finalement, la fonction suivante, utilisée en conjonction avec la fonction *expand/E*, est la fonction principale de calcul du développement des $\mathbb{C}$-espèces cyclo-ensemblistes.

```
expand/C := proc(i, x)
    local k, n, y, pm, ξ;
      y := expand(x);
      if type(y, `+`) then
        ξ := stc(y);
        if ξ ≠ 0 then expand(Cnxipx(i, ξ, y − ξ))
        elif i = 1 then y
        else
          n := op(1, y);
          y := y − n;
          if i = 2 then expand(E(2, n) + y × n + E(2, y))
          else expand(dmcd(n, y, i)) fi
        fi
      elif type(y, `*`) then
        n := pfc(y);
        if n ≠ 1 then expand(Cnkx(i, n, y/n))
        else if i = 1  then y elif i = 2 then E(2, y) else C(i, y) fi
        fi
      elif type(y, constant) then picC(i, y)
      else if i = 1  then y elif i = 2 then E(2, y) else C(i, y) fi
      fi
    end
```

Exemples.

```
> expand(C(3,T + C(2,T + X)));
```

$$\begin{aligned}&\mathrm{C}(3,\,\mathrm{E}(2,\,X)) + \mathrm{C}(3,\,X\,T) + X\,T\,\mathrm{E}(2,\,X)^2 + X^2\,T^2\,\mathrm{E}(2,\,X) + \mathrm{C}(3,\,\mathrm{E}(2,\,T))\\ &\quad + \mathrm{E}(2,\,T)\,X^2\,T^2 + 2\,\mathrm{E}(2,\,T)\,\mathrm{E}(2,\,X)\,X\,T + \mathrm{E}(2,\,T)\,\mathrm{E}(2,\,X)^2\\ &\quad + \mathrm{E}(2,\,T)^2\,X\,T + \mathrm{E}(2,\,T)^2\,\mathrm{E}(2,\,X) + \mathrm{C}(3,\,T) + T\,\mathrm{E}(2,\,T)^2\\ &\quad + 2\,\mathrm{E}(2,\,T)\,X\,T^2 + 2\,T\,\mathrm{E}(2,\,T)\,\mathrm{E}(2,\,X) + X^2\,T^3 + 2\,\mathrm{E}(2,\,X)\,X\,T^2\\ &\quad + T\,\mathrm{E}(2,\,X)^2 + T^2\,\mathrm{E}(2,\,T) + T^3\,X + T^2\,\mathrm{E}(2,\,X)\end{aligned}$$

```
> expand(C(3,2 + C(2,X[1] + X[2])));
```

$$\begin{aligned}&\mathrm{C}(3,\,\mathrm{E}(2,\,X_2)) + \mathrm{C}(3,\,X_2\,X_1) + X_2\,X_1\,\mathrm{E}(2,\,X_2)^2 + {X_2}^2\,{X_1}^2\,\mathrm{E}(2,\,X_2)\\ &\quad + \mathrm{C}(3,\,\mathrm{E}(2,\,X_1)) + \mathrm{E}(2,\,X_1)\,{X_2}^2\,{X_1}^2 + 2\,\mathrm{E}(2,\,X_1)\,\mathrm{E}(2,\,X_2)\,X_2\,X_1\\ &\quad + \mathrm{E}(2,\,X_1)\,\mathrm{E}(2,\,X_2)^2 + \mathrm{E}(2,\,X_1)^2\,X_2\,X_1 + \mathrm{E}(2,\,X_1)^2\,\mathrm{E}(2,\,X_2) + 4\\ &\quad + 2\,\mathrm{E}(2,\,X_1)^2 + 4\,\mathrm{E}(2,\,X_1)\,X_2\,X_1 + 4\,\mathrm{E}(2,\,X_1)\,\mathrm{E}(2,\,X_2) + 2\,{X_2}^2\,{X_1}^2\\ &\quad + 4\,\mathrm{E}(2,\,X_2)\,X_2\,X_1 + 2\,\mathrm{E}(2,\,X_2)^2 + 4\,\mathrm{E}(2,\,X_1) + 4\,X_2\,X_1 + 4\,\mathrm{E}(2,\,X_2)\end{aligned}$$

5.3.3 Interface

Les deux fonctions suivantes forment l'« interface homme-machine ».

$transf :=$ **proc**(x)
local n, y, E;
$y := x$;
if type$(x$, ' + ') **then** $n :=$ op$(1, x)$; $y := x - n$; transf(n) + transf(y)
elif type$(x$, ' * ') **then** $n :=$ op$(1, x)$; $y := x/n$; transf$(n) \times$ transf(y)
elif type$(y$, *function*$)$ **then**
E(substring(op(0, y), 2..length(op(0, y))), transf(op(1, y)))
else y
fi
end

Exemple.

```
>  transf(2 * 3 * E3(X + E2(E4(Y)))) ;
```

$$6\,\mathrm{E}(3,\, X + \mathrm{E}(2,\, \mathrm{E}(4,\, Y)))$$

La fonction suivante est la « réciproque » de la fonction précédente.

$transfinv :=$ **proc**(x)
local n, y, E;
$y := x$;
if type$(x$, ' + ') **then** $n :=$ op$(1, x)$; $y := x - n$; transfinv(n) + transfinv(y)
elif type$(x$, ' * ') **then** $n :=$ op$(1, x)$; $y := x/n$; transfinv$(n) \times$ transfinv(y)
elif type$(y$, '^') **then** transfinv$(\mathrm{op}(1, y))^{\mathrm{op}(2, y)}$
elif type$(y$, *function*$)$ **then** $E_{\mathrm{op}(1, y)}$(transfinv(op(2, y)))
else y
fi
end

Exemple.

```
>  transfinv(E(100,X + E(5,Y)) + E(3,Y)) ;
```

$$E_{100}(X + E_5(Y)) + E_3(Y)$$

5.4 Calcul des racines symétriques et des racines cycliques

En conclusion, nous donnons dans cette section des mises en application de l'itération de Newton, appliquée respectivement au calcul de racines symétriques et de racines cycliques, ceci étant rendu possible, répétons-le, par l'adjonction à la fonction *expand* des fonctions *expand/E* et *expand/C* données à la section précédente. Avant d'en venir là, nous donnons les fonctions auxiliaires utilisées dans les deux cas.

– La fonction suivante retourne le degré d'une espèce cyclo-ensembliste donnée sous la forme d'un « monôme généralisé », c'est-à-dire sous la forme d'une expression obtenue en itérant un nombre fini de fois les lois de multiplication, de substitution ou de multiplication par un scalaire. Par exemple, l'expression $E_3(3\,X \cdot E_2(E_4))$ est un « monôme généralisé », alors que l'expression $E_3(X + E_2(X))$ n'en est pas un.

$Edegre :=$ **proc**(x)
local *degre*, n, y;

if type(x, *constant*) **then** 0
elif type(x, *symbol*) **then** 1
elif type(x, '^') **then** op(2, x) $\times$ Edegre(op(1, x))
elif type(x, ' * ') **then** n := op(1, x) ; y := x/n ; Edegre(n) + Edegre(y)
else op(1, x) $\times$ Edegre(op(2, x))
fi
end

```
> Edegre(E(2,X * E(3,Y))^2 * X^2) ;
```

$$18$$

– La fonction suivante retourne la somme des termes de degré $\leq n$ du paramètre F, ce dernier devant être une somme de « monômes généralisés ». En fait, dans la suite, cette fonction prendra comme arguments des sommes dont les termes sont des espèces moléculaire.

tronq := **proc**(F, n)
local m, Ft;
if not type(F, ' + ') **then**
if Edegre(F) $\leq n$ **then** F **else** 0 **fi**
else Ft := 0 ;
for m **in** F **do if** Edegre(m) $\leq n$ **then** Ft := $Ft + m$ **fi od** ;
Ft
fi
end

– La fonction auxiliaire suivante retourne le développpement limité de degré n de l'inverse d'une $\mathbb{C}$-espèce. La lettre t dans Ft est l'initiale du mot « *tronqué* ». La variable Ftk est affectée des puissances successives du développement limité de $(F - F_0)/F_0$.

inv := **proc**(F, n)
local k, Ft, Ftk, tc, *resultat*;
tc := stc(F) ;
Ft := tronq(($F - tc$)/tc, n) ;
if $n = 0$ **then** $1/tc$
elif $n = 1$ **then** $(1 - Ft)/tc$
else
resultat := $1 - Ft$;
Ft := tronq(Ft, $n - 1$) ;
Ftk := Ft ;
for k **from** 2 **to** n **do**
Ftk := tronq(expand($Ftk \times Ft$), n) ;
resultat := *resultat* + $(-1)^k \times Ftk$
od;
resultat/tc
fi
end

Exemples.

```
> inv(1 + X,11) ;
```

$$1 - X + X^2 - X^3 + X^4 - X^5 + X^6 - X^7 + X^8 - X^9 + X^{10} - X^{11}$$

```
> inv(1 + E(2,X),11);
```

$$1-\mathrm{E}(2,\,X)+\mathrm{E}(2,\,X)^2-\mathrm{E}(2,\,X)^3+\mathrm{E}(2,\,X)^4-\mathrm{E}(2,\,X)^5$$

5.4.1 Calcul du développement limité de racines symétriques

La fonction suivante retourne le développement limité de degré $2^{(\nu-1)}$ de la solution Φ à l'équation $E_n(\Phi)=X$. La variable *Phin* se lit « nouvelle approximation de Φ », tandis que la variable *Phi* est affectée de l'approximation « courante ».

iterE := **proc**(n, ν)
  local k, Φ;
    $\Phi := -n+1$;
    for k **to** ν **do**
      if type(Φ, *constant*) **then** $\Phi := \Phi - (\mathrm{picE}(n,\,\Phi)-X)/\mathrm{picE}(n-1,\,\Phi)$
      else
        $\Phi := \Phi - (\mathrm{tronq}(\mathrm{expand}(\mathrm{E}(n,\,\Phi)),\,2^k-1)-X)\times$
          $\mathrm{inv}(\mathrm{tronq}(\mathrm{expand}(\mathrm{E}(n-1,\,\Phi)),\,2^k-1),\,2^k-1)$;
        $\Phi := \mathrm{tronq}(\mathrm{expand}(\Phi),\,2^k-1)$
      fi
    od;
    transfinv(Φ)
  end

Exemples.

```
> iterE(2,3);
```

$$\begin{aligned}&-1-X+4X^6-2X^5+X^4+E_2(E_2(X)\,X)+E_2(X)^2-E_2(X)^3+E_2(X^2)-E_2(X^3)\\&\quad -X^3+3\,E_2(X^2)\,E_2(X)\,X+4\,E_2(X)^3\,X-3\,E_2(E_2(X))\,E_2(X)\,X\\&\quad -E_2(E_2(X))-2\,E_2(E_2(X))\,X^2-E_2(E_2(X)\,X)\,X+4\,E_2(E_2(X))\,X^3-7\,X^7\\&\quad -2\,E_2(X)^2\,X+E_2(E_2(X))\,E_2(X)+E_2(X^3)\,X-E_2(X^2)\,E_2(X)\\&\quad +2\,E_2(X^2)\,X^2-E_2(X^2)\,X+E_2(X)\,X-E_2(X)-2\,E_2(X)\,X^2+4\,E_2(X)\,X^3\\&\quad +17\,E_2(X)\,X^5-8\,E_2(X)\,X^4-14\,E_2(X)^2\,X^3+5\,E_2(X)^2\,X^2+X^2\\&\quad +E_2(E_2(X))\,X-4\,E_2(X^2)\,X^3\end{aligned}$$

```
> iterE(3,3);
```

$$\begin{aligned}&-2+X+50\,E_2(X)^2\,X^2-3\,X\,E_2(E_3(X))-18\,E_3(X)\,E_2(X)\,X\\&\quad +54\,E_2(E_2(X))\,E_2(X)\,X-72\,E_3(X)\,E_2(X)\,X^2-3\,E_2(X)\,E_3(X)+2\,E_3(X)^2\\&\quad +190\,E_2(X)^2\,X^3-4\,E_3(E_2(X))\,X+29\,E_2(X)^3\,X-8\,E_2(X)^2\,E_3(X)\\&\quad -6\,E_2(E_2(X))\,E_3(X)+12\,X\,E_2(E_2(X)\,X)+4\,E_2(X)\,X+7\,X\,E_3(X)^2\\&\quad +2\,E_2(X)-2\,E_2(E_3(X))+8\,E_2(E_2(X)\,X)-E_3(X)-2\,E_3(X)\,X\\&\quad +6\,X\,E_2(E_2(X))+12\,X^2\,E_2(E_2(X))+16\,E_2(X)\,X^3+32\,E_2(X)\,X^4\\&\quad +4\,E_2(E_2(X))+11\,E_2(X)^2\,X-2\,E_3(E_2(X))+8\,E_2(X)\,X^2-16\,X^4\,E_3(X)\\&\quad +24\,X^3\,E_2(E_2(X))+64\,E_2(X)\,X^5-8\,E_3(X)\,X^3-4\,E_3(X)\,X^2\\&\quad +10\,E_2(E_2(X))\,E_2(X)\end{aligned}$$

```
> iterE(4,3);
```

$$
\begin{aligned}
&21\,E_2(E_2(X))\,E_2(X) - 3 - X + 45\,E_2(X^2)\,E_3(X) + 3\,X^2 - 18\,X\,E_2(E_3(X))\\
&\quad + 405\,E_2(E_2(X))\,X^3 - 1784\,X^7 - 1537\,E_2(X)^2\,X^3 - 429\,E_2(X^2)\,X^3\\
&\quad + 125\,E_2(X)^2\,E_3(X) + 3\,E_3(X) + 309\,E_2(X)^3\,X - 6\,X^3 + 19\,X^4 - 87\,X^5\\
&\quad + 390\,X^6 + 36\,E_3(X)\,X^2 + 90\,E_3(X)\,E_2(X)\,X - 668\,E_3(X)\,E_2(X)\,X^2\\
&\quad - 174\,E_2(E_2(X))\,E_2(X)\,X + 198\,E_2(X^2)\,E_2(X)\,X + 6\,E_4(X)\,E_2(X)\\
&\quad + 9\,E_2(E_2(X)\,X) - 18\,X\,E_2(E_2(X)\,X) + 2705\,E_2(X)\,X^5 + 36\,X\,E_2(X^3)\\
&\quad - 18\,X\,E_2(X^2) + 18\,X\,E_2(E_2(X)) - 3\,E_2(X) - 38\,E_4(X)\,E_2(X)\,X\\
&\quad - 36\,E_2(X)^3 - 45\,E_2(E_2(X))\,E_3(X) - 8\,E_4(X)\,E_3(X) - 15\,E_4(X)\,X^2\\
&\quad + 3\,E_4(X)\,X - 84\,X^2\,E_2(E_2(X)) + 93\,E_2(X^2)\,X^2 - 65\,X\,E_3(X)^2\\
&\quad + 73\,E_4(X)\,X^3 + 888\,E_3(X)\,X^4 - 21\,E_2(X)\,X^2 + 24\,X\,E_3(X^2)\\
&\quad - 24\,X\,E_3(E_2(X)) - 9\,E_2(E_2(X)) + 9\,E_3(E_2(X)) + 10\,E_2(X)^2 + 6\,E_3(X)^2\\
&\quad + 9\,E_2(E_3(X)) - 30\,E_2(X^2)\,E_2(X) - 174\,E_3(X)\,X^3 + 243\,E_2(X)^2\,X^2\\
&\quad - 510\,E_2(X)\,X^4 - 15\,E_2(X)\,E_3(X) + 3\,E_2(X)\,X - 36\,E_2(X)^2\,X\\
&\quad + 99\,E_2(X)\,X^3 - E_4(X) - 9\,E_3(X^2) - 7\,X\,E_3(X) - 18\,E_2(X^3) + 9\,E_2(X^2)
\end{aligned}
$$

```
> iterE(5,3);
```

$$
\begin{aligned}
&1120\,E_2(E_2(X))\,E_2(X)\,X - 4 + X + 1232\,E_2(X)^2\,X^2 + 640\,X^3\,E_2(E_2(X))\\
&\quad + 4\,E_2(X) + 64\,E_2(E_2(X)\,X) - 24\,X\,E_3(X) - 24\,E_2(E_3(X))\\
&\quad + 256\,X^3\,E_4(X) + 4\,E_4(X) + 64\,X^2\,E_4(X) - 1536\,X^4\,E_3(X)\\
&\quad - 384\,E_3(X)\,X^3 + 60\,E_3(X)^2 + 16\,E_2(X)\,X - 44\,E_2(X)\,E_3(X)\\
&\quad - 326\,E_2(X)^2\,E_3(X) + 36\,E_4(X)\,E_2(X) + 16\,E_2(E_2(X)) - 24\,E_3(E_2(X))\\
&\quad + 104\,E_2(E_2(X))\,E_2(X) + 594\,X\,E_3(X)^2 + 124\,E_2(X)^2\,X\\
&\quad - 180\,E_2(E_2(X))\,E_3(X) + 936\,E_2(X)^3\,X - 4\,E_5(X)\,X\\
&\quad + 160\,X\,E_2(E_2(X)\,X) - 10\,E_5(X)\,E_2(X) - 16\,E_5(X)\,X^2 + 64\,E_2(X)\,X^2\\
&\quad - 74\,E_4(X)\,E_3(X) - E_5(X) + 256\,E_2(X)\,X^3 + 16\,E_4(X)\,X\\
&\quad + 160\,X^2\,E_2(E_2(X)) - 80\,X\,E_3(E_2(X)) - 592\,E_3(X)\,E_2(X)\,X\\
&\quad + 9328\,E_2(X)^2\,X^3 + 448\,E_4(X)\,E_2(X)\,X - 6\,E_3(X) - 60\,X\,E_2(E_3(X))\\
&\quad - 96\,E_3(X)\,X^2 - 4992\,E_3(X)\,E_2(X)\,X^2 + 4096\,X^5\,E_2(X)\\
&\quad + 40\,X\,E_2(E_2(X)) + 1024\,X^4\,E_2(X)
\end{aligned}
$$

```
> iterE(6,3);
```

$$
\begin{aligned}
&-328\,E_4(X)\,X^2 - 5 - X + 5\,X^2 + 580\,E_2(X)\,X^3 - 70\,E_5(X)\,E_2(X) + 40\,E_4(X)\,X\\
&\quad + 185\,E_5(X)\,X^2 + 25\,E_2(E_2(X)\,X) - 31060\,X^7 + 600\,E_2(X^2)\,X^2 - 15\,X^3\\
&\quad + 85\,X^4 - 595\,X^5 + 4226\,X^6 + 41075\,X^5\,E_2(X) + 265\,E_3(X)\,X^2\\
&\quad - 1625\,E_2(E_2(X))\,E_2(X)\,X + 225\,X\,E_2(X^3) - 20790\,E_2(X)^2\,X^3\\
&\quad + 127\,E_4(X)\,E_2(X) - 150\,X\,E_2(E_3(X)) - 1480\,X\,E_3(X)^2\\
&\quad + 16665\,E_3(X)\,X^4 - 75\,X\,E_2(E_2(X)\,X) + 75\,X\,E_2(E_2(X))\\
&\quad - 4855\,X^4\,E_2(X) + 5\,E_5(X) + 944\,E_3(X)\,E_2(X)\,X + 1825\,E_2(X^2)\,E_2(X)\,X\\
&\quad - 11395\,E_3(X)\,E_2(X)\,X^2 - 1170\,E_4(X)\,E_2(X)\,X + 2525\,E_4(X)\,X^3\\
&\quad + 2106\,E_2(X)^2\,X^2 + 50\,E_2(E_3(X)) - 75\,X\,E_2(X^2) - 30\,X\,E_3(X)
\end{aligned}
$$

$$+ 200\,X\,E_3(X^2) - 175\,E_2(X^2)\,E_2(X) - 200\,X\,E_3(E_2(X))$$
$$+ 525\,E_2(X^2)\,E_3(X) - 2021\,E_3(X)\,X^3 - 5\,E_2(X) - 75\,E_2(X^3)$$
$$- 110\,E_2(X)\,E_3(X) - 50\,E_3(X^2) + 10\,E_3(X) + 126\,E_3(X)^2 - 25\,E_2(E_2(X))$$
$$+ 3795\,E_2(X)^3\,X - E_6(X) + 125\,E_2(E_2(X))\,E_2(X) + 2065\,E_2(X)^2\,E_3(X)$$
$$- 23\,E_5(X)\,X + 4225\,E_2(E_2(X))\,X^3 + 5\,E_6(X)\,X - 80\,E_2(X)\,X^2$$
$$+ 50\,E_3(E_2(X)) - 301\,E_2(X)^3 - 10\,E_4(X) + 25\,E_2(X^2) - 350\,E_4(X)\,E_3(X)$$
$$+ 5\,E_2(X)\,X - 550\,X^2\,E_2(E_2(X)) - 4425\,E_2(X^2)\,X^3 - 185\,E_2(X)^2\,X$$
$$+ 35\,E_2(X)^2 - 525\,E_2(E_2(X))\,E_3(X)$$

5.4.2 Calcul du développement limité de racines cycliques

La fonction suivante retourne le développement limité de degré $2^{(\nu-1)}$ de la solution Φ à l'équation $C_n(\Phi) = X$, associée au nombre complexe r, r désignant une racine « convenable » du polynôme $Z_{C_n}(\xi, \xi, \ldots)$, c'est-à-dire une racine de ce polynôme n'étant pas racine du polynôme $Z_{C'_n}(\xi, \xi, \ldots)$. La variable *Phi* désigne cette fois-ci encore l'approximation courante.

```
iterC := proc(n, ν, r)
    local k, Φ;
      Φ := r;
      for k to ν do
        if type(Φ, constant) then Φ := Φ − (picC(n, Φ) − X)/Φ^(n−1)
        else
          Φ := Φ − (tronq(expand(C(n, Φ)), 2^k − 1) − X) ×
             inv(tronq(expand(Φ^(n−1)), 2^k − 1), 2^k − 1);
          Φ := tronq(expand(Φ), 2^k − 1)
        fi
      od;
      Φ
    end
```

Exemples.

```
> iterC(2,3,-1);
```

$$-1 - X + 4\,X^6 - 2\,X^5 + X^4 + E_2(E_2(X)\,X) + E_2(X)^2 - E_2(X)^3 + E_2(X^2) - E_2(X^3)$$
$$- X^3 + 3\,E_2(X^2)\,E_2(X)\,X + 4\,E_2(X)^3\,X - 3\,E_2(E_2(X))\,E_2(X)\,X$$
$$- E_2(E_2(X)) - 2\,E_2(E_2(X))\,X^2 - E_2(E_2(X)\,X)\,X + 4\,E_2(E_2(X))\,X^3 - 7\,X^7$$
$$- 2\,E_2(X)^2\,X + E_2(E_2(X))\,E_2(X) + E_2(X^3)\,X - E_2(X^2)\,E_2(X)$$
$$+ 2\,E_2(X^2)\,X^2 - E_2(X^2)\,X + E_2(X)\,X - E_2(X) - 2\,E_2(X)\,X^2 + 4\,E_2(X)\,X^3$$
$$+ 17\,E_2(X)\,X^5 - 8\,E_2(X)\,X^4 - 14\,E_2(X)^2\,X^3 + 5\,E_2(X)^2\,X^2 + X^2$$
$$+ E_2(E_2(X))\,X - 4\,E_2(X^2)\,X^3$$

```
> iterC(3,3,sqrt(2)*I);
```

$$I\sqrt{2} + \frac{1}{32}\,I\sqrt{2}\,E_3(X)^2 - \frac{3}{32}\,I\,X^4\sqrt{2} + \frac{1}{16}\,I\sqrt{2}\,E_3(X^2) - \frac{1}{2}\,X + \frac{1}{8}\,I\sqrt{2}\,X^2 + \frac{3}{16}\,X^3$$
$$+ \frac{1}{8}\,I\sqrt{2}\,E_3(X)\,X - \frac{1}{8}\,I\,E_3(X)\sqrt{2}\,X^3 - \frac{7}{64}\,X^5 + \frac{13}{256}\,I\sqrt{2}\,X^6 - \frac{25}{128}\,E_3(X)\,X^4$$

$$+ \frac{1}{16}\, E_3(X^2)\, X - \frac{1}{4}\, E_3(X) + \frac{5}{32}\, X^2\, E_3(X) + \frac{5}{64}\, X\, E_3(X)^2 + \frac{39}{512}\, X^7$$

```
> iterC(4,3,-1);
```

$$\frac{5}{8}\, X + \frac{21}{4}\, X^6 + \frac{39}{8}\, X^3 - \frac{23}{8}\, X^2 - \frac{21}{4}\, X^5 - \frac{49}{16}\, X^4 + \frac{27}{4}\, X^7 - 3\, E_2(X^3)\, X + \frac{3}{8}\, E_2(X^2)\, X$$
$$- \frac{13}{16}\, E_2(X^2)\, X^3 + \frac{1}{4}\, E_4(X) + \frac{1}{8}\, E_2(X^2) - E_2(X^3) + \frac{3}{4}\, E_4(X)\, X - \frac{7}{4} - \frac{13}{8}\, E_4(X)\, X^3$$

APPENDICE A

TABLE DES COEFFICIENTS DES $\mathbb{C}$-ESPÈCES PSEUDO-MOLÉCULAIRES DE DEGRÉ ≤ 5

$\binom{X}{1}_\xi : \xi,\, \xi,\, \xi$

$\binom{E_2}{1}_\xi : \xi + \binom{\xi}{2},\ \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\xi^2,\ \frac{1}{2}\xi\,(1+\xi)\,;\quad \binom{E_2}{X}_\xi : \xi,\, \xi,\, \xi$

$\binom{X^2}{1}_\xi : \xi + 2\binom{\xi}{2},\ \xi^2,\ \xi^2\,;\quad \binom{X^2}{X}_\xi : 2\xi,\, 2\xi,\, 2\xi;$

$\binom{E_3}{1}_\xi : \xi + 2\binom{\xi}{2} + \binom{\xi}{3},\ \frac{1}{3}\xi + \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{6}\xi^3,\ \frac{1}{6}\xi\,(\xi+2)\,(1+\xi)\,;\quad \binom{E_3}{X}_\xi : \xi + \binom{\xi}{2},$
$\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\xi^2,\ \frac{1}{2}\xi\,(1+\xi)$

$\binom{C_3}{1}_\xi : \xi + 2\binom{\xi}{2} + 2\binom{\xi}{3},\ \frac{2}{3}\xi + \frac{1}{3}\xi^3,\ \frac{1}{3}\xi\,(2+\xi^2)\,;\quad \binom{C_3}{X}_\xi : \xi + 2\binom{\xi}{2},\ \xi^2,\ \xi^2\,;\quad \binom{C_3}{X^2}_\xi :$
$\xi,\, \xi,\, \xi$

$\binom{X\cdot E_2}{1}_\xi : \xi + 4\binom{\xi}{2} + 3\binom{\xi}{3},\ \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\xi^3,\ \frac{1}{2}\xi^2\,(1+\xi)\,;\quad \binom{X\cdot E_2}{X}_\xi : 2\xi + 3\binom{\xi}{2},$
$\frac{1}{2}\xi + \frac{3}{2}\xi^2,\ \frac{1}{2}\xi\,(1+3\xi)\,;\quad \binom{X\cdot E_2}{E_2}_\xi : \xi,\, \xi,\, \xi\,;\quad \binom{X\cdot E_2}{X^2}_\xi : \xi,\, \xi,\, \xi$

$\binom{X^3}{1}_\xi : \xi + 6\binom{\xi}{2} + 6\binom{\xi}{3},\ \xi^3,\ \xi^3\,;\quad \binom{X^3}{X}_\xi : 3\xi + 6\binom{\xi}{2},\ 3\xi^2,\ 3\xi^2\,;\quad \binom{X^3}{X^2}_\xi : 3\xi,\, 3\xi,\, 3\xi$

$\binom{E_4}{1}_\xi : \xi + 3\binom{\xi}{2} + 3\binom{\xi}{3} + \binom{\xi}{4},\ \frac{1}{4}\xi + \frac{11}{24}\xi^2 + \frac{1}{4}\xi^3 + \frac{1}{24}\xi^4,\ \frac{1}{24}\xi\,(\xi+3)\,(\xi+2)\,(1+\xi)\,;$
$\binom{E_4}{X}_\xi : \xi + 2\binom{\xi}{2} + \binom{\xi}{3},\ \frac{1}{3}\xi + \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{6}\xi^3,\ \frac{1}{6}\xi\,(\xi+2)\,(1+\xi)\,;\quad \binom{E_4}{E_2}_\xi : \xi + \binom{\xi}{2},$

$\frac{1}{2}\xi+\frac{1}{2}\xi^2,\ \frac{1}{2}\xi(1+\xi)$; $\quad \binom{E_4}{E_3}_\xi : \xi,\ \xi,\ \xi$

$\binom{E_4^\pm}{1}_\xi : \xi+3\binom{\xi}{2}+3\binom{\xi}{3}+2\binom{\xi}{4},\ \frac{11}{12}\xi^2+\frac{1}{12}\xi^4,\ \frac{1}{12}\xi^2(11+\xi^2)$; $\quad \binom{E_4^\pm}{X}_\xi$: $\xi+2\binom{\xi}{2}+2\binom{\xi}{3},\ \frac{2}{3}\xi+\frac{1}{3}\xi^3,\ \frac{1}{3}\xi(2+\xi^2)$; $\quad \binom{E_4^\pm}{E_2}_\xi : \xi,\ \xi,\ \xi$; $\quad \binom{E_4^\pm}{X^2}_\xi : \binom{\xi}{2},\ \frac{1}{2}\xi^2-\frac{1}{2}\xi,\ \frac{1}{2}\xi(\xi-1)$; $\quad \binom{E_4^\pm}{C_3}_\xi : \xi,\ \xi,\ \xi$

$\binom{E_2\circ E_2}{1}_\xi : \xi+4\binom{\xi}{2}+6\binom{\xi}{3}+3\binom{\xi}{4},\ \frac{1}{4}\xi+\frac{3}{8}\xi^2+\frac{1}{4}\xi^3+\frac{1}{8}\xi^4,\ \frac{1}{8}\xi(1+\xi)(\xi^2+\xi+2)$; $\binom{E_2\circ E_2}{X}_\xi : \xi+4\binom{\xi}{2}+3\binom{\xi}{3},\ \frac{1}{2}\xi^2+\frac{1}{2}\xi^3,\ \frac{1}{2}\xi^2(1+\xi)$; $\quad \binom{E_2\circ E_2}{E_2}_\xi : 2\xi+\binom{\xi}{2},\ \frac{3}{2}\xi+\frac{1}{2}\xi^2,\ \frac{1}{2}\xi(\xi+3)$; $\quad \binom{E_2\circ E_2}{X^2}_\xi : \binom{\xi}{2},\ \frac{1}{2}\xi^2-\frac{1}{2}\xi,\ \frac{1}{2}\xi(\xi-1)$; $\quad \binom{E_2\circ E_2}{X\cdot E_2}_\xi : \xi,\ \xi,\ \xi$

$\binom{X\cdot E_3}{1}_\xi : \xi+6\binom{\xi}{2}+9\binom{\xi}{3}+4\binom{\xi}{4},\ \frac{1}{3}\xi^2+\frac{1}{2}\xi^3+\frac{1}{6}\xi^4,\ \frac{1}{6}\xi^2(\xi+2)(1+\xi)$; $\quad \binom{X\cdot E_3}{X}_\xi$: $2\xi+6\binom{\xi}{2}+4\binom{\xi}{3},\ \frac{1}{3}\xi+\xi^2+\frac{2}{3}\xi^3,\ \frac{1}{3}\xi(1+\xi)(2\xi+1)$; $\quad \binom{X\cdot E_3}{E_2}_\xi : \xi+2\binom{\xi}{2},\ \xi^2,\ \xi^2$; $\binom{X\cdot E_3}{X^2}_\xi : \xi+\binom{\xi}{2},\ \frac{1}{2}\xi+\frac{1}{2}\xi^2,\ \frac{1}{2}\xi(1+\xi)$; $\quad \binom{X\cdot E_3}{E_3}_\xi : \xi,\ \xi,\ \xi$; $\quad \binom{X\cdot E_3}{X\cdot E_2}_\xi : \xi,\ \xi,\ \xi$

$\binom{E_2^2}{1}_\xi : \xi+7\binom{\xi}{2}+12\binom{\xi}{3}+6\binom{\xi}{4},\ \frac{1}{4}\xi^2+\frac{1}{2}\xi^3+\frac{1}{4}\xi^4,\ \frac{1}{4}\xi^2(1+\xi)^2$; $\quad \binom{E_2^2}{X}_\xi$: $2\xi+8\binom{\xi}{2}+6\binom{\xi}{3},\ \xi^2+\xi^3,\ \xi^2(1+\xi)$; $\quad \binom{E_2^2}{E_2}_\xi : 2\xi+2\binom{\xi}{2},\ \xi+\xi^2,\ \xi(1+\xi)$; $\quad \binom{E_2^2}{X^2}_\xi$: $\xi+2\binom{\xi}{2},\ \xi^2,\ \xi^2$; $\quad \binom{E_2^2}{X\cdot E_2}_\xi : 2\xi,\ 2\xi,\ 2\xi$

$\binom{P_4^{\mathrm{bic}}}{1}_\xi : \xi+5\binom{\xi}{2}+9\binom{\xi}{3}+6\binom{\xi}{4},\ \frac{3}{4}\xi^2+\frac{1}{4}\xi^4,\ \frac{1}{4}\xi^2(3+\xi^2)$; $\quad \binom{P_4^{\mathrm{bic}}}{X}_\xi$: $\xi+6\binom{\xi}{2}+6\binom{\xi}{3},\ \xi^3,\ \xi^3$; $\quad \binom{P_4^{\mathrm{bic}}}{E_2}_\xi : 3\xi,\ 3\xi,\ 3\xi$; $\quad \binom{P_4^{\mathrm{bic}}}{X^2}_\xi : 3\binom{\xi}{2},\ \frac{3}{2}\xi^2-\frac{3}{2}\xi,\ \frac{3}{2}\xi(\xi-1)$; $\quad \binom{P_4^{\mathrm{bic}}}{X^3}_\xi : \xi,\ \xi,\ \xi$

$\binom{C_4}{1}_\xi : \xi+4\binom{\xi}{2}+9\binom{\xi}{3}+6\binom{\xi}{4},\ \frac{1}{2}\xi+\frac{1}{4}\xi^2+\frac{1}{4}\xi^4,\ \frac{1}{4}\xi(1+\xi)(\xi^2-\xi+2)$; $\quad \binom{C_4}{X}_\xi$: $\xi+6\binom{\xi}{2}+6\binom{\xi}{3},\ \xi^3,\ \xi^3$; $\quad \binom{C_4}{E_2}_\xi : \xi,\ \xi,\ \xi$; $\quad \binom{C_4}{X^2}_\xi : \xi+3\binom{\xi}{2},\ -\frac{1}{2}\xi+\frac{3}{2}\xi^2,$

$\frac{1}{2}\,\xi\,(-1+3\,\xi)\,;\quad \binom{C_4}{X^3}_\xi : \xi,\, \xi,\, \xi$

$\binom{X\cdot C_3}{1}_\xi : \xi + 6\binom{\xi}{2} + 12\binom{\xi}{3} + 8\binom{\xi}{4},\ \frac{2}{3}\,\xi^2 + \frac{1}{3}\,\xi^4,\ \frac{1}{3}\,\xi^2\,(2+\xi^2)\,;\quad \binom{X\cdot C_3}{X}_\xi :$
$2\,\xi + 8\binom{\xi}{2} + 8\binom{\xi}{3},\ \frac{2}{3}\,\xi + \frac{4}{3}\,\xi^3,\ \frac{2}{3}\,\xi\,(2\,\xi^2+1)\,;\quad \binom{X\cdot C_3}{X^2}_\xi : 2\,\xi + 4\binom{\xi}{2},\ 2\,\xi^2,\ 2\,\xi^2\,;$
$\binom{X\cdot C_3}{C_3}_\xi : \xi,\, \xi,\, \xi\,;\quad \binom{X\cdot C_3}{X^3}_\xi : \xi,\, \xi,\, \xi;$

$\binom{X^2\cdot E_2}{1}_\xi : \xi + 10\binom{\xi}{2} + 21\binom{\xi}{3} + 12\binom{\xi}{4},\ \frac{1}{2}\,\xi^3 + \frac{1}{2}\,\xi^4,\ \frac{1}{2}\,\xi^3\,(1+\xi)\,;\quad \binom{X^2\cdot E_2}{X}_\xi :$
$3\,\xi + 14\binom{\xi}{2} + 12\binom{\xi}{3},\ \xi^2 + 2\,\xi^3,\ \xi^2\,(2\,\xi+1)\,;\quad \binom{X^2\cdot E_2}{E_2}_\xi : \xi + 2\binom{\xi}{2},\ \xi^2,\ \xi^2\,;\quad \binom{X^2\cdot E_2}{X^2}_\xi :$
$3\,\xi + 5\binom{\xi}{2},\ \frac{1}{2}\,\xi + \frac{5}{2}\,\xi^2,\ \frac{1}{2}\,\xi\,(1+5\,\xi)\,;\quad \binom{X^2\cdot E_2}{X\cdot E_2}_\xi : 2\,\xi,\, 2\,\xi,\, 2\,\xi\,;\quad \binom{X^2\cdot E_2}{X^3}_\xi : \xi,\, \xi,\, \xi$

$\binom{E_2(X^2)}{1}_\xi : \xi + 8\binom{\xi}{2} + 18\binom{\xi}{3} + 12\binom{\xi}{4},\ \frac{1}{2}\,\xi^2 + \frac{1}{2}\,\xi^4,\ \frac{1}{2}\,\xi^2\,(1+\xi^2)\,;\quad \binom{E_2(X^2)}{X}_\xi :$
$2\,\xi + 12\binom{\xi}{2} + 12\binom{\xi}{3},\ 2\,\xi^3,\ 2\,\xi^3\,;\quad \binom{E_2(X^2)}{E_2}_\xi : 2\,\xi,\, 2\,\xi,\, 2\,\xi\,;\quad \binom{E_2(X^2)}{X^2}_\xi : 2\,\xi + 6\binom{\xi}{2},$
$-\xi + 3\,\xi^2,\ \xi\,(-1+3\,\xi)\,;\quad \binom{E_2(X^2)}{X^3}_\xi : 2\,\xi,\, 2\,\xi,\, 2\,\xi$

$\binom{X^4}{1}_\xi : \xi + 14\binom{\xi}{2} + 36\binom{\xi}{3} + 24\binom{\xi}{4},\ \xi^4,\ \xi^4\,;\quad \binom{X^4}{X}_\xi : 4\,\xi + 24\binom{\xi}{2} + 24\binom{\xi}{3},\ 4\,\xi^3,\ 4\,\xi^3\,;$
$\binom{X^4}{X^2}_\xi : 6\,\xi + 12\binom{\xi}{2},\ 6\,\xi^2,\ 6\,\xi^2\,;\quad \binom{X^4}{X^3}_\xi : 4\,\xi,\, 4\,\xi,\, 4\,\xi$

$\binom{E_5}{1}_\xi : \xi + 4\binom{\xi}{2} + 6\binom{\xi}{3} + 4\binom{\xi}{4} + \binom{\xi}{5},\ \frac{1}{5}\,\xi + \frac{5}{12}\,\xi^2 + \frac{7}{24}\,\xi^3 + \frac{1}{12}\,\xi^4 + \frac{1}{120}\,\xi^5,$
$\frac{1}{120}\,\xi\,(\xi+4)\,(\xi+3)\,(\xi+2)\,(1+\xi)\,;\quad \binom{E_5}{X}_\xi : \xi + 3\binom{\xi}{2} + 3\binom{\xi}{3} + \binom{\xi}{4},$
$\frac{1}{4}\,\xi + \frac{11}{24}\,\xi^2 + \frac{1}{4}\,\xi^3 + \frac{1}{24}\,\xi^4,\ \frac{1}{24}\,\xi\,(\xi+3)\,(\xi+2)\,(1+\xi)\,;\quad \binom{E_5}{E_2}_\xi : \xi + 2\binom{\xi}{2} + \binom{\xi}{3},$
$\frac{1}{3}\,\xi + \frac{1}{2}\,\xi^2 + \frac{1}{6}\,\xi^3,\ \frac{1}{6}\,\xi\,(\xi+2)\,(1+\xi)\,;\quad \binom{E_5}{E_3}_\xi : \xi + \binom{\xi}{2},\ \frac{1}{2}\,\xi + \frac{1}{2}\,\xi^2,\ \frac{1}{2}\,\xi\,(1+\xi)\,;\quad \binom{E_5}{E_4}_\xi : \xi,$

$\xi,\, \xi$

$\binom{E_5^{\pm}}{1}_\xi : \xi + 4\binom{\xi}{2} + 6\binom{\xi}{3} + 4\binom{\xi}{4} + 2\binom{\xi}{5},\ \frac{2}{5}\,\xi + \frac{7}{12}\,\xi^3 + \frac{1}{60}\,\xi^5,\ \frac{1}{60}\,\xi\,(24+35\,\xi^2+\xi^4)\,;$

$\binom{E_5^{\pm}}{X}_\xi : \xi + 3\binom{\xi}{2} + 3\binom{\xi}{3} + 2\binom{\xi}{4},\ \frac{11}{12}\xi^2 + \frac{1}{12}\xi^4,\ \frac{1}{12}\xi^2(11+\xi^2)$; $\binom{E_5^{\pm}}{E_2}_\xi : \xi + 2\binom{\xi}{2},$ ξ^2, ξ^2 ; $\binom{E_5^{\pm}}{X^2}_\xi : \binom{\xi}{3},\ \frac{1}{6}\xi^3 - \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{3}\xi,\ \frac{1}{6}\xi(\xi-1)(\xi-2)$; $\binom{E_5^{\pm}}{E_3}_\xi : \xi, \xi, \xi$; $\binom{E_5^{\pm}}{C_3}_\xi :$ $\binom{\xi}{2},\ \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}\xi,\ \frac{1}{2}\xi(\xi-1)$; $\binom{E_5^{\pm}}{E_4^{\pm}}_\xi : \xi, \xi, \xi$

$\binom{X\cdot E_4}{1}_\xi : \xi + 8\binom{\xi}{2} + 18\binom{\xi}{3} + 16\binom{\xi}{4} + 5\binom{\xi}{5},\ \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{11}{24}\xi^3 + \frac{1}{4}\xi^4 + \frac{1}{24}\xi^5,$ $\frac{1}{24}\xi^2(\xi+3)(\xi+2)(1+\xi)$; $\binom{X\cdot E_4}{X}_\xi : 2\xi + 9\binom{\xi}{2} + 12\binom{\xi}{3} + 5\binom{\xi}{4},$ $\frac{1}{4}\xi + \frac{19}{24}\xi^2 + \frac{3}{4}\xi^3 + \frac{5}{24}\xi^4,\ \frac{1}{24}\xi(5\xi+3)(\xi+2)(1+\xi)$; $\binom{X\cdot E_4}{E_2}_\xi : \xi + 4\binom{\xi}{2} + 3\binom{\xi}{3},$ $\frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\xi^3,\ \frac{1}{2}\xi^2(1+\xi)$; $\binom{X\cdot E_4}{X^2}_\xi : \xi + 2\binom{\xi}{2} + \binom{\xi}{3},\ \frac{1}{3}\xi + \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{6}\xi^3,$ $\frac{1}{6}\xi(\xi+2)(1+\xi)$; $\binom{X\cdot E_4}{E_3}_\xi : \xi + 2\binom{\xi}{2},\ \xi^2,, \xi^2$; $\binom{X\cdot E_4}{X\cdot E_2}_\xi : \xi + \binom{\xi}{2},\ \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\xi^2,$ $\frac{1}{2}\xi(1+\xi)$; $\binom{X\cdot E_4}{E_4}_\xi : \xi, \xi, \xi$; $\binom{X\cdot E_4}{X\cdot E_3}_\xi : \xi, \xi, \xi$;

$\binom{P_5/\mathbb{Z}_2}{1}_\xi : \xi + 4\binom{\xi}{2} + 9\binom{\xi}{3} + 12\binom{\xi}{4} + 6\binom{\xi}{5},\ \frac{1}{5}\xi + \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{4}\xi^3 + \frac{1}{20}\xi^5,$ $\frac{1}{20}\xi(1+\xi)(\xi^3 - \xi^2 + 6\xi + 4)$; $\binom{P_5/\mathbb{Z}_2}{X}_\xi : \xi + 4\binom{\xi}{2} + 9\binom{\xi}{3} + 6\binom{\xi}{4},\ \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{4}\xi^4,$ $\frac{1}{4}\xi(1+\xi)(\xi^2 - \xi + 2)$; $\binom{P_5/\mathbb{Z}_2}{E_2}_\xi : \xi + 2\binom{\xi}{2},\ \xi^2, \xi^2$; $\binom{P_5/\mathbb{Z}_2}{X^2}_\xi : 2\binom{\xi}{2} + 3\binom{\xi}{3},$ $-\frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\xi^3,\ \frac{1}{2}\xi^2(\xi-1)$; $\binom{P_5/\mathbb{Z}_2}{X\cdot E_2}_\xi : \xi, \xi, \xi$; $\binom{P_5/\mathbb{Z}_2}{X^3}_\xi : \binom{\xi}{2},\ \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}\xi,\ \frac{1}{2}\xi(\xi-1)$; $\binom{P_5/\mathbb{Z}_2}{C_4}_\xi : \xi, \xi, \xi$

$\binom{X\cdot E_4^{\pm}}{1}_\xi : \xi + 8\binom{\xi}{2} + 18\binom{\xi}{3} + 20\binom{\xi}{4} + 10\binom{\xi}{5},\ \frac{11}{12}\xi^3 + \frac{1}{12}\xi^5,\ \frac{1}{12}\xi^3(11+\xi^2)$; $\binom{X\cdot E_4^{\pm}}{X}_\xi : 2\xi + 9\binom{\xi}{2} + 15\binom{\xi}{3} + 10\binom{\xi}{4},\ \frac{19}{12}\xi^2 + \frac{5}{12}\xi^4,\ \frac{1}{12}\xi^2(19+5\xi^2)$; $\binom{X\cdot E_4^{\pm}}{E_2}_\xi :$ $\xi + 2\binom{\xi}{2},\ \xi^2, \xi^2$; $\binom{X\cdot E_4^{\pm}}{X^2}_\xi : \xi + 4\binom{\xi}{2} + 5\binom{\xi}{3},\ \frac{2}{3}\xi - \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{5}{6}\xi^3,\ \frac{1}{6}\xi(4 - 3\xi + 5\xi^2)$; $\binom{X\cdot E_4^{\pm}}{C_3}_\xi : \xi + 2\binom{\xi}{2},\ \xi^2, \xi^2$; $\binom{X\cdot E_4^{\pm}}{X\cdot E_2}_\xi : \xi, \xi, \xi$; $\binom{X\cdot E_4^{\pm}}{X^3}_\xi : \binom{\xi}{2},\ \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}\xi,$ $\frac{1}{2}\xi(\xi-1)$; $\binom{X\cdot E_4^{\pm}}{E_4^{\pm}}_\xi : \xi, \xi, \xi$; $\binom{X\cdot E_4^{\pm}}{X\cdot C_3}_\xi : \xi, \xi, \xi$

$\binom{E_2\cdot E_3}{1}_\xi : \xi+10\binom{\xi}{2}+27\binom{\xi}{3}+28\binom{\xi}{4}+10\binom{\xi}{5}$, $\frac{1}{6}\xi^2+\frac{5}{12}\xi^3+\frac{1}{3}\xi^4+\frac{1}{12}\xi^5$, $\frac{1}{12}\xi^2(\xi+2)(1+\xi)^2$; $\binom{E_2\cdot E_3}{X}_\xi : 2\xi+13\binom{\xi}{2}+21\binom{\xi}{3}+10\binom{\xi}{4}$, $\frac{7}{12}\xi^2+\xi^3+\frac{5}{12}\xi^4$, $\frac{1}{12}\xi^2(5\xi+7)(1+\xi)$; $\binom{E_2\cdot E_3}{E_2}_\xi : 2\xi+6\binom{\xi}{2}+4\binom{\xi}{3}$, $\frac{1}{3}\xi+\xi^2+\frac{2}{3}\xi^3$, $\frac{1}{3}\xi(1+\xi)(2\xi+1)$; $\binom{E_2\cdot E_3}{X^2}_\xi : \xi+4\binom{\xi}{2}+3\binom{\xi}{3}$, $\frac{1}{2}\xi^2+\frac{1}{2}\xi^3$, $\frac{1}{2}\xi^2(1+\xi)$; $\binom{E_2\cdot E_3}{E_3}_\xi$: $\xi+\binom{\xi}{2}$, $\frac{1}{2}\xi+\frac{1}{2}\xi^2$, $\frac{1}{2}\xi(1+\xi)$; $\binom{E_2\cdot E_3}{X\cdot E_2}_\xi : 2\xi+3\binom{\xi}{2}$, $\frac{1}{2}\xi+\frac{3}{2}\xi^2$, $\frac{1}{2}\xi(1+3\xi)$; $\binom{E_2\cdot E_3}{X\cdot E_3}_\xi : \xi,\ \xi,\ \xi$; $\binom{E_2\cdot E_3}{E_2^2}_\xi : \xi,\ \xi,\ \xi$

$\binom{P_5}{1}_\xi : \xi+6\binom{\xi}{2}+18\binom{\xi}{3}+24\binom{\xi}{4}+12\binom{\xi}{5}$, $\frac{2}{5}\xi+\frac{1}{2}\xi^3+\frac{1}{10}\xi^5$, $\frac{1}{10}\xi(\xi^2+4)(1+\xi^2)$; $\binom{P_5}{X}_\xi : \xi+8\binom{\xi}{2}+18\binom{\xi}{3}+12\binom{\xi}{4}$, $\frac{1}{2}\xi^2+\frac{1}{2}\xi^4$, $\frac{1}{2}\xi^2(1+\xi^2)$; $\binom{P_5}{E_2}_\xi : 2\xi+4\binom{\xi}{2}$, $2\xi^2$, $2\xi^2$; $\binom{P_5}{X^2}_\xi : 4\binom{\xi}{2}+6\binom{\xi}{3}$, $-\xi^2+\xi^3$, $\xi^2(\xi-1)$; $\binom{P_5}{X\cdot E_2}_\xi : 2\xi,\ 2\xi,\ 2\xi$; $\binom{P_5}{X^3}_\xi$: $2\binom{\xi}{2}$, $\xi^2-\xi$, $\xi(\xi-1)$; $\binom{P_5}{E_2(X^2)}_\xi : \xi,\ \xi,\ \xi$

$\binom{X\cdot E_2(E_2)}{1}_\xi : \xi+10\binom{\xi}{2}+30\binom{\xi}{3}+36\binom{\xi}{4}+15\binom{\xi}{5}$, $\frac{1}{4}\xi^2+\frac{3}{8}\xi^3+\frac{1}{4}\xi^4+\frac{1}{8}\xi^5$, $\frac{1}{8}\xi^2(1+\xi)(\xi^2+\xi+2)$; $\binom{X\cdot E_2(E_2)}{X}_\xi : 2\xi+14\binom{\xi}{2}+27\binom{\xi}{3}+15\binom{\xi}{4}$, $\frac{1}{4}\xi+\frac{3}{8}\xi^2+\frac{3}{4}\xi^3+\frac{5}{8}\xi^4$, $\frac{1}{8}\xi(1+\xi)(5\xi^2+\xi+2)$; $\binom{X\cdot E_2(E_2)}{E_2}_\xi : 2\xi+6\binom{\xi}{2}+3\binom{\xi}{3}$, $\frac{3}{2}\xi^2+\frac{1}{2}\xi^3$, $\frac{1}{2}\xi^2(\xi+3)$; $\binom{X\cdot E_2(E_2)}{X^2}_\xi : \xi+6\binom{\xi}{2}+6\binom{\xi}{3}$, ξ^3, ξ^3 ; $\binom{X\cdot E_2(E_2)}{X\cdot E_2}_\xi$: $3\xi+3\binom{\xi}{2}$, $\frac{3}{2}\xi+\frac{3}{2}\xi^2$, $\frac{3}{2}\xi(1+\xi)$; $\binom{X\cdot E_2(E_2)}{X^3}_\xi : \binom{\xi}{2}$, $\frac{1}{2}\xi^2-\frac{1}{2}\xi$, $\frac{1}{2}\xi(\xi-1)$; $\binom{X\cdot E_2(E_2)}{E_2\circ E_2}_\xi : \xi,\ \xi,\ \xi$; $\binom{X\cdot E_2(E_2)}{X^2\cdot E_2}_\xi : \xi,\ \xi,\ \xi$

$\binom{X^2\cdot E_3}{1}_\xi : \xi+14\binom{\xi}{2}+45\binom{\xi}{3}+52\binom{\xi}{4}+20\binom{\xi}{5}$, $\frac{1}{3}\xi^3+\frac{1}{2}\xi^4+\frac{1}{6}\xi^5$, $\frac{1}{6}\xi^3(\xi+2)(1+\xi)$; $\binom{X^2\cdot E_3}{X}_\xi : 3\xi+22\binom{\xi}{2}+39\binom{\xi}{3}+20\binom{\xi}{4}$, $\frac{2}{3}\xi^2+\frac{3}{2}\xi^3+\frac{5}{6}\xi^4$, $\frac{1}{6}\xi^2(1+\xi)(5\xi+4)$; $\binom{X^2\cdot E_3}{E_2}_\xi : \xi+6\binom{\xi}{2}+6\binom{\xi}{3}$, ξ^3, ξ^3 ; $\binom{X^2\cdot E_3}{X^2}_\xi : 3\xi+10\binom{\xi}{2}+7\binom{\xi}{3}$, $\frac{1}{3}\xi+\frac{3}{2}\xi^2+\frac{7}{6}\xi^3$,

$\frac{1}{6}\xi(1+\xi)(7\xi+2)$; $\binom{X^2\cdot E_3}{E_3}_\xi : \xi+2\binom{\xi}{2},\ \xi^2,\ \xi^2$; $\binom{X^2\cdot E_3}{X\cdot E_2}_\xi : 2\xi+4\binom{\xi}{2},\ 2\xi^2,\ 2\xi^2$; $\binom{X^2\cdot E_3}{X^3}_\xi : \xi+\binom{\xi}{2},\ \frac{1}{2}\xi+\frac{1}{2}\xi^2,\ \frac{1}{2}\xi(1+\xi)$; $\binom{X^2\cdot E_3}{X\cdot E_3}_\xi : 2\xi,\ 2\xi,\ 2\xi$; $\binom{X^2\cdot E_3}{X^2\cdot E_2}_\xi : \xi,\ \xi,\ \xi$

$\binom{E_2\cdot C_3}{1}_\xi : \xi+10\binom{\xi}{2}+33\binom{\xi}{3}+44\binom{\xi}{4}+20\binom{\xi}{5},\ \frac{1}{3}\xi^2+\frac{1}{3}\xi^3+\frac{1}{6}\xi^4+\frac{1}{6}\xi^5,$ $\frac{1}{6}\xi^2(1+\xi)(2+\xi^2)$; $\binom{E_2\cdot C_3}{X}_\xi : 2\xi+16\binom{\xi}{2}+33\binom{\xi}{3}+20\binom{\xi}{4},\ \frac{2}{3}\xi^2+\frac{1}{2}\xi^3+\frac{5}{6}\xi^4,$ $\frac{1}{6}\xi^2(4+3\xi+5\xi^2)$; $\binom{E_2\cdot C_3}{E_2}_\xi : \xi+2\binom{\xi}{2}+2\binom{\xi}{3},\ \frac{2}{3}\xi+\frac{1}{3}\xi^3,\ \frac{1}{3}\xi(2+\xi^2)$; $\binom{E_2\cdot C_3}{X^2}_\xi :$ $2\xi+10\binom{\xi}{2}+9\binom{\xi}{3},\ \frac{1}{2}\xi^2+\frac{3}{2}\xi^3,\ \frac{1}{2}\xi^2(1+3\xi)$; $\binom{E_2\cdot C_3}{C_3}_\xi : \xi+\binom{\xi}{2},\ \frac{1}{2}\xi+\frac{1}{2}\xi^2,$ $\frac{1}{2}\xi(1+\xi)$; $\binom{E_2\cdot C_3}{X\cdot E_2}_\xi : \xi+2\binom{\xi}{2},\ \xi^2,\ \xi^2$; $\binom{E_2\cdot C_3}{X^3}_\xi : \xi+2\binom{\xi}{2},\ \xi^2,\ \xi^2$; $\binom{E_2\cdot C_3}{X\cdot C_3}_\xi : \xi,$ $\xi,\ \xi$; $\binom{E_2\cdot C_3}{X^2\cdot E_2}_\xi : \xi,\ \xi,\ \xi$

$\binom{(X^2\cdot C_3)/\mathbb{Z}_2}{1}_\xi : \xi+10\binom{\xi}{2}+30\binom{\xi}{3}+40\binom{\xi}{4}+20\binom{\xi}{5},\ \frac{5}{6}\xi^3+\frac{1}{6}\xi^5,\ \frac{1}{6}\xi^3(5+\xi^2)$; $\binom{(X^2\cdot C_3)/\mathbb{Z}_2}{X}_\xi : 2\xi+14\binom{\xi}{2}+30\binom{\xi}{3}+20\binom{\xi}{4},\ \frac{7}{6}\xi^2+\frac{5}{6}\xi^4,\ \frac{1}{6}\xi^2(7+5\xi^2)$; $\binom{(X^2\cdot C_3)/\mathbb{Z}_2}{E_2}_\xi : 2\xi+4\binom{\xi}{2},\ 2\xi^2,\ 2\xi^2$; $\binom{(X^2\cdot C_3)/\mathbb{Z}_2}{X^2}_\xi : \xi+8\binom{\xi}{2}+10\binom{\xi}{3},$ $\frac{1}{3}\xi-\xi^2+\frac{5}{3}\xi^3,\ \frac{1}{3}\xi(1-3\xi+5\xi^2)$; $\binom{(X^2\cdot C_3)/\mathbb{Z}_2}{E_3}_\xi : \xi,\ \xi,\ \xi$; $\binom{(X^2\cdot C_3)/\mathbb{Z}_2}{C_3}_\xi : \binom{\xi}{2},$ $\frac{1}{2}\xi^2-\frac{1}{2}\xi,\ \frac{1}{2}\xi(\xi-1)$; $\binom{(X^2\cdot C_3)/\mathbb{Z}_2}{X\cdot E_2}_\xi : \xi,\ \xi,\ \xi$; $\binom{(X^2\cdot C_3)/\mathbb{Z}_2}{X^3}_\xi : \xi+3\binom{\xi}{2},$ $-\frac{1}{2}\xi+\frac{3}{2}\xi^2,\ \frac{1}{2}\xi(-1+3\xi)$; $\binom{(X^2\cdot C_3)/\mathbb{Z}_2}{X\cdot C_3}_\xi : \xi,\ \xi,\ \xi$; $\binom{(X^2\cdot C_3)/\mathbb{Z}_2}{E_2(X^2)}_\xi : \xi,\ \xi,\ \xi$

$\binom{C_5}{1}_\xi : \xi+6\binom{\xi}{2}+30\binom{\xi}{3}+48\binom{\xi}{4}+24\binom{\xi}{5},\ \frac{4}{5}\xi+\frac{1}{5}\xi^5,\ \frac{1}{5}\xi(2-2\xi+\xi^2)(2+2\xi+\xi^2)$; $\binom{C_5}{X}_\xi : \xi+14\binom{\xi}{2}+36\binom{\xi}{3}+24\binom{\xi}{4},\ \xi^4,\ \xi^4$; $\binom{C_5}{X^2}_\xi : 2\xi+12\binom{\xi}{2}+12\binom{\xi}{3},\ 2\xi^3,\ 2\xi^3$; $\binom{C_5}{X^3}_\xi : 2\xi+4\binom{\xi}{2},\ 2\xi^2,\ 2\xi^2$; $\binom{C_5}{X^4}_\xi : \xi,\ \xi,\ \xi$

$\binom{X\cdot E_2^2}{1}_\xi : \xi+16\binom{\xi}{2}+57\binom{\xi}{3}+72\binom{\xi}{4}+30\binom{\xi}{5},\ \frac{1}{4}\xi^3+\frac{1}{2}\xi^4+\frac{1}{4}\xi^5,\ \frac{1}{4}\xi^3(1+\xi)^2$;

$\binom{X\cdot E_2^2}{X}_\xi : 3\,\xi+27\binom{\xi}{2}+54\binom{\xi}{3}+30\binom{\xi}{4},\ \frac{1}{4}\xi^2+\frac{3}{2}\xi^3+\frac{5}{4}\xi^4,\ \frac{1}{4}\xi^2\,(1+\xi)\,(5\,\xi+1)\,;$
$\binom{X\cdot E_2^2}{E_2}_\xi : 2\,\xi+8\binom{\xi}{2}+6\binom{\xi}{3},\ \xi^2+\xi^3,\ \xi^2\,(1+\xi)\,;\quad \binom{X\cdot E_2^2}{X^2}_\xi : 3\,\xi+14\binom{\xi}{2}+12\binom{\xi}{3},$
$\xi^2+2\,\xi^3,\ \xi^2\,(1+2\,\xi)\,;\quad \binom{X\cdot E_2^2}{X\cdot E_2}_\xi : 4\,\xi+6\binom{\xi}{2},\ \xi+3\,\xi^2,\ \xi\,(1+3\,\xi)\,;\quad \binom{X\cdot E_2^2}{X^3}_\xi : \xi+2\binom{\xi}{2},$
$\xi^2,\ \xi^2\,;\quad \binom{X\cdot E_2^2}{E_2^2}_\xi : \xi,\ \xi,\ \xi\,;\quad \binom{X\cdot E_2^2}{X^2\cdot E_2}_\xi : 2\,\xi,\ 2\,\xi,\ 2\,\xi$

$\binom{X\cdot P_4^{bic}}{1}_\xi : \xi+12\binom{\xi}{2}+42\binom{\xi}{3}+60\binom{\xi}{4}+30\binom{\xi}{5},\ \frac{3}{4}\xi^3+\frac{1}{4}\xi^5,\ \frac{1}{4}\xi^3\,(3+\xi^2)\,;$
$\binom{X\cdot P_4^{bic}}{X}_\xi : 2\,\xi+19\binom{\xi}{2}+45\binom{\xi}{3}+30\binom{\xi}{4},\ \frac{3}{4}\xi^2+\frac{5}{4}\xi^4,\ \frac{1}{4}\xi^2\,(3+5\,\xi^2)\,;\quad \binom{X\cdot P_4^{bic}}{E_2}_\xi :$
$3\,\xi+6\binom{\xi}{2},\ 3\,\xi^2,\ 3\,\xi^2\,;\quad \binom{X\cdot P_4^{bic}}{X^2}_\xi : \xi+12\binom{\xi}{2}+15\binom{\xi}{3},\ -\frac{3}{2}\xi^2+\frac{5}{2}\xi^3,\ \frac{1}{2}\xi^2\,(-3+5\,\xi)\,;$
$\binom{X\cdot P_4^{bic}}{X\cdot E_2}_\xi : 3\,\xi,\ 3\,\xi,\ 3\,\xi\,;\quad \binom{X\cdot P_4^{bic}}{X^3}_\xi : \xi+5\binom{\xi}{2},\ -\frac{3}{2}\xi+\frac{5}{2}\xi^2,\ \frac{1}{2}\xi\,(-3+5\,\xi)\,;$
$\binom{X\cdot P_4^{bic}}{P_4^{\mathrm{bic}}}_\xi : \xi,\ \xi,\ \xi\,;\quad \binom{X\cdot P_4^{bic}}{X^4}_\xi : \xi,\ \xi,\ \xi$

$\binom{X\cdot C_4}{1}_\xi : \xi+10\binom{\xi}{2}+39\binom{\xi}{3}+60\binom{\xi}{4}+30\binom{\xi}{5},\ \frac{1}{2}\xi^2+\frac{1}{4}\xi^3+\frac{1}{4}\xi^5,$
$\frac{1}{4}\xi^2\,(1+\xi)\,(\xi^2-\xi+2)\,;\quad \binom{X\cdot C_4}{X}_\xi : 2\,\xi+18\binom{\xi}{2}+45\binom{\xi}{3}+30\binom{\xi}{4},\ \frac{1}{2}\xi+\frac{1}{4}\xi^2+\frac{5}{4}\xi^4,$
$\frac{1}{4}\xi\,(2+\xi+5\,\xi^3)\,;\quad \binom{X\cdot C_4}{E_2}_\xi : \xi+2\binom{\xi}{2},\ \xi^2,\ \xi^2\,;\quad \binom{X\cdot C_4}{X^2}_\xi : 2\,\xi+14\binom{\xi}{2}+15\binom{\xi}{3},$
$-\frac{1}{2}\xi^2+\frac{5}{2}\xi^3,\ \frac{1}{2}\xi^2\,(-1+5\,\xi)\,;\quad \binom{X\cdot C_4}{X\cdot E_2}_\xi : \xi,\ \xi,\ \xi\,;\quad \binom{X\cdot C_4}{X^3}_\xi : 2\,\xi+5\binom{\xi}{2},\ -\frac{1}{2}\xi+\frac{5}{2}\xi^2,$
$\frac{1}{2}\xi\,(-1+5\,\xi)\,;\quad \binom{X\cdot C_4}{C_4}_\xi : \xi,\ \xi,\ \xi\,;\quad \binom{X\cdot C_4}{X^4}_\xi : \xi,\ \xi,\ \xi$

$\binom{X^2\cdot C_3}{1}_\xi : \xi+14\binom{\xi}{2}+54\binom{\xi}{3}+80\binom{\xi}{4}+40\binom{\xi}{5},\ \frac{2}{3}\xi^3+\frac{1}{3}\xi^5,\ \frac{1}{3}\xi^3\,(2+\xi^2)\,;$
$\binom{X^2\cdot C_3}{X}_\xi : 3\,\xi+26\binom{\xi}{2}+60\binom{\xi}{3}+40\binom{\xi}{4},\ \frac{4}{3}\xi^2+\frac{5}{3}\xi^4,\ \frac{1}{3}\xi^2\,(4+5\,\xi^2)\,;\quad \binom{X^2\cdot C_3}{X^2}_\xi :$
$4\,\xi+20\binom{\xi}{2}+20\binom{\xi}{3},\ \frac{2}{3}\xi+\frac{10}{3}\xi^3,\ \frac{2}{3}\xi\,(5\,\xi^2+1)\,;\quad \binom{X^2\cdot C_3}{C_3}_\xi : \xi+2\binom{\xi}{2},\ \xi^2,\ \xi^2\,;$
$\binom{X^2\cdot C_3}{X^3}_\xi : 3\,\xi+6\binom{\xi}{2},\ 3\,\xi^2,\ 3\,\xi^2\,;\quad \binom{X^2\cdot C_3}{X\cdot C_3}_\xi : 2\,\xi,\ 2\,\xi,\ 2\,\xi\,;\quad \binom{X^2\cdot C_3}{X^4}_\xi : \xi,\ \xi,\ \xi$

$\binom{X^3\cdot E_2}{1}_\xi : \xi + 22\binom{\xi}{2} + 93\binom{\xi}{3} + 132\binom{\xi}{4} + 60\binom{\xi}{5},\ \frac{1}{2}\xi^4 + \frac{1}{2}\xi^5,\ \frac{1}{2}\xi^4(1+\xi)$;
$\binom{X^3\cdot E_2}{X}_\xi : 4\xi + 44\binom{\xi}{2} + 99\binom{\xi}{3} + 60\binom{\xi}{4},\ \frac{3}{2}\xi^3 + \frac{5}{2}\xi^4,\ \frac{1}{2}\xi^3(3+5\xi)$; $\binom{X^3\cdot E_2}{E_2}_\xi$:
$\xi + 6\binom{\xi}{2} + 6\binom{\xi}{3},\ \xi^3,\ \xi^3$; $\binom{X^3\cdot E_2}{X^2}_\xi : 6\xi + 30\binom{\xi}{2} + 27\binom{\xi}{3},\ \frac{3}{2}\xi^2 + \frac{9}{2}\xi^3,\ \frac{3}{2}\xi^2(1+3\xi)$;
$\binom{X^3\cdot E_2}{X\cdot E_2}_\xi : 3\xi + 6\binom{\xi}{2},\ 3\xi^2,\ 3\xi^2$; $\binom{X^3\cdot E_2}{X^3}_\xi : 4\xi + 7\binom{\xi}{2},\ \frac{1}{2}\xi + \frac{7}{2}\xi^2,\ \frac{1}{2}\xi(1+7\xi)$;
$\binom{X^3\cdot E_2}{X^2\cdot E_2}_\xi : 3\xi,\ 3\xi,\ 3\xi$; $\binom{X^3\cdot E_2}{X^4}_\xi : \xi,\ \xi,\ \xi$

$\binom{X\cdot E_2(X^2)}{1}_\xi : \xi + 18\binom{\xi}{2} + 78\binom{\xi}{3} + 120\binom{\xi}{4} + 60\binom{\xi}{5},\ \frac{1}{2}\xi^3 + \frac{1}{2}\xi^5,\ \frac{1}{2}\xi^3(1+\xi^2)$;
$\binom{X\cdot E_2(X^2)}{X}_\xi : 3\xi + 36\binom{\xi}{2} + 90\binom{\xi}{3} + 60\binom{\xi}{4},\ \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{5}{2}\xi^4,\ \frac{1}{2}\xi^2(5\xi^2+1)$;
$\binom{X\cdot E_2(X^2)}{E_2}_\xi : 2\xi + 4\binom{\xi}{2},\ 2\xi^2,\ 2\xi^2$; $\binom{X\cdot E_2(X^2)}{X^2}_\xi : 4\xi + 28\binom{\xi}{2} + 30\binom{\xi}{3},\ -\xi^2 + 5\xi^3$,
$\xi^2(-1+5\xi)$; $\binom{X\cdot E_2(X^2)}{X\cdot E_2}_\xi : 2\xi,\ 2\xi,\ 2\xi$; $\binom{X\cdot E_2(X^2)}{X^3}_\xi : 4\xi + 10\binom{\xi}{2},\ -\xi + 5\xi^2$,
$\xi(-1+5\xi)$; $\binom{X\cdot E_2(X^2)}{E_2(X^2)}_\xi : \xi,\ \xi,\ \xi$; $\binom{X\cdot E_2(X^2)}{X^4}_\xi : 2\xi,\ 2\xi,\ 2\xi$

$\binom{X^5}{1}_\xi : \xi + 30\binom{\xi}{2} + 150\binom{\xi}{3} + 240\binom{\xi}{4} + 120\binom{\xi}{5},\ \xi^5,\ \xi^5$; $\binom{X^5}{X}_\xi : 5\xi + 70\binom{\xi}{2} +$
$180\binom{\xi}{3} + 120\binom{\xi}{4},\ 5\xi^4,\ 5\xi^4$; $\binom{X^5}{X^2}_\xi : 10\xi + 60\binom{\xi}{2} + 60\binom{\xi}{3},\ 10\xi^3,\ 10\xi^3$; $\binom{X^5}{X^3}_\xi$:
$10\xi + 20\binom{\xi}{2},\ 10\xi^2,\ 10\xi^2$; $\binom{X^5}{X^4}_\xi : 5\xi,\ 5\xi,\ 5\xi$

Note. Dans la liste ci-dessus, chacun des polynômes est donné successivement sous trois formes : par rapport à la base des polynômes $\binom{\xi}{k}$, par rapport à la base canonique, factorisé sur le corps des nombres rationnels.

APPENDICE B

TABLE DES COEFFICIENTS $\sigma_{i,j}(\xi)$ ET $\tau_{i,j}(\xi)$

n	i	$\sigma_{i,n-i}(\xi)$	$\tau_{i,n-i}(\xi)$
1	0	0	1
	1	0	ξ
2	0	0	0
	1	0	ξ
	2	0	$-\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\xi^2$
3	0	0	0
	1	0	ξ
	2	$-\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\xi^2$	ξ
	3	$\frac{1}{6}\xi^3 + \frac{1}{3}\xi - \frac{1}{2}\xi^2$	$-\xi + \xi^2$
4	0	0	0
	1	0	ξ
	2	$-\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\xi^2$	$\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\xi^2$
	3	$\frac{1}{2}\xi^3 - \frac{1}{2}\xi^2$	ξ^2
	4	$\frac{1}{8}\xi^4 - \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^3$	$-\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\xi^3$
5	0	0	0
	1	0	ξ
	2	$-\xi + \xi^2$	$2\,\xi$
	3	$-\xi^2 + \xi^3$	$2\,\xi^2$
	4	$\frac{1}{2}\xi^4 - \frac{1}{2}\xi^2$	ξ^2

	5	$\frac{1}{10}\xi^5+\frac{2}{5}\xi-\frac{1}{2}\xi^3$	$-\xi+\xi^3$
6	0	0	0
	1	0	ξ
	2	$-\xi+\xi^2$	$\frac{3}{2}\xi+\frac{1}{2}\xi^2$
	3	$\frac{5}{3}\xi^3+\frac{1}{3}\xi-\xi^2$	$-\xi+2\xi^2$
	4	$\frac{5}{4}\xi^4-\frac{5}{4}\xi^2+\frac{1}{2}\xi-\frac{1}{2}\xi^3$	$-\xi+2\xi^2+\xi^3$
	5	$\frac{1}{2}\xi^5-\frac{1}{2}\xi^3$	ξ^3
	6	$-\frac{1}{6}\xi+\frac{2}{3}\xi^2-\frac{1}{3}\xi^3+\frac{1}{12}\xi^6-\frac{1}{4}\xi^4$	$-\frac{3}{2}\xi^2+\frac{1}{2}\xi^3+\frac{1}{2}\xi+\frac{1}{2}\xi^4$
7	0	0	0
	1	0	ξ
	2	$\frac{3}{2}\xi^2-\frac{3}{2}\xi$	3ξ
	3	$\frac{5}{2}\xi^3-\frac{3}{2}\xi^2$	$3\xi^2$
	4	$\frac{5}{2}\xi^4-\frac{3}{2}\xi^2$	$3\xi^2$
	5	$\frac{3}{2}\xi^5-\frac{3}{2}\xi^3$	$3\xi^3$
	6	$\frac{1}{2}\xi^6-\frac{1}{2}\xi^3$	ξ^3
	7	$\frac{1}{14}\xi^7+\frac{3}{7}\xi-\frac{1}{2}\xi^4$	$-\xi+\xi^4$
8	0	0	0
	1	0	ξ
	2	$\frac{3}{2}\xi^2-\frac{3}{2}\xi$	$\frac{5}{2}\xi+\frac{1}{2}\xi^2$
	3	$\frac{7}{2}\xi^3-\frac{3}{2}\xi^2$	$3\xi^2$
	4	$\frac{35}{8}\xi^4-\frac{19}{8}\xi^2+\frac{3}{4}\xi-\frac{3}{4}\xi^3$	$-\frac{3}{2}\xi+4\xi^2+\frac{3}{2}\xi^3$
	5	$\frac{7}{2}\xi^5-\frac{3}{2}\xi^3$	$3\xi^3$
	6	$\frac{7}{4}\xi^6-\frac{3}{2}\xi^3+\frac{1}{2}\xi^2-\frac{3}{4}\xi^4$	$\frac{5}{2}\xi^3-\xi^2+\frac{3}{2}\xi^4$
	7	$\frac{1}{2}\xi^7-\frac{1}{2}\xi^4$	ξ^4
	8	$\frac{1}{16}\xi^8-\frac{5}{16}\xi^4+\frac{1}{4}\xi^2+\frac{1}{4}\xi^3-\frac{1}{4}\xi^5$	$-\frac{1}{2}\xi^2+\frac{1}{2}\xi^4-\frac{1}{2}\xi^3+\frac{1}{2}\xi^5$
9	0	0	0
	1	0	ξ
	2	$2\xi^2-2\xi$	4ξ

	3	$\frac{14}{3}\xi^3 + \frac{1}{3}\xi - 2\xi^2$	$-\xi + 4\xi^2$
	4	$7\xi^4 - 3\xi^2$	$6\xi^2$
	5	$7\xi^5 - 3\xi^3$	$6\xi^3$
	6	$\frac{14}{3}\xi^6 - \frac{1}{6}\xi^2 + \frac{1}{2}\xi - 2\xi^3$	$-\xi + 4\xi^3$
	7	$2\xi^7 - 2\xi^4$	$4\xi^4$
	8	$\frac{1}{2}\xi^8 - \frac{1}{2}\xi^4$	ξ^4
	9	$\frac{1}{18}\xi^9 - \frac{1}{18}\xi^3 + \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}\xi^5$	$-\xi^2 + \xi^5$
10	0	0	0
	1	0	ξ
	2	$2\xi^2 - 2\xi$	$\frac{7}{2}\xi + \frac{1}{2}\xi^2$
	3	$6\xi^3 - 2\xi^2$	$4\xi^2$
	4	$\frac{21}{2}\xi^4 - \frac{9}{2}\xi^2 + \xi - \xi^3$	$-2\xi + 8\xi^2 + 2\xi^3$
	5	$\frac{63}{5}\xi^5 + \frac{2}{5}\xi - 3\xi^3$	$-\xi + 6\xi^3$
	6	$\frac{21}{2}\xi^6 - 4\xi^3 + \xi^2 - \frac{3}{2}\xi^4$	$-2\xi^2 + 7\xi^3 + 3\xi^4$
	7	$6\xi^7 - 2\xi^4$	$4\xi^4$
	8	$\frac{9}{4}\xi^8 - \frac{7}{4}\xi^4 + \frac{1}{2}\xi^2 - \xi^5$	$-\xi^2 + 3\xi^4 + 2\xi^5$
	9	$\frac{1}{2}\xi^9 - \frac{1}{2}\xi^5$	ξ^5
	10	$\frac{1}{20}\xi^{10} - \frac{3}{10}\xi^5 + \frac{1}{5}\xi^2 - \frac{1}{5}\xi + \frac{1}{2}\xi^3 - \frac{1}{4}\xi^6$	$-\xi^3 + \frac{1}{2}\xi^5 + \frac{1}{2}\xi - \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\xi^6$
11	0	0	0
	1	0	ξ
	2	$\frac{5}{2}\xi^2 - \frac{5}{2}\xi$	5ξ
	3	$\frac{15}{2}\xi^3 - \frac{5}{2}\xi^2$	$5\xi^2$
	4	$15\xi^4 - 5\xi^2$	$10\xi^2$
	5	$21\xi^5 - 5\xi^3$	$10\xi^3$
	6	$21\xi^6 - 5\xi^3$	$10\xi^3$
	7	$15\xi^7 - 5\xi^4$	$10\xi^4$
	8	$\frac{15}{2}\xi^8 - \frac{5}{2}\xi^4$	$5\xi^4$
	9	$\frac{5}{2}\xi^9 - \frac{5}{2}\xi^5$	$5\xi^5$

	10	$\frac{1}{2}\xi^{10} - \frac{1}{2}\xi^5$	ξ^5
	11	$\frac{1}{22}\xi^{11} + \frac{5}{11}\xi - \frac{1}{2}\xi^6$	$-\xi + \xi^6$
12	0	0	0
	1	0	ξ
	2	$\frac{5}{2}\xi^2 - \frac{5}{2}\xi$	$\frac{9}{2}\xi + \frac{1}{2}\xi^2$
	3	$\frac{55}{6}\xi^3 + \frac{1}{3}\xi - \frac{5}{2}\xi^2$	$-\xi + 5\xi^2$
	4	$\frac{165}{8}\xi^4 - \frac{53}{8}\xi^2 + \frac{5}{4}\xi - \frac{5}{4}\xi^3$	$-\frac{5}{2}\xi + 12\xi^2 + \frac{5}{2}\xi^3$
	5	$33\xi^5 - 5\xi^3$	$10\xi^3$
	6	$\frac{77}{2}\xi^6 - \frac{25}{3}\xi^3 + \xi^2 + \frac{1}{3}\xi - \frac{5}{2}\xi^4$	$-\frac{1}{2}\xi + 15\xi^3 - \frac{5}{2}\xi^2 + 5\xi^4$
	7	$33\xi^7 - 5\xi^4$	$10\xi^4$
	8	$\frac{165}{8}\xi^8 - \frac{45}{8}\xi^4 + \xi^2 + \frac{1}{2}\xi^3 - \frac{5}{2}\xi^5$	$-2\xi^2 + 10\xi^4 - \xi^3 + 5\xi^5$
	9	$\frac{55}{6}\xi^9 - \frac{1}{6}\xi^3 + \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{5}{2}\xi^5$	$-\xi^2 + 5\xi^5$
	10	$\frac{11}{4}\xi^{10} - 2\xi^5 + \frac{1}{2}\xi^3 - \frac{5}{4}\xi^6$	$\frac{7}{2}\xi^5 - \xi^3 + \frac{5}{2}\xi^6$
	11	$\frac{1}{2}\xi^{11} - \frac{1}{2}\xi^6$	ξ^6
	12	$\frac{1}{24}\xi^{12} - \frac{7}{24}\xi^6 + \frac{5}{24}\xi^4 + \frac{1}{24}\xi^2 - \frac{1}{4}\xi + \frac{1}{2}\xi^3 - \frac{1}{4}\xi^7$	$\frac{1}{2}\xi - \xi^3 + \frac{1}{2}\xi^6 - \frac{1}{2}\xi^4 + \frac{1}{2}\xi^7$

BIBLIOGRAPHIE

Autebert, J.-M. 1987. *Langages algébriques.* Masson, Paris.

Berge, C. 1968. *Principes de combinatoire.* Dunod, Paris.

Bergeron, F., Labelle, G., et Leroux, P. 1994. *Théorie des espèces et combinatoire des structures arborescentes.* Publications du LACIM, Montréal.

—— 1998. *Combinatorial Species and Tree-Like Structures.* T. 67, série *Encyclopedia of Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge.

Berstel, J. et Reutenauer, C. 1990. « Zeta functions of formal languages », *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 321, no. 2, p. 533–546.

Bouchard, P., Chiricota, Y., et Labelle, G. 1995. « Arbres, arborescences et racines carrées symétriques », *Discrete Mathematics*, vol. 139, p. 49–56.

Bouchard, P. et Ouellette, M. 1990. « Décomposition arborescente de Mario Ouellette pour les espèces de structures ». In *Actes du séminaire lotharingien de combinatoire*, p. 5–13, Strasbourg, France. Publications de l'Institut de recherches mathématiques.

Bourbaki, N. 1964. *Algèbre.* Hermann, Paris.

Cartan, H. 1975. *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes.* Hermann, Paris.

Chiricota, Y. 1993. « Structures combinatoires et calcul symbolique ». Thèse de Doctorat, Université du Québec à Montréal.

Ehresmann, C. 1965. *Catégories et structures.* Dunod, Paris.

Geddes, K. O. et al. 1998. *Maple V, Programming Guide.* Springer.

Godement, R. 1966. *Cours d'algèbre.* Hermann, Paris.

Harary, F. et Palmer, E. 1973. *Graphical Enumeration.* Academic Press.

Heal, K. M., Hansen, M. L., et Rickard, K. M. 1998. *Maple V, Learning Guide.* Springer.

Hopcroft, J. E. et Ullman, J. D. 1979. *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation.* Addison-Wesley, Reading (Mass.).

Joyal, A. 1981. « Une théorie combinatoire des séries formelles », *Advances in Mathematics*, vol. 42, p. 1–82.

—— 1985. « Règle des signes en algèbre combinatoire », *Comptes rendus de l'Académie des Sciences du Canada*, vol. VII, p. 285–290.

—— 1986. « Foncteurs analytiques et espèces de structures ». In (Labelle et Leroux, 1986), p. 126–159.

Labelle, G. 1992. « On asymmetric structures », *Discrete Mathematics*, vol. 99, p. 141–164.

Labelle, G. et Leroux, P., éditeurs 1986. *Combinatoire énumérative.* T. 1234, série *Lecture Notes in Mathematics.* Springer-Verlag.

Labelle, J. 1985. « Quelques espèces sur les ensembles de petite cardinalité », *Annales des sciences mathématiques du Québec*, vol. 11, p. 31–58.

Leroux, P. 1983. *Algèbre linéaire : Une approche matricielle.* Modulo, Mont-Royal.

—— 1988. « Methoden der Anzahlbestimmung für einige Klassen von Graphen », *Bayreuther Mathematische Schriften*, vol. 26, p. 1–36.

Lothaire, M. 1983. *Combinatorics on Words.* Addison-Wesley, Reading, (Mass.).

Miloudi, B. et Leroux, P. 1992. « Généralisations de la formule d'Otter », *Annales des Sciences Mathématiques du Québec*, vol. 16, p. 53–80.

Nijenhuis, A. et Wilf, H. S. 1978. *Combinatorial Algorithms for Computers and Calculators.* Academic Press.

Pineau, K. 1996. « Une généralisation des séries indicatrices d'espèces de structures ». Thèse de Doctorat, Publications du LACIM, vol. 19, Université du Québec à Montréal.

Reutenauer, C. 1997. « $\mathbb{N}$-rationality of zeta functions », *Advances in Applied Mathematics*, vol. 18, p. 1–17.

Stanley, R. 1986. *Enumerative Combinatorics.* Wadsworth & Brooks/Cole, Monterey, California.

Stanton, D. et White, D. 1986. *Constructive Combinatorics.* Springer-Verlag.

Yeh, Y. N. 1985. « On the Combinatorial Species of Joyal ». Thèse de Doctorat, State University of New York at Buffalo.

—— 1986. « The calculus of virtual species and K-species ». In (Labelle et Leroux, 1986), p. 351–369.

INDEX