Publications du **La**boratoire de
Combinatoire et d'
Informatique
Mathématique

25

Bruno Parvaix

Contribution à l'étude des mots sturmiens

Université du Québec à Montréal

Ce numéro constitue la publication d'une thèse soutenue devant jury, le 30 juin 1998, pour l'obtention du Ph.D. à l'Université de Limoges..

Composition du Jury

J. Berstel	*Université Paris VI*
J. P. Allouche	*Université Paris-Sud*
P. Seebod	*Université d'Amiens*
R. Tijdeman	
J. P. Borel	
F. Laubie	

Dépôt légal, premier semestre 1999, Bibliothèque nationale du Québec

ISBN 2-89276-173-5 LaCIM Montréal

Laboratoire de combinatoire et d'informatique mathématique
Université du Québec à Montréal
C.P. 8888, Succ. Centre-Ville
Montréal (Québec) Canada
H3C 3P8

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR EN MATHÉMATIQUES DE L'UNIVERSITÉ DE LIMOGES

Spécialités : Théorie des nombres, Mathématiques appliquées et Informatique

Contribution à l'étude des mots sturmiens

Soutenue publiquement le 30 Juin 1998 par

Bruno PARVAIX

Directeur de Thèse : J.-P. Borel
Numéro d'ordre : 19 - 1998

Composition du Jury

M.	J. Berstel	Président
M.	J.-P. Allouche	Rapporteur
M.	P. Séébold	Rapporteur
M.	R. Tijdeman	Rapporteur
M.	J.-P. Borel	Examinateur
M.	F. Laubie	Examinateur

Laboratoire d'arithmétique, de calcul formel et d'optimisation (L.A.C.O.)
Département de Mathématiques - 123 avenue Albert Thomas - 87060 Limoges CEDEX - France
bruno.parvaix@unilim.fr

Table des matières

Résumé **iii**

1 Mots sturmiens **1**
1.1 Définition combinatoire 1
1.2 Caractérisation extrémale 2
1.3 Caractérisation arithmétique 7
1.3.1 Construction des mots sturmiens 7
1.3.2 Propriétés complémentaires 12

2 Morphismes sturmiens **17**
2.1 Monoïde de Sturm 17
2.2 Morphismes acycliques 19
2.3 Morphismes équilibrés 20
2.3.1 Codage des mots sturmiens 20
2.3.2 Caractérisation des morphismes sturmiens 22
2.4 Morphismes localement sturmiens 29
2.5 Morphismes réguliers 29

3 Propriétés d'invariance **33**
3.1 Évolution des pentes et des intercepts 34
3.2 Nombres de Sturm 37
3.3 Premières équations d'invariance 39
3.3.1 Solutions non triviales 39
3.3.2 Automates d'invariance 41
3.3.3 Résolution complète 45
3.4 Suites admissibles 48
3.5 Résultats complémentaires 56

4 Transformations périodiques sur les mots sturmiens **63**
4.1 Formes exponentielles 64
4.2 Transducteurs de décimation périodique 67
4.3 Mots de Christoffel 71
4.3.1 Définition géométrique 71
4.3.2 Transducteurs et homographies 72

5 Antécédents des mots sturmiens **77**
5.1 Correction des mots déséquilibrés 77
5.2 Bassin d'attraction 81
5.3 Calculs d'images réciproques 82
5.4 Mots infiniment sturmiens 86

Conclusion **93**

Bibliographie **100**

A Programmes Maple **101**
A.1 Décomposition des morphismes sturmiens 102
A.2 Invariance des suites admissibles 106
A.3 Bassin d'attraction 110
A.4 Résolution de l'équation $f(x) = y$ où $f \in St$ et $y \in \mathcal{E} \cap \overline{\mathcal{P}}$ 111
A.5 Construction des mots sturmiens 117
A.6 Image d'une fraction continue par une homographie 119

Résumé

Les *mots sturmiens* forment une classe particulière de suites infinies binaires, dont les premières traces semblent remonter au XVIII^e siècle. Les travaux fondateurs de J. Bernoulli [7], E. B. Christoffel [31] et A. A. Markov [75] sont mentionnés dans le livre de B. A. Venkov [107]. Une abondante littérature est consacrée à la famille des *suites caractéristiques* : on cite chronologiquement I. G. Connell [34], K. B. Stolarsky [103], A. S. Fraenkel, M. Mushkin et U. Tassa [50], ainsi que T. C. Brown [27, 28]. De plus, les mots sturmiens interviennent dans de nombreux domaines scientifiques, que ce soit en biologie moléculaire [38], en cristallographie [3, 20], en théorie ergodique [90], en infographie [26], en compression d'images [39] ou en reconnaissance des formes [64].

Un mot infini est sturmien s'il est à la fois *équilibré* et non *ultimement périodique*. Du point de vue extrémal, ce sont les mots dont la *complexité*, non ultimement bornée, est minimale [36, 82, 83]. Dans le cadre des développements de la dynamique symbolique [83], apparaît une approche de nature arithmétique. On effectue une synthèse de ces différentes formulations, en proposant parfois de nouvelles démonstrations. Pour de plus amples détails concernant les *suites de Beatty*, on peut consulter les articles [5, 24, 25, 29, 48, 49, 51] et la bibliographie associée.

Un *morphisme* est dit *sturmien* s'il préserve globalement l'ensemble des mots sturmiens. Ces morphismes forment le *monoïde de Sturm* engendré par une famille à trois éléments. Le chapitre 2 est consacré à décrire cette structure, en référence aux travaux de J. Berstel, M. Kósa, F. Mignosi et P. Séébold [15, 18, 69, 80, 98]. On évoque aussi certaines propriétés des morphismes *localement sturmiens* et *réguliers*.

En généralisant les *fonctions indicatrices* définies par A. S. Fraenkel, M. Mushkin et U. Tassa [50], on détermine l'évolution des *pentes* et des *intercepts* des mots sturmiens sous l'action du monoïde de Sturm. Les formules connues dans le cas homogène apparaissent en cas particulier. On peut alors facilement calculer tous les points fixes d'un morphisme sturmien.

De nouvelles propriétés d'invariance des mots sturmiens sont ensuite présentées. On caractérise notamment les pentes des mots laissés fixes par une substitution non triviale. La preuve proposée fait appel aux développements en *fraction continue* de G. N. Raney [91], et les valeurs obtenues sont des irrationnels quadratiques appelés *nombres de Sturm*. L'une des principales contributions du chapitre 3 est l'introduction d'une classe de mots sturmiens, dits *admissibles*, dont l'intercept est une *homographie* de la pente. Soit x un mot admissible dont la pente est un nombre de Sturm. La construction d'un morphisme f, différent de l'identité, tel que $f(x) = x$, est assurée par un algorithme au coût très faible. Dans certains cas, on peut expliciter toutes les substitutions qui répondent au problème posé. On généralise ainsi les travaux sur les suites caractéristiques, dus à D. Crisp, W. Moran, A. Pollington et P. Shiue [37], et repris récemment par T. Komatsu et A. J. van der Poorten [68]. Enfin, à travers différents exemples, il apparaît que la propriété obtenue pour les suites admissibles ne peut pas être étendue à l'ensemble des mots sturmiens dont l'intercept est une homographie de la pente.

En parallèle à cette étude, des démonstrations originales de résultats connus sont présentées. Tout d'abord, à l'aide des *automates d'invariance*, on remarque que les substitutions, qui préservent globalement l'ensemble des suites caractéristiques, se décomposent en fonction du *morphisme d'inversion* et du *morphisme de Fibonacci* [17, 37]. Réciproquement, si une telle substitution engendre un mot sturmien, il s'agit d'une suite caractéristique [99]. On s'aperçoit alors que les *mots de Christoffel* associés sont aussi *morphiques* [18]. Des propositions similaires sont énoncées pour deux autres familles de mots sturmiens.

On s'intéresse ensuite à une famille de *transducteurs* qui opèrent sur les mots infinis en effectuant des suppressions périodiques des lettres 0 et 1. Ces transformations préservent globalement l'ensemble des mots sturmiens : l'évolution des pentes et des intercepts est analysée en détail au chapitre 4. On précise ainsi des résultats obtenus récemment par J. Justin et G. Pirillo [61]. En cours de preuve, les mots sturmiens sont écrits sous forme *exponentielle*, grâce à la généralisation des *fonctions de répartition* définies par J. Rosenblatt dans le cas homogène [95]. En outre, les transducteurs décrits réalisent la multiplication et la division des nombres irrationnels, lorsqu'ils sont donnés sous forme de mots de Christoffel. Un procédé efficace permettant de passer d'une représentation à l'autre est proposé. On peut ainsi facilement calculer l'image d'un développement en fraction continue infini par une homographie à coefficients entiers. Ce dernier résultat est la traduction arithmétique d'un travail de J.-P. Borel [21], fondé sur l'énoncé géométrique des mots de Christoffel. Pour de plus amples détails concernant les opérations de base sur les fractions continues, on peut consulter [30, 33, 52] et [77].

L'étude des antécédents des suites sturmiennes par les morphismes sturmiens est le sujet principal abordé au chapitre 5. On caractérise les mots pouvant devenir équilibrés sous l'action des morphismes sturmiens. Puis, par le biais de l'approche arithmétique, on détermine l'image réciproque d'un mot sturmien y par un morphisme appartenant au monoïde de Sturm. On remarque alors qu'il existe une suite de morphismes sturmiens $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de *longueur* strictement croissante, pour lesquels la solution de l'équation $f_n(x) = y$ est un mot sturmien. On en déduit un algorithme de construction des premiers termes de y, en ayant pour objectif de limiter le nombre de parties entières à calculer. En corollaire, on s'aperçoit que ce procédé peut parfois être décrit à l'aide de formules récurrentes aux propriétés remarquables. Ces cas particuliers sont à mettre en relation avec l'article de synthèse [12].

Six algorithmes, écrits à l'aide du système de calcul formel Maple, sont détaillés en annexe. Les thèmes traités sont les suivants : "Décomposition des morphismes sturmiens", "Invariance des suites admissibles", "Bassin d'attraction", "Résolution de l'équation $f(x) = y$ où $f \in St$ et $y \in \mathcal{E} \cap \overline{\mathcal{P}}$", "Construction des mots sturmiens" et "Image d'une fraction continue par une homographie". De nombreux exemples et commentaires viennent étayer la présentation de ces programmes.

Un dernier résultat est donné dans l'article *"Substitution invariant Sturmian bisequences"* [87]. On y caractérise les suites sturmiennes définies sur $\mathbb{Z}$, et non plus sur $\mathbb{N}$, laissées fixes par une substitution non triviale. On complète ainsi l'article *"Propriétés d'invariance des mots sturmiens"* paru au Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux [86].

Chapitre 1

Mots sturmiens

Soient $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ un alphabet à deux lettres et $\mathcal{A}^*$ le monoïde libre des mots finis sur $\mathcal{A}$. Pour des commodités d'écriture, on pose $\overline{0} = 1$ et $\overline{1} = 0$. L'élément neutre de $\mathcal{A}^*$ est le mot vide ε et $\mathcal{A}^+ = \mathcal{A}^* \setminus \{\varepsilon\}$. Soit $x \in \mathcal{A}^*$. La longueur de x est définie par $|x| = |x|_0 + |x|_1$, où $|x|_a$ est le nombre d'occurrences de la lettre a dans x. Soit $k \in \mathbb{N}$. Le mot x^k est obtenu en itérant k fois le mot x.
Un mot infini est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{A}$. Soit $\mathcal{A}^\infty = \mathcal{A}^* \cup \mathcal{A}^\omega$, où $\mathcal{A}^\omega$ est l'ensemble des mots infinis. Soit $x \in \mathcal{A}^+$. Le mot x^ω est construit en itérant une infinité de fois le mot x. Soit $(y, z) \in (\mathcal{A}^\infty)^2$. Le mot y est un préfixe de z s'il existe un mot w_1 de $\mathcal{A}^\infty$ tel que $z = yw_1$ avec $y \in \mathcal{A}^*$, ou bien $z = y$ avec $y \in \mathcal{A}^\omega$. On dit que y est un suffixe de z s'il existe un mot w_2 appartenant à $\mathcal{A}^*$ tel que $z = w_2 y$.

Les mots sturmiens peuvent être définis de manière combinatoire, extrémale ou arithmétique. L'objectif principal de ce chapitre est d'établir l'équivalence entre ces différentes formulations, dans un souci de simplification et d'homogénéisation des preuves habituellement présentées.

1.1 Définition combinatoire

Définition 1.1 *Soient $x \in \mathcal{A}^\infty$ et $w \in \mathcal{A}^\infty$. On dit que le mot w est un facteur de x si l'une des conditions suivantes est réalisée :*

- *w est fini et il existe des mots u de $\mathcal{A}^*$ et u' de $\mathcal{A}^\infty$ tels que $x = uwu'$;*
- *w est infini et il existe un mot u de $\mathcal{A}^*$ tel que $x = uw$.*

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{F}act(x, n)$ l'ensemble des facteurs de x de longueur n; on pose $\mathcal{F}act(x) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{F}act(x, n)$.

Définition 1.2 *Soit $x \in \mathcal{A}^\infty$. Le mot x est équilibré si on a*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \;\; \forall\, (u, v) \in (\mathcal{F}act(x, n))^2 \;\; ||u|_1 - |v|_1| \leq 1.$$

Définition 1.3 *Un mot infini x est ultimement périodique s'il existe un couple de mots finis (u, v) tel que $x = uv^\omega$, avec $v \neq \varepsilon$.*

Définition 1.4 *Les mots sturmiens sont les mots infinis équilibrés et non ultimement périodiques.*

Exemple. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de mots définie par

$$F_0 = 0,\ F_1 = 01 \text{ et } F_{n+2} = F_{n+1}F_n \quad (\forall\, n \in \mathbb{N}).$$

Cette suite converge vers le mot sturmien de Fibonacci, étudié notamment par J. Berstel [10] et A. de Luca [40].

1.2 Caractérisation extrémale

Une abondante littérature est consacrée à la complexité des suites infinies. Dans l'article [1], J.-P. Allouche présente un survol de ces propriétés.

Définition 1.5 *Soit x un mot infini. La complexité de x est la suite, définie sur $\mathbb{N}^*$, dont le terme général $P_n(x)$ est le nombre de facteurs de x de longueur n.*

Proposition 1.1 (Morse et Hedlund, [83])
Les mots sturmiens sont les mots infinis de complexité minimale parmi les mots non ultimement périodiques.

Le lemme 1.1 est un cas particulier d'un résultat qui semble dater de 1938, voir [82]. La preuve, donnée ici, fait intervenir la notion de facteurs spéciaux, et s'inspire du lemme 2.10 d'un article de E. M. Coven et G. A. Hedlund [36], paru en 1973.

Définition 1.6 *Soient $x \in \mathcal{A}^\infty$ et $w \in \mathcal{A}^*$.*
Le mot w est un facteur r-spécial de x si on a $w0 \in \mathcal{F}act(x)$ et $w1 \in \mathcal{F}act(x)$. Si $0w \in \mathcal{F}act(x)$ et $1w \in \mathcal{F}act(x)$, on dit que w est un facteur l-spécial de x.

Lemme 1.1 *Un mot infini est non ultimement périodique si et seulement si sa complexité est minorée par $n+1$ à tout rang n.*

Preuve. Soit $x = x_1 \ldots x_m \ldots$ un mot infini décomposé sur l'alphabet $\mathcal{A}$.

Si x est ultimement périodique, il existe des entiers k et c, avec $c \geq k+1 \geq 1$, tels que $x = x_1 \ldots x_k (x_{k+1} \ldots x_c)^\omega$. On en déduit immédiatement $P_c(x) \leq c$.

On considère à présent le cas où le mot x n'est pas ultimement périodique. En particulier, on a $x \neq 0^\omega$ et $x \neq 1^\omega$, d'où $P_1(x) \geq 2$. Soit n un entier pour lequel on a $P_n(x) \geq n+1$. Comme $P_{n+1}(x) \geq P_n(x)$, le résultat est acquis au rang $n+1$ sauf si la relation $P_{n+1}(x) = P_n(x) = n+1$ est vérifiée. Il suffit donc d'étudier cette éventualité. Clairement, il existe un facteur w de x, de longueur n, qui apparaît au moins deux fois dans l'écriture de x. Autrement dit, on peut définir des entiers k et c tels que

$$w = x_k \ldots x_{k+n-1} = x_c \ldots x_{c+n-1} \text{ avec } 1 \leq k < c.$$

Comme on a $P_{n+1}(x) = P_n(x)$, il n'existe aucun facteur r-spécial de x de longueur n. Les mots wx_{k+n} et wx_{c+n} étant des facteurs de x, on en déduit $x_{k+n} = x_{c+n}$. En itérant ce raisonnement, on obtient $x_{k+j} = x_{c+j}$ pour tout entier j. Puis, en posant $y = x_1 \dots x_{k-1}$ si $k > 1$ et $y = \varepsilon$ si $k = 1$, on a $x = y\ (x_k \dots x_{c-1})^{\omega}$, ce qui est absurde. $\star$

Définition 1.7 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{N}$ un ensemble de mots de longueur n. On dit que $\mathcal{N}$ est équilibré si, pour tout entier c compris entre 1 et n, le nombre d'occurrences de la lettre 1, dans les facteurs de longueur c des mots appartenant à $\mathcal{N}$, ne prend que deux valeurs.*

Lemme 1.2 (Morse et Hedlund, [83], Lemme 3.2) *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{N}$ un ensemble équilibré de mots de longueur n. Le cardinal de $\mathcal{N}$ est majoré par $n+1$.*

Preuve. Le résultat est trivial si n vaut un. Soit $m \geq 2$ un entier pour lequel la propriété est acquise jusqu'au rang $m-1$. On raisonne par l'absurde, en supposant qu'il existe un ensemble équilibré $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_{m+2}\}$, constitué de $m+2$ mots de longueur m. Pour tout entier i compris entre 1 et $m+2$, on définit le mot Z_i par $V_i = Z_i b_i$ avec $b_i \in \mathcal{A}$. Soit $\mathcal{Z} = \{Z_1, \dots, Z_{m+2}\}$. L'ensemble $\mathcal{Z}$ satisfait l'hypothèse de récurrence, car il est extrait de $\mathcal{V}$ qui est équilibré. Le cardinal de $\mathcal{Z}$ est donc majoré par m.

On commence par remarquer qu'il n'existe pas trois mots identiques dans $\mathcal{Z}$. En effet, à une renumérotation près, si on suppose $Z_1 = Z_2 = Z_3$, il apparaît que deux des trois mots $V_1 = Z_1 b_1$, $V_2 = Z_1 b_2$ et $V_3 = Z_1 b_3$ sont égaux, ce qui est absurde.

Nécessairement, il existe des entiers i, j, k et l, deux à deux distincts, tels que $Z_i = Z_j$ et $Z_k = Z_l$. Clairement, on a $b_j = \overline{b_i}$ et $b_l = \overline{b_k}$. À une permutation des indices près, on vérifie aussi $b_i = b_k$ puis $Z_i \neq Z_k$. Il existe donc une lettre b et un mot fini W tels que les mots bW et $\overline{b}W$ soient respectivement des suffixes de Z_i et Z_k. Ainsi, les mots bWb_i, $\overline{b}Wb_i$, $bW\overline{b_i}$ et $\overline{b}W\overline{b_i}$ appartiennent à $\bigcup_{x \in \mathcal{V}} \mathcal{F}act(x, |W|+2)$. Mais le nombre d'occurrences de la lettre 1 dans ces quatre mots prend exactement trois valeurs, ce qui amène une contradiction car l'ensemble $\mathcal{V}$ est équilibré. $\star$

Par le lemme suivant, on établit la première partie du résultat annoncé en début de section :

Lemme 1.3
Soit x un mot sturmien. Pour tout entier $n \geq 1$, on a $P_n(x) = n+1$.

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le mot x étant non ultimement périodique, sa complexité au rang n est minorée par $n+1$ d'après le lemme 1.1. De plus, comme x est équilibré, l'ensemble $\mathcal{F}act(x, n)$ satisfait les hypothèses du lemme 1.2. On a donc $P_n(x) = \#\mathcal{F}act(x, n) \leq n+1$ et finalement $P_n(x) = n+1$. $\star$

On s'intéresse maintenant à la réciproque du lemme 1.3. La preuve, présentée ici, est celle donnée par E. M. Coven et G. A. Hedlund [36]. Elle fait appel à des propriétés classiques des facteurs spéciaux, énoncées aux lemmes 1.5 et 1.6.

Définition 1.8 *Le shift est l'opérateur, noté S, qui tronque un mot non vide de sa première lettre.*

Lemme 1.4
Soit x un mot infini dont la complexité est donnée par la suite $(n+1)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Chaque facteur fini de x apparaît une infinité de fois dans x.

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit u un facteur de x de longueur n. On suppose que le mot u n'apparaît qu'un nombre fini de fois dans x. Il existe alors un rang $i \in \mathbb{N}^*$ tel que $u \notin \mathcal{F}act(S^i(x))$. On obtient ainsi $P_n(S^i(x)) < P_n(x)$ puis $P_n(S^i(x)) \leq n$. On en déduit que les mots $S^i(x)$ et donc x sont ultimement périodiques, ce qui contredit le lemme 1.1. $\star$

Lemme 1.5 *Soit x un mot infini dont la complexité est donnée par la suite $(n+1)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Le mot x possède exactement un facteur r-spécial et un facteur l-spécial de longueurs données.*

Preuve. Soit n un entier non nul. Le nombre r_n de facteurs r-spéciaux de x, de longueur n, est défini par $P_{n+1}(x) = (P_n(x) - r_n) + 2r_n$. Clairement, on a $r_n = 1$. Seuls les préfixes de x peuvent poser problème pour considérer les extensions à gauche. Le lemme précédent permet de lever cette ambiguïté. $\star$

Lemme 1.6 (Coven et Hedlund, [36], Théorème 2.16)
Soit x un mot infini de complexité donnée par la suite $(n+1)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Soit un entier $m \geq 1$. L'unique facteur r-spécial de x de longueur m apparaît dans le préfixe de x de longueur $2m$.

Preuve. Soient $x = x_1 \ldots x_n \ldots$ et $X = x_1 \ldots x_{2m}$. Soit u le facteur r-spécial de x de longueur m. On suppose que le mot u n'appartient pas aux facteurs de X. Comme il y a $m+1$ éléments dans $\mathcal{F}act(x, m)$, le cardinal de $\mathcal{F}act(X, m)$ est majoré par m. Il existe donc des entiers p et q, avec $1 \leq p < q \leq m+1$, tels que $x_p \ldots x_{p+m-1} = x_q \ldots x_{q+m-1}$. On cherche à montrer pour tout entier i :

$$x_{p+i} \ldots x_{p+i+m-1} = x_{q+i} \ldots x_{q+i+m-1}$$

et

$$\forall\, j \in \mathbb{N},\ 1 \leq j \leq q+i,\ \ x_j \ldots x_{j+m-1} \in \mathcal{F}act(X).$$

On établit ce résultat par récurrence. Comme $q \leq m+1$, la propriété est triviale au rang zéro. Si l'hypothèse est vraie au rang i, on a

$$x_{p+i} \ldots x_{p+i+m-1} = x_{q+i} \ldots x_{q+i+m-1} \in \mathcal{F}act(X).$$

Ces mots ne sont donc pas des facteurs r-spéciaux de x. On en déduit successivement $x_{p+i+m} = x_{q+i+m}$ et $x_{p+i+1} \ldots x_{p+i+m} = x_{q+i+1} \ldots x_{q+i+m}$. Par hypothèse, on a $1 \leq p+i+1 \leq q+i$ et on vérifie $x_{p+i+1} \ldots x_{p+i+m} \in \mathcal{F}act(X)$. Ainsi, pour tout entier $j \geq 1$, le mot $x_j \ldots x_{j+m-1}$ est un facteur de X. En particulier, on a $u \in \mathcal{F}act(X)$, ce qui est absurde. $\star$

La caractérisation suivante des mots déséquilibrés est d'un intérêt capital, notamment pour l'étude menée au chapitre 5.

Lemme 1.7 (Coven et Hedlund, [36], Lemme 3.06) *Soit x un mot infini. On suppose qu'il existe un rang n tel que $\mathcal{F}act(x, n+1)$ est équilibré alors que $\mathcal{F}act(x, n+2)$ ne l'est pas. Alors il existe un unique bloc B de longueur n tel que $0B0$ et $1B1$ sont des facteurs de x. De plus, le mot B est un palindrome.*

Preuve. On commence par établir l'existence du mot B. Par définition même de l'entier n, il existe deux facteurs A et C de x, de longueur $n+2$, tels que $|A|_1 - |C|_1 \geq 2$. On note $A = a_0 \dots a_{n+1}$ et $C = c_0 \dots c_{n+1}$. De plus, on a $||a_1 \dots a_{n+1}|_1 - |c_1 \dots c_{n+1}|_1| \leq 1$. En particulier, on a

$$1 \geq |a_0|_1 - |c_0|_1 = (|A|_1 - |C|_1) - (|a_1 \dots a_{n+1}|_1 - |c_1 \dots c_{n+1}|_1) \geq 1.$$

On en déduit $|a_0|_1 - |c_0|_1 = 1$ puis $a_0 = 1$ et $c_0 = 0$. Un raisonnement identique permet d'affirmer $a_{n+1} = 1$ et $c_{n+1} = 0$. Si $n = 0$, le résultat est vérifié pour le mot vide. On suppose désormais $n \geq 1$. Si $a_1 \dots a_n \neq c_1 \dots c_n$ on note k le plus petit entier $j \geq 1$ tel que $a_j = \overline{c_j}$. Si $a_k = 1$ et $c_k = 0$ alors on a $|a_0 \dots a_k|_1 - |c_0 \dots c_k|_1 = |1a_1 \dots a_{k-1}1|_1 - |0a_1 \dots a_{k-1}0|_1 = 2$, ce qui est absurde car l'ensemble $\mathcal{F}act(x, n+1)$ est équilibré. On a donc $a_k = 0$ et $c_k = 1$. Les mots A et C sont de la forme $A = 1a_1 \dots a_{k-1}0a_{k+1} \dots a_n1$ et $C = 0a_1 \dots a_{k-1}1c_{k+1} \dots c_n0$. Mais on obtient alors

$$2 \leq |A|_1 - |C|_1 = |a_{k+1} \dots a_n1|_1 - |c_{k+1} \dots c_n0|_1,$$

ce qui contredit à nouveau l'hypothèse selon laquelle $\mathcal{F}act(x, n+1)$ est équilibré. En résumé, en posant $B = a_1 \dots a_n$, on a $B = c_1 \dots c_n$ et les mots $1B1$ et $0B0$ appartiennent aux facteurs de x.

À présent, on montre que le mot B est un palindrome en raisonnant par l'absurde. Soit k le plus petit indice j, compris entre 1 et n, tel que $\overline{a_j} = a_{n-j+1}$. Si $a_k = 0$ on a

$$|a_{n-k+1}a_{n-k+2} \dots a_n1|_1 - |0a_1 \dots a_k|_1 = |1a_{k-1} \dots a_11|_1 - |0a_1 \dots a_{k-1}0|_1 = 2,$$

ce qui amène une contradiction. Le cas où a_k vaut 1 se traite de façon similaire, en utilisant les facteurs $1B$ et $B0$ au lieu de $B1$ et $0B$. Le mot B est donc un palindrome.

Il ne reste plus qu'à prouver l'unicité d'un tel facteur. On suppose qu'il existe un autre mot D de longueur n tel que $0D0$ et $1D1$ appartiennent à $\mathcal{F}act(x)$. On pose $D = d_1 \dots d_n$ et on note k le plus petit entier j, avec $1 \leq j \leq n$, tel que $\overline{a_j} = d_j$. Si $a_k = 0$, comme $0B$ et $1D$ sont des facteurs de x, on a $0a_1 \dots a_{k-1}0 \in \mathcal{F}act(x)$ et $1d_1 \dots d_{k-1}1 = 1a_1 \dots a_{k-1}1 \in \mathcal{F}act(x)$, ce qui est absurde car l'ensemble $\mathcal{F}act(x, n+1)$ est équilibré. Par un procédé identique, on obtient une contradiction si a_k est égal à 1. $\star$

Lemme 1.8 *Si x est un mot infini dont la complexité est donnée par la suite $(n+1)_{n \in \mathbb{N}^*}$ alors x est équilibré et non ultimement périodique.*

Preuve. D'après le lemme 1.1, le mot x est non ultimement périodique. On suppose que x n'est pas équilibré. Alors, il existe un rang $n \geq 0$ tel que l'ensemble $\mathcal{F}act(x, n+1)$ est équilibré, alors que $\mathcal{F}act(x, n+2)$ ne l'est pas. D'après le lemme 1.7, il existe un facteur B de x de longueur n, tel que $0B0$ et $1B1$ appartiennent à $\mathcal{F}act(x)$. Le mot B est l'unique facteur r-spécial de x de longueur n, mais aussi l'unique facteur l-spécial de x de longueur n.

En posant

$$\mathcal{F}act(x, n) = \{B, B_1, \ldots, B_n\}$$

on peut écrire

$$\mathcal{F}act(x, n+1) = \{B0, B1, B_1a_1, \ldots, B_na_n\}$$

avec $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{A}^n$ et

$$\mathcal{F}act(x, n+2) = \{0B0, 1B1, c_1B_1a_1, \ldots, c_nB_na_n, c'B'a'\}$$

avec $B' \in \mathcal{F}act(x, n)$ et $(a', c', c_1, \ldots, c_n) \in \mathcal{A}^{n+2}$. S'il existe un entier $i \geq 1$ tel que $B' = B_i$ alors $c_iB_ia_i$ et $c'B_ia'$ sont des facteurs de x. Mais B_i n'est ni un facteur r-spécial, ni un facteur l-spécial de x. On a donc $a' = a_i$ et $c' = c_i$, d'où $c'B'a' = c_iB_ia_i$, ce qui est contraire à la définition de $\mathcal{F}act(x, n+2)$. On a donc $B' = B$. En résumé, les mots $0B0$, $1B1$ et $c'Ba'$ sont trois facteurs distincts de x. En particulier on a $c' = \overline{a'}$. Par unicité du facteur r-spécial de x de longueur $n+1$, on remarque $(0B0, 0B1, 1B0, 1B1) \notin \mathcal{F}act(x)^4$. Autrement dit, il existe une lettre a telle que les mots $0B0$, $1B1$ et $aB\overline{a}$ sont des éléments de $\mathcal{F}act(x)$, contrairement à $\overline{a}Ba$. Le mot aB est donc le facteur r-spécial de x de longueur $n+1$. De plus, en notant $x = x_1x_2 \ldots x_m \ldots$ et $B = b_1 \ldots b_n$, il existe un entier i tel que $x_i = \overline{a}$ et $x_{i+j} = b_j$ pour tout entier j compris entre 1 et n. Comme $\overline{a}Ba \notin \mathcal{F}act(x)$, on a aussi $x_{i+n+1} = \overline{a}$.

Pour montrer $aB \notin \mathcal{F}act(x_i \ldots x_{i+2n+1})$, on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un entier k, compris entre 0 et $n+1$, tel que $aB = x_{i+k} \ldots x_{i+k+n}$. Comme $x_i = \overline{a} = x_{i+n+1}$, on a en fait $1 \leq k \leq n$. On vérifie $\overline{a}B = x_i \ldots x_{i+n}$ et $x_{i+j} = b_j = x_{i+j+k}$ pour j variant entre 1 et n. Comme $1 \leq n-k+1 \leq n$, on obtient $b_{n-k+1} = x_{i+n+1} = \overline{a}$. Mais on remarque $a = x_{i+k} = b_k$ d'où $b_k \neq b_{n-k+1}$, ce qui est absurde car B est un palindrome. Le mot aB n'appartient donc pas à $\mathcal{F}act(x_i \ldots x_{i+2n+1})$. Or aB apparaît une infinité de fois dans x. En particulier, le mot aB est le facteur r-spécial de $S^{i-1}(x)$ de longueur $n+1$. De plus, on a $P_n(S^{i-1}(x)) = n+1$ pour tout entier $n \geq 1$, et le lemme 1.6 s'applique : le mot aB est un facteur du préfixe de $S^{i-1}(x)$ de longueur $2(n+1)$. Mais ce mot est égal à $x_i \ldots x_{i+2n+1}$, ce qui amène la contradiction cherchée. En résumé, il apparaît que le mot x est équilibré. ⋆

Preuve de la proposition 1.1. Il suffit d'utiliser les lemmes 1.1, 1.3 et 1.8. ⋆

1.3 Caractérisation arithmétique

1.3.1 Construction des mots sturmiens

Dans le cadre des développements de la dynamique symbolique, G. A. Hedlund et M. Morse décrivent un procédé de construction des mots sturmiens [83], à partir de la définition 1.9 :

Définition 1.9 *Soit Δ l'ensemble des couples formés d'un irrationnel et d'un réel. Soient s et s' les fonctions à valeurs dans $\mathcal{A}^\omega$, qui à un couple (α,ρ) de Δ, associent les suites $s_{\alpha,\rho}$ et $s'_{\alpha,\rho}$, définies sur $\mathbb{N}$, de terme général*

$$s_{\alpha,\rho}(n) = \lfloor (n{+}1)\alpha{+}\rho\rfloor - \lfloor n\alpha{+}\rho\rfloor - \lfloor\alpha\rfloor \text{ et } s'_{\alpha,\rho}(n) = \lceil (n{+}1)\alpha{+}\rho\rceil - \lceil n\alpha{+}\rho\rceil - \lfloor\alpha\rfloor.$$

On dit que les mots $s_{\alpha,\rho}$ et $s'_{\alpha,\rho}$ sont de pente α et d'intercept ρ.

Soit Λ l'ensemble des couples formés d'un irrationnel de $]0,1[$ et d'un réel de $[0,1[$. Il suffit d'étudier les restrictions de s et s' à Λ, car les pentes et les intercepts sont clairement des notions définies à un entier près.

Proposition 1.2 (Morse et Hedlund, [83])
Soit $(\alpha,\rho)\in\Lambda$. Les mots $s_{\alpha,\rho}$ et $s'_{\alpha,\rho}$ sont sturmiens.

Les lemmes 1.9 et 1.11 permettent d'établir cette proposition.

Lemme 1.9 *Soit $(\alpha,\rho)\in\Lambda$. Les mots $s_{\alpha,\rho}$ et $s'_{\alpha,\rho}$ sont équilibrés.*

Preuve. Soit $m\in\mathbb{N}^*$. Soit x un facteur de $s_{\alpha,\rho}$ de longueur m. Il existe un entier n tel que $x = s_{\alpha,\rho}(n)\dots s_{\alpha,\rho}(n+m-1)$. Le nombre d'occurrences de la lettre 1 dans x est défini par

$$|x|_1 = \sum_{i=n}^{n+m-1} s_{\alpha,\rho}(i) = \lfloor (n+m)\alpha+\rho\rfloor - \lfloor n\alpha+\rho\rfloor.$$

De plus, on a

$$(n+m)\alpha+\rho-1 < \lfloor (n+m)\alpha+\rho\rfloor \leq (n+m)\alpha+\rho$$

et

$$-n\alpha-\rho \leq -\lfloor n\alpha+\rho\rfloor < 1-n\alpha-\rho.$$

On en déduit $m\alpha-1 < |x|_1 < m\alpha+1$ et $\lfloor m\alpha\rfloor \leq |x|_1 \leq \lfloor m\alpha\rfloor+1$. Le mot $s_{\alpha,\rho}$ est donc équilibré. On démontre de la même façon que $s'_{\alpha,\rho}$ est équilibré. $\star$

Définition 1.10 *Soit $x = x_0x_1x_2\dots$ un mot infini décomposé sur l'alphabet $\mathcal{A}$. Soit $a\in\mathcal{A}$. Si la suite $\left(\frac{1}{n}\,|x_0\dots x_{n-1}|_a\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers une limite finie, on dit que la valeur obtenue est la fréquence asymptotique de la lettre a dans le mot x.*

Lemme 1.10 *Soit $(\alpha,\rho)\in\Lambda$. La fréquence asymptotique de la lettre 1 dans les mots $s_{\alpha,\rho}$ et $s'_{\alpha,\rho}$ existe, et est égale à α.*

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il suffit de remarquer

$$\frac{|s_{\alpha,\rho}(0)\dots s_{\alpha,\rho}(n-1)|_1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} s_{\alpha,\rho}(i) = \frac{\lfloor n\alpha+\rho \rfloor}{n}$$

et

$$\frac{|s'_{\alpha,\rho}(0)\dots s'_{\alpha,\rho}(n-1)|_1}{n} = \frac{\lceil n\alpha+\rho\rceil - \lceil \rho \rceil}{n}$$

pour conclure. ⋆

Lemme 1.11 *Soit $(\alpha,\rho) \in \Lambda$. Les mots $s_{\alpha,\rho}$ et $s'_{\alpha,\rho}$ sont non ultimement périodiques.*

Preuve. On suppose que la suite $s_{\alpha,\rho}$ est ultimement périodique. Il existe donc un entier $q \geq 1$ et un rang $m \geq 0$ tels que, pour tout entier $n \geq m$, on a $s_{\alpha,\rho}(n+q) = s_{\alpha,\rho}(n)$. D'après le lemme précédent, on vérifie en particulier

$$\begin{aligned}\alpha &= \lim_{c\to+\infty} \frac{1}{cq+m} |s_{\alpha,\rho}(0)\dots s_{\alpha,\rho}(cq+m-1)|_1 \\ &= \frac{|s_{\alpha,\rho}(m)\dots s_{\alpha,\rho}(q+m-1)|_1}{q}.\end{aligned}$$

On en déduit que la pente α est rationnelle, ce qui est absurde. La preuve concernant $s'_{\alpha,\rho}$ est similaire. ⋆

La réciproque de la proposition 1.2 est énoncée au théorème 5.3 de l'article [83]. On choisit de présenter une nouvelle approche de ce problème, en utilisant des travaux récents de R. Tijdeman [104, 105].

Définition 1.11 *Soit Z un ensemble d'entiers. On appelle $Z_{i..j}$ l'ensemble des éléments de Z compris entre les deux entiers i et j, avec $i \leq j$. On dit que Z est homogène s'il vérifie la relation suivante :*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \ \ \forall\, (k_1,k_2) \in \mathbb{N}^2 \ \ |\#Z_{k_1..k_1+n-1} - \#Z_{k_2..k_2+n-1}| \leq 1.$$

Définition 1.12 *Sous réserve d'existence, on définit la densité θ d'un ensemble Z d'entiers par $\theta = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\#Z_{1..n}$.*

En trois étapes, on décrit un lien entre les ensembles homogènes de densité irrationnelle et les mots sturmiens.

Lemme 1.12 (Tijdeman, [105], Lemme 1)
Tout ensemble homogène possède une densité.

Preuve. Soit Z un ensemble homogène. Soit μ la suite, définie sur $\mathbb{N}^*$, de terme général $\mu_n = \frac{1}{n}\#Z_{1..n}$. Pour établir la propriété, il suffit de montrer que cette suite est de Cauchy. Soit $\epsilon \in]0,1[$. Soient t, N et M des entiers avec $2^t > 4\epsilon^{-1}$ et

$N > M > 2^{t+3}\epsilon^{-1}$. On pose $M_t = \lfloor M2^{-t} \rfloor$ et $N_t = \lfloor N2^{-t} \rfloor$. Avec ces notations, on a :

$$|\mu_M - \mu_N| \leq \left| \frac{1}{M} \# Z_{1..2^t M_t} - \frac{1}{N} \# Z_{1..2^t N_t} \right| + \left| \frac{1}{M} \# Z_{2^t M_t + 1..M} - \frac{1}{N} \# Z_{2^t N_t + 1..N} \right|.$$

Par définition de M_t et N_t, on remarque $M - 2^t M_t < 2^t$ et $N - 2^t N_t < 2^t$, puis

$$\left| \frac{1}{M} \# Z_{2^t M_t + 1..M} - \frac{1}{N} \# Z_{2^t N_t + 1..N} \right| \leq \frac{2^t}{M} + \frac{2^t}{N} < \frac{2^{t+1}}{M}.$$

L'ensemble Z étant homogène, il existe un entier k tel que $\# Z_{c..c+2^t-1}$ est égal à k ou $k+1$, pour tout entier c. En notant $\varepsilon_i = \# Z_{1+(i-1)2^t..i2^t} - k$, avec $1 \leq i \leq N_t$, on a $\varepsilon_i = 0$ ou $\varepsilon_i = 1$, et donc

$$\left| \frac{1}{M} \# Z_{1..2^t M_t} - \frac{1}{N} \# Z_{1..2^t N_t} \right| = \left| \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M_t} (k + \varepsilon_i) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N_t} (k + \varepsilon_i) \right|$$

et

$$\left| \frac{1}{M} \# Z_{1..2^t M_t} - \frac{1}{N} \# Z_{1..2^t N_t} \right| \leq \left| \frac{kM_t}{M} - \frac{kN_t}{N} \right| + \frac{M_t}{M} + \frac{N_t}{N}.$$

Comme $M_t \leq M2^{-t} < M_t + 1$ et $N_t \leq N2^{-t} < N_t + 1$, on en déduit

$$|\mu_M - \mu_N| \leq \frac{2^{t+1}}{M} + \frac{1}{2^t} + \frac{1}{2^t} + \frac{k}{M} < \epsilon. \star$$

Lemme 1.13 (Tijdeman, [104], Lemme 3)
Soient ϕ et ξ deux réels, avec $\xi > 1$. Soit $Z = \{z_0, z_1, z_2, \ldots\}$ un ensemble homogène, de densité ξ^{-1}. En supposant que la suite $(z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante, on a

$$\forall\, i \in \mathbb{N} \;\; z_i \leq \lfloor i\xi + \phi \rfloor \;\; \textit{ou bien} \; \forall\, i \in \mathbb{N} \;\; z_i \geq \lfloor i\xi + \phi \rfloor.$$

Preuve. On raisonne par l'absurde. Il existe alors des entiers i et j tels que $1 + z_i \leq \lfloor i\xi + \phi \rfloor$ et $z_j \geq \lfloor j\xi + \phi \rfloor + 1$. On présente la preuve sous l'hypothèse $i < j$. On commence par remarquer que le cardinal de $Z_{z_i+1..z_j-1}$ est $j - i - 1$. De plus, on a

$$\lfloor j\xi + \phi \rfloor - \lfloor i\xi + \phi \rfloor = \lfloor (j-i)\xi + (i\xi + \phi) \rfloor - \lfloor i\xi + \phi \rfloor$$

d'où

$$\lfloor j\xi + \phi \rfloor - \lfloor i\xi + \phi \rfloor \geq \lfloor (j-i)\xi \rfloor > (j-i)\xi - 1,$$

et

$$z_j - z_i \geq \lfloor j\xi + \phi \rfloor - \lfloor i\xi + \phi \rfloor + 2 > (j-i)\xi + 1.$$

Comme Z est de densité ξ^{-1}, le cardinal de $Z_{z_i+1..z_j-1}$ est minoré par $n\xi^{-1} - 1$, avec $n = z_j - z_i - 1$. On a donc $\# Z_{z_i+1..z_j-1} \geq n\xi^{-1} - 1 > j - i - 1$, ce qui est absurde. Pour traiter le cas où on a $i > j$, on raisonne de la même façon, en majorant le cardinal d'un ensemble de type $Z_{k..k+m-1}$, avec $k \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}^*$, par $m\xi^{-1} + 1$. $\star$

Lemme 1.14 (Tijdeman, [104], Lemme 4)
Soient un irrationnel $\xi > 1$ et un ensemble homogène $Z = \{z_0, z_1, z_2, \dots\}$ de densité égale à ξ^{-1}. On suppose que la suite $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. Il existe alors un réel ϕ tel que

$$\forall\, i \in \mathbb{N}\;\; z_i = \lfloor i\xi + \phi \rfloor \;\; ou\ bien\ \forall\, i \in \mathbb{N}\;\; z_i = \lceil i\xi + \phi \rceil.$$

Preuve. D'après le lemme précédent, il existe un réel ϕ_1 défini par

$$\phi_1 = inf\{\phi \in \mathbb{R} \mid \forall\, i \in \mathbb{N}\;\; \lfloor i\xi + \phi \rfloor \geq z_i\}.$$

Pour tout réel $\phi < \phi_1$, il existe un entier c tel que $\lfloor c\xi + \phi \rfloor < z_c$. Toujours d'après le lemme 1.13, pour tout entier i, on peut alors affirmer $\lfloor i\xi + \phi \rfloor \leq z_i$.

Soit i_0 un entier tel que $i_0\xi + \phi_1 \notin \mathbb{Z}$. On cherche à montrer $\lfloor i_0\xi + \phi_1 \rfloor = z_{i_0}$. On raisonne par l'absurde en supposant $i_0\xi + \phi_1 > \lfloor i_0\xi + \phi_1 \rfloor \geq z_{i_0} + 1$. Il existe alors un réel $\phi_1' < \phi_1$ tel que $i_0\xi + \phi_1' \in \,]z_{i_0} + 1, i_0\xi + \phi_1[$ et donc $\lfloor i_0\xi + \phi_1' \rfloor > z_{i_0}$. Ainsi, pour tout entier i, on a $\lfloor i\xi + \phi_1' \rfloor \geq z_i$, ce qui contredit la minimalité de ϕ_1.

On suppose l'existence d'un entier i_1 tel que $i_1\xi + \phi_1 \in \mathbb{Z}$. Le réel ξ étant irrationnel, un tel entier est unique. Donc pour tout entier i différent de i_1, on a $\lceil i\xi + \phi_1 - 1 \rceil = \lfloor i\xi + \phi_1 \rfloor = z_i$. Toujours par minimalité de ϕ_1, il est évident que z_{i_1} ne peut prendre que deux valeurs : $i_1\xi + \phi_1 - 1$ ou bien $i_1\xi + \phi_1$. Si $z_{i_1} = i_1\xi + \phi_1$ alors pour tout entier i, on a $z_i = \lfloor i\xi + \phi_1 \rfloor$. Si $z_{i_1} = i_1\xi + \phi_1 - 1$ alors pour tout entier i, on a $z_i = \lceil i\xi + \phi_1 - 1 \rceil$, ce qui achève la preuve. $\star$

Un dernier résultat, dû à G. A. Hedlund et M. Morse [83], est requis afin de démontrer la réciproque de la proposition 1.2. On choisit de présenter une preuve de nature combinatoire.

Lemme 1.15 *Soit x un mot infini équilibré et non ultimement périodique. Il existe une lettre a de l'alphabet $\mathcal{A}$ telle que ax est un mot sturmien.*

Preuve. On suppose que les mots $0x$ et $1x$ sont simultanément déséquilibrés. Il existe donc des facteurs u et v de x tels que $(0u0, 1u1) \in \mathcal{F}act(0x)^2$ mais aussi $(0v0, 1v1) \in \mathcal{F}act(1x)^2$. Comme x est équilibré, les mots $u0$ et $v1$ sont nécessairement des préfixes de x, autrement dit on a $x = u0 \cdots = v1 \dots$ Soient n et m les longueurs respectives de u et v. Clairement n est différent de m. Par symétrie, on ne traite que le cas où $n < m$. On écrit alors u et v sous la forme $u = u_1 \dots u_n$ et $v = v_1 \dots v_n v_{n+1} \dots v_m$. On vérifie ainsi $u_1 \dots u_n = v_1 \dots v_n$ et $v_{n+1} = 0$. Comme $0v \in \mathcal{F}act(x)$ on a $0v_1 \dots v_n 0 \in \mathcal{F}act(x)$. On obtient une contradiction en remarquant $1v_1 \dots v_n 1 = 1u1 \in \mathcal{F}act(0x)$. $\star$

Proposition 1.3 *Si x est un mot infini équilibré et non ultimement périodique alors il existe un irrationnel α et un réel ρ tels que $x = s_{\alpha,\rho}$ ou $x = s'_{\alpha,\rho}$.*

Preuve. Soit x un mot infini équilibré et non ultimement périodique. D'après le lemme précédent, il existe une lettre a telle que le mot $y = ax$ est sturmien. On décompose y sous la forme $y = y_0y_1y_2 \dots$ Soit $Z = \{z_0, z_1, z_2, \dots\}$ où

$z_i = i + \sum_{j=0}^{i} y_j$ avec $i \in \mathbb{N}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on cherche à montrer :

$$\forall\ (c_1, c_2) \in \mathbb{N}^2 \ \ |\#Z_{c_1..c_1+n-1} - \#Z_{c_2..c_2+n-1}| \leq 1.$$

Les éléments de Z formant une suite strictement croissante d'entiers, le résultat est trivial au rang un. En le supposant vrai au rang n, on raisonne par l'absurde. Il existe alors des entiers k_1 et k_2 tels que $\#Z_{k_1..k_1+n} \geq 2 + \#Z_{k_2..k_2+n}$. En utilisant l'hypothèse de récurrence au rang n, il apparaît facilement

$$\#Z_{k_1..k_1} = 1 = \#Z_{k_1+n..k_1+n}$$

et $\#Z_{k_2..k_2} = 0 = \#Z_{k_2+n..k_2+n}$ ainsi que $\#Z_{k_1..k_1+n} = 2 + \#Z_{k_2..k_2+n}$.
Soient $J_1 = \{j \in \mathbb{N} \mid k_1 \leq z_j \leq k_1+n\}$ et $J_2 = \{j \in \mathbb{N} \mid k_2 \leq z_j \leq k_2+n\}$. Soient j_1 et j_2 les minima respectifs de J_1 et J_2, et soient j_1' et j_2' leurs maxima. Avec ces notations, on a $z_{j_1} = k_1$ et $z_{j_1'} = k_1 + n$ car $\#Z_{k_1..k_1} = 1 = \#Z_{k_1+n..k_1+n}$. De plus, la différence entre deux termes consécutifs de Z est bornée par deux en valeur absolue. Comme $\#Z_{k_2+n..k_2+n} = 0$, on vérifie

$$k_2 + n + 1 \leq z_{j_2'+1} \leq z_{j_2'} + 2 \leq k_2 + n + 1$$

puis $z_{j_2'+1} = k_2+n+1$ et $z_{j_2'} = k_2+n-1$. On en déduit $1+y_{j_2'+1} = z_{j_2'+1} - z_{j_2'} = 2$ et $y_{j_2'+1} = 1$. À partir de la relation $\#Z_{k_2..k_2} = 0$, on va montrer $z_{j_2} = k_2 + 1$ et $y_{j_2} = 1$. Dans un premier temps, on suppose $j_2 \geq 1$. Par définition de j_2 on a $k_2 + 1 \leq z_{j_2} \leq 2 + z_{j_2-1} < 2 + k_2$ d'où $2 + z_{j_2-1} = z_{j_2} = k_2 + 1$ et $1 + y_{j_2} = z_{j_2} - z_{j_2-1} = 2$, ce qui permet de conclure dans ce cas. Si j_2 est nul, il suffit d'observer $1 \geq y_0 = z_0 \geq k_2 + 1 \geq 1$.

Comme $\#Z_{k_1..k_1+n} = 2 + \#Z_{k_2..k_2+n}$, on a $j_1' - j_1 = j_2' - j_2 + 2$. Autrement dit, les longueurs de $y_{j_2} \dots y_{j_2'+1}$ et $y_{j_1+1} \dots y_{j_1'}$ sont égales. On remarque ensuite

$$n = z_{j_1'} - z_{j_1} = |y_{j_1+1} \dots y_{j_1'}|_1 + j_1' - j_1$$

et

$$n = z_{j_2'+1} - z_{j_2} = |y_{j_2+1} \dots y_{j_2'+1}|_1 + j_2' + 1 - j_2 = |y_{j_2+1} \dots y_{j_2'+1}|_1 + j_1' - j_1 - 1.$$

La lettre y_{j_2} étant égale à 1, on vérifie $|y_{j_2} \dots y_{j_2'+1}|_1 = n + 2 + j_1 - j_1'$, ce qui est absurde car le mot y est équilibré.

L'ensemble Z est donc homogène. Comme y est non ultimement périodique, la densité de Z ne peut pas être rationnelle. D'après le lemme 1.14, il existe un réel ϕ et un irrationnel ξ tels que $Z = \{\lfloor i\xi + \phi \rfloor \mid i \in \mathbb{N}\}$ ou $Z = \{\lceil i\xi + \phi \rceil \mid i \in \mathbb{N}\}$. Considérer le premier cas permet d'affirmer

$$s_{\xi,\phi}(i) + \lfloor \xi \rfloor = \lfloor (i+1)\xi + \phi \rfloor - \lfloor i\xi + \phi \rfloor = z_{i+1} - z_i = y_{i+1} + 1,$$

pour tout entier i. De plus, comme 0 et 1 sont des facteurs de $S(y)$, on a $\lfloor \xi \rfloor = 1$. Finalement, on obtient $x = s_{\xi,\phi}$. L'étude du second cas conduit à identifier x et $s'_{\xi,\phi}$. $\star$

1.3.2 Propriétés complémentaires

On présente quelques résultats classiques afin de lever toute ambiguïté sur les tests d'égalité entre deux suites sturmiennes. En munissant $\mathcal{A}^\omega$ de l'ordre lexicographique induit de la relation $0 <_{\mathcal{L}} 1$, on a :

Lemme 1.16 (Berstel et Séébold, [17], Proposition 6.1)
Soit α un irrationnel de $]0,1[$. Si ρ et ρ' sont des réels de $[0,1[$ on a

$$s_{\alpha,\rho} <_{\mathcal{L}} s_{\alpha,\rho'} \Leftrightarrow \rho < \rho'.$$

Si ρ et ρ' appartiennent à $]0,1]$ on a

$$s'_{\alpha,\rho} <_{\mathcal{L}} s'_{\alpha,\rho'} \Leftrightarrow \rho < \rho'.$$

Preuve. Par symétrie, on ne traite que le premier cas. On suppose $0 \leq \rho < \rho' < 1$. Par densité de la suite $(\{n\alpha\})_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans $[0,1]$, il existe un entier $n \geq 1$ tel que $1-\rho' < \{n\alpha\} < 1-\rho$. On en déduit $n\alpha+\rho < \lfloor n\alpha \rfloor + 1 < n\alpha + \rho'$ puis

$$\lfloor n\alpha \rfloor + 1 \leq \lfloor n\alpha + \rho \rfloor + 1 \leq \lfloor n\alpha \rfloor + 1 \leq \lfloor n\alpha + \rho' \rfloor \leq \lfloor n\alpha \rfloor + 1$$

et enfin $\lfloor n\alpha+\rho' \rfloor = \lfloor n\alpha+\rho \rfloor + 1$. Soit m le plus petit entier pour lequel une telle égalité est vérifiée. Clairement m est non nul, et pour tout entier j compris entre 0 et $m-1$, on a $\lfloor j\alpha+\rho' \rfloor = \lfloor j\alpha + \rho \rfloor$. Les préfixes de $s_{\alpha,\rho}$ et $s_{\alpha,\rho'}$, de longueur $m-1$, sont donc égaux. De plus, il apparaît $s_{\alpha,\rho'}(m-1) = 1$ et $s_{\alpha,\rho}(m-1) = 0$, ce qui permet d'affirmer que le mot $s_{\alpha,\rho'}$ est lexicographiquement plus grand que $s_{\alpha,\rho}$. La réciproque est triviale. $\star$

Proposition 1.4 *Les restrictions de s et s' à Λ sont des applications injectives.*

Preuve. Soient (α,ρ) et (α',ρ') des couples appartenant à Λ, tels que $s_{\alpha,\rho} = s_{\alpha',\rho'}$. Si $\alpha \neq \alpha'$, on peut supposer, à une permutation près, qu'il existe un réel ξ strictement positif tel que $\alpha' = \alpha + \xi$. Ainsi, pour tout entier k, on a

$$k\alpha' + \rho' = (k\alpha + \rho) + (k\xi + \rho' - \rho).$$

À partir d'un certain rang k_0, que l'on choisit minimal, on vérifie

$$\lfloor k\alpha' + \rho' \rfloor \geq \lfloor k\alpha + \rho \rfloor + 1.$$

Comme on a $\lfloor \rho' \rfloor = 0 = \lfloor \rho \rfloor$, il apparaît $k_0 \geq 1$ et

$$\lfloor (k_0-1)\alpha' + \rho' \rfloor \leq \lfloor (k_0-1)\alpha + \rho \rfloor.$$

On en déduit $s_{\alpha',\rho'}(k_0-1) = 1$ et $s_{\alpha,\rho}(k_0-1) = 0$, ce qui est absurde. On a donc $\alpha = \alpha'$, puis $\rho = \rho'$ d'après le lemme 1.16. Un raisonnement identique permet de démontrer l'injectivité de s' sur Λ. $\star$

Pour des raisons techniques, on introduit l'ensemble

$$\mathcal{U} = \{(\beta,\delta) \in \Lambda \mid \forall\, c \in \mathbb{N}\ \ c\beta + \delta \notin \mathbb{N}\}.$$

Lemme 1.17 *Soit $(\alpha, \rho) \in \Lambda$. Les mots $s_{\alpha,\rho}$ et $s'_{\alpha,\rho}$ ne coïncident que si (α, ρ) appartient à $\mathcal{U}$, et diffèrent d'au plus deux termes dans le cas général.*

Preuve. Si $(\alpha, \rho) \in \mathcal{U}$, on a $\lceil k\alpha + \rho \rceil = \lfloor k\alpha + \rho \rfloor + 1$ pour tout entier k, et donc $s'_{\alpha,\rho} = s_{\alpha,\rho}$. Dans le cas contraire, comme α est irrationnel, il existe un unique entier c tel que $c\alpha + \rho \in \mathbb{N}$. On vérifie alors $s_{\alpha,\rho}(k) = s'_{\alpha,\rho}(k)$ pour tout entier k différent de $c - 1$ et c. On remarque $s_{\alpha,\rho}(c) = 0$ et $s'_{\alpha,\rho}(c) = 1$. De plus, si c est non nul, on a aussi $s_{\alpha,\rho}(c-1) = 1$ et $s'_{\alpha,\rho}(c-1) = 0$. $\star$

Lemme 1.18 *Soit α un irrationnel de $]0,1[$. Soient ρ un réel et k un entier. On a*

$$S^k(s_{\alpha,\rho}) = s_{\alpha,\rho+k\alpha} \text{ et } S^k(s'_{\alpha,\rho}) = s'_{\alpha,\rho+k\alpha}.$$

Preuve. Soit n un entier. On remarque

$$s_{\alpha,\rho+k\alpha}(n) = \lfloor (n+1)\alpha + \rho + k\alpha \rfloor - \lfloor n\alpha + \rho + k\alpha \rfloor = s_{\alpha,\rho}(n+k) = S^k(s_{\alpha,\rho})(n)$$

et

$$s'_{\alpha,\rho+k\alpha}(n) = \lceil (n+1)\alpha + \rho + k\alpha \rceil - \lceil n\alpha + \rho + k\alpha \rceil = s'_{\alpha,\rho}(n+k) = S^k(s'_{\alpha,\rho})(n). \star$$

Proposition 1.5 *Soient α un irrationnel de $]0,1[$ et ρ un réel de $[0,1[$. Il existe un couple (β, δ) de Λ tel que $s_{\alpha,\rho} = s'_{\beta,\delta}$ si et seulement si (α, ρ) appartient à $\mathcal{U}$.*

Preuve. On suppose qu'il existe un couple (β, δ) de Λ tel que $s_{\alpha,\rho} = s'_{\beta,\delta}$. D'après le lemme 1.17, les suites $s'_{\beta,\delta}$ et $s_{\beta,\delta}$ diffèrent d'au plus deux termes. Il existe donc un entier c tel que $S^c(s_{\alpha,\rho}) = S^c(s_{\beta,\delta})$. Autrement dit, on a

$$s_{\alpha,\rho+c\alpha-\lfloor \rho+c\alpha \rfloor} = s_{\beta,\delta+c\beta-\lfloor \delta+c\beta \rfloor}.$$

D'après la proposition 1.4, on montre $\beta = \alpha$ et $\delta - \rho$ est un entier de l'intervalle $]-1,1[$. On en déduit $\rho = \delta$ puis $s_{\alpha,\rho} = s'_{\alpha,\rho}$ et $(\alpha, \rho) \in \mathcal{U}$. La réciproque est triviale. $\star$

Pour terminer ce chapitre, on évoque quelques travaux sur l'étude des facteurs sturmiens.

Proposition 1.6 (Morse et Hedlund, [83], Théorème 3.7)
Soit α un irrationnel de $]0,1[$. On a

$$\forall\, \rho \in [0,1[\ \ \forall\, \rho' \in [0,1[\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*\ \ \mathcal{F}act(s_{\alpha,\rho}, n) = \mathcal{F}act(s_{\alpha,\rho'}, n).$$

La preuve présentée ici est celle donnée par F. Mignosi [78, 79].

Lemme 1.19 (Mignosi, [79], Proposition 1)
Soit α un irrationnel de $]0,1[$. Soient $\rho \in \mathbb{R}$ et $(i,n) \in \mathbb{N}^2$.
Si $\{-i\alpha\} > \{-(i+1)\alpha\}$ on a

$$\{n\alpha + \rho\} \in [\{-(i+1)\alpha\}, \{-i\alpha\}[\Leftrightarrow s_{\alpha,\rho}(n+i) = 1.$$

Si $\{-i\alpha\} < \{-(i+1)\alpha\}$ on a

$$\{n\alpha + \rho\} \in [\{-i\alpha\}, \{-(i+1)\alpha\}[\Leftrightarrow s_{\alpha,\rho}(n+i) = 0.$$

Preuve. On commence par remarquer que pour tout entier i, les parties fractionnaires de $-i\alpha$ et de $-(i+1)\alpha$ diffèrent, car α est irrationnel. On démontre seulement la première propriété, la preuve de la seconde étant similaire. On impose donc $\{-i\alpha\} > \{-(i+1)\alpha\}$, ce qui sous-entend clairement $i \geq 1$ et $\lfloor (i+1)\alpha \rfloor = \lfloor i\alpha \rfloor$.
On suppose $\{-i\alpha\} > \{n\alpha+\rho\} \geq \{-(i+1)\alpha\}$. On a ainsi

$$n\alpha + \rho - \lfloor n\alpha+\rho \rfloor < -i\alpha + \lfloor i\alpha \rfloor + 1$$

et $(n+i)\alpha+\rho < \lfloor n\alpha+\rho \rfloor + \lfloor i\alpha \rfloor + 1$. De même, on a

$$-(i+1)\alpha + \lfloor (i+1)\alpha \rfloor + 1 \leq n\alpha+\rho - \lfloor n\alpha+\rho \rfloor$$

et $\lfloor (i+1)\alpha \rfloor + 1 + \lfloor n\alpha+\rho \rfloor \leq \lfloor (n+i+1)\alpha+\rho \rfloor$. On en déduit

$$\lfloor (n+i)\alpha+\rho \rfloor \leq (n+i)\alpha+\rho < \lfloor n\alpha+\rho \rfloor + \lfloor i\alpha \rfloor + 1 = \lfloor (i+1)\alpha \rfloor + 1 + \lfloor n\alpha+\rho \rfloor$$

et donc $\lfloor (n+i)\alpha+\rho \rfloor < \lfloor (n+i+1)\alpha+\rho \rfloor$ et $s_{\alpha,\rho}(n+i) = 1$.

Réciproquement, on suppose $s_{\alpha,\rho}(n+i) = 1$. On obtient facilement l'assertion suivante :

$$\{n\alpha+\rho\} \geq \{-(i+1)\alpha\} \;\Leftrightarrow\; (n+i+1)\alpha+\rho \geq \lfloor n\alpha+\rho \rfloor + \lfloor (i+1)\alpha \rfloor + 1.$$

Si $\{n\alpha+\rho\} < \{-(i+1)\alpha\}$, on a $(n+i+1)\alpha+\rho < \lfloor n\alpha+\rho \rfloor + \lfloor (i+1)\alpha \rfloor + 1$, puis

$$\lfloor n\alpha+\rho \rfloor + \lfloor (i+1)\alpha \rfloor + 1 > (n+i+1)\alpha+\rho > \lfloor n\alpha+\rho \rfloor + \lfloor (i+1)\alpha \rfloor.$$

Autrement dit, on montre

$$\lfloor (n+i+1)\alpha+\rho \rfloor = \lfloor n\alpha+\rho \rfloor + \lfloor (i+1)\alpha \rfloor = \lfloor n\alpha+\rho \rfloor + \lfloor i\alpha \rfloor.$$

Par hypothèse, on a $\lfloor (n+i+1)\alpha+\rho \rfloor = 1 + \lfloor (n+i)\alpha+\rho \rfloor$ et donc

$$(n+i)\alpha+\rho < \lfloor (n+i+1)\alpha+\rho \rfloor = \lfloor n\alpha+\rho \rfloor + \lfloor i\alpha \rfloor.$$

On obtient finalement une contradiction en observant

$$\lfloor n\alpha+\rho \rfloor + \lfloor i\alpha \rfloor < (n\alpha+\rho) + i\alpha.$$

Ainsi, il ne reste plus qu'à démontrer $\{n\alpha+\rho\} < \{-i\alpha\}$. On commence par vérifier

$$\{n\alpha+\rho\} < \{-i\alpha\} \;\Leftrightarrow\; (n+i)\alpha+\rho < \lfloor n\alpha+\rho \rfloor + \lfloor i\alpha \rfloor + 1.$$

En supposant $\{n\alpha+\rho\} \geq \{-i\alpha\}$, on a $(n+i)\alpha+\rho \geq \lfloor n\alpha+\rho \rfloor + \lfloor i\alpha \rfloor + 1$ et on remarque $\lfloor n\alpha+\rho \rfloor + 1 + \lfloor i\alpha \rfloor + 1 > (n+i)\alpha+\rho$ puis

$$\lfloor (n+i)\alpha+\rho \rfloor = \lfloor n\alpha+\rho \rfloor + \lfloor i\alpha \rfloor + 1 = \lfloor n\alpha+\rho \rfloor + \lfloor (i+1)\alpha \rfloor + 1.$$

Par hypothèse, on a $\lfloor (n+i+1)\alpha+\rho \rfloor = 1 + \lfloor (n+i)\alpha+\rho \rfloor$ d'où

$$1 + \lfloor (n+i)\alpha+\rho \rfloor \leq (n+i+1)\alpha+\rho$$

et donc

$$\lfloor n\alpha+\rho \rfloor + \lfloor (i+1)\alpha \rfloor + 2 = 1 + \lfloor (n+i)\alpha+\rho \rfloor < \lfloor n\alpha+\rho \rfloor + 1 + \lfloor (i+1)\alpha \rfloor + 1,$$

ce qui est absurde. $\star$

Preuve de la proposition 1.6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $(c_i(\alpha,n))_{0\leq i\leq n}$ la suite obtenue en réorganisant, par ordre croissant, la suite $(\{-i\alpha\})_{0\leq i\leq n}$. En posant $c_{n+1}(\alpha,n) = 1$, on a

$$0 = c_0(\alpha,n) < c_1(\alpha,n) < \cdots < c_k(\alpha,n) < \cdots < c_n(\alpha,n) < c_{n+1}(\alpha,n) = 1.$$

Soient $j \in \mathbb{N}$ et $\rho \in [0,1[$. Il existe un unique entier k, avec $0 \leq k \leq n$, tel que

$$\{j\alpha+\rho\} \in [c_k(\alpha,n), c_{k+1}(\alpha,n)[.$$

Le réel $c_k(\alpha,n)$ est le plus grand élément de la forme $\{-i\alpha\}$, pour i compris entre 0 et n, tel que $\{-i\alpha\} \leq \{j\alpha+\rho\}$. Autrement dit, la relation $\{j\alpha+\rho\} \geq \{-i\alpha\}$ est vérifiée si et seulement si on a $c_k(\alpha,n) \geq \{-i\alpha\}$. Pour tout entier i compris entre 0 et $n-1$, on montre que la valeur de $s_{\alpha,\rho}(j+i)$ ne dépend que de la pente α. En effet, si $\{-i\alpha\} > \{-(i+1)\alpha\}$ on a

$$\begin{aligned} s_{\alpha,\rho}(j+i) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \{j\alpha+\rho\} \in [\{-(i+1)\alpha\}, \{-i\alpha\}[\\ &\Leftrightarrow \quad c_k(\alpha,n) \in [\{-(i+1)\alpha\}, \{-i\alpha\}[\end{aligned}$$

et si $\{-i\alpha\} < \{-(i+1)\alpha\}$ on a

$$\begin{aligned} s_{\alpha,\rho}(j+i) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \{j\alpha+\rho\} \in [\{-i\alpha\}, \{-(i+1)\alpha\}[\\ &\Leftrightarrow \quad c_k(\alpha,n) \in [\{-i\alpha\}, \{-(i+1)\alpha\}[. \end{aligned}$$

En résumé, les facteurs de $s_{\alpha,\rho}$ de longueur n ne dépendent pas de ρ. $\star$

Corollaire 1.1 *Soit α un irrationnel de* $]0,1[$. *On a*

$$\forall\, \rho_1 \in [0,1[\ \ \forall\, \rho_2 \in [0,1[\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}^* \ \ \mathcal{F}act(s_{\alpha,\rho_1}, n) = \mathcal{F}act(s'_{\alpha,\rho_2}, n).$$

Preuve. Soient $(\rho_1,\rho_2) \in [0,1[^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Par une méthode similaire à celle précédemment développée, on montre $\mathcal{F}act(s'_{\alpha,\rho_2}, n) = \mathcal{F}act(s'_{\alpha,\alpha}, n)$. Comme $s'_{\alpha,\alpha} = s_{\alpha,\alpha}$, on obtient finalement $\mathcal{F}act(s'_{\alpha,\rho_2}, n) = \mathcal{F}act(s_{\alpha,\rho_1}, n)$. $\star$

Remarques.
Soit Υ le langage des facteurs finis des mots sturmiens. S. Dulucq et D. Gouyou-Beauchamps décrivent Υ en codant des droites de pente et d'intercept rationnels

[44]. Dans [42], A. de Luca et F. Mignosi proposent deux autres méthodes de construction de Υ : la première est liée aux propriétés des palindromes, et la seconde est en relation avec le théorème de Fine et Wilf [45].

S. Dulucq et D. Gouyou-Beauchamps formulent aussi une conjecture, démontrée par F. Mignosi [79], sur le nombre d'éléments de Υ de longueur donnée. Une approche géométrique de ce problème est présentée par J. Berstel et M. Pocchiola [14]. On cite enfin un travail de V. Berthé, sur la fréquence des facteurs des suites sturmiennes et le théorème des trois longueurs [19].

Chapitre 2

Morphismes sturmiens

Un morphisme est une application f du monoïde $\mathcal{A}^*$ dans lui-même telle que $f(uv) = f(u)f(v)$ pour tout couple de mots finis (u, v). La longueur de f est l'entier $||f|| = |f(0)|+|f(1)|$. On dit que f est effaçant s'il existe une lettre a telle que $f(a) = \varepsilon$. Soit Id l'application identité sur $\mathcal{A}$. Tout morphisme f s'étend de manière naturelle à $\mathcal{A}^\omega$, en posant $f(x) = f(x_0)f(x_1)f(x_2)\ldots$ pour tout mot infini $x = x_0x_1x_2\ldots$ décomposé sur $\mathcal{A}$.

L'objectif principal de ce chapitre est de décrire la classe des morphismes sturmiens à partir d'un monoïde de rang trois. Ce résultat, en partie conjecturé par M. Kósa [69], est attribué à F. Mignosi et P. Séébold [80]. On propose ici l'approche suivie par J. Berstel et P. Séébold [16, 17], fondée sur l'étude des morphismes dits acycliques et équilibrés.

2.1 Monoïde de Sturm

Définition 2.1 *Un morphisme est sturmien s'il préserve globalement l'ensemble des mots sturmiens.*

Définition 2.2
Soit $E : 0 \mapsto 1,\ 1 \mapsto 0$ le morphisme d'inversion. Soient $\varphi : 0 \mapsto 01,\ 1 \mapsto 0$ le morphisme de Fibonacci et $\tilde{\varphi} : 0 \mapsto 10,\ 1 \mapsto 0$ son image miroir. En munissant $\{E, \varphi, \tilde{\varphi}\}$ de la loi de composition, on forme le monoïde de Sturm, noté St. On pose aussi $G = \varphi E$ et $D = \tilde{\varphi}E$.

Par une étude extrémale, en référence aux travaux de M. Kósa [69], P. Séébold démontre que les générateurs de St sont des morphismes sturmiens [98]. Pour établir cette propriété, énoncée à la proposition 2.1, on préfère privilégier la définition combinatoire des mots sturmiens. La preuve fait appel à des résultats classiques, présentés aux lemmes 2.1, 2.2 et 2.3.

Lemme 2.1 *Soient $x \in \mathcal{A}^*$ et $y \in \mathcal{A}^\omega$. On a $0\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)0$ et $0\tilde{\varphi}(y) = \varphi(y)$.*

Preuve. Par définition des morphismes φ et $\tilde{\varphi}$, on remarque $\varphi(a) = 01^{1-a}$ et $\tilde{\varphi}(a) = 1^{1-a}0$ pour tout a égal à 0 ou 1. Il est alors facile de conclure. $\star$

Lemme 2.2 *Les applications E, φ et $\tilde{\varphi}$ sont injectives sur $\mathcal{A}^\omega$.*

Preuve. Le morphisme E étant idempotent, la propriété le concernant est triviale. Soient $w = w_1 \dots w_m \dots$ et $w' = w'_1 \dots w'_m \dots$ des mots infinis tels que $\varphi(w) = \varphi(w')$. On suppose $w \neq w'$. Soit $n = \min\{i \in \mathbb{N}^* \mid w_i = \overline{w'_i}\}$. On vérifie ainsi $\varphi(w_n w_{n+1} \dots) = \varphi(w'_n w'_{n+1} \dots)$. À une permutation près, on peut supposer $w_n = 0$ et $w'_n = 1$. On a alors

$$01\varphi(w_{n+1}w_{n+2}\dots) = 0\varphi(w'_{n+1}w'_{n+2}\dots)$$

et la lettre 1 apparaît en préfixe de $\varphi(w'_{n+1}w'_{n+2}\dots)$, ce qui est absurde. On en déduit $w = w'$. En utilisant le lemme 2.1, l'injectivité de $\tilde{\varphi}$ devient évidente. $\star$

Remarque. On montre de même que les morphismes E, φ et $\tilde{\varphi}$ sont injectifs sur $\mathcal{A}^*$.

Lemme 2.3
Les morphismes du monoïde de Sturm préservent les mots infinis non ultimement périodiques.

Preuve. Soit $u \in \mathcal{A}^\omega$. Si $\varphi(u)$ est ultimement périodique, on peut construire un suffixe de u, noté u', tel que $\varphi(u') = v^\omega$ avec $v \in \mathcal{A}^+$. On en déduit $v \in 0\mathcal{A}^*$ et le mot $v0$ est un préfixe de $\varphi(u')$. Il existe donc un mot fini w tel que $\varphi(w) = v$. Par injectivité de φ sur $\mathcal{A}^\omega$, on obtient $u' = w^\omega$, et le mot u est ultimement périodique. On conclut par contraposée. La fin de la preuve est triviale. $\star$

Lemme 2.4 *Les morphismes du monoïde de Sturm préservent les mots finis équilibrés.*

Preuve. Soit x un mot fini équilibré. Clairement le mot $E(x)$ est équilibré. On raisonne par l'absurde en supposant que $\varphi(x)$ est déséquilibré. D'après le lemme 1.7, il existe un mot u tel que $0u0 \in \mathcal{F}act(\varphi(x))$ et $1u1 \in \mathcal{F}act(\varphi(x))$. Il existe donc des facteurs de x, notés v et v', tels que $\varphi(v) = 01u1$ avec $v = 0v'0$. On remarque $|v|_0 = |\varphi(v)|_1 = 2 + |u|_1$ et $|v| = |\varphi(v)|_0 = 1 + |u|_0$.

Dans un premier temps, on suppose qu'il existe un facteur w de x tel que l'on ait $\varphi(w) = 0u0$. Soit w' le mot défini par $w = w'1$. On vérifie alors

$$|w'|_0 = |w|_0 = |\varphi(w)|_1 = |u|_1 = |v|_0 - 2$$

puis $|w'| = |w| - 1 = |\varphi(w)|_0 - 1 = |u|_0 + 1 = |v|$ et $|w'|_1 - |v|_1 = 2$, ce qui est absurde car x est équilibré.

Il existe donc des mots z et z' parmi les facteurs de x tels que $\varphi(z) = 0u01$ et $z = z'0$. On en déduit $\varphi(z') = 0u$. En outre, on a $01u1 = \varphi(v) = 01\varphi(v')01$ et $0u = 0\varphi(v')0 = \varphi(1v'1)$. Par injectivité de φ sur $\mathcal{A}^*$, on obtient $z' = 1v'1$. Les mots $1v'1$ et $0v'0$ sont donc des facteurs de x, ce qui amène la contradiction cherchée. En résumé, le mot $\varphi(x)$ est équilibré.

On suppose à présent que $\tilde{\varphi}(x)$ est déséquilibré. Il existe alors un mot fini t tel que $0t0$ et $1t1$ sont des facteurs de $\tilde{\varphi}(x)$. Par définition de $\tilde{\varphi}$, on a même $1t10 \in \mathcal{F}act(\tilde{\varphi}(x))$. En remarquant $11 \notin \mathcal{F}act(\tilde{\varphi}(x))$, deux cas se présentent. Si $t = 0$ alors $000 \in \mathcal{F}act(\tilde{\varphi}(x))$ et $1010 \in \mathcal{F}act(\tilde{\varphi}(x))$, d'où $11 \in \mathcal{F}act(x)$ et $00 \in \mathcal{F}act(x)$, ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle x est équilibré. La seule alternative est l'existence d'un mot t' tel que $t = 0t'0$. On vérifie alors que $10t'010$ est un facteur de $\tilde{\varphi}(x)$ et il existe un mot y tel que $0y0 \in \mathcal{F}act(x)$ et $\tilde{\varphi}(y) = t'0$. De plus, on a $00t'00 \in \mathcal{F}act(\tilde{\varphi}(x))$ et ainsi $1y1 \in \mathcal{F}act(x)$, ce qui est absurde. Le mot $\tilde{\varphi}(x)$ est donc équilibré. $\star$

Proposition 2.1 *Tout morphisme appartenant au monoïde St est sturmien.*

Preuve. La preuve concernant le morphisme E est triviale. Soit x un mot sturmien. D'après le lemme 2.3, le mot $\varphi(x)$ est non ultimement périodique. De plus, si $\varphi(x)$ est déséquilibré, on construit un préfixe fini de x, que l'on note y, tel que $\varphi(y)$ est déséquilibré. Le lemme 2.4 apporte alors la contradiction cherchée. Le morphisme φ est donc sturmien. Il est alors facile de vérifier que $\tilde{\varphi}$ l'est aussi. $\star$

2.2 Morphismes acycliques

Définition 2.3 *Un morphisme g est acyclique si $g(01) \neq g(10)$.*

Lemme 2.5 *Si deux mots finis commutent, ils sont puissances d'un même mot.*

Preuve. On raisonne par l'absurde en considérant le plus petit mot x, non vide, pour lequel il existe un mot x' tel que la propriété n'est pas vérifiée. On note y le mot de longueur minimale parmi les contre-exemples possibles associés à x. On a clairement $y \neq \varepsilon$ et $|y| > |x|$. Comme on a $xy = yx$, il existe un mot y' tel que $y = xy'$. On en déduit $xxy' = xy = yx = xy'x$, puis $xy' = y'x$. Or $|y'| < |y|$, il existe donc un mot z ainsi que des entiers m et n tels que $x = z^m$ et $y' = z^n$. On obtient alors une contradiction en remarquant $x = z^m$ et $y = z^{m+n}$. $\star$

Remarque. Cette preuve, due à G. Myerson, est présentée dans l'article [68].

Lemme 2.6 *Un morphisme g est acyclique si et seulement si $g(0)$ et $g(1)$ ne sont pas des puissances d'un même mot.*

Preuve. On applique le lemme précédent sur l'identité $g(0)g(1) = g(1)g(0)$. $\star$

Proposition 2.2 (Berstel et Séébold, [17], Propriété 2.4)
Tout morphisme sturmien est acyclique.

Preuve. Soit f un morphisme sturmien. Si f n'est pas acyclique, d'après le lemme 2.6, les mots $f(0)$ et $f(1)$ sont des puissances d'un même mot, que l'on note u. Soit x un mot sturmien. L'image de x par f est égale à u^ω, ce qui est absurde car le mot $f(x)$ est sturmien donc non ultimement périodique. $\star$

Remarque. Comme corollaire immédiat, il apparaît que tout morphisme sturmien est non effaçant.

2.3 Morphismes équilibrés

Pour tester si un morphisme est sturmien, l'idée de J. Berstel et P. Séébold est de coder la famille des mots sturmiens par un ensemble de mots finis. La méthode suivie est intimement liée aux propriétés des morphismes dits équilibrés. En fin de section, un algorithme de décomposition des morphismes sturmiens, en fonction des trois générateurs du monoïde de Sturm, est proposé.

2.3.1 Codage des mots sturmiens

On détaille certaines preuves des résultats présentés dans les articles [16] et [17].

Définition 2.4 *À tout couple d'entiers m et r non nuls, on associe les mots équilibrés :*

$$w_{m,r} = 0^{m-1}1(0^{m+1}1)^{r+1}0^m1(0^{m+1}1)^r0^m1$$

et

$$w'_{m,r} = 0^m1(0^m1)^{r+1}0^{m+1}1(0^m1)^r0^{m+1}1.$$

On pose aussi $\Psi = \bigcup_{(m,r)\in(\mathbb{N}^*)^2} \{w_{m,r}, w'_{m,r}, E(w_{m,r}), E(w'_{m,r})\}$.

Proposition 2.3 (Berstel et Séébold, [17], Propriété 3.3) *Tout mot sturmien contient en facteur un et un seul mot de Ψ.*

Preuve. Soit x un mot sturmien. Il est utile de rappeler que tout facteur fini de x possède un nombre infini d'occurrences dans x. Quitte à remplacer x par $E(x)$, on se place dans le cas où 00 appartient à $\mathcal{F}act(x)$. Il existe un entier m non nul tel que $0^{m+1} \in \mathcal{F}act(x)$ et $0^{m+2} \notin \mathcal{F}act(x)$. Comme x est équilibré et non ultimement périodique, les seuls facteurs de x de la forme 10^*1 sont 10^m1 et $10^{m+1}1$. Il existe donc un entier c non nul tel que $10^m1(0^{m+1}1)^c0^m1$ est un élément de $\mathcal{F}act(x)$. Comme on a $|10^m1(0^{m+1}1)^c0^m1|_1 - |0^{m+1}1(0^{m+1}1)^c0^{m+1}|_1 = 2$, le mot $(0^{m+1}1)^{c+2}$ n'appartient pas à $\mathcal{F}act(x)$. On note c' la valeur minimale possible pour le choix de l'entier c.

On suppose d'abord $c' \geq 2$. Comme on a $|0^{m+1}10^{m+1}|_1 - |10^m10^m1|_1 = 2$, le mot 10^m10^m1 n'est pas élément de $\mathcal{F}act(x)$. Nécessairement $(0^{m+1}1)^{c'+1} \in \mathcal{F}act(x)$, sans quoi le mot x est ultimement périodique, de queue égale à

$$10^m1((0^{m+1}1)^{c'}0^m1)^\omega.$$

Comme $(0^{m+1}1)^{c'+2} \notin \mathcal{F}act(x)$, on a $0^{m-1}1(0^{m+1}1)^{c'+1}0^m1 \in \mathcal{F}act(x)$. On en déduit $0^{m-1}1(0^{m+1}1)^{c'+1}0^m1(0^{m+1}1)^{c'} \in \mathcal{F}act(x)$ car on a $10^m10^m1 \notin \mathcal{F}act(x)$ et c' est choisi minimal. Sous peine d'ultime périodicité de x, il apparaît

$$0^{m-1}1(0^{m+1}1)^{c'+1}0^m1(0^{m+1}1)^{c'}0^m1 \in \mathcal{F}act(x).$$

Le mot $w_{m,c'}$ est donc un facteur de x.

Il reste à étudier le cas où $c' = 1$. Si $(0^{m+1}1)^2 \in \mathcal{F}act(x)$, alors 10^m10^m1 n'est pas un facteur de x et le raisonnement précédent s'applique. Si $(0^{m+1}1)^2 \notin \mathcal{F}act(x)$, il existe un entier $d \geq 1$ tel que $0^{m+1}1(0^m1)^d0^{m+1}1$ est un facteur de x. Comme

$$|10^m1(0^m1)^d0^m1|_1 - |0^{m+1}1(0^m1)^d0^{m+1}|_1 = 2,$$

il apparaît clairement $1(0^m1)^{d+2} \notin \mathcal{F}act(x)$. On note d' la valeur minimale possible pour le choix de l'entier d. Sous peine d'ultime périodicité de x, le mot $1(0^m1)^{d'+1}$ est un facteur de x. On a même $0^m1(0^m1)^{d'+1}0^{m+1}1 \in \mathcal{F}act(x)$ car $1(0^m1)^{d'+2} \notin \mathcal{F}act(x)$. De plus, on a $0^m1(0^m1)^{d'+1}0^{m+1}1(0^m1)^{d'} \in \mathcal{F}act(x)$ car $(0^{m+1}1)^2 \notin \mathcal{F}act(x)$ et d' est choisi minimal. Comme x est non ultimement périodique, on a $0^m1(0^m1)^{d'+1}0^{m+1}1(0^m1)^{d'}0^{m+1}1 \in \mathcal{F}act(x)$. Le mot $w'_{m,d'}$ est donc un facteur de x.

Ainsi, tout mot sturmien possède en facteur un mot de Ψ. Il reste à établir l'unicité. Soient m, r, n et p des entiers quelconques non nuls. Différents cas se présentent.

On commence par supposer $w_{m,r} \in \mathcal{F}act(x)$ et $w_{n,p} \in \mathcal{F}act(x)$. Le mot 10^m1 étant un facteur de $w_{m,r}$, on a $0^{m+2} \notin \mathcal{F}act(x)$. Comme $0^{n+1} \in \mathcal{F}act(x)$, on vérifie $n+1 < m+2$ et $n \leq m$. En outre, le mot 10^n1 étant un facteur de $w_{n,p}$, on a aussi $0^{n+2} \notin \mathcal{F}act(x)$. Comme $0^{m+1} \in \mathcal{F}act(x)$, on obtient $m+1 < n+2$, puis $m \leq n$ et en fait $n = m$. De plus, le mot $10^m1(0^{m+1}1)^r0^m1$ appartient à $\mathcal{F}act(x)$, ce qui n'est donc pas le cas de $(0^{m+1}1)^{r+2}$. De la relation $(0^{m+1}1)^{p+1} \in \mathcal{F}act(x)$, on déduit $p+1 < r+2$ puis $p \leq r$. On vérifie de façon similaire $r \leq p$. En résumé, on a $r = p$ et donc $w_{m,r} = w_{n,p}$.

Un raisonnement identique permet d'affirmer $w'_{m,r} = w'_{n,p}$ si $w'_{m,r} \in \mathcal{F}act(x)$ et $w'_{n,p} \in \mathcal{F}act(x)$. Si on suppose $w_{m,r} \in \mathcal{F}act(x)$ et $w'_{n,p} \in \mathcal{F}act(x)$, il apparaît que les entiers n et m sont égaux. De plus, les mots 10^n10^n1 et 00^m10^m0 appartiennent respectivement aux facteurs de $w'_{n,p}$ et $w_{m,r}$. On remarque

$$|10^n10^n1|_1 - |00^m10^m0|_1 = 2,$$

ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle x est équilibré.

L'étude des sept derniers cas à traiter est en tout point similaire. $\star$

Lemme 2.7 (Berstel et Séébold, [17]) *Soient m et r des entiers non nuls. On a*

$$0w_{m,r} = G^mED(01^{r+1}01^r0) \text{ et } 0w'_{m,r} = G^mED(10^{r+1}10^r1).$$

Preuve. Il suffit de remarquer

$$\begin{aligned} G^mED(01^{r+1}01^r0) &= G^m(1(01)^{r+1}1(01)^r1) \\ &= 0^m1(0^{m+1}1)^{r+1}0^m1(0^{m+1}1)^r0^m1 = 0w_{m,r} \end{aligned}$$

et

$$G^mED(10^{r+1}10^r1) = 00^m1(0^m1)^{r+1}0^{m+1}1(0^m1)^r0^{m+1}1 = 0w'_{m,r}. \star$$

Proposition 2.4 (Berstel et Séébold, [17]) *Soit $u \in \Psi$. Il existe un mot sturmien x tel que u est un facteur de x.*

Preuve. Soient m et r des entiers non nuls. Le mot 10^2101 étant un facteur du mot de Fibonacci F, on a $01^{r+1}01^r0 \in \mathcal{F}act(ED^{r-1}(F))$. D'après le lemme précédent, on obtient $w_{m,r} \in \mathcal{F}act(G^m EDED^{r-1}(F))$. De façon similaire, on montre que le mot $w'_{m,r}$ est un facteur du mot sturmien $G^m ED^r(F)$. La fin de la preuve est triviale. $\star$

2.3.2 Caractérisation des morphismes sturmiens

Proposition 2.5 (Berstel et Séébold, [16]) *Soit f un morphisme sturmien. Soit (m,r) un couple d'entiers non nuls. Le morphisme f est acyclique et les mots $f(w_{m,r})$ et $f(w'_{m,r})$ sont équilibrés.*

Preuve. D'après la proposition 2.4, il existe un mot sturmien x tel que $w_{m,r}$ est un facteur de x. Le mot $f(x)$ étant sturmien, il est clair que $f(w_{m,r})$ est équilibré. On raisonne de façon similaire pour le mot $f(w'_{m,r})$. La proposition 2.2 permet de conclure. $\star$

En introduisant la définition suivante, on cherche à établir la réciproque de la proposition 2.5.

Définition 2.5 *Soient m et r des entiers non nuls.*
Un morphisme f est dit (m,r)-équilibré si $f(w_{m,r})$ ou $f(w'_{m,r})$ est un mot équilibré.

Par les lemmes 2.8 à 2.11, on étudie la structure des mots $f(0)$ et $f(1)$ lorsque f est un morphisme (m,r)-équilibré.

Lemme 2.8 (Berstel et Séébold, [16], Lemme 9) *Soient m et r des entiers non nuls, et f un morphisme (m,r)-équilibré. Si $f(0) = 0$ et $f(1) \in 1\mathcal{A}^* \cap \mathcal{A}^*1$, on a $f(1) = 1$.*

Preuve. Les mots 0^{m+1} et 10^m1 sont des facteurs communs à $w_{m,r}$ et $w'_{m,r}$, ainsi qu'à $f(w_{m,r})$ et $f(w'_{m,r})$, car on a $f(0) = 0$ et $f(1) \in 1\mathcal{A}^* \cap \mathcal{A}^*1$. On raisonne par l'absurde en supposant $f(1) \neq 1$. Il existe donc un entier k et un mot v tels que $f(1) = 10^k1v$. Comme f est (m,r)-équilibré, on a même $k = m$ ou $k = m+1$.

À tout couple d'entiers (p,p') de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, on associe les mots

$$u_{p,p'} = 1(0^{m+1}1)^{p+1}(0^m1)^{p'}0^{m+1}$$

et

$$v_{p,p'} = 1(0^m1)^{p'}(0^{m+1}1)^p0^m1.$$

Les mots $u_{r,1}$ et $v_{r,1}$ sont des facteurs de $w_{m,r}$, alors que $u_{0,r}$ et $v_{0,r}$ appartiennent à $\mathcal{F}act(w'_{m,r})$.

Dans un premier temps, on suppose $f(1) = 10^m1v$. On définit les mots $z^{(1)}_{p,p'}$ et $z^{(2)}_{p,p'}$ par :

$$z^{(1)}_{p,p'} = 0^{m+1}f(1(0^{m+1}1)^p(0^m1)^{p'})0^{m+1} \text{ et } z^{(2)}_{p,p'} = f(1(0^m1)^{p'}(0^{m+1}1)^p)0^m10^m1.$$

On remarque $|z^{(2)}_{p,p'}| = |z^{(1)}_{p,p'}|$ et $|z^{(2)}_{p,p'}|_1 - |z^{(1)}_{p,p'}|_1 = 2$. De plus, on a

$$f(u_{p,p'}) = f(1)z^{(1)}_{p,p'} \text{ et } f(v_{p,p'}) = z^{(2)}_{p,p'}v.$$

En particulier, les mots $z^{(1)}_{r,1}$ et $z^{(2)}_{r,1}$ sont des facteurs de $f(w_{m,r})$, qui est donc déséquilibré. On a aussi $\{z^{(1)}_{0,r}, z^{(2)}_{0,r}\} \subset \mathcal{F}act(f(w'_{m,r}))$, ce qui est absurde car le morphisme f est (m,r)-équilibré.

Il reste à traiter le cas où l'on a $f(1) = 10^{m+1}1v$. On pose

$$z^{(3)}_{p,p'} = 0^{m+1}1vf((0^{m+1}1)^p)0^{m+1}10^{m+1}.$$

On a

$$\begin{aligned} f(u_{p,p'}) &= f(1(0^{m+1}1)^{p+1}(0^m1)^{p'}0^{m+1}) \\ &= f(1)f((0^{m+1}1)^p)f(0^{m+1}1)f((0^m1)^{p'})f(0^{m+1}) \end{aligned}$$

puis $f(u_{p,p'}) = 1z^{(3)}_{p,p'}1vf((0^m1)^{p'}0^{m+1})$. Comme $p' \geq 1$, on a aussi

$$\begin{aligned} f(v_{p,p'}) &= f(1(0^m1)^{p'}(0^{m+1}1)^p0^m1) \\ &= f(1(0^m1)^{p'-1})f(0^m1)f((0^{m+1}1)^p)f(0^m1) \\ &= f(1(0^m1)^{p'-1})0^m10^{m+1}1vf((0^{m+1}1)^p)0^m10^{m+1}1v. \end{aligned}$$

On pose $z^{(4)}_{p,p'} = 10^m10^{m+1}1vf((0^{m+1}1)^p)0^m1$. La lettre 1 étant un suffixe de $1(0^m1)^{p'-1}$ et de $f(1)$, on peut affirmer que $z^{(4)}_{p,p'}$ est un facteur de $f(v_{p,p'})$. Mais on a $|z^{(4)}_{p,p'}| = |z^{(3)}_{p,p'}|$ ainsi que $|z^{(4)}_{p,p'}|_1 - |z^{(3)}_{p,p'}|_1 = 2$, ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle f est (m,r)-équilibré. En résumé, on a $f(1) = 1$. $\star$

Lemme 2.9 (Berstel et Séébold, [16], Lemme 10) *Soient m et r des entiers non nuls, et f un morphisme (m,r)-équilibré non effaçant. Si $f(0) \in 0\mathcal{A}^*0$ alors on a $f(1) \in 0\mathcal{A}^* \cup \mathcal{A}^*0$.*

Preuve. On raisonne par l'absurde, en supposant $f(1) \in 1\mathcal{A}^* \cap \mathcal{A}^*1$. Si 00 est un facteur de $f(0)$ alors il existe deux mots u et v tels que $f(0) = u00v$. Comme 0^{m+1} et 10^m1 sont des facteurs de $w_{m,r}$ et $w'_{m,r}$, les mots $00vf(0^{m-1})u00$ et $1u00vf(0^{m-1})1$ appartiennent simultanément à $\mathcal{F}act(f(w_{m,r}))$ et $\mathcal{F}act(f(w'_{m,r}))$, ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle f est (m,r)-équilibré. Le mot 00 n'est donc pas un facteur de $f(0)$. Comme $00 \in \mathcal{F}act(w_{m,r}) \cap \mathcal{F}act(w'_{m,r})$ et $f(0)$ appartient à $0\mathcal{A}^*0$, on vérifie $11 \notin \mathcal{F}act(f(0)) \cup \mathcal{F}act(f(1))$. Il existe un entier $n \geq 0$ tel que $f(0) = (01)^n010$. En particulier, le mot $f(01)$ contient 101. Le mot 01 étant un facteur de $w_{m,r}$ et $w'_{m,r}$, on a $0^3 \notin \mathcal{F}act(f(1))$.

Dans un premier temps, on suppose $00 \in \mathcal{F}act(f(1))$. Il existe des mots δ et δ' tels que $f(1) = 1\delta 00\delta' 1$. Comme on a $00\delta' 1 f(0^m)0 \in \mathcal{F}act(f(10^{m+1}))$, si $f(1)$ commence par 101, on a $\delta' 1 f(0^m)101 \in \mathcal{F}act(f(10^m 1))$, ce qui est absurde car f est (m,r)-équilibré. Si le mot 101 est un suffixe de $f(1)$, il apparaît

$$0f(0^m)1\delta 00 \in \mathcal{F}act(f(0^{m+1}1)) \text{ et } 101f(0^m)1\delta \in \mathcal{F}act(f(10^m 1)),$$

ce qui apporte à nouveau une contradiction. Nécessairement, le mot $f(1)$ commence et finit par 1001. En particulier, il existe un mot v' tel que $f(1) = 1001v'$.

À tout entier k, on associe les mots $u_k = 0^{m+1}1(0^m 1)^k 0^{m+1}$, $v_k = 01(0^m 1)^k 0^m 10$ ainsi que $x_k = 1(0^{m+1}1)^{k+1}$ et $y_k = 10^m 1(0^{m+1}1)^k 0^m 1$. Clairement le mot $w_{m,r}$ contient les facteurs u_0, v_0, x_r et y_r, alors que $w'_{m,r}$ contient u_r, v_r, x_0 et y_0.

Si $m = 1$ on montre que $001v'f((0^2 1)^k 0^2)100$ et $1f(0)1001v'f((0^2 1)^k 0)1$ sont respectivement des facteurs de $f(x_k)$ et $f(y_k)$, ce qui est absurde. On suppose désormais $m \geq 2$. Les mots $f(0^3)$ et $f(0^2 1)$ sont des facteurs communs à $f(w_{m,r})$ et $f(w'_{m,r})$. De plus, on remarque que le mot $100(10)^n 1001$ est un facteur de $f(0^3)$ car on a $f(0^3) = (01)^n 010(01)^n 010(01)^n 010$. On vérifie aussi $f(0^2 1) = 0(10)^n 0100(10)^n 101001v'$. Comme $|10(10)^n 101|_1 - |00(10)^n 100|_1 = 2$, le mot $(10)^{n+2}1$ n'appartient pas aux facteurs de $f(1)$. En outre, on a

$$|10(10)^n 1|_1 - |00(10)^n 0|_1 = 2$$

d'où $00(10)^n 0 \notin \mathcal{F}act(f(0))$. Il existe donc des entiers p et p' tels que

$$(100(10)^n)^p (100(10)^{n+1})^{p'} 1001$$

est un préfixe de $f(1)$. Deux cas se présentent.

Si $p \geq m-1$ alors $f(1)$ commence par $(100(10)^n)^{m-1}100$. Il existe donc un mot v' tel que $f(1) = 1v'$ et $v'f((0^{m+1}1)^k 0^m)f(0)(100(10)^n)^{m-1}100 \in \mathcal{F}act(f(x_k))$. De plus, on a

$$f(y_k) = f(1)f(0^m(10^{m+1})^k)1v'f(0^m)1v'.$$

La lettre 1 étant un suffixe de $f(1)$, le mot $1f(0^m(10^{m+1})^k)1v'f(0^m)1$ est un facteur de $f(y_k)$, ce qui est absurde car

$$|1f(0^m(10^{m+1})^k)1v'f(0^m)1|_1 - |v'f((0^{m+1}1)^k 0^m)f(0)(100(10)^n)^{m-1}100|_1 = 2.$$

On suppose désormais $p < m-1$. On remarque

$$f(u_k) = f(0^{m+1})f(1(0^m 1)^k 0^m)f(0) = ((01)^n 010)^{m+1} f(1(0^m 1)^k 0^m)f(0).$$

Soit $z^{(1)} = 0(01)^n 010(01)^n 010((01)^n 010)^p f(1(0^m 1)^k 0^m)0$. L'entier $p+3$ étant inférieur à $m+1$, et la lettre 0 étant un préfixe de $f(0)$, le mot $z^{(1)}$ est un facteur de $f(u_k)$. De plus, on a

$$f(v_k) = 0(10)^{n+1} f(1(0^m 1)^k 0^m)(100(10)^n)^p (100(10)^{n+1})^{p'} 1001(01)^n 010.$$

Soit $z^{(2)} = (10)^{n+1}f(1(0^m1)^k0^m)(100(10)^n)^p100(10)^n101$. On a

$$1001(01)^n010 = 100(10)^n1010$$

et le mot $100(10)^n101$ est un préfixe de $(100(10)^{n+1})^{p'}1001(01)^n010$. On en déduit $z^{(2)} \in \mathcal{F}act(f(v_k))$. Une contradiction apparaît en observant $|z^{(2)}|_1 - |z^{(1)}|_1 = 2$.

Cette étude de cas permet d'affirmer que 00 n'est pas un facteur de $f(1)$. Il existe donc un entier $n' \geq 0$ tel que $f(1) = (10)^{n'}1$. On a

$$f(u_k) = (01)^n010f((0^m1)^{k+1})(01)^n010f(0^m).$$

La lettre 0 étant un préfixe de $f(0^m)$, on conclut

$$0f((0^m1)^{k+1})(01)^n0100 \in \mathcal{F}act(f(u_k)).$$

De plus, on a $f(v_k) = (01)^n010(10)^{n'}1f((0^m1)^{k+1})(01)^n010$. Comme 101 est un suffixe de $(01)^n010(10)^{n'}1$, il vient $101f((0^m1)^{k+1})(01)^n01 \in \mathcal{F}act(f(v_k))$. En vérifiant

$$|101f((0^m1)^{k+1})(01)^n01|_1 - |0f((0^m1)^{k+1})(01)^n0100|_1 = 2,$$

on obtient une contradiction. On a donc $f(1) \notin 1\mathcal{A}^* \cap \mathcal{A}^*1$ et $f(1) \in 0\mathcal{A}^* \cup \mathcal{A}^*0$. $\star$

Lemme 2.10 (Berstel et Séébold, [17], Lemme 4.2) *Soient m et r des entiers non nuls et f un morphisme (m,r)-équilibré, non effaçant et différent de l'identité. Si $f(0) \in 0\mathcal{A}^* \cap \mathcal{A}^*0$ alors on a $f(1) \in 0\mathcal{A}^* \cup \mathcal{A}^*0$.*

Preuve. Si $f(0) = 0$ alors, comme f est n'est pas le morphisme identité, on vérifie $f(1) \notin 1\mathcal{A}^* \cap \mathcal{A}^*1$, d'après le lemme 2.8. Autrement dit, on a $f(1) \in 0\mathcal{A}^* \cup \mathcal{A}^*0$. Si $f(0) \in 0\mathcal{A}^*0$, le lemme 2.9 permet de conclure. $\star$

Lemme 2.11 (Berstel et Séébold, [17], Corollaire 4.3) *Soient m et r des entiers non nuls, et f un morphisme (m,r)-équilibré, non effaçant, différent de l'identité et de E. Les mots $f(0)$ et $f(1)$ commencent ou finissent par la même lettre.*

Preuve. Quitte à remplacer f par Ef, on suppose $f(0) \in 0\mathcal{A}^*$. Si $f(1)$ commence par 0, le résultat est trivial. Si la lettre 1 est un préfixe de $f(1)$, deux cas se présentent. Si $f(0)$ finit par 0 alors $f(0) \in 0\mathcal{A}^* \cap \mathcal{A}^*0$. D'après le lemme 2.10, on a $f(1) \in 0\mathcal{A}^* \cup \mathcal{A}^*0$, or $f(1) \in 1\mathcal{A}^*$, donc $f(1) \in \mathcal{A}^*0$. Si $f(0)$ finit par 1 alors $f(0) \in 0\mathcal{A}^* \cap \mathcal{A}^*1$ et $f(1) \in 1\mathcal{A}^*$. En supposant $f(1) \in \mathcal{A}^*0$, il existe des mots u et v tels que $f(1) = 1u0$ et $f(0) = 0v1$. On remarque alors $f(01) = 0v11u0$ et $f(10) = 1u00v1$. Comme les mots 01 et 10 appartiennent à $\mathcal{F}act(w_{m,r})$ et à $\mathcal{F}act(w'_{m,r})$, les mots 11 et 00 sont des facteurs communs à $f(w_{m,r})$ et à $f(w'_{m,r})$, ce qui est absurde car f est (m,r)-équilibré. On en déduit $f(1) \in \mathcal{A}^*1$, ce qui achève la preuve. $\star$

On énonce maintenant une propriété fondamentale qui permet de décomposer un morphisme (m,r)-équilibré et acyclique sur le monoïde de Sturm.

Lemme 2.12 (Berstel et Séébold, [16], Lemme 11)
Soient m et r des entiers non nuls. Soit g un morphisme non effaçant. Il suffit qu'un des morphismes g, Eg, φg et $\tilde{\varphi} g$ soit (m,r)-équilibré pour qu'ils le soient tous.

Preuve. Il est immédiat de montrer que le morphisme g est (m,r)-équilibré si et seulement si le morphisme Eg l'est aussi. Soit $f = \varphi g$. Si g est (m,r)-équilibré, alors d'après le lemme 2.4, le morphisme f est aussi (m,r)-équilibré. On cherche à établir la réciproque. Dans un premier temps, on suppose que $f(w_{m,r})$ est équilibré. Si $g(w_{m,r})$ n'est pas équilibré, il existe un rang m' tel que $\mathcal{F}act(g(w_{m,r}), m'+1)$ est équilibré alors que $\mathcal{F}act(g(w_{m,r}), m'+2)$ ne l'est pas. D'après le lemme 1.7, il existe un unique bloc t de longueur m' tel que $0t0$ et $1t1$ appartiennent simultanément à $g(w_{m,r})$. De plus, le mot $t = t_1 \dots t_{m'}$ est symétrique. On remarque que les occurrences respectives de $0t0$ et de $1t1$ ne se superposent jamais. En effet, si ce n'est pas le cas, il existe une lettre a de $\mathcal{A}$, et un mot δ non vide qui est à la fois un préfixe de ata et un suffixe de $\overline{a}t\overline{a}$. Nécessairement, il existe un rang k, avec $1 \leq k \leq m'$, tel que $\delta = at_1 \dots t_k$, et un mot v tel que $\overline{a}t\overline{a} = v\delta$. Comme le mot t est un palindrome, on obtient une contradiction concernant la valeur de t_k, en remarquant

$$\overline{a}t_{m'}t_{m'-1} \dots t_k \dots t_1\overline{a} = \overline{a}t\overline{a} = vat_1 \dots t_k.$$

Plus précisément, il existe des mots x, x', z et z' tels que

$$g(w_{m,r}) = x0t0z = x'1t1z'.$$

Ainsi, on a

$$f(w_{m,r}) = \varphi g(w_{m,r}) = \varphi(x)01\varphi(t)01\varphi(z) = \varphi(x')0\varphi(t)0\varphi(z').$$

Si z' n'est pas vide, alors le mot $\varphi(z')$ commence par la lettre 0. De plus, les mots $0\varphi(t)00$ et $1\varphi(t)01$ appartiennent simultanément aux facteurs de $f(w_{m,r})$, ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle $f(w_{m,r})$ est équilibré. Le mot z' est donc nécessairement égal à ε. En outre, le mot $1t1$ ne possède qu'une occurrence dans $g(w_{m,r})$, et celle-ci apparaît en suffixe. Comme $0t0$ est aussi un facteur de $g(w_{m,r})$, il existe un mot y tel que $g(w_{m,r}) = x0t0y1t1$. Deux cas se présentent.

Si $|1t1| \leq |g(0^m1(0^{m+1}1)^r0^m1)|$, comme $0^m1(0^{m+1}1)^r0^m1$ est un suffixe de $w_{m,r}$, il existe un mot δ tel que $g(0^m1(0^{m+1}1)^r0^m1) = \delta 1t1$. Mais on a

$$w_{m,r} = 0^{m-1}100^m1(0^{m+1}1)^r0^m1(0^{m+1}1)^r0^m1$$

donc $g(w_{m,r}) = g(0^{m-1}10)\delta 1t1 g((0^{m+1}1)^r0^m1)$, et $1t1$ possède au moins deux occurrences dans $g(w_{m,r})$, ce qui est absurde.

Si $|1t1| > |g(0^m1(0^{m+1}1)^r0^m1)|$, comme les occurrences de $0t0$ et $1t1$ ne se superposent pas, on vérifie $|g(w_{m,r})| \geq |0t0| + |1t1|$ et

$$|g(w_{m,r})| > |g(0^m1(0^{m+1}1)^r0^m10^m1(0^{m+1}1)^r0^m1)|$$

car
$$|g(w_{m,r})| \geq 2|1t1| > 2|g(0^m1(0^{m+1}1)^r0^m1)|.$$
Soit u le mot $0^m1(0^{m+1}1)^r0^m10^m1(0^{m+1}1)^r0^m1$. On a
$$|u|_0 = 2(m + r(m+1) + m) = 4m + 2rm + 2r$$
ainsi que
$$|w_{m,r}|_0 = m - 1 + (m+1)(r+1) + m + r(m+1) + m = |u|_0$$
et $|u|_1 = 4 + 2r = |w_{m,r}|_1$, d'où
$$|g(w_{m,r})| > |g(u)| = |g(1^{|u|_1})| + |g(0^{|u|_0})| = |g(1^{|w_{m,r}|_1})| + |g(0^{|w_{m,r}|_0})| = |g(w_{m,r})|.$$
Dans les deux cas, on obtient la contradiction cherchée. On a ainsi établi que si $f(w_{m,r})$ est équilibré alors $g(w_{m,r})$ l'est aussi. Il reste à traiter le cas où $f(w'_{m,r})$ est équilibré. On suppose que $g(w'_{m,r})$ ne l'est pas. Un raisonnement similaire à celui développé précédemment permet d'affirmer que $1t1$ ne possède qu'une seule occurrence dans le mot $g(w'_{m,r})$, et celle-ci apparaît en suffixe.
Si $|1t1| \leq |g(0^m1(0^m1)^r0^{m+1}1)|$, comme le mot $0^m1(0^m1)^r0^{m+1}1$ est un suffixe de $w'_{m,r}$, il existe un mot δ' tel que $g(0^m1(0^m1)^r0^{m+1}1) = \delta'1t1$. Mais on a
$$w'_{m,r} = 0^m1(0^m1)^{r+1}0^{m+1}1(0^m1)^r0^{m+1}1$$
donc $g(w'_{m,r}) = g(0^m1)\delta'1t1g((0^m1)^r0^{m+1}1)$ et $1t1$ possède au moins deux occurrences dans $g(w'_{m,r})$, ce qui est absurde.
Si $|1t1| > |g(0^m1(0^m1)^r0^{m+1}1)|$, comme on a $|g(w'_{m,r})| \geq |0t0| + |1t1|$, on vérifie
$$|g(w'_{m,r})| > |g(0^m1(0^m1)^r0^{m+1}10^m1(0^m1)^r0^{m+1}1)|$$
car
$$|g(w'_{m,r})| \geq 2|1t1| > 2|g(0^m1(0^m1)^r0^{m+1}1)|.$$
Soit $u' = 0^m1(0^m1)^r0^{m+1}10^m1(0^m1)^r0^{m+1}1$. Comme on a
$$|u'|_0 = 4m + 2 + 2rm = |w'_{m,r}|_0$$
et $|u'|_1 = 4 + 2r = |w'_{m,r}|_1$, on obtient
$$|g(w'_{m,r})| > |g(u')| = |g(1^{|u'|_1})| + |g(0^{|u'|_0})|$$
et donc
$$|g(w'_{m,r})| > |g(1^{|w'_{m,r}|_1})| + |g(0^{|w'_{m,r}|_0})| = |g(w'_{m,r})|$$
ce qui est absurde.

En résumé, si le morphisme φg est (m,r)-équilibré, alors g l'est aussi. La preuve concernant les morphismes g et $\tilde{\varphi} g$ est similaire. ⋆

Proposition 2.6 (Berstel et Séébold, [17], Proposition 4.1)
Un morphisme f est sturmien si et seulement si f est acyclique et il existe des entiers m et r non nuls tels que f est (m,r)-équilibré.

Preuve. D'après la proposition 2.5, si f est sturmien, il est acyclique et $(1,1)$-équilibré. Réciproquement, on considère un morphisme f acyclique et (m,r)-équilibré pour un certain couple d'entiers (m,r) non nuls. Le morphisme f étant non effaçant, on remarque $||f|| \geq 2$. Si $||f|| = 2$, parmi les quatre morphismes binaires envisageables, seuls l'identité et le morphisme E sont acycliques. Le résultat est ainsi établi si $||f|| = 2$. Sinon, on entame une récurrence sur la longueur de f. On suppose désormais $||f|| \geq 3$. D'après le lemme 2.11, les mots $f(0)$ et $f(1)$ commencent ou finissent par la même lettre. On suppose que cette lettre est 0, quitte à remplacer f par Ef, cette transformation laissant la longueur des morphismes inchangée.

Dans un premier temps, on suppose que les mots $f(0)$ et $f(1)$ finissent par la lettre 0. Si on a $11 \notin \mathcal{F}act(f(0)) \cup \mathcal{F}act(f(1))$, les mots $f(0)$ et $f(1)$ se décomposent sur $\{10, 0\}^*$. Par définition même de $\tilde{\varphi}$, il existe deux mots x_1 et y_1 tels que $f(0) = \tilde{\varphi}(x_1)$ et $f(1) = \tilde{\varphi}(y_1)$. Soit g_1 le morphisme défini par $g_1(0) = x_1$ et $g_1(1) = y_1$. On a $f = \tilde{\varphi} g_1$ et $||g_1|| < ||f||$. On se place désormais sous l'hypothèse $11 \in \mathcal{F}act(f(0)) \cup \mathcal{F}act(f(1))$. Comme $01 \in \mathcal{F}act(w_{m,r}) \cap \mathcal{F}act(w'_{m,r})$, le morphisme f étant (m,r)-équilibré, on peut affirmer $00 \notin \mathcal{F}act(f(01))$. Or, le mot $f(0)$ se termine par 0, donc $f(1)$ ne peut pas commencer par 0. Comme $10 \in \mathcal{F}act(w_{m,r}) \cap \mathcal{F}act(w'_{m,r})$, on montre que $f(0)$ ne peut pas non plus admettre 0 comme préfixe. En résumé, les mots $f(0)$ et $f(1)$ appartiennent à $\{10, 1\}^*$. De plus, comme $E\varphi(0) = 10$ et $E\varphi(1) = 1$, il existe deux mots x_2 et y_2 tels que $E\varphi(x_2) = f(0)$ et $E\varphi(y_2) = f(1)$. Soit g_2 le morphisme qui à 0 associe x_2 et à 1 associe y_2. On obtient ainsi $f = E\varphi g_2$, avec $||g_2|| < ||f||$.

Il reste à traiter le cas où $f(0)$ et $f(1)$ commencent par la lettre 0. On suppose que le mot 11 n'appartient pas à $\mathcal{F}act(f(0)) \cup \mathcal{F}act(f(1))$. Les mots $f(0)$ et $f(1)$ se décomposent alors sur $\{01, 0\}^*$ et on construit un morphisme g_3, de longueur $||g_3|| < ||f||$, vérifiant $f = \varphi g_3$. Enfin, si $f(0)$ ou $f(1)$ contient le terme 11, il existe un morphisme g_4 tel que $||g_4|| < ||f||$ et $f = E\tilde{\varphi} g_4$.

On achève ainsi la preuve par récurrence. En effet, tous les morphismes g_i, avec $1 \leq i \leq 4$, étant acycliques et (m,r)-équilibrés d'après le lemme 2.12, on finit par décomposer f sur le monoïde de Sturm. Le morphisme f est donc sturmien d'après la proposition 2.1. $\star$

Corollaire 2.1 (Berstel et Séébold, [17], Théorèmes 3.1 et 3.4)
Soit f un morphisme. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *f est sturmien;*
2. *f est acyclique, et il existe des entiers non nuls m et r tels que f est (m,r)-équilibré;*
3. *f est acyclique et (m,r)-équilibré pour tout couple d'entiers (m,r) non nuls;*

4. *f est acyclique, et pour tout couple d'entiers (m, r) non nuls, les mots $f(w_{m,r})$ et $f(w'_{m,r})$ sont équilibrés;*
5. *f appartient au monoïde de Sturm.*

Preuve. Par les propositions 2.5 et 2.6, on a l'équivalence entre les quatre premières assertions. Soient (m, r) un couple d'entiers non nuls et f un morphisme acyclique et (m, r)-équilibré. Grâce à la preuve de la proposition 2.6, on peut décomposer f sur le monoïde de Sturm. La proposition 2.1 permet alors de conclure. $\star$

Remarques. En liant ces résultats à ceux de Z.-X. Wen et Z.-Y. Wen [108], J.-P. Allouche observe qu'un morphisme est sturmien si et seulement s'il est inversible.

De plus, deux morphismes sturmiens sont égaux si et seulement si leurs écritures coïncident modulo les relations : $E^2 = Id$ et $GEG^kED = DED^kEG$ pour tout entier k. Cette propriété, conjecturée par M. Kósa [69], est démontrée par P. Séébold [98], sous le nom de "relations simplificatrices du monoïde de Sturm".

Enfin, les morphismes sturmiens peuvent être obtenus à partir des *conjugués* des morphismes appartenant à $\{E, \varphi\}^*$: cette dernière caractérisation est due à P. Séébold [99].

2.4 Morphismes localement sturmiens

Définition 2.6
Un morphisme localement sturmien est un morphisme qui préserve au moins un mot sturmien.

Proposition 2.7 (Berstel et Séébold, [17], Théorème 3.2)
Tout morphisme localement sturmien est sturmien.

Preuve. Soit f un morphisme localement sturmien. Il existe donc un mot sturmien x tel que $f(x)$ est sturmien. Clairement, le morphisme f est acyclique. Quitte à transformer f en fE, et x en $E(x)$, on peut supposer que 00 est un facteur de x. Il existe donc des entiers m et r non nuls, tels que $w_{m,r}$ ou $w'_{m,r}$ est un facteur de x. Le mot $f(x)$ étant équilibré, on peut affirmer que le morphisme f est (m, r)-équilibré, et finalement sturmien d'après le corollaire 2.1. $\star$

2.5 Morphismes réguliers

On munit l'ensemble $\mathcal{A}^\omega$ de la topologie induite de la valuation V, qui à deux mots $u = u_1u_2u_3\dots$ et $u' = u'_1u'_2u'_3\dots$ associe

$$V(u, u') = \min\{i \in \mathbb{N}^* \mid \overline{u_i} = u'_i\}.$$

Ainsi, tout morphisme f, non effaçant, est continu sur $\mathcal{A}^\omega$. De plus, il existe un point fixe de f commençant par la lettre a si et seulement si a est un préfixe de

$f(a)$. En particulier, si $f(a) = az$ avec $z \neq \varepsilon$, il existe un unique point fixe de f appartenant à $a\mathcal{A}^\omega$. On dit que ce mot, égal à $\lim_{n\to+\infty} f^n(a)$, est engendré par f. D'intéressantes propriétés apparaissent lorsque le morphisme f est régulier.

Définition 2.7 *Un morphisme f est régulier si les conditions suivantes sont réalisées :*

$$\forall\, a \in \mathcal{A} \;\; \overline{a} \in \mathcal{F}act(f(a)) \quad \textit{et} \quad \exists\, b \in \mathcal{A} \;\; b \in \mathcal{F}act(f(b)).$$

Remarque. L'ensemble des morphismes réguliers sur $\mathcal{A}$ est stable par composition. On note $Reg(\mathcal{A})$ ce monoïde.

Lemme 2.13 (Séébold, [98], Propriété 4.6)
On a $St \cap Reg(\mathcal{A}) = St \setminus \{E, \{G, D\}^*, E\{G, D\}^+E\}$.

Preuve. Soit f un morphisme sturmien non régulier. Deux cas se présentent. On suppose qu'il existe une lettre a telle que $\overline{a} \notin \mathcal{F}act(f(a))$. On remarque alors $f(a) = a$ car f appartient au monoïde de Sturm, puis on vérifie $f \in \{G, D\}^*$ ou $f \in E\{G, D\}^*E$ selon qu'on ait $a = 0$ ou $a = 1$. Il reste à étudier le cas où on a $f(0) \in 1^+$ et $f(1) \in 0^+$. Clairement, seul le morphisme d'inversion E convient. En résumé, on a $f \in \{E, \{G, D\}^*, E\{G, D\}^+E\}$. La réciproque est triviale. ⋆

Lemme 2.14 (Séébold, [98]) *Les points fixes d'un morphisme régulier sont infinis.*

Preuve. Soit f un morphisme régulier. Il existe une lettre a telle que $|f(a)| \geq 2$. Si x est un point fixe fini de f alors a n'est pas un facteur de x, sous peine d'avoir $|f(x)| > |x|$. On a donc $x \in \overline{a}^+$. Mais on vérifie aussi $a \in \mathcal{F}act(f(\overline{a}))$ et $a \in \mathcal{F}act(f(x))$, ce qui est absurde car $f(x) = x$. ⋆

Lemme 2.15 (Séébold, [98])
Les morphismes réguliers engendrent leurs points fixes.

Preuve. Soient f un morphisme régulier et x un de ses points fixes. D'après le lemme précédent, le mot x est infini. On note x_0 la première lettre de x. Comme $f(x) = x$, il existe un mot fini u tel que $f(x_0) = x_0u$. De plus, le morphisme f étant régulier, le mot u n'est pas vide. Le mot x est donc l'unique point fixe de f commençant par x_0 et on a $x = \lim_{n\to+\infty} f^n(x_0)$. ⋆

Proposition 2.8 (Séébold, [98], Propriété 4.7) *Soit f un morphisme sturmien et régulier. Les points fixes de f sont des mots sturmiens.*

Preuve. Soit x un point fixe de f. D'après les lemmes 2.14 et 2.15, le mot x est infini et il existe une lettre a telle que $x = \lim_{n\to+\infty} f^n(a)$. Comme f est sturmien et régulier, le mot x est non ultimement périodique, voir [54] pour plus de détails. En outre, on affirme que x est équilibré. En effet, si ce n'est pas le cas, il existe un entier n tel que $f^n(a)$ est équilibré alors que $f^{n+1}(a)$ ne l'est pas. Comme f appartient au monoïde de Sturm, le lemme 2.4 amène finalement la contradiction cherchée. ⋆

Proposition 2.9 (Séébold, [98]) *Soit x un mot sturmien. Le mot x est engendré par un morphisme si et seulement si x est point fixe d'un morphisme non trivial.*

Preuve. On suppose qu'il existe un morphisme f, différent de l'identité, tel que $f(x) = x$. Le morphisme f est localement sturmien, donc sturmien d'après la proposition 2.7. Si f n'est pas régulier, à l'aide du lemme 2.13, on affirme que f appartient à $\{E, \{G, D\}^+, E\{G, D\}^+E\}$. Clairement, on a $f \neq E$. Pour démontrer $f \notin \{G, D\}^+$, on raisonne par l'absurde. Comme G et D commutent, il existe des entiers m et n tels que $f = G^n D^m$ avec $m + n \neq 0$. Des relations $f(0) = 0$ et $f(1) = 0^n 10^m$, on déduit que n est nul sous peine d'avoir $x = 0^\omega$. On a donc $f(1) = 10^m$ avec $m \neq 0$, et il existe un entier k tel que $x = 0^\omega$ ou $0^k 10^\omega$, ce qui amène à nouveau une contradiction. Le dernier cas se traite de façon similaire. Le morphisme f est donc régulier, et par le lemme 2.15, le mot x est engendré par f. La réciproque est triviale. $\star$

Chapitre 3

Propriétés d'invariance

L'une des contributions de ce chapitre est l'extension, aux suites sturmiennes générales, des formules décrivant l'action du monoïde de Sturm sur les pentes et les intercepts.

Dans un premier temps, on cherche à déterminer l'ensemble des points fixes d'un morphisme sturmien f. Si f n'est pas régulier, la réponse est donnée par le lemme 2.13 et la preuve de la proposition 2.9. En revanche, si f appartient au monoïde $Reg(\mathcal{A})$, on sait uniquement que les points fixes de f sont des mots sturmiens. Par la proposition 3.1, on précise ce résultat en calculant $f(s_{\alpha,\rho})$ et $f(s'_{\alpha,\rho})$ pour tout couple (α, ρ) de Δ. Il suffit alors de procéder par identifications sur les pentes et les intercepts pour conclure.

L'étude des propriétés d'invariance des mots sturmiens est un problème plus délicat à traiter. À l'aide des développements matriciels de G. N. Raney [91], on commence par énoncer une condition que doivent satisfaire les pentes des mots laissés fixes par une substitution non triviale. Les valeurs ainsi obtenues sont les nombres de Sturm. Une condition concernant les intercepts est aussi évoquée.

En introduisant les automates d'invariance, on décrit toutes les substitutions g qui vérifient la relation $g(x) = x$, lorsque x est une suite caractéristique, un mot de Christoffel, ou un mot du type $s_{\alpha,1-\alpha}$ ou $s'_{\alpha,1-\alpha}$ pour un certain irrationnel α.

On définit ensuite une classe de mots sturmiens, dits admissibles, dont l'intercept est une homographie de la pente. Ces mots sont laissés fixes par une substitution non triviale si et seulement si leur pente est un nombre de Sturm. Si tel est le cas, on dispose d'un algorithme, au coût très faible, qui construit un morphisme répondant au problème posé.

Enfin, on met en évidence plusieurs familles de mots sturmiens laissés fixes uniquement par l'application identité, bien qu'ils soient apparemment candidats à une propriété d'invariance non triviale.

3.1 Évolution des pentes et des intercepts

On généralise des résultats concernant les fonctions indicatrices, obtenus par A. S. Fraenkel, M. Mushkin et U. Tassa dans le cas homogène [50].

Définition 3.1 *Soient un irrationnel β et un réel δ.*
Soient $N_{\beta,\delta} = \{\lfloor k\beta + \delta \rfloor \mid k \in \mathbb{N}^*\}$ et $N'_{\beta,\delta} = \{\lceil k\beta + \delta \rceil \mid k \in \mathbb{N}^*\}$. On note $g_{\beta,\delta}$ et $g'_{\beta,\delta}$ les fonctions indicatrices de ces ensembles. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$g_{\beta,\delta}(n) = \begin{cases} 1 \text{ si } n \in N_{\beta,\delta} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad g'_{\beta,\delta}(n) = \begin{cases} 1 \text{ si } n \in N'_{\beta,\delta} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Lemme 3.1
Soient un irrationnel $\beta > 1$ et un réel $\delta < 1$. On a

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \;\; g_{\beta,\delta}(n) = s'_{\frac{1}{\beta},\frac{-\delta}{\beta}}(n).$$

Preuve. Soit un entier $n \geq 1$. Dans un premier temps, on suppose $s'_{\frac{1}{\beta},\frac{-\delta}{\beta}}(n) = 1$. On a donc

$$\frac{n}{\beta} - \frac{\delta}{\beta} \leq \left\lceil \frac{n}{\beta} - \frac{\delta}{\beta} \right\rceil = \left\lceil \frac{n+1}{\beta} - \frac{\delta}{\beta} \right\rceil - 1 < \frac{n+1}{\beta} - \frac{\delta}{\beta}$$

puis $n \leq \left\lceil \frac{n}{\beta} - \frac{\delta}{\beta} \right\rceil \beta + \delta < n+1$, c'est-à-dire $\left\lfloor \left\lceil \frac{n}{\beta} - \frac{\delta}{\beta} \right\rceil \beta + \delta \right\rfloor = n$. Comme on a $\delta < 1 \leq n$, on obtient $\left\lceil \frac{n}{\beta} - \frac{\delta}{\beta} \right\rceil \geq 1$ et finalement $g_{\beta,\delta}(n) = 1$.
Réciproquement, on suppose $g_{\beta,\delta}(n) = 1$. Il existe donc un entier $k \geq 1$ tel que $\lfloor k\beta + \delta \rfloor = n$. On en déduit $n \leq k\beta + \delta < n + 1$ et

$$\left\lceil \frac{n}{\beta} - \frac{\delta}{\beta} \right\rceil - 1 < \frac{n}{\beta} - \frac{\delta}{\beta} \leq k < \frac{n+1}{\beta} - \frac{\delta}{\beta} \leq \left\lceil \frac{n+1}{\beta} - \frac{\delta}{\beta} \right\rceil$$

d'où $\left\lceil \frac{n}{\beta} - \frac{\delta}{\beta} \right\rceil \leq k < \left\lceil \frac{n+1}{\beta} - \frac{\delta}{\beta} \right\rceil$ et $s'_{\frac{1}{\beta},\frac{-\delta}{\beta}}(n) = 1$. $\star$

Lemme 3.2
Soient un irrationnel $\beta > 1$ et un réel $\delta \leq 1$. On a

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \;\; g'_{\beta,\delta-1}(n) = s_{\frac{1}{\beta},\frac{-\delta}{\beta}}(n).$$

Preuve. Soit un entier $n \geq 1$. Si $s_{\frac{1}{\beta},\frac{-\delta}{\beta}}(n) = 1$ alors on vérifie

$$0 \leq \frac{n}{\beta} - \frac{\delta}{\beta} < \left\lfloor \frac{n}{\beta} - \frac{\delta}{\beta} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{n+1}{\beta} - \frac{\delta}{\beta} \right\rfloor \leq \frac{n+1}{\beta} - \frac{\delta}{\beta}.$$

On en déduit $\left\lceil \left\lfloor \frac{n+1}{\beta} - \frac{\delta}{\beta} \right\rfloor \beta + \delta - 1 \right\rceil = n$ et $g'_{\beta,\delta-1}(n) = 1$.
Réciproquement, on suppose $g'_{\beta,\delta-1}(n) = 1$. Il existe un entier $k \geq 1$ tel que $\lceil k\beta + \delta - 1 \rceil = n$. On a ainsi $n < k\beta + \delta \leq n+1$ et

$$\left\lfloor \frac{n}{\beta} - \frac{\delta}{\beta} \right\rfloor \leq \frac{n}{\beta} - \frac{\delta}{\beta} < k \leq \left\lfloor \frac{n+1}{\beta} - \frac{\delta}{\beta} \right\rfloor$$

d'où $s_{\frac{1}{\beta},\frac{-\delta}{\beta}}(n) = 1$. ⋆

On cherche maintenant à expliciter l'évolution de la pente et de l'intercept d'un mot sturmien sous l'action des générateurs du monoïde de Sturm. La preuve présentée s'inspire de la méthode suivie par T. C. Brown pour étudier le cas homogène [27].

Soit Λ' l'ensemble des couples formés d'un irrationnel de $]0,1[$ et d'un réel de $]0,1]$.

Proposition 3.1
Si $(\alpha,\rho) \in \Lambda$ *on a*

$$E(s_{\alpha,\rho}) = s'_{1-\alpha,1-\rho},\ G(s_{\alpha,\rho}) = s_{\frac{\alpha}{\alpha+1},\frac{\rho}{\alpha+1}} \ \textit{et}\ D(s_{\alpha,\rho}) = s_{\frac{\alpha}{\alpha+1},\frac{\alpha+\rho}{\alpha+1}}.$$

Si $(\alpha,\rho) \in \Lambda'$ *on a*

$$E(s'_{\alpha,\rho}) = s_{1-\alpha,1-\rho},\ G(s'_{\alpha,\rho}) = s'_{\frac{\alpha}{\alpha+1},\frac{\rho}{\alpha+1}} \ \textit{et}\ D(s'_{\alpha,\rho}) = s'_{\frac{\alpha}{\alpha+1},\frac{\alpha+\rho}{\alpha+1}}.$$

Par les lemmes 3.3 à 3.8, on démontre cette proposition.

Lemme 3.3 *Soit* α *un irrationnel de* $]0,1[$.
Pour tout réel ρ, *on a* $E(s_{\alpha,\rho}) = s'_{1-\alpha,1-\rho}$ *et* $E(s'_{\alpha,\rho}) = s_{1-\alpha,1-\rho}$.

Preuve. Soit un entier $n \geq 0$. On commence par observer que tout réel a vérifie $\lfloor a \rfloor = -\lceil -a \rceil$. De plus, on a

$$s'_{1-\alpha,1-\rho}(n) = \lceil (n+1)(1-\alpha) + (1-\rho) \rceil - \lceil n(1-\alpha) + (1-\rho) \rceil.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} s'_{1-\alpha,1-\rho}(n) &= 1 - (\lceil -n\alpha - \rho \rceil - \lceil -(n+1)\alpha - \rho \rceil) \\ &= 1 - (s_{\alpha,\rho}(n)) = E(s_{\alpha,\rho}(n)) = E(s_{\alpha,\rho})(n). \end{aligned}$$

La preuve du second point est similaire. ⋆

Lemme 3.4 *On a* $\varphi(s_{\alpha,\rho}) = s'_{\frac{1-\alpha}{2-\alpha},\frac{1-\rho}{2-\alpha}}$ *si* $(\alpha,\rho) \in \Lambda$.

Preuve. On commence par remarquer $\varphi(s_{\alpha,\rho})(0) = 0 = s'_{\frac{1-\alpha}{2-\alpha},\frac{1-\rho}{2-\alpha}}(0)$. Soient un entier $q \geq 1$ et n_{q+1} la position du $(q+1)$-ième zéro dans $\varphi(s_{\alpha,\rho})$. Par définition de φ, on a

$$n_{q+1} = \left(q + \sum_{i=0}^{q-1} (1 - s_{\alpha,\rho}(i)) + 1 \right) - 1 = 2q - \lfloor q\alpha + \rho \rfloor = \lceil q(2-\alpha) - \rho \rceil.$$

Soit un entier $n \geq 1$. On vérifie :

$$\begin{aligned}
\varphi(s_{\alpha,\rho})(n) = 0 &\Leftrightarrow \exists\, q \in \mathbb{N}^* \;\; n = \lceil q(2-\alpha) - \rho \rceil \\
&\Leftrightarrow g'_{2-\alpha,-\rho}(n) = 1 \\
&\Leftrightarrow s_{\frac{1}{2-\alpha},\frac{\rho-1}{2-\alpha}}(n) = 1 \\
&\Leftrightarrow s'_{1-\frac{1}{2-\alpha},1-\frac{\rho-1}{2-\alpha}}(n) = 0 \\
&\Leftrightarrow s'_{\frac{1-\alpha}{2-\alpha},\frac{1-\rho}{2-\alpha}}(n) = 0. \star
\end{aligned}$$

Lemme 3.5 *On a* $\varphi(s'_{\alpha,\rho}) = s_{\frac{1-\alpha}{2-\alpha},\frac{1-\rho}{2-\alpha}}$ *si* $(\alpha,\rho) \in \Lambda'$.

Preuve. On commence par remarquer $\varphi(s'_{\alpha,\rho})(0) = 0 = s_{\frac{1-\alpha}{2-\alpha},\frac{1-\rho}{2-\alpha}}(0)$. Soient un entier $q \geq 1$ et n_{q+1} la position du $(q+1)$-ième zéro dans $\varphi(s'_{\alpha,\rho})$. Par définition même de φ, on obtient

$$n_{q+1} = \left(q + \sum_{i=0}^{q-1}(1 - s'_{\alpha,\rho}(i)) + 1 \right) - 1 = 2q - \lceil q\alpha + \rho \rceil + 1 = \lfloor q(2-\alpha) + (1-\rho) \rfloor.$$

Pour tout entier $n \geq 1$, on en déduit :

$$\begin{aligned}
\varphi(s'_{\alpha,\rho})(n) = 0 &\Leftrightarrow \exists\, q \in \mathbb{N}^* \;\; n = \lfloor q(2-\alpha) + (1-\rho) \rfloor \\
&\Leftrightarrow g_{2-\alpha,1-\rho}(n) = 1 \\
&\Leftrightarrow s'_{\frac{1}{2-\alpha},\frac{\rho-1}{2-\alpha}}(n) = 1 \\
&\Leftrightarrow s_{1-\frac{1}{2-\alpha},1-\frac{\rho-1}{2-\alpha}}(n) = 0 \\
&\Leftrightarrow s_{\frac{1-\alpha}{2-\alpha},\frac{1-\rho}{2-\alpha}}(n) = 0. \star
\end{aligned}$$

Lemme 3.6 *On a* $G(s_{\alpha,\rho}) = s_{\frac{\alpha}{\alpha+1},\frac{\rho}{\alpha+1}}$ *si* $(\alpha,\rho) \in \Lambda$ *et* $G(s'_{\alpha,\rho}) = s'_{\frac{\alpha}{\alpha+1},\frac{\rho}{\alpha+1}}$ *si* $(\alpha,\rho) \in \Lambda'$.

Preuve. Si $(\alpha,\rho) \in \Lambda$, on remarque $G(s_{\alpha,\rho}) = \varphi E(s_{\alpha,\rho}) = \varphi(s'_{1-\alpha,1-\rho})$. Comme $1-\rho \in]0,1]$, d'après le lemme 3.5, on a $G(s_{\alpha,\rho}) = s_{\frac{\alpha}{\alpha+1},\frac{\rho}{\alpha+1}}$.
Si $(\alpha,\rho) \in \Lambda'$, on a $G(s'_{\alpha,\rho}) = \varphi(s_{1-\alpha,1-\rho})$. Comme $1-\rho \in [0,1[$, il suffit d'appliquer le lemme 3.4 pour conclure. $\star$

Lemme 3.7 *On a* $\tilde{\varphi}(s_{\alpha,\rho}) = s'_{\frac{1-\alpha}{2-\alpha},\frac{2-\alpha-\rho}{2-\alpha}}$ *si* $(\alpha,\rho) \in \Lambda$ *et* $\tilde{\varphi}(s'_{\alpha,\rho}) = s_{\frac{1-\alpha}{2-\alpha},\frac{2-\alpha-\rho}{2-\alpha}}$ *si* $(\alpha,\rho) \in \Lambda'$.

Preuve. Restreint aux mots infinis, le morphisme $\tilde{\varphi}$ peut s'écrire comme la composée du shift et du premier morphisme de Fibonacci φ. On utilise donc les lemmes 1.18, 3.4 et 3.5. $\star$

Lemme 3.8 *On a* $D(s_{\alpha,\rho}) = s_{\frac{\alpha}{\alpha+1},\frac{\alpha+\rho}{\alpha+1}}$ *si* $(\alpha,\rho) \in \Lambda$ *et* $D(s'_{\alpha,\rho}) = s'_{\frac{\alpha}{\alpha+1},\frac{\alpha+\rho}{\alpha+1}}$ *si* $(\alpha,\rho) \in \Lambda'$.

Preuve. La démonstration est identique à celle du lemme 3.6. $\star$

3.2 Nombres de Sturm

En référence à l'article [37], on introduit une classe particulière de nombres algébriques :

Définition 3.2 *Les nombres de Sturm sont les irrationnels λ pouvant être écrits sous l'une des formes suivantes, où n est un entier supérieur à deux :*

- $\lambda = [0, 1+k_n, \overline{k_{n-1}, \ldots, k_2, k_1+k_n}\ ]$ *où* $(k_1, k_n) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *et* $k_j \in \mathbb{N}^*$ *pour* $2 \leq j \leq n-1$;
- $\lambda = [0, 1, k_n, \overline{k_{n-1}, \ldots, k_2, k_1+k_n}\ ]$ *où* $k_j \in \mathbb{N}^*$ *pour* $1 \leq j \leq n$.

Remarque. Les deux représentations proposées sont toujours incompatibles.

Théorème 3.1 *Soit α un irrationnel de $]0,1[$. Si une substitution non triviale laisse fixe un mot sturmien de pente α alors α est un nombre de Sturm.*

L'étude menée est fondée sur les développements de Raney [91], dont on rappelle la définition. Soit l'alphabet $\{R, L\}$ constitué des matrices $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Soient β_1 et β_2 des réels non nuls dont le rapport est un irrationnel. Soit V le vecteur $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$. L'idée est d'associer à V un mot sur $\{R, L\}^\omega$. Si $\beta_1 > \beta_2$ on écrit $V = R\begin{pmatrix} \beta_1 - \beta_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$, et si $\beta_1 < \beta_2$ on a $V = L\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 - \beta_1 \end{pmatrix}$. En itérant cette démarche, il apparaît que le développement de V, sur l'alphabet $\{R, L\}$, est égal au mot infini $R^{b_0}L^{b_1}R^{b_2}L^{b_3}\ldots$ où $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des quotients partiels de $\dfrac{\beta_1}{\beta_2}$. Pour des raisons techniques, G. N. Raney introduit aussi la matrice d'inversion $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ qui satisfait les relations $JL^k = R^kJ$ et $JR^k = L^kJ$, pour tout entier relatif k.

Preuve du théorème 3.1. Soit $\alpha = [0, a_1, a_2, \ldots]$. Soit f une substitution non triviale qui laisse fixe un mot de pente α. On sait alors que f se décompose sur l'alphabet $\{E, G, D\}$. On note r la fonction qui à un mot sturmien x associe sa pente dans $]0,1[$. D'après la proposition 3.1, on a

$$r(G(x)) = r(D(x)) = \frac{r(x)}{r(x)+1} \text{ et } r(E(x)) = 1 - r(x).$$

On remarque $\begin{pmatrix} r(x) \\ r(x)+1 \end{pmatrix} = L\begin{pmatrix} r(x) \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1-r(x) \\ 1 \end{pmatrix} = LJL^{-1}\begin{pmatrix} r(x) \\ 1 \end{pmatrix}$. Autrement dit, on peut associer à f une matrice M qui se décompose sur l'alphabet $\{L, LJL^{-1}\}$, et qui traduit l'action de f sur les pentes des mots. Plus précisément, on écrit

$$M = L^{k_m}\, LJL^{k_{m-1}-1}\ldots LJL^{k_1-1}$$

avec $k_1 \in \mathbb{N}$, $k_m \in \mathbb{N}$, et $\forall\, j \in \mathbb{N},\ 2 \leq j \leq m-1,\ \ k_j \in \mathbb{N}^*$. On sépare la preuve en plusieurs cas selon la parité de m. Dans un premier temps, on suppose que m est impair. Le cas $m = 1$ est sans intérêt. Si $m = 3$ on a alors $M = L^{k_3+1}R^{k_2}L^{k_1-1}$. Pour que la pente reste fixe, on doit vérifier la relation suivante sur le RL-mot associé à α :

$$L^{k_3+1}R^{k_2}L^{k_1-1+a_1}R^{a_2}L^{a_3}\cdots = ML^{a_1}R^{a_2}L^{a_3}\cdots = L^{a_1}R^{a_2}L^{a_3}\ldots$$

Par unicité d'une telle décomposition, on procède par une identification terme à terme. Si $a_1 + k_1 - 1$ est nul, alors on a $a_2 = a_2 + k_2$, ce qui est faux par définition même de k_2. Le développement obtenu n'est donc pas formel, et on a $\alpha = [0, k_3 + 1,\ \overline{k_2, k_1 + k_3}\ ]$.
On suppose désormais $m \geq 5$. On peut alors effectuer des regroupements comme indiqués :

$$\begin{aligned} M &= L^{k_m}LJL^{k_{m-1}-1}LJL^{k_{m-2}-1}\ldots LJL^{k_2-1}LJL^{k_1-1} \\ &= L^{k_m+1}R^{k_{m-1}}\ldots L^{k_3}R^{k_2}L^{k_1-1}. \end{aligned}$$

On doit montrer

$$L^{a_1}R^{a_2}L^{a_3}\cdots = L^{k_m+1}R^{k_{m-1}}L^{k_{m-2}}\ldots R^{k_4}L^{k_3}R^{k_2}L^{k_1+a_1-1}R^{a_2}L^{a_3}\ldots$$

Deux cas se présentent. Si $k_1 + a_1 - 1 = 0$, alors $a_1 = 1$, $k_1 = 0$, et on a
$L^{k_m+1}R^{k_{m-1}}L^{k_{m-2}}\ldots R^{k_4}L^{k_3}R^{k_2+a_2}L^{a_3}\cdots =$
$LR^{a_2}L^{a_3}\ldots R^{a_{m-3}}L^{a_{m-2}}R^{a_{m-1}}L^{a_m}\ldots$
On vérifie alors $k_m = 0$, $a_2 = k_{m-1}$, $a_3 = k_{m-2}$, …, $a_{m-2} = k_3$, ainsi que $a_{m-1} = k_2 + k_{m-1}$, $a_m = a_3$, et par suite on a

$$\alpha = [0, 1, k_{m-1},\ \overline{k_{m-2}, \ldots, k_3, k_2 + k_{m-1}}\ ].$$

Si $k_1 + a_1 - 1 \neq 0$, on obtient de même

$$\alpha = [0, k_m + 1,\ \overline{k_{m-1}, \ldots, k_2, k_1 + k_m}\ ],$$

la condition $k_1 + a_1 - 1 \neq 0$ se traduisant par $k_1 + k_m \neq 0$.
Désormais, on suppose que m est pair. Si $m = 2$ on vérifie alors

$$M = L^{k_2+1}R^{k_1-1}J$$

et

$$L^{a_1}R^{a_2}L^{a_3}R^{a_4}\cdots = L^{k_2+1}R^{k_1-1+a_1}L^{a_2}R^{a_3}L^{a_4}\ldots$$

Si $k_1 - 1 + a_1 \neq 0$, on a $\alpha = [0, k_2+1,\ \overline{k_1 + k_2}\ ]$, l'hypothèse devenant $k_1 + k_2 \neq 0$. Si $k_1 + a_1 - 1 = 0$ on a $1 = a_1 = k_2 + 1 + a_2$, ce qui est absurde. On suppose désormais $m \geq 4$. On regroupe les termes comme précédemment, en mettant à part le dernier, c'est-à-dire LJL^{k_1-1}. Plus précisément, on écrit :

$$\begin{aligned} M &= L^{k_m}\ LJL^{k_{m-1}-1}\ldots LJL^{k_2-1}\ LJL^{k_1-1} \\ &= L^{k_m+1}R^{k_{m-1}}L^{k_{m-2}}\ldots R^{k_3}L^{k_2}R^{k_1-1}J. \end{aligned}$$

On en déduit

$$L^{a_1}R^{a_2}L^{a_3}\cdots = L^{k_m+1}R^{k_{m-1}}L^{k_{m-2}}\ldots R^{k_3}L^{k_2}R^{k_1+a_1-1}L^{a_2}R^{a_3}\ldots$$

Si $k_1 + a_1 - 1 \neq 0$, on obtient $\alpha = [0, k_m + 1, \overline{k_{m-1}, \ldots, k_2, k_1 + k_m}\ ]$, la condition devenant $k_1 + k_m \neq 0$. Si $k_1 + a_1 - 1 = 0$, on a alors $a_1 = 1$, $k_1 = 0$, puis $a_1 = k_m + 1$, donc $k_m = 0$, et $a_2 = k_{m-1}, \ldots, a_{m-2} = k_3$, $a_{m-1} = k_2 + k_{m-1}$ et $a_m = a_3$. Autrement dit, on vérifie que α est de la forme $\alpha = [0, 1, k_{m-1}, \overline{k_{m-2}, \ldots, k_3, k_2 + k_{m-1}}\ ]$.

En résumé, on peut affirmer qu'il existe deux développements en fraction continue possibles pour α :

- $\alpha = [0, 1 + k_m, \overline{k_{m-1}, \ldots, k_2, k_1 + k_m}\ ]$ avec $m \geq 2$, $k_j \in \mathbb{N}^*$ pour $2 \leq j \leq m - 1$ et $(k_1, k_m) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}$;
- $\alpha = [0, 1, k_{m-1}, \overline{k_{m-2}, \ldots, k_3, k_2 + k_{m-1}}\ ]$ avec $m \geq 4$ et $k_j \in \mathbb{N}^*$ pour $2 \leq j \leq m - 1$.

On obtient le résultat annoncé, à une simple renumérotation près pour le second cas. $\star$

Remarque. Dans l'article [27], T. C. Brown démontre par une étude combinatoire, liée à des travaux de J. Karhumaki [63], qu'il n'existe pas de substitution sur l'alphabet $\mathcal{A}$, non triviale, laissant fixe le mot $s_{\tau,\tau}$ avec $\tau = [0, 5, \overline{1}\ ]$. Ce résultat apparaît comme un cas particulier du théorème 3.1.

3.3 Premières équations d'invariance

Définition 3.3 *Soit β un irrationnel de $]0,1[$. On note $\mathcal{S}_\beta$ l'ensemble des suites $s_{\beta,\beta}$, $s_{\beta,0}$, $s'_{\beta,0}$, $s_{\beta,1-\beta}$ et $s'_{\beta,1-\beta}$. Le mot $s_{\beta,\beta}$ est la suite caractéristique de β. Les mots $s_{\beta,0}$ et $s'_{\beta,0}$ sont les mots de Christoffel, respectivement positif et négatif, associés à $\frac{\beta}{1-\beta}$.*

Soient ν un irrationnel de $]0,1[$ et x un mot de $\mathcal{S}_\nu$. L'objectif de cette section est de résoudre l'équation $f(x) = x$ d'inconnue f.

3.3.1 Solutions non triviales

On cherche à montrer que si ν est un nombre de Sturm, toutes les suites appartenant à $\mathcal{S}_\nu$ sont laissées fixes par une substitution non triviale. Le résultat concernant les suites caractéristiques est dû à D. Crisp, W. Moran, A. Pollington et P. Shiue [37]. Une autre démonstration, un peu plus simple, est formulée par J. Berstel et P. Séébold [17]. Enfin, une solution, qui est en relation avec les procédés de construction des suites caractéristiques décrits par A. S. Fraenkel, M. Mushkin et U. Tassa [50], est proposée par T. Komatsu et A. J. van der Poorten [68].

Définition 3.4 *Soient X et Y des substitutions. Soit $\kappa = (\kappa_1, \ldots, \kappa_m)$ une suite d'entiers avec $m \geq 1$. On définit par récurrence $f_\kappa^{(m)}(X,Y)$ en posant : $f_\kappa^{(1)}(X,Y) = X^{\kappa_1}$, $f_\kappa^{(2i)}(X,Y) = Y^{\kappa_{2i}} E f_\kappa^{(2i-1)}(X,Y)$ pour $1 \leq i \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$, et $f_\kappa^{(2i+1)}(X,Y) = X^{\kappa_{2i+1}} E f_\kappa^{(2i)}(X,Y)$ pour $1 \leq i \leq \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$. On pose enfin*

$$F_\kappa(X,Y) = f_\kappa^{(m)}(X,Y).$$

Proposition 3.2 *Soit α un nombre de Sturm.*
Si $\alpha = [0, k_n+1, \overline{k_{n-1}, \ldots, k_2, k_1 + k_n}\,]$, avec $n \geq 2$ et $(k_1, k_n) \in \mathbb{N}^2 \backslash \{(0,0)\}$, on pose $\kappa = (k_1, \ldots, k_n)$. Le tableau suivant met en relation des suites sturmiennes avec des morphismes non triviaux les laissant fixes :

Suites	*Morphismes de St associés*
$s_{\alpha,\alpha}$	$F_\kappa(G,G)$
$s_{\alpha,1-\alpha}$	$F_\kappa(D,D)$ *si n est impair et* $F_\kappa^2(D,D)$ *sinon*
$s'_{\alpha,1-\alpha}$	$F_\kappa(D,D)$ *si n est impair et* $F_\kappa^2(D,D)$ *sinon*
$s_{\alpha,0}$	$F_\kappa(G,D)$ *si n est impair et* $F_\kappa(D,G)F_\kappa(G,D)$ *sinon*
$s'_{\alpha,0}$	$F_\kappa(D,G)$ *si n est impair et* $F_\kappa(G,D)F_\kappa(D,G)$ *sinon*

Si $\alpha = [0, 1, k_n, \overline{k_{n-1}, \ldots, k_2, k_1 + k_n}\,]$, avec $n \geq 2$ et $k_1 \in \mathbb{N}^*$, on pose alors $\kappa = (k_1, \ldots, k_n)$ et on obtient :

Suites	*Morphismes de St associés*
$s_{\alpha,\alpha}$	$EF_\kappa(G,G)E$
$s_{\alpha,1-\alpha}$	$EF_\kappa(D,D)E$ *si n est impair et* $EF_\kappa^2(D,D)E$ *sinon*
$s'_{\alpha,1-\alpha}$	$EF_\kappa(D,D)E$ *si n est impair et* $EF_\kappa^2(D,D)E$ *sinon*
$s_{\alpha,0}$	$EF_\kappa(D,G)E$ *si n est impair et* $EF_\kappa(G,D)F_\kappa(D,G)E$ *sinon*
$s'_{\alpha,0}$	$EF_\kappa(G,D)E$ *si n est impair et* $EF_\kappa(D,G)F_\kappa(G,D)E$ *sinon*

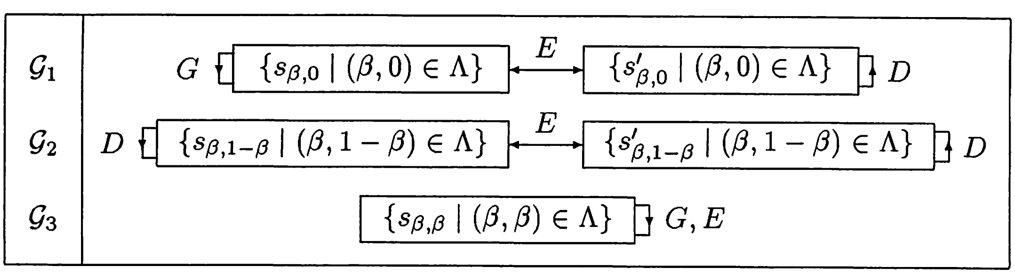

FIG. 3.1: Premiers graphes d'invariance

Preuve. À l'aide de la proposition 3.1, on construit les graphes présentés page 40. On considère le cas où $\alpha = [0, k_n+1, \overline{k_{n-1}, \ldots, k_2, k_1 + k_n}\,]$ avec $n \geq 2$ et $(k_1, k_n) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On pose alors $\kappa = (k_1, \ldots, k_n)$.

Dans un premier temps, on suppose que n est impair. On a alors

$$F_\kappa(X,Y) = X^{k_n}EY^{k_{n-1}}EX^{k_{n-2}}\dots EY^{k_2}EX^{k_1}.$$

Par lecture sur le graphe $\mathcal{G}_1$, on vérifie immédiatement $F_\kappa(G,D)(s_{\alpha,0}) = s_{\beta,0}$ pour un certain irrationnel β. D'après la démonstration du théorème 3.1, il est clair que $F_\kappa(G,D)$ transforme $s_{\alpha,0}$ en un mot sturmien de même pente. En résumé, le morphisme $F_\kappa(G,D)$ laisse fixe le mot $s_{\alpha,0}$. Comme G et D ont la même action sur les pentes des mots sturmiens, par un raisonnement identique, on obtient $F_\kappa(D,G)(s'_{\alpha,0}) = s'_{\alpha,0}$. On a aussi $F_\kappa(D,D)(s_{\alpha,1-\alpha}) = s_{\alpha,1-\alpha}$ et $F_\kappa(D,D)(s'_{\alpha,1-\alpha}) = s'_{\alpha,1-\alpha}$. Et on affirme $F_\kappa(G,G)(s_{\alpha,\alpha}) = s_{\alpha,\alpha}$ par lecture sur le graphe $\mathcal{G}_3$.

En supposant que n est pair, on commence par remarquer

$$F_\kappa(X,Y) = Y^{k_n}EX^{k_{n-1}}E\dots Y^{k_4}EX^{k_3}EY^{k_2}EX^{k_1}.$$

En ce qui concerne les mots de Christoffel, on a

$$F_\kappa(G,D)(s_{\alpha,0}) = s'_{\alpha,0} \text{ et } F_\kappa(D,G)(s'_{\alpha,0}) = s_{\alpha,0}.$$

On vérifie aussi $F_\kappa(D,D)(s_{\alpha,1-\alpha}) = s'_{\alpha,1-\alpha}$ et $F_\kappa(D,D)(s'_{\alpha,1-\alpha}) = s_{\alpha,1-\alpha}$. Enfin, pour les suites caractéristiques, on a $F_\kappa(G,G)(s_{\alpha,\alpha}) = s_{\alpha,\alpha}$, ce qui achève l'étude du premier cas.

On suppose maintenant que α a pour développement en fraction continue :

$$\alpha = [0,1,k_n,\overline{k_{n-1},\dots,k_2,k_1+k_n}\,] \text{ avec } n \geq 2 \text{ et } k_1 \geq 1.$$

Sous l'action du morphisme E, la pente α est transformée en $1-\alpha$, qui est un irrationnel de la première forme étudiée. La fin de la preuve est donc triviale. $\star$

Corollaire 3.1 *Soit α un irrationnel de* $]0,1[$. *Il suffit qu'un des mots de $\mathcal{S}_\alpha$ soit laissé fixe par une substitution non triviale, pour qu'ils le soient tous.*

Preuve. Soit $x \in \mathcal{S}_\alpha$. S'il existe une substitution f, non triviale, pour laquelle on a $f(x) = x$, alors α est un nombre de Sturm et la proposition 3.2 permet de conclure. $\star$

3.3.2 Automates d'invariance

Lemme 3.9 *Les antécédents sturmiens des suites caractéristiques, par le monoïde de Sturm, sont les suites caractéristiques et les mots de Christoffel.*

Preuve. Soit β un irrationnel de $]0,1[$. On remarque $E(s_{1-\beta,1-\beta}) = s_{\beta,\beta}$. En supposant qu'il existe un mot sturmien $x^{(0)}$ tel que $G(x^{(0)}) = s_{\beta,\beta}$, d'après la proposition 3.1, on a $\beta \in]0,\frac{1}{2}[$ et $G(s_{\frac{\beta}{1-\beta},\frac{\beta}{1-\beta}}) = s_{\beta,\beta}$. Par injectivité de G sur $\mathcal{A}^\omega$, on a $x^{(0)} = s_{\frac{\beta}{1-\beta},\frac{\beta}{1-\beta}}$. S'il existe un mot sturmien $x^{(1)}$ tel que $D(x^{(1)}) = s_{\beta,\beta}$, par un raisonnement similaire, on a $\beta \in]0,\frac{1}{2}[$ et le mot $x^{(1)} = s_{\frac{\beta}{1-\beta},0}$ convient.

On doit maintenant décrire les antécédents sturmiens des mots de Christoffel positifs par les morphismes E, G et D. On montre qu'il n'existe pas de mot sturmien $x^{(2)}$ tel que $D(x^{(2)}) = s_{\beta,0}$. En effet, si $x^{(2)} = s_{\alpha,\rho}$ avec $(\alpha,\rho) \in \Lambda$, on a $s_{\frac{\alpha}{\alpha+1},\frac{\alpha+\rho}{\alpha+1}} = s_{\beta,0}$ et l'injectivité de s sur Λ amène une contradiction. De plus, si $x^{(2)} = s'_{\alpha,\rho}$ avec $(\alpha,\rho) \in \Lambda'$, on a $s'_{\frac{\alpha}{\alpha+1},\frac{\alpha+\rho}{\alpha+1}} = s_{\beta,0}$, ce qui est absurde d'après la proposition 1.5. Enfin, s'il existe un mot sturmien $x^{(3)}$ tel que $G(x^{(3)}) = s_{\beta,0}$, on vérifie $\beta \in]0,\frac{1}{2}[$ et $x^{(3)} = s_{\frac{\beta}{1-\beta},0}$.

En remarquant que l'on a $E(s'_{1-\beta,0}) = s_{\beta,0}$, on doit étudier les antécédents sturmiens des mots de Christoffel négatifs, par les générateurs de St. On montre facilement qu'il n'existe pas de mot sturmien $x^{(4)}$ tel que $G(x^{(4)}) = s'_{\beta,0}$. Enfin, s'il existe un mot sturmien $x^{(5)}$ tel que $D(x^{(5)}) = s'_{\beta,0}$, on a nécessairement $\beta \in]0,\frac{1}{2}[$ et le mot $x^{(5)} = s'_{\frac{\beta}{1-\beta},0}$ convient. Comme il n'apparaît pas de nouvelle catégorie de mots sturmiens dans ces calculs d'antécédents, on a bien démontré le résultat annoncé. ⋆

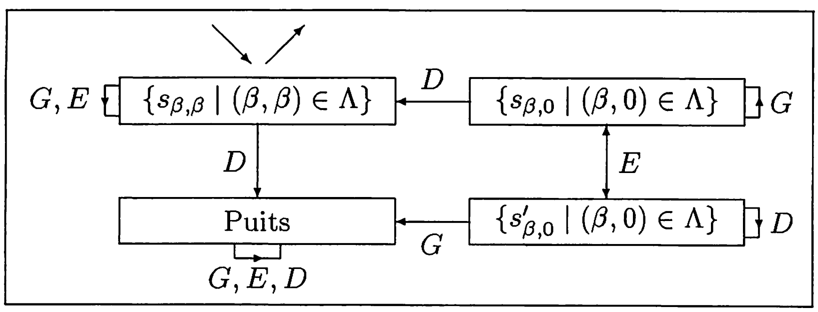

FIG. 3.2: Automate des suites caractéristiques

Les propositions 3.4 et 3.5 complètent le résultat suivant, obtenu indépendamment par D. Crisp, W. Moran, A. Pollington et P. Shiue [37], et par J. Berstel et P. Séébold [17].

Proposition 3.3 *Soit f un morphisme pour lequel il existe deux irrationnels α et δ de $]0,1[$ tels que $f(s_{\alpha,\alpha}) = s_{\delta,\delta}$. Alors f appartient au monoïde $\{E,G\}^*$.*

Preuve. On considère l'automate de la figure 3.2. Les trois premiers états correspondent aux ensembles formés par les suites caractéristiques, les mots de Christoffel positifs d'une part et négatifs d'autre part. Dans le puits, apparaissent les suites sturmiennes n'appartenant à aucune des catégories précédemment citées. Le lemme 3.9 et la proposition 3.1 permettent d'établir que le graphe est correct. On définit un automate, en choisissant le premier état comme étant l'état initial et final. Sur l'alphabet d'entrée $\{E,G,D\}$, il apparaît que le langage reconnu par cet automate est $\{E,G\}^*$. ⋆

Proposition 3.4 *Soit f un morphisme pour lequel il existe deux irrationnels*

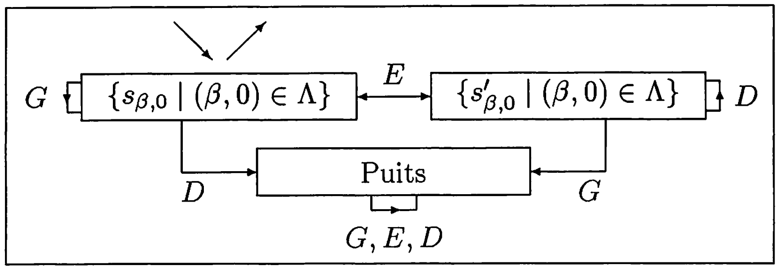

FIG. 3.3: Automate des mots de Christoffel

α et δ de $]0,1[$ tels que $f(s_{\alpha,0}) = s_{\delta,0}$, respectivement $f(s'_{\alpha,0}) = s'_{\delta,0}$. Alors f appartient au langage $\{ED^*EG^*\}^*$, respectivement $\{EG^*ED^*\}^*$.

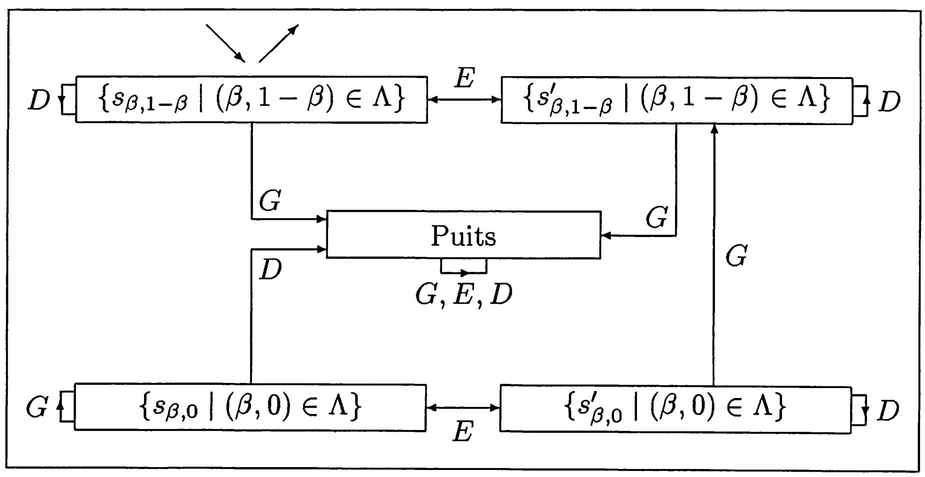

FIG. 3.4: Automate des suites $s_{\beta,1-\beta}$ et $s'_{\beta,1-\beta}$ avec $(\beta, 1-\beta) \in \Lambda$

Proposition 3.5 *Soit f un morphisme pour lequel il existe deux irrationnels α et δ de $]0,1[$ tels que $f(s_{\alpha,1-\alpha}) = s_{\delta,1-\delta}$ ou $f(s'_{\alpha,1-\alpha}) = s'_{\delta,1-\delta}$. Alors f appartient au langage $\{ED^*ED^*\}^*$.*

Preuve de la proposition 3.4. On considère l'automate de la figure 3.3, dont le comportement est égal à $(G+ED^*E)^*$. En le traduisant en termes de morphismes sturmiens, on obtient $\{ED^*EG^*\}^*$. Par construction du graphe, on caractérise ainsi la structure des morphismes qui préservent globalement l'ensemble des mots de Christoffel positifs. La preuve concernant les mots de Christoffel négatifs est identique. $\star$

Preuve de la proposition 3.5. Soit β un irrationnel de $]0,1[$. On recherche les antécédents sturmiens de $s_{\beta,1-\beta}$ par le monoïde de Sturm. On suppose qu'il existe un mot sturmien $x^{(0)}$ tel que $G(x^{(0)}) = s_{\beta,1-\beta}$. Comme $(\beta, 1-\beta) \notin \mathcal{U}$, d'après les propositions 1.5 et 3.1, on obtient $x^{(0)} = s_{\alpha,\rho}$ avec $(\alpha,\rho) \in \Lambda$, d'où

$s_{\frac{\alpha}{\alpha+1},\frac{\rho}{\alpha+1}} = s_{\beta,1-\beta}$ et $\rho = 1$, ce qui est absurde. On considère à présent le cas où il existe un mot sturmien $x^{(1)}$ tel que $D(x^{(1)}) = s_{\beta,1-\beta}$. On a alors $\beta \in]0, \frac{1}{2}[$ et le mot $x^{(1)} = s_{\frac{\beta}{1-\beta},1-\frac{\beta}{1-\beta}}$ convient. Sous l'action du morphisme E, on est amené à étudier les antécédents sturmiens de $s'_{\beta,1-\beta}$ par St. On vérifie

$$D(s'_{\frac{\beta}{1-\beta},1-\frac{\beta}{1-\beta}}) = s'_{\beta,1-\beta} \text{ et } G(s'_{\frac{\beta}{1-\beta},0}) = s'_{\beta,1-\beta}$$

dès que β appartient à $]0, \frac{1}{2}[$. La preuve du lemme 3.9 permet alors de conclure. Grâce à ces différentes propriétés, on construit l'automate déterministe de la figure 3.4. Son comportement, traduit en termes de morphismes sturmiens, est égal au langage $\{ED^*ED^*\}^*$. La fin de la preuve est triviale. $\star$

Remarque. L'étude du comportement des trois automates présentés permet de démontrer le corollaire 3.1, sans avoir recours au théorème 3.1.

On établit maintenant les réciproques des propositions 3.3, 3.4 et 3.5, en utilisant les propriétés des morphismes réguliers obtenues à la section 2.5. Seul le résultat énoncé à la proposition 3.6 est connu.

Proposition 3.6 (Séébold, [99], Théorème 5)
Soit f une substitution appartenant au monoïde $\{E, G\}^*$. Si f engendre un mot sturmien, il s'agit d'une suite caractéristique.

Preuve. Soit x un mot sturmien engendré par f. Soit α la pente de x, prise dans $]0, 1[$. Comme on a $f(x) = x$, il apparaît que le morphisme f transforme tout mot sturmien de pente α en un autre de même pente. De plus, le morphisme f appartient au comportement de l'automate des suites caractéristiques. En résumé, on a $f(s_{\alpha,\alpha}) = s_{\alpha,\alpha}$. D'après la preuve de la proposition 2.9, le morphisme f est régulier et engendre $s_{\alpha,\alpha}$. Par définition des morphismes E et G, on vérifie que $f(0)$ et $f(1)$ commencent par la même lettre. Le morphisme f ne peut donc engendrer qu'un seul mot. On en déduit immédiatement $x = s_{\alpha,\alpha}$. $\star$

Proposition 3.7
Soit f une substitution appartenant à $\{ED^*EG^*\}^*$, respectivement $\{EG^*ED^*\}^*$. Si f engendre un mot sturmien, il s'agit d'un mot de Christoffel positif, respectivement négatif.

Preuve. Soit x un mot sturmien, de pente $\alpha \in]0, 1[$, engendré par un morphisme $f \in \{ED^*EG^*\}^*$. La démarche suivie étant similaire à celle développée pour la proposition précédente, on peut directement affirmer que f est régulier et engendre $s_{\alpha,0}$. Soient m et n deux entiers. On remarque que ED^nEG^m transforme 0 en 01^n et 1 en $(01^n)^m1$. Autrement dit, si $f(1)$ admet la lettre 1 comme préfixe, cela signifie que f appartient à ED^*E. Mais alors f n'est pas régulier, ce qui est absurde. Le seul mot engendré par f est donc $s_{\alpha,0}$. Le cas où f appartient à $\{EG^*ED^*\}^*$ se traite de façon similaire. $\star$

Proposition 3.8 *Soit f une substitution appartenant au monoïde $\{E, D\}^*$. Si f engendre un mot sturmien de pente α alors f engendre $s_{\alpha,1-\alpha}$ et $s'_{\alpha,1-\alpha}$.*

Preuve. Clairement, on peut supposer que le nombre α appartient à $]0,1[$. On montre aussi $f \in Reg(\mathcal{A})$ et $f^2 \in Reg(\mathcal{A})$. De plus, en se référant à l'automate de la figure 3.4, il apparaît $f^2(s_{\alpha,1-\alpha}) = s_{\alpha,1-\alpha}$ et $f^2(s'_{\alpha,1-\alpha}) = s'_{\alpha,1-\alpha}$. On suppose qu'il existe une lettre a telle que $f(a) \in \overline{a}\mathcal{A}^*$. Comme f engendre au moins un mot, on vérifie nécessairement $f(\overline{a}) \in \overline{a}\mathcal{A}^*$ puis $f^2(a) \in \overline{a}\mathcal{A}^*$, ce qui est absurde car f^2 engendre à la fois $s_{\alpha,1-\alpha}$ et $s'_{\alpha,1-\alpha}$. On obtient ainsi $f(0) \in 0\mathcal{A}^+$ et $f(1) \in 1\mathcal{A}^+$ car f est régulier. On en déduit que f engendre deux mots infinis distincts. Il est alors facile de conclure. $\star$

À partir de la définition combinatoire des mots sturmiens, J. Berstel et P. Séébold montrent que si une suite caractéristique x est engendrée par un morphisme, alors les mots $0x$, $1x$, $01x$ et $10x$ sont aussi morphiques [18]. Un peu plus généralement, on obtient :

Proposition 3.9 *Soit α un irrationnel de $]0,1[$. Il suffit qu'un des éléments de $\mathcal{S}_\alpha$ soit engendré par un morphisme, pour qu'ils le soient tous.*

Preuve. Soit x un mot appartenant à $\mathcal{S}_\alpha$. D'après les propositions 2.9 et 3.2, on vérifie que x est engendré par un morphisme si et seulement si α est un nombre de Sturm. $\star$

3.3.3 Résolution complète

Soient ν un irrationnel de $]0,1[$ et x un mot de $\mathcal{S}_\nu$. Si ν n'est pas un nombre de Sturm, seule l'identité satisfait la relation $f(x) = x$. L'alternative est étudiée à la proposition 3.10.

Définition 3.5
Soit α un nombre de Sturm donné sous la forme

$$\alpha = [0, k_n + 1, \overline{k_{n-1}, \ldots, k_2, k_1 + k_n}\,]$$

avec $(k_1, k_n) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}$, ou bien

$$\alpha = [0, 1, k_n, \overline{k_{n-1}, \ldots, k_2, k_1 + k_n}\,]$$

avec $k_1 \in \mathbb{N}^*$. Lorsque l'entier $n \geq 2$ est choisi minimal, on dit que cette représentation de α est primitive.

Proposition 3.10 *Soit α un nombre de Sturm donné sous forme primitive et soit x un mot de $\mathcal{S}_\alpha$. Soit f la substitution associée à x dans l'énoncé de la proposition 3.2. L'ensemble des substitutions, qui laissent le mot x invariant, est le monoïde engendré par f.*

Lemme 3.10 *Soit α un nombre de Sturm. Soit θ une substitution qui laisse fixe un mot de pente α. Selon que la représentation primitive de α est*

$$\alpha = [0, k_n + 1, \overline{k_{n-1}, \ldots, k_2, k_1 + k_n}\,]$$

avec $n \geq 2$ *et* $(k_1, k_n) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}$, *ou bien*

$$\alpha = [0, 1, k_n, \overline{k_{n-1}, \ldots, k_2, k_1 + k_n}\,]$$

avec $n \geq 2$ *et* $k_1 \in \mathbb{N}^*$, *le morphisme* θ *s'écrit comme composée de morphismes de la forme*

$$\{G, D\}^{k_n} E \ldots \{G, D\}^{k_2} E \{G, D\}^{k_1}$$

respectivement

$$E\{G, D\}^{k_n} E \ldots \{G, D\}^{k_2} E \{G, D\}^{k_1} E.$$

Preuve. Clairement, le morphisme θ est sturmien et comporte au moins une occurrence du morphisme d'inversion. Il se décompose donc, pour un certain entier $m \geq 2$, sous la forme

$$\theta = \theta_m E \theta_{m-1} \ldots E \theta_1$$

avec $(\theta_1, \theta_m) \in \{G, D\}^{*2}$ et $\theta_j \in \{G, D\}^+$ pour $2 \leq j \leq m-1$. À tout morphisme σ appartenant à $\{G, D\}^*$, on associe l'entier $|\sigma|$ défini par $\sigma \in \{G, D\}^{|\sigma|}$. On commence par supposer que α est de la première forme énoncée. Par définition même du morphisme θ, les fractions continues

$$[0, k_n + 1, \overline{k_{n-1}, \ldots, k_2, k_1 + k_n}\,]$$

et

$$[0, |\theta_m| + 1, |\theta_{m-1}|, \ldots, |\theta_2|, |\theta_1| + k_n, \overline{k_{n-1}, \ldots, k_2, k_1 + k_n}\,]$$

représentent le même réel.
Ce développement est formel si on a $|\theta_1| = 0 = k_n$. On se place temporairement dans cette hypothèse. Si $m = 2$ alors, par identifications, on a $1 + |\theta_2| + k_{n-1} = 1$, puis $|\theta_2| = 0$ et $\theta = E$, ce qui est absurde. On a donc $m \geq 3$ et les deux fractions continues suivantes sont égales :

$$[0, |\theta_m| + 1, |\theta_{m-1}|, \ldots, |\theta_3|, |\theta_2| + k_{n-1}, k_{n-2}, \ldots, k_1, \overline{k_{n-1}, \ldots, k_1}\,],$$

$$[0, 1, \overline{k_{n-1}, \ldots, k_1}\,].$$

La période étant primitive, on en déduit $|\theta_2| + k_{n-1} = k_{n-1}$, ce qui est à nouveau absurde. On vérifie donc $|\theta_1| + k_n \neq 0$. Comme n est supposé minimal, il existe un entier $\lambda \geq 1$ tel que $m - 1 = \lambda(n-1)$. Par identifications, on obtient :

$$\forall\, c \in \mathbb{N},\ 1 \leq c \leq \lambda,\ \forall\, i \in \mathbb{N},\ 2 \leq i \leq n-1,\ \ |\theta_{(c-1)(n-1)+i}| = k_i,$$

$$\forall\, c \in \mathbb{N},\ 2 \leq c \leq \lambda,\ \ |\theta_{(c-1)(n-1)+1}| = k_1 + k_n,$$

puis $|\theta_m| = k_n$ et $|\theta_1| = k_1$. Ainsi, en utilisant un découpage en blocs adapté, le premier résultat est acquis. Le second s'en déduit immédiatement. En effet, il suffit de rappeler que si on a $\alpha = [0, 1, k_n, \overline{k_{n-1}, \ldots, k_2, k_1 + k_n}\,]$ avec $n \geq 2$ et $k_1 \in \mathbb{N}^*$, l'irrationnel $1 - \alpha$ est de la première forme étudiée. $\star$

Preuve de la proposition 3.10.
On commence par supposer que la représentation primitive de α est égale à $[0, k_n + 1, \overline{k_{n-1}, \ldots, k_2, k_1 + k_n}\,]$ avec $n \geq 2$ et $(k_1, k_n) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Soit g une substitution qui laisse fixe le mot $s_{\alpha,\alpha}$. Grâce à la proposition 3.3, il apparaît que g appartient au monoïde $\{E, G\}^*$. Ainsi, d'après le lemme 3.10, il existe un entier m_g tel que $g = (G^{k_n}E \ldots G^{k_2}EG^{k_1})^{m_g} = (F_{(k_1,\ldots,k_n)}(G,G))^{m_g}$.

Soit h un morphisme tel que $h(s_{\alpha,0}) = s_{\alpha,0}$. D'après la proposition 3.4, on a $h \in \{ED^*EG^*\}^*$. De plus, d'après le lemme 3.10, le morphisme h s'écrit comme composée de morphismes de la forme $\{G,D\}^{k_n}E \ldots \{G,D\}^{k_2}E\{G,D\}^{k_1}$. Si n est impair, on a $h = (F_{(k_1,\ldots,k_n)}(G,D))^{m_h}$ pour un certain entier m_h. Si n est pair, afin de satisfaire la relation $h \in \{ED^*EG^*\}^*$, on remarque que h s'écrit comme composée de morphismes de la forme

$$\{G,D\}^{k_n}E \ldots \{G,D\}^{k_2}E\{G,D\}^{k_1}\ \{G,D\}^{k_n}E \ldots \{G,D\}^{k_2}E\{G,D\}^{k_1}.$$

Et dans ce cas, la substitution h est une puissance de

$$F_{(k_1,\ldots,k_n)}(D,G)F_{(k_1,\ldots,k_n)}(G,D).$$

La preuve concernant les mots de Christoffel négatifs est similaire. Pour les suites $s_{\alpha,1-\alpha}$ et $s'_{\alpha,1-\alpha}$, on utilise la proposition 3.5. $\star$

Remarque. Pour terminer cette section, on vérifie la cohérence de la propriété obtenue, au sujet des suites caractéristiques, avec celle énoncée par Crisp, Moran, Pollington et Shiue, dans l'article [37]. Ils définissent, pour tout entier $k \geq 0$, les morphismes $H_k\ :\ 0 \mapsto 1,\ 1 \mapsto 1^k0$ et $G_k\ :\ 0 \mapsto 1^k0,\ 1 \mapsto 1$. Leur principal résultat est le suivant : "Soit α un irrationnel de $]0,1[$. Le mot $s_{\alpha,\alpha}$ est un point fixe d'une substitution f non triviale si et seulement si on a $\alpha = [0, a_1, \overline{a_2, \ldots, a_m}\,]$ avec $a_m + 1 \geq a_1 \geq 2$, ou bien $\alpha = [0, 1, a_2, \overline{a_3, \ldots, a_m}\,]$ avec $a_m \geq a_2$. De plus, si l'entier m est minimal alors f est une puissance de

$$EH_{a_1-1}H_{a_2} \ldots H_{a_{m-1}}G_{a_m+1-a_1}E$$

dans le premier cas, et de

$$H_{a_2} \ldots H_{a_{m-1}}G_{a_m-a_2}$$

dans le second."
Il est facile de montrer que ces développements en fraction continue caractérisent les nombres de Sturm. De plus, si $\alpha = [0, a_1, \overline{a_2, \ldots, a_m}\,]$ avec $a_m + 1 \geq a_1 \geq 2$, on pose $n = m$, $k_n = a_1 - 1$, $k_1 = a_m - a_1 + 1$ et $k_j = a_{m+1-j}$ pour tout entier j compris entre 2 et $n-1$. Comme on a $H_k = EG^k$ et $G_k = EG^kE$ pour tout entier k positif, on obtient

$$EH_{a_1-1}H_{a_2} \ldots H_{a_{m-1}}G_{a_m+1-a_1}E = G^{k_n}EG^{k_{n-1}} \ldots EG^{k_2}EG^{k_1}$$

ce qui est conforme au résultat annoncé. Si $\alpha = [0, 1, a_2, \overline{a_3, \ldots, a_m}\ ]$ avec $a_m > a_2$, on pose $n = m - 1$, $k_n = a_2$, $k_1 = a_m - a_2$, et $k_j = a_{m+1-j}$ pour tout entier j pris entre 2 et $n - 1$. On en déduit

$$H_{a_2} \ldots H_{a_{m-1}} G_{a_m - a_2} = EG^{k_n} \ldots EG^{k_2} EG^{k_1} E,$$

ce qui est bien cohérent. Il ne reste plus qu'à étudier le cas où

$$\alpha = [0, 1, a_2, \overline{a_3, \ldots, a_m}\ ]$$

avec $a_m = a_2$, c'est-à-dire $\alpha = [0, 1, \overline{a_2, \ldots, a_{m-1}}\ ]$. On pose $n = m - 1$, $k_n = 0$, $k_1 = a_{m-1}$, et $k_j = a_{m-j}$ pour tout entier j pris entre 2 et $n - 1$. Et on vérifie

$$H_{a_2} \ldots H_{a_{m-1}} G_{a_m - a_2} = EG^{k_{n-1}} \ldots EG^{k_1} = G^{k_n} EG^{k_{n-1}} \ldots EG^{k_1}.$$

Remarque. Certains auteurs étudient les propriétés d'invariance des mots sturmiens, par les automorphismes du groupe libre défini sur l'alphabet $\{0, 1\}$. En particulier, T. C. Brown montre que la suite $s_{\alpha,\alpha}$ est point fixe d'un tel morphisme, différent de l'identité, si et seulement si α est un irrationnel quadratique [27]. D'après S. Ito et S. Yasutomi, si x est un irrationnel quadratique et si y appartient au corps $\mathbb{Q}(x)$ alors la suite $s_{x,y}$ est point fixe d'un automorphisme non trivial [59]. La réciproque est donnée par Y. Hara-Mimachi et S. Ito [53].

3.4 Suites admissibles

On poursuit l'étude des propriétés d'invariance des mots sturmiens en mettant l'accent sur une classe particulière de suites dont l'intercept est une homographie de la pente. Désormais n désigne un entier supérieur ou égal à deux.

Définition 3.6 *Soit*

$$\mathcal{C}(n) = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 \le a + b \le n,\ 0 \le a \le n - 1\} \setminus \{(0, n)\}.$$

On note $\mathcal{L}(a, b, n)$ l'ensemble des suites sturmiennes x pour lesquelles il existe un irrationnel α de $]0, 1[$ tel que $x = s_{\alpha, \frac{a}{n} + \frac{b}{n}\alpha}$ avec $(a, b) \in \mathcal{C}(n)$.

Soit $\mathcal{L}(n) = \bigcup_{(a,b) \in \mathcal{C}(n)} \mathcal{L}(a, b, n)$. Les mots de $\mathcal{L}(n)$ sont dits n-admissibles.

Remarque. Soit α un irrationnel de $]0, 1[$. Pour tout couple d'entiers (a, b) de $\mathcal{C}(n)$, on a $(\alpha, \frac{a}{n} + \frac{b}{n}\alpha) \in \mathcal{U}$.

L'objet de cette section est de montrer le théorème suivant :

Théorème 3.2 *Les suites sturmiennes n-admissibles sont des points fixes de substitutions non triviales si et seulement si leur pente est un nombre de Sturm.*

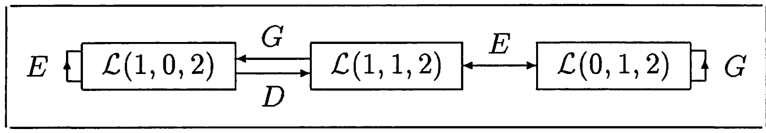

FIG. 3.5: Graphe $\zeta(2)$

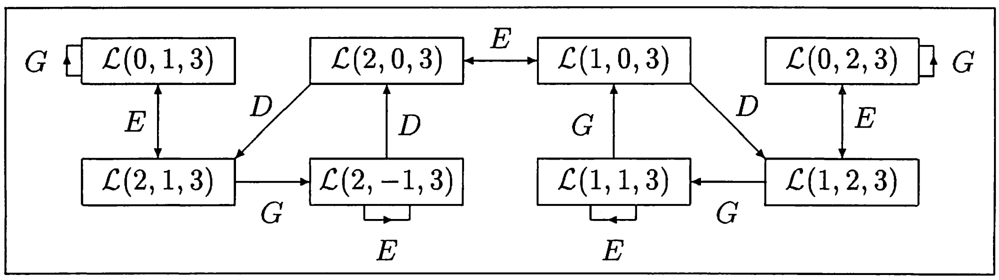

FIG. 3.6: Graphe $\zeta(3)$

Afin d'établir la preuve, certains préliminaires sont nécessaires. À l'entier n, on associe un graphe, noté $\zeta(n)$, dont les états sont les ensembles $\mathcal{L}(a,b,n)$ pour (a,b) appartenant à $C(n)$. Les lemmes 3.11 à 3.14 décrivent le système de transitions, sur l'alphabet $\{E,G,D\}$, entre ces n^2-1 différents états. On présente les graphes $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$ en exemple.

Lemme 3.11 *Soit (a,b) un élément de $C(n)$. Un et un seul des morphismes G et D transforme $\mathcal{L}(a,b,n)$ en un sous-ensemble d'un état de $\zeta(n)$.*

Preuve. Soit α un irrationnel de $]0,1[$. On considère la suite $s_{\alpha,\frac{a}{n}+\frac{b}{n}\alpha}$. Dans l'hypothèse où $(a,b)\in C(n)$, on remarque $0<a+b\alpha<n$, ce qui permet d'appliquer les deux formules

$$G(s_{\alpha,\frac{a}{n}+\frac{b}{n}\alpha}) = s_{\frac{\alpha}{\alpha+1},\frac{a}{n}+\frac{b-a}{n}\frac{\alpha}{\alpha+1}} \text{ et } D(s_{\alpha,\frac{a}{n}+\frac{b}{n}\alpha}) = s_{\frac{\alpha}{\alpha+1},\frac{a}{n}+\frac{b-a+n}{n}\frac{\alpha}{\alpha+1}}.$$

Par abus de langage, on dit que G et D conservent la partie rationnelle de l'intercept des suites sturmiennes n-admissibles. Il est très facile de montrer qu'on a $(a,b-a)\in C(n)$ si $b\geq 1$ et $(a,b-a+n)\in C(n)$ si $b\leq 0$. Si on a simultanément $(a,b-a)$ et $(a,b-a+n)$ dans $C(n)$, alors pour tout irrationnel β de $]0,1[$, on vérifie $a+(b-a+n)\beta<n$ et $a+(b-a)\beta>0$. En faisant tendre β vers 1^-, on obtient $b=0$ puis $(a,-a)\in C(n)$, ce qui est absurde. $\star$

Lemme 3.12 *Soit $(a,b)\in C(n)$. Il existe un chemin de longueur majorée par n, écrit sur l'alphabet $\{G,D\}$, dans le graphe $\zeta(n)$, dont l'origine et l'extrémité coïncident avec $\mathcal{L}(a,b,n)$.*

Preuve. On part de l'état $\mathcal{L}(a,b,n)$. D'après le lemme 3.11, on peut construire pas à pas un chemin à travers les états de $\zeta(n)$. De plus, d'après la définition de $C(n)$, il existe au plus n suites sturmiennes n-admissibles dont la partie rationnelle de l'intercept est $\frac{a}{n}$: exactement $n-1$ si a est nul, et n dans le cas contraire. Comme G et D conservent ce terme, on réalise une boucle dans $\zeta(n)$, au bout d'au plus n étapes. On montre que le premier état apparaissant à deux reprises dans un tel chemin est $\mathcal{L}(a,b,n)$. En raisonnant par l'absurde, il existe des entiers c_1, c_2 et c_3 tels que les couples (a,c_1), (a,c_2) et (a,c_3) appartiennent à $\mathcal{C}(n)$, et vérifient le schéma suivant :

$$\boxed{\mathcal{L}(a,c_1,n)} \xrightarrow{G} \boxed{\mathcal{L}(a,c_2,n)} \xleftarrow{D} \boxed{\mathcal{L}(a,c_3,n)}$$

On en déduit $(a,c_1-a)=(a,c_2)=(a,c_3-a+n)$ et $c_1=c_3+n$. Autrement dit, les couples (a,c_3) et (a,c_3+n) sont des éléments de $\mathcal{C}(n)$. En particulier, on a $a+c_3\geq 1$ et $a+c_3+n\leq n$, ce qui amène la contradiction cherchée. On a donc construit un chemin, de longueur majorée par n, qui boucle sur $\mathcal{L}(a,b,n)$. $\star$

Remarque. En utilisant les transitions sur l'alphabet $\{G,D\}$, on peut ainsi regrouper les états de $\zeta(n)$ en différents cycles deux à deux disjoints. En effet, un état commun serait un état d'où partiraient deux transitions sur $\{G,D\}$, ce qui est absurde.

Lemme 3.13 *Le morphisme d'inversion E laisse $\mathcal{L}(n)$ globalement invariant.*

Preuve. Soit $(a,b)\in\mathcal{C}(n)$. Clairement, on a $(n-a-b,b)\in\mathcal{C}(n)$. On remarque aussitôt que E transforme l'état $\mathcal{L}(a,b,n)$ en $\mathcal{L}(n-a-b,b,n)$. $\star$

Lemme 3.14 *Entre deux cycles de $\zeta(n)$, il existe au plus une liaison assurée par le morphisme E.*

Preuve. Soient deux couples d'entiers (a,b) et (a',b') de $\mathcal{C}(n)$, tels que $\mathcal{L}(a,b,n)$ et $\mathcal{L}(a',b',n)$ appartiennent à un même cycle. On a déjà remarqué qu'alors a est égal à a'. Le morphisme E transforme $\mathcal{L}(a,b,n)$ en $\mathcal{L}(n-a-b,b,n)$ et $\mathcal{L}(a,b',n)$ en $\mathcal{L}(n-a-b',b',n)$. Pour que ces deux états soient des composantes d'un même cycle, il faut que $n-a-b'$ soit égal à $n-a-b$, autrement dit $b=b'$, ce qui achève la preuve. $\star$

Remarque. En particulier, il existe au plus un état par cycle qui reste fixe sous l'action du morphisme E.

Définition 3.7 *On pose $\Omega(1)=\{G,D\}^*$. À l'entier n, on associe l'ensemble de morphismes $\Omega(n)$ égal à :*

$$\{\delta_n E\delta_{n-1}\ldots E\delta_1 \mid (\delta_1,\delta_n)\in\{G,D\}^{*2} \text{ et } \forall i\in\mathbb{N}, 2\leq i\leq n-1, \delta_i\in\{G,D\}^+\}.$$

Définition 3.8 *Soit k un entier non nul.*
Soient $\gamma=\delta_k E\delta_{k-1}\ldots E\delta_1$ et $\gamma'=\delta'_k E\delta'_{k-1}\ldots E\delta'_1$ des morphismes appartenant à $\Omega(k)$. On dit que γ et γ' sont Ω-équivalents si, pour tout entier i compris entre 1 et k, on a $||\delta_i||=||\delta'_i||$.

Définition 3.9 *On numérote linéairement les différents états de $\zeta(n)$. Soit un entier i compris entre 1 et n^2-1. On note $\mathcal{M}(i)$ l'ensemble des morphismes appartenant à $\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}\Omega(k)$, pouvant être lus sur le graphe $\zeta(n)$, à partir du i-ième sommet.*

Lemme 3.15 *Deux morphismes Ω-équivalents ont la même action sur les pentes des suites sturmiennes.*

Preuve. Soient f et f' des morphismes appartenant à $\{G, D\}^*$. Comme on a $GD = DG$, il existe un quadruplet d'entiers (m, n, m', n') tel que $f = G^m D^n$ et $f' = G^{m'} D^{n'}$. On en déduit $||f|| = m+n+2$ et $||f'|| = m'+n'+2$. Si $||f|| = ||f'||$, la matrice de Raney associée à f et f' est L^{m+n}. Il est alors facile de conclure. ⋆

Lemme 3.16 *Soit i un entier compris entre 1 et $n^2 - 1$. Dans chaque classe de morphismes Ω-équivalents, il existe un et un seul représentant qui appartient à $\mathcal{M}(i)$.*

Preuve. On utilise le lemme 3.11 qui assure l'existence et l'unicité d'une transition sur l'alphabet $\{G, D\}$ à partir d'un sommet donné, et le lemme 3.13. ⋆

Preuve du théorème 3.2. On commence par fixer quelques notations. Soit T la fonction de transition associée au graphe $\zeta(n)$. On numérote les différents états de $\zeta(n)$ sous la forme ξ_i, pour i variant de 1 à n^2-1. Soit un entier $m \geq 2$. À tout élément ν de $\Omega(m)$, on associe son représentant ν_c dans la catégorie $\mathcal{M}(c)$, pour tout entier c compris entre 1 et n^2-1. On affirme que pour tout couple d'entiers (i, j) choisis entre 1 et $n^2 - 1$, si $T(\xi_i, \nu_i) = \xi_j$ alors il n'existe pas d'entier d, avec $1 \leq d \leq n^2 - 1$ et $d \neq i$, tel que $T(\xi_d, \nu_d) = \xi_j$. On établit ce résultat par récurrence. Soit $\gamma = \delta_2 E \delta_1$ un élément de $\Omega(2)$. On note $\gamma_c = \delta_2^{(c)} E \delta_1^{(c)}$ son représentant dans la c-ième classe $\mathcal{M}(c)$ avec $1 \leq c \leq n^2 - 1$. Soit (j, d_1, d_2) un triplet d'entiers pris entre 1 et $n^2 - 1$. Si le schéma suivant est réalisé, on montre que d_1 et d_2 sont nécessairement égaux :

$$\boxed{\xi_{d_1}} \xrightarrow{\delta_2^{(d_1)} E \delta_1^{(d_1)}} \boxed{\xi_j} \xleftarrow{\delta_2^{(d_2)} E \delta_1^{(d_2)}} \boxed{\xi_{d_2}}$$

Dans chaque cycle Γ, de longueur l, on choisit arbitrairement un état de départ Γ_1, puis on numérote les autres éléments de Γ sous la forme Γ_i, pour i variant de 2 à l, selon leur ordre d'apparition dans le cycle. Comme pour la preuve du lemme 3.10, on introduit la notation suivante : à tout morphisme σ de $\{G, D\}^*$, on associe l'entier $|\sigma|$ défini par $\sigma \in \{G, D\}^{|\sigma|}$.

On commence par supposer que les trois états ξ_{d_1}, ξ_{d_2} et ξ_j appartiennent au même cycle Γ de longueur l. Par la convention choisie, il existe des entiers t et t' compris entre 1 et l tels que $\xi_{d_1} = \Gamma_t$ et $\xi_{d_2} = \Gamma_{t'}$. On suppose qu'il n'existe pas d'état de Γ laissé invariant par le morphisme E. Alors sous l'action de tout morphisme Ω-équivalent à γ, on quitte ce cycle, ce qui est contraire à l'hypothèse de base. En se référant au lemme 3.14, il existe un et un seul état de Γ, noté Γ_u avec $1 \leq u \leq l$, qui reste invariant sous l'action du morphisme E. On a ainsi $T(\Gamma_t, \delta_1^{(d_1)}) = \Gamma_u = T(\Gamma_{t'}, \delta_1^{(d_2)})$. Puis, on a

$$|\delta_1| \equiv (u - t) \pmod{l} \text{ et } |\delta_1| \equiv (u - t') \pmod{l}.$$

On conclut $t = t'$ et $d_1 = d_2$.

On suppose maintenant que ξ_{d_1} et ξ_j appartiennent au même cycle $\Gamma^{(1)}$, et ξ_{d_2} à un cycle différent, noté $\Gamma^{(2)}$. Soient $l^{(1)}$ et $l^{(2)}$ les longueurs respectives de ces deux cycles. Il existe donc des entiers t et t' de l'ensemble $\{1,\ldots,l^{(1)}\}$, tels que $\xi_{d_1} = \Gamma_t^{(1)}$ et $\xi_j = \Gamma_{t'}^{(1)}$. Il existe de plus un et un seul état de $\Gamma^{(1)}$, noté $\Gamma_u^{(1)}$, qui reste invariant sous l'action de E. On a donc $T(\Gamma_t^{(1)}, \delta_1^{(d_1)}) = \Gamma_u^{(1)}$, $T(\Gamma_u^{(1)}, E) = \Gamma_u^{(1)}$ et $|\delta_2| \equiv (t'-u) \pmod{l^{(1)}}$. En outre, il existe un entier v, avec $1 \le v \le l^{(1)}$, tel que $T(\xi_{d_2}, E\delta_1^{(d_2)}) = \Gamma_v^{(1)}$. On a $|\delta_2| \equiv (t'-v) \pmod{l^{(1)}}$, puis $u = v$ et $T(\xi_{d_2}, E\delta_1^{(d_2)}) = \Gamma_u^{(1)} = T(\xi_{d_2}, \delta_1^{(d_2)}) \in \Gamma^{(2)}$, ce qui est absurde car les deux cycles sont disjoints.

Le cas où seuls ξ_{d_2} et ξ_j appartiennent au même cycle se traite de façon similaire.

On suppose à présent qu'il existe deux cycles distincts, de longueurs respectives $l^{(1)}$ et $l^{(2)}$, notés $\Gamma^{(1)}$ et $\Gamma^{(2)}$, tels que ξ_{d_1} et ξ_{d_2} appartiennent à $\Gamma^{(1)}$ et ξ_j à $\Gamma^{(2)}$. Il existe des entiers t et u de l'ensemble $\{1,\ldots,l^{(1)}\}$ tels que $\xi_{d_1} = \Gamma_t^{(1)}$ et $\xi_{d_2} = \Gamma_u^{(1)}$. D'après le lemme 3.14, il existe un entier v, compris entre 1 et $l^{(1)}$, tel que l'on a $T(\xi_{d_1}, \delta_1^{(d_1)}) = T(\xi_{d_2}, \delta_1^{(d_2)}) = \Gamma_v^{(1)}$. On en déduit

$$|\delta_1| \equiv (v-t) \pmod{l^{(1)}} \text{ et } |\delta_1| \equiv (v-u) \pmod{l^{(1)}},$$

d'où $u = t$ et $d_1 = d_2$.

Le dernier cas revient à supposer que les trois états ξ_{d_1}, ξ_{d_2} et ξ_j appartiennent à des cycles différents, respectivement notés $\Gamma^{(1)}$, $\Gamma^{(2)}$ et $\Gamma^{(3)}$, de longueurs $l^{(1)}$, $l^{(2)}$ et $l^{(3)}$. Plus précisément, il existe des entiers t, u et t' vérifiant $1 \le t \le l^{(1)}$, $1 \le u \le l^{(2)}$ et $1 \le t' \le l^{(3)}$, tels que $\xi_{d_1} = \Gamma_t^{(1)}$, $\xi_{d_2} = \Gamma_u^{(2)}$ et $\xi_j = \Gamma_{t'}^{(3)}$. On établit l'existence d'entiers v et w, compris entre 1 et $l^{(3)}$, tels que $T(\Gamma_t^{(1)}, E\delta_1^{(d_1)}) = \Gamma_v^{(3)}$ et $T(\Gamma_u^{(2)}, E\delta_1^{(d_2)}) = \Gamma_w^{(3)}$. De $|\delta_2| \equiv (t'-v) \pmod{l^{(3)}}$ et $|\delta_2| \equiv (t'-w) \pmod{l^{(3)}}$, on déduit $v = w$, puis $T(\Gamma_t^{(1)}, \delta_1^{(d_1)}) = T(\Gamma_u^{(2)}, \delta_1^{(d_2)}) \in \Gamma^{(1)} \cap \Gamma^{(2)}$, ce qui est absurde.

Dans tous les cas, on a bien démontré le résultat énoncé pour les morphismes appartenant à $\Omega(2)$. On suppose l'hypothèse de récurrence vérifiée pour les morphismes de $\Omega(m)$, où m est un entier supérieur ou égal à deux. On cherche à établir la propriété au rang $m+1$. Soit γ un élément de $\Omega(m+1)$, écrit sous la forme $\gamma = \delta_{m+1}E\theta$ avec $\theta \in \Omega(m)$. On note $\gamma_c = \delta_{m+1}^{(c)}E\theta_c$ le représentant de γ dans la c-ième classe $\mathcal{M}(c)$, avec $1 \le c \le n^2-1$. On considère le schéma suivant, où c_1, c_2, d_1, d_2 et j sont des entiers compris entre 1 et n^2-1 :

$$\boxed{\xi_{c_1}} \xrightarrow{\theta_{c_1}} \boxed{\xi_{d_1}} \xrightarrow{\delta_{m+1}^{(c_1)}E} \boxed{\xi_j} \xleftarrow{\delta_{m+1}^{(c_2)}E} \boxed{\xi_{d_2}} \xleftarrow{\theta_{c_2}} \boxed{\xi_{c_2}}$$

Comme le morphisme $\delta_{m+1}^{(c_1)}E$ appartient à $\Omega(2)$, d'après l'étude précédente, on a $d_1 = d_2$. Puis, en utilisant l'hypothèse de récurrence au rang m pour θ_{c_1} et θ_{c_2}, on conclut $c_1 = c_2$, ce qui établit le résultat au rang $m+1$, et achève cette partie de la preuve.

Soit $\alpha = [0, k_{n'} + 1, \overline{k_{n'-1}, k_{n'-2}, \ldots, k_2, k_1 + k_{n'}}\ ]$ avec $(k_1, k_{n'}) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $n' \geq 2$. Soit $\gamma = \delta_{n'} E \delta_{n'-1} \ldots E \delta_1$, avec $\delta_i \in \{G, D\}^{k_i}$ pour $1 \leq i \leq n'$, un élément de $\Omega(n')$. En utilisant les matrices de Raney, il apparaît que tout morphisme Ω-équivalent à γ transforme un mot sturmien de pente α en un autre de même pente.

Soit (a, b) un élément de $\mathcal{C}(n)$. Clairement, il existe une famille d'entiers compris entre 1 et $n^2 - 1$, que l'on note $(d_i)_{i \in \mathbb{N}}$, définie par $\xi_{d_0} = \mathcal{L}(a, b, n)$ ainsi que $\xi_{d_{i+1}} = T(\xi_{d_i}, \gamma_{d_i})$ pour $i \in \mathbb{N}$. On affirme qu'il existe un entier $j \geq 1$ tel que $d_j = d_0$. En effet, un chemin fermé, sur un état quelconque, se construit de cette façon en au plus $n^2 - 1$ étapes, puisqu'il est impossible d'accéder à un état donné de $\zeta(n)$ par deux morphismes Ω-équivalents partant de deux états distincts. En résumé, le morphisme $\gamma_{d_{j-1}} \cdots \gamma_{d_0}$ transforme la suite $s_{\alpha, \frac{a}{n} + \frac{b}{n}\alpha}$ en un mot sturmien appartenant encore à l'état $\mathcal{L}(a, b, n)$. Mais ce morphisme préserve aussi la pente de $s_{\alpha, \frac{a}{n} + \frac{b}{n}\alpha}$. Autrement dit, à tout couple (a, b) de $\mathcal{C}(n)$, on peut associer un morphisme sturmien non trivial qui laisse fixe la suite $s_{\alpha, \frac{a}{n} + \frac{b}{n}\alpha}$. Ce résultat est en particulier vérifié pour les mots de l'état $\mathcal{L}(n - a - b, b, n)$.

D'après le théorème 3.1, on doit encore étudier le cas où α est un irrationnel de la forme :

$$\alpha = [0, 1, k_{n'}, \overline{k_{n'-1}, \ldots, k_2, k_1 + k_{n'}}\ ]$$

avec $n' \geq 2$ et $k_1 \in \mathbb{N}^*$.
Le morphisme E transforme $s_{\alpha, \frac{a}{n} + \frac{b}{n}\alpha}$ en $s_{1-\alpha, \frac{n-a-b}{n} + \frac{b}{n}(1-\alpha)}$. Ce mot appartient à l'état $\mathcal{L}(n - a - b, b, n)$. Or $1 - \alpha$ est de la forme précédemment étudiée. Il existe donc un morphisme sturmien θ non trivial tel que $E\theta E(s_{\alpha, \frac{a}{n} + \frac{b}{n}\alpha}) = s_{\alpha, \frac{a}{n} + \frac{b}{n}\alpha}$. ⋆

On généralise la propriété énoncée au théorème 3.2 en introduisant l'ensemble $\mathcal{C}'(n)$:

Définition 3.10 *On pose*

$$\mathcal{C}'(n) = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leq a + b \leq n,\ 0 \leq a \leq n\} \setminus \{(n, 0)\}.$$

Remarque. Les couples d'entiers relatifs de $\mathcal{C}'(n)$ sont exactement les couples (a, b) de $\mathbb{Z}^2$ tels que $\frac{a}{n} + \frac{b}{n}\alpha$ appartient à $[0, 1[$ pour tout irrationnel α de $]0, 1[$. De plus, le cardinal de $\mathcal{C}'(n)$ est égal à $n^2 + 2n$.

Corollaire 3.2 *Soient α un irrationnel de $]0, 1[$ et (a, b) un couple de $\mathcal{C}'(n)$. Les mots $s_{\alpha, \frac{a}{n} + \frac{b}{n}\alpha}$ et $s'_{\alpha, \frac{a}{n} + \frac{b}{n}\alpha}$ sont des points fixes de substitutions non triviales si et seulement si leur pente α est un nombre de Sturm.*

Preuve. Il suffit d'établir la démonstration pour les couples d'entiers relatifs (a, b) de $\mathcal{C}'(n)$ n'appartenant pas à $\mathcal{C}(n)$. On remarque que l'ensemble $\mathcal{C}'(n) \setminus \mathcal{C}(n)$ est égal à :

$$\{(0,0),(0,n),(n,-n)\} \cup \{(k,-k) \mid 1 \leq k \leq n-1\} \cup \{(n,-k) \mid 1 \leq k \leq n-1\}.$$

Dans un premier temps, on ne considère que les suites issues de l'application s. Les mots associés aux couples $(0,0)$, $(0,n)$ et $(n,-n)$ sont étudiés à la proposition 3.2. Soit un entier k compris entre 1 et $n-1$. Les suites, de pente α, associées aux couples $(k,-k)$ et $(n,-k)$ sont égales à $s_{\alpha,\frac{k}{n}-\frac{k}{n}\alpha}$ et $s_{\alpha,1-\frac{k}{n}\alpha}$. On construit le graphe présenté page 54, dont la "partie droite" est une composante de $\zeta(n)$. En effet, il est facile de vérifier que les couples $(k,0)$, $(k,n-k)$, $(0,n-k)$ et $(k,n-2k)$ appartiennent à $\mathcal{C}(n)$. Il suffit alors de remarquer la symétrie du graphe pour affirmer que les rôles des suites $s_{\alpha,\frac{k}{n}-\frac{k}{n}\alpha}$ et $s_{\alpha,\frac{k}{n}+\frac{n-k}{n}\alpha}$ d'une part, puis $s_{\alpha,1-\frac{k}{n}\alpha}$ et $s_{\alpha,\frac{n-k}{n}\alpha}$ d'autre part, s'échangent.

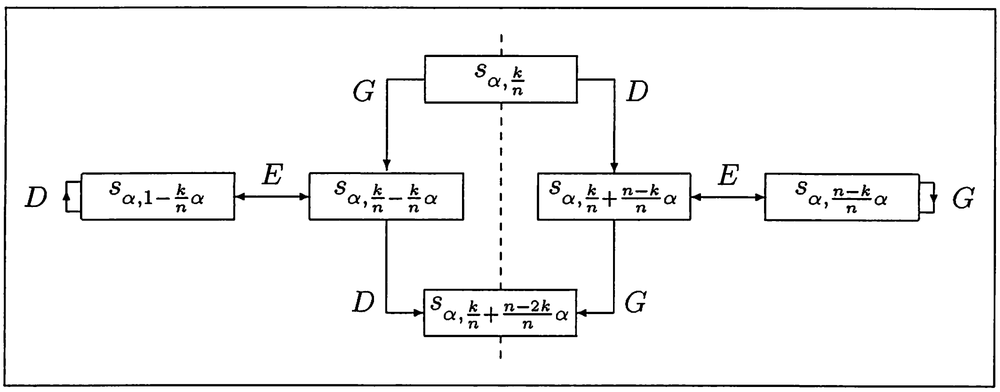

FIG. 3.7: Extension du graphe $\zeta(n)$

À présent, on considère les mots sturmiens issus de l'application s'. Les seuls couples (a,b) de $\mathcal{C}'(n)$ pour lesquels on a $(\alpha, \frac{a}{n}+\frac{b}{n}\alpha) \notin \mathcal{U}$ sont $(0,0)$ et $(n,-n)$. Les suites $s'_{\alpha,0}$ et $s'_{\alpha,1-\alpha}$ sont traitées à la proposition 3.2. Dans tous les autres cas, le résultat devient trivial. $\star$

Désormais, on cherche à préciser la structure du graphe $\zeta(n)$.

Lemme 3.17 *Soit a un entier compris entre 0 et $n-1$. Soit b un entier tel que $(a,b) \in \mathcal{C}(n)$. Il existe un chemin de longueur $\dfrac{n}{pgcd(a,n)}$, écrit sur l'alphabet $\{G,D\}$, dans le graphe $\zeta(n)$, dont l'origine et l'extrémité coïncident avec l'état $\mathcal{L}(a,b,n)$. Les états rencontrés sont deux à deux distincts.*

Preuve. Soit $\Gamma_{a,b,n}$ le cycle de longueur minimale construit sur l'état $\mathcal{L}(a,b,n)$. Les entiers u et v désignent respectivement le nombre d'occurrences des lettres G et D dans ce cycle. Soit $\gamma = G^u D^v$. Ce morphisme transforme l'état $\mathcal{L}(a,b,n)$ en $\mathcal{L}(a, b-(u+v)a+nv, n)$. Par invariance, on vérifie $(u+v)a = nv$ et clairement $u \neq 0$. Soit $d = pgcd(a,n)$. On note a_1 et n_1 les entiers définis par $a_1 = \frac{a}{d}$ et $n_1 = \frac{n}{d}$. On remarque alors $(u+v)a_1 = n_1 v$ et a_1 divise v. Soit $\gamma_1 = G^{n_1-a_1}D^{a_1}$.

Ce morphisme laisse $\mathcal{L}(a,b,n)$ invariant car $na_1 - n_1 a = 0$. Comme le rapport $\frac{a_1}{n_1-a_1}$ est égal à $\frac{v}{u}$, il existe un morphisme Ω-équivalent à γ_1, auquel on peut associer un cycle sur le graphe $\zeta(n)$. La fraction $\frac{a_1}{n_1-a_1}$ étant irréductible, on a même $\gamma_1 = \gamma$, d'où $v = a_1$ et $u = n_1 - a_1$. Finalement la longueur du cycle $\Gamma_{a,b,n}$ est égale à n_1. Le cycle $\Gamma_{a,b,n}$ étant choisi minimal, les états rencontrés sont bien deux à deux distincts. $\star$

Proposition 3.11 *En notant Φ la fonction d'Euler, le graphe $\zeta(n)$ se décompose en $n-1$ cycles de longueur 1 et $d \times \Phi(\frac{n}{d})$ cycles de longueur $\frac{n}{d}$, pour tout diviseur d de n, non égal à n.*

Preuve. Soit $(a,b) \in \mathcal{C}(n)$. Soit $\Gamma_{a,b,n}$ le cycle minimal construit sur l'état $\mathcal{L}(a,b,n)$. D'après le lemme précédent, la longueur de $\Gamma_{a,b,n}$ vaut 1 si et seulement si a est nul. Le nombre de cycles de longueur 1 est donc égal au nombre de couples admissibles dont la première composante est nulle, soit $n-1$. On suppose désormais que a est compris entre 1 et $n-1$. Il existe exactement n couples de $\mathcal{C}(n)$ dont la première composante est a, donc $pgcd(a,n)$ cycles distincts. Soit d un diviseur de n, $d \neq n$. On compte finalement $\sum_{1 \leq i \leq n-1,\ pgcd(i,n)=d} pgcd(i,n)$ cycles de longueur $\frac{n}{d}$, c'est-à-dire $d \times \sum_{1 \leq i \leq n-1,\ pgcd(i,n)=d} 1$, d'où le résultat énoncé avec la fonction d'Euler. Pour vérifier qu'on obtient bien ainsi les n^2-1 états qui composent $\zeta(n)$, il suffit de remarquer

$$(n-1) + \sum_{d \mid n,\ d \neq n} \left(d \times \Phi\left(\frac{n}{d}\right) \times \frac{n}{d}\right) = n - 1 + n(n - \Phi(1)) = n - 1 + n(n-1). \star$$

Définition 3.11 *Soit $\mathcal{L}(a,b,n)$ un état de $\zeta(n)$. L'indice de $\mathcal{L}(a,b,n)$ est le plus grand commun diviseur des entiers a, b et n.*

Lemme 3.18 *Il existe une partition de $\zeta(n)$ selon le classement en indices de ses états.*

Preuve. Soit $\mathcal{L}(a,b,n)$ un élément de $\mathcal{L}(n)$. Le résultat énoncé au lemme 3.11 permet d'affirmer que soit $(a, b-a)$ soit $(a, b-a+n)$ appartient à $\mathcal{C}(n)$. Comme

$$pgcd(a,b,n) = pgcd(a, b-a, n) = pgcd(a, b-a+n, n),$$

il est clair que les morphismes D et G ne modifient pas l'indice des états sur lesquels ils agissent. De plus, comme E transforme $\mathcal{L}(a,b,n)$ en $\mathcal{L}(n-a-b,b,n)$, il est facile de conclure. $\star$

Proposition 3.12 *Le graphe $\zeta(n)$ est connexe si et seulement si n est premier.*

Preuve. On suppose que n est égal à un nombre premier p. Le graphe, présenté page 56, reflète la structure générale de $\zeta(p)$. Soit k un entier compris entre 1 et $p-1$. D'après le lemme 3.17, à partir de l'état $\mathcal{L}(k, p-k, p)$, on construit un

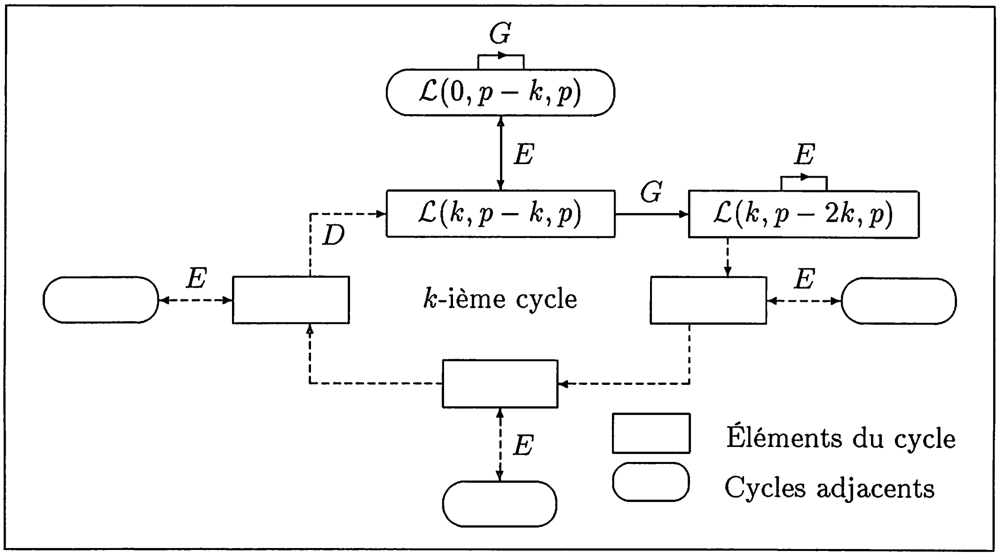

FIG. 3.8: Graphe $\zeta(p)$ avec p premier

cycle $\mathcal{C}^{(k)}$, de longueur p, qui passe notamment par l'état $\mathcal{L}(k, p-2k, p)$. Soit T la fonction de transition de $\zeta(p)$. En particulier, on a

$$T(\mathcal{L}(k, p-k, p), E) = \mathcal{L}(0, p-k, p)$$

ainsi que

$$T(\mathcal{L}(0, p-k, p), G) = \mathcal{L}(0, p-k, p)$$

et

$$T(\mathcal{L}(k, p-2k, p), E) = \mathcal{L}(k, p-2k, p).$$

En faisant varier k entre 1 et $p-1$, on retrouve ainsi les p^2-1 états de $\zeta(p)$. Étant donné un cycle $\mathcal{C}^{(k_0)}$, avec $1 \leq k_0 \leq p-1$, il reste à étudier l'action du morphisme E sur $p-2$ de ses états. D'après le lemme 3.14, on obtient ainsi des transitions avec les cycles $\mathcal{C}^{(k)}$ pour tout entier k vérifiant $1 \leq k \leq p-1$ et $k \neq k_0$. La connexité de $\zeta(p)$ est alors évidente.
On suppose désormais que n est composé. Soit p un diviseur propre de n. Comme l'indice de $\mathcal{L}(1, 0, n)$ est égal à un, et l'indice de $\mathcal{L}(p, 0, n)$ à p, on peut conclure, d'après le lemme 3.18, que $\zeta(n)$ n'est pas connexe. $\star$

3.5 Résultats complémentaires

Dans un premier temps, on précise la structure des mots sturmiens, candidats à satisfaire une propriété d'invariance non triviale :

Lemme 3.19 *Soit x un mot sturmien de pente $0 < \alpha < 1$ et d'intercept ρ. Si le mot x est laissé fixe par une substitution différente de l'identité alors α est un nombre de Sturm et ρ appartient à $\mathbb{Q}(\alpha)$.*

Preuve. Soit f une substitution non triviale telle que $f(x) = x$. Le morphisme f est sturmien et α est un nombre de Sturm. Comme α est un irrationnel quadratique, l'image de α par une homographie, à coefficients entiers, appartient à $\mathbb{Q}(\alpha)$. En utilisant la proposition 3.1, on calcule l'image de x par f. Soient β la pente et δ l'intercept obtenus. Clairement on a $\beta \in \mathbb{Q}(\alpha)$, avec $0 < \beta < 1$, et $\delta \in \mathbb{Q}(\alpha) + \rho\mathbb{Q}(\alpha)$. Comme $f(x) = x$, on en déduit $\beta = \alpha$ et $\delta - \rho \in \mathbb{Z}$ puis $\rho \in \mathbb{Q}(\alpha)$. $\star$

On remarque ensuite que les mots étudiés au corollaire 3.2 ne sont pas les seuls mots sturmiens laissés fixes par une substitution non triviale. Pour s'en assurer, il suffit de vérifier par exemple

$$G^c E D^c (s_{\eta, \frac{1-c\eta}{2}}) = s_{\eta, \frac{1-c\eta}{2}}$$

et

$$D^c E G^c (s_{\eta, \frac{1+c\eta}{2}}) = s_{\eta, \frac{1+c\eta}{2}}$$

avec $\eta = [0, 1+c, \ \overline{2c}\ ]$ et $c \geq 2$. On pourrait donc penser que la réciproque du lemme 3.19 est vraie. Les propositions 3.13 à 3.15 infirment, par différents exemples, cette conjecture.

Les lemmes 3.20 et 3.21 permettent de simplifier les calculs d'images réciproques que l'on va effectuer.

Lemme 3.20 *Soit $(\beta, \delta) \in \Lambda$. S'il existe un mot sturmien x tel que $G(x) = s_{\beta,\delta}$ ou $D(x) = s_{\beta,\delta}$ alors x appartient à $s(\Lambda)$.*

Preuve. On se place dans l'hypothèse où on a $G(x) = s_{\beta,\delta}$. Si $x = s'_{\alpha,\rho}$ avec $(\alpha, \rho) \in \Lambda'$ alors on a $s'_{\frac{\alpha}{\alpha+1}, \frac{\rho}{\alpha+1}} = s_{\beta,\delta}$. D'après la proposition 1.5, on obtient $(\frac{\alpha}{\alpha+1}, \frac{\rho}{\alpha+1}) \in \mathcal{U}$ d'où $\rho \neq 1$. S'il existe des entiers k et c tels que $k\alpha + \rho = c$ alors on a $(k+c)\frac{\alpha}{\alpha+1} + \frac{\rho}{\alpha+1} = c$, ce qui est absurde. On en déduit $(\alpha, \rho) \in \mathcal{U}$ et $x = s_{\alpha,\rho} \in s(\Lambda)$.

On étudie l'alternative. On suppose qu'il existe un mot sturmien $x = s'_{\alpha,\rho}$ avec $(\alpha, \rho) \in \Lambda'$, tel que $D(x) = s_{\beta,\delta}$. On vérifie alors $s'_{\frac{\alpha}{\alpha+1}, \frac{\alpha+\rho}{\alpha+1}} = s_{\beta,\delta}$ puis $\rho \neq 1$ et $(\frac{\alpha}{\alpha+1}, \frac{\alpha+\rho}{\alpha+1}) \in \mathcal{U}$. S'il existe des entiers k et c tels que $k\alpha + \rho = c$ alors on a $(k+c-1)\frac{\alpha}{\alpha+1} + \frac{\alpha+\rho}{\alpha+1} = c$, et ainsi $k+c-1 < 0$ d'où $k = 0 = c$ et $\rho = 0$, ce qui est absurde. On a donc $(\alpha, \rho) \in \mathcal{U}$ et $x = s_{\alpha,\rho}$. $\star$

Lemme 3.21 *Soit $(\beta, \delta) \in \Lambda'$. S'il existe un mot sturmien x tel que $G(x) = s'_{\beta,\delta}$, ou bien $D(x) = s'_{\beta,\delta}$ avec $\beta \neq \delta$, le mot x appartient à $s'(\Lambda')$.*

Preuve. On n'établit que la seconde partie du résultat. On suppose qu'il existe un mot sturmien x tel que $D(x) = s'_{\beta,\delta}$. Si $x = s_{\alpha,\rho}$ avec $(\alpha, \rho) \in \Lambda$, on a $s_{\frac{\alpha}{\alpha+1}, \frac{\alpha+\rho}{\alpha+1}} = s'_{\beta,\delta}$. Par hypothèse on a $\beta \neq \delta$ donc $\rho \neq 0$. De plus, il apparaît $(\frac{\alpha}{\alpha+1}, \frac{\alpha+\rho}{\alpha+1}) \in \mathcal{U}$ et on remarque que (α, ρ) appartient aussi à $\mathcal{U}$. On en déduit $x = s'_{\alpha,\rho} \in s'(\Lambda')$. $\star$

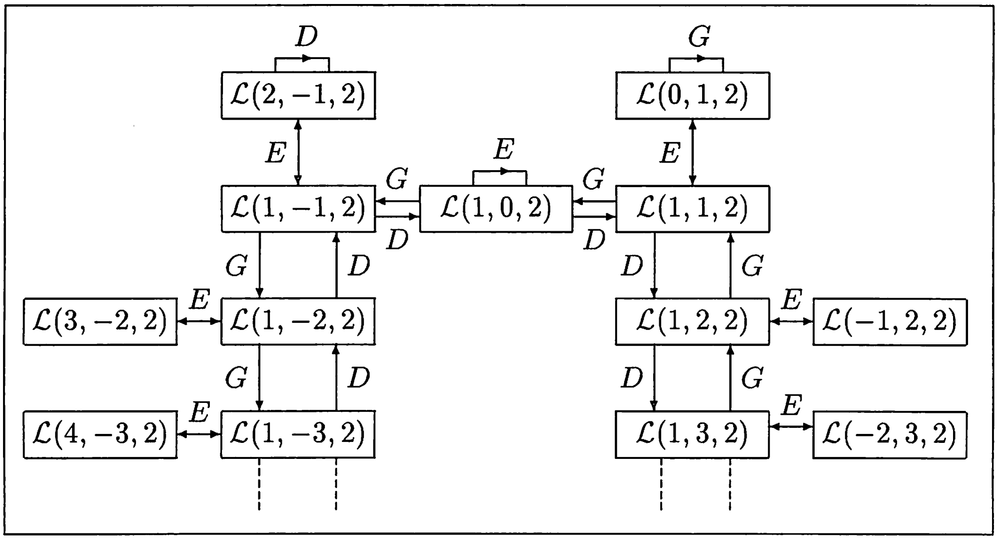

FIG. 3.9: Saturation du graphe $\zeta(2)$

Proposition 3.13 *Soit un entier $c \geq 2$. Soit τ un nombre de Sturm, dont la représentation primitive est $\tau = [0, k_m + 1, \overline{k_{m-1}, \ldots, k_2, k_1 + k_m}\ ]$ avec $m \geq 2$, $k_1 = 0$ et $k_m \geq c - 1$. Les mots $s_{\tau, \frac{1-c\tau}{2}}$ et $s_{\tau, \frac{1+c\tau}{2}}$ ne sont laissés fixes par aucune substitution non triviale.*

Preuve. On commence par établir que le graphe 3.9 est correct. À tout couple d'entiers relatifs (a, b), on associe l'ensemble

$$\mathcal{L}(a, b, 2) = \{s_{\beta, \frac{a}{2} + \frac{b}{2}\beta} \mid (\beta, \frac{a}{2} + \frac{b}{2}\beta) \in \Lambda\}.$$

On recherche tous les antécédents sturmiens, par St, des mots appartenant à $\mathcal{L}(1, 0, 2)$. On va montrer que l'on obtient ainsi les états $\mathcal{L}(1, j, 2)$ et $\mathcal{L}(1 - j, j, 2)$ pour j parcourant $\mathbb{Z}$. Soit i un entier relatif. Soit β un irrationnel de $]0, 1[$ tel que $0 \leq \frac{1+i\beta}{2} < 1$. On remarque $(\beta, \frac{1+i\beta}{2}) \in \mathcal{U}$.

On suppose qu'il existe un mot sturmien $x^{(0)}$ tel que $G(x^{(0)}) = s_{\beta, \frac{1+i\beta}{2}}$. D'après le lemme 3.20, on a $x^{(0)} = s_{\alpha, \rho}$ avec $(\alpha, \rho) \in \Lambda$. En utilisant la proposition 3.1 et l'injectivité de s sur Λ, on en déduit $\alpha = \frac{\beta}{1-\beta}$ et $\rho = \frac{1+(i+1)\frac{\beta}{1-\beta}}{2}$. À condition d'avoir $\beta \in]0, \frac{1}{2}[$ et $(i + 2)\beta < 1$, on s'aperçoit que le mot obtenu convient. On vérifie alors $x^{(0)} \in \mathcal{L}(1, i+1, 2)$. On montre de même qu'il existe un mot sturmien $x^{(1)}$ tel que $D(x^{(1)}) = s_{\beta, \frac{1+i\beta}{2}}$ si et seulement si on a $-1 < (i - 2)\beta$ et $\beta \in]0, \frac{1}{2}[$. Lorsque ces hypothèses sont réalisées, on a $x^{(1)} = s_{\frac{\beta}{1-\beta}, \frac{1+(i-1)\frac{\beta}{1-\beta}}{2}} \in \mathcal{L}(1, i - 1, 2)$.

Sous l'action du morphisme E, on obtient les états $\mathcal{L}(1 - j, j, 2)$ avec $j \in \mathbb{Z}$. On doit donc chercher les antécédents sturmiens de cette famille de mots par les morphismes G et D. L'étude concernant $\mathcal{L}(1,0,2)$ vient d'être effectuée. Soit $i \in \mathbb{Z}^*$. Soit β un irrationnel de $]0,1[$ tel que $0 \leq \frac{(1-i)+i\beta}{2} < 1$.

On suppose qu'il existe un mot sturmien $x^{(2)}$ tel que $G(x^{(2)}) = s_{\beta,\frac{(1-i)+i\beta}{2}}$. On vérifie alors $\beta \in]0,\frac{1}{2}[$ et $x^{(2)} = s_{\alpha,\rho}$ avec $(\alpha,\rho) \in \Lambda$, puis $\alpha = \frac{\beta}{1-\beta}$ et $\rho = \frac{\alpha+1-i}{2}$. Comme $\rho \in [0,1[$ et $i \neq 0$, on a nécessairement $i = 1$ et $x^{(2)} \in \mathcal{L}(0,1,2)$. Ainsi, dès que i est différent de 0 et de 1, il n'y a pas d'antécédent sturmien par G des mots appartenant à $\mathcal{L}(1-i,i,2)$. On suppose à présent qu'il existe un mot sturmien $x^{(3)}$ tel que $D(x^{(3)}) = s_{\beta,\frac{(1-i)+i\beta}{2}}$. On montre alors $\beta \in]0,\frac{1}{2}[$ et $x^{(3)} = s_{\alpha,\rho}$ avec $(\alpha,\rho) \in \Lambda$, puis $\alpha = \frac{\beta}{1-\beta}$ et $\rho = \frac{1-i-\alpha}{2}$. Comme $\rho \in [0,1[$ et $i \neq 0$, on a $i = -1$ et $x^{(3)} \in \mathcal{L}(2,-1,2)$. Ainsi, dès que i est différent de 0 et de -1, il n'y a pas d'antécédent sturmien par D des mots appartenant à $\mathcal{L}(1-i,i,2)$.

Ces calculs d'images réciproques n'entraînent la création d'aucun nouvel état : la technique de recherche est donc terminée, et par construction du graphe 3.9, tous les chemins d'accès possibles à un état donné, sur l'alphabet $\{E,G,D\}$, sont représentés. On raisonne désormais par l'absurde. Soit θ un morphisme non trivial qui laisse fixe la suite $s_{\tau,\frac{1-c\tau}{2}}$. Par définition même de τ, on a $\frac{1-c\tau}{2} \in [0,1[$. D'après le lemme 3.10, il existe un morphisme γ de St tel que $\theta = \gamma GE$ ou $\theta = \gamma DE$. Soit z l'image de $s_{\tau,\frac{1-c\tau}{2}}$ par E. Comme on a $\gamma G(z) = s_{\tau,\frac{1-c\tau}{2}}$ ou $\gamma D(z) = s_{\tau,\frac{1-c\tau}{2}}$, il est clair que $G(z)$ ou $D(z)$ est un antécédent de $s_{\tau,\frac{1-c\tau}{2}}$ par le monoïde de Sturm. Mais on a $z \in \mathcal{L}(c+1,-c,2)$, et ni $G(z)$ ni $D(z)$ n'apparaît dans le graphe, qui recense pourtant tous les antécédents sturmiens de $\mathcal{L}(1,-c,2)$ par St. On obtient ainsi la contradiction cherchée. Le résultat concernant le mot $s_{\tau,\frac{1+c\tau}{2}}$ se démontre de façon similaire. $\star$

Proposition 3.14 *Soit un entier $k \geq 2$. Soient β et β' des irrationnels avec $0 < \beta < \frac{1}{k}$ et $\frac{k-1}{k} < \beta' < 1$. Il n'existe aucun morphisme non trivial laissant fixe $s_{\beta,1-k\beta}$ ou $s'_{\beta',k(1-\beta')}$.*

Proposition 3.15 *Soit un entier $k \geq 2$. Soient β et β' des irrationnels avec $0 < \beta < \frac{1}{k}$ et $\frac{k-1}{k} < \beta' < 1$. Il n'existe aucun morphisme non trivial laissant fixe $s_{\beta,k\beta}$ ou $s'_{\beta',(1-k)+k\beta'}$.*

Preuve de la proposition 3.14.

Page 60, on présente un graphe dont la répartition des états est donnée comme suit. Soit i un entier compris entre 0 et $k-2$. On note

$$\mathcal{G}(2i+1) = \{s_{\nu,1-(k-i)\nu} \mid (\nu, 1-(k-i)\nu) \in \Lambda\}$$

et

$$\mathcal{G}(2i+2) = \{s'_{\nu,(k-i)(1-\nu)} \mid (\nu, (k-i)(1-\nu)) \in \Lambda'\}.$$

On pose $\mathcal{G}(2k-1) = \{s_{\nu,1-\nu} \mid (\nu, 1-\nu) \in \Lambda\}$ et $\mathcal{G}(2k) = \{s'_{\nu,1-\nu} \mid (\nu,1-\nu) \in \Lambda'\}$. De plus, les états $\mathcal{G}(2k+1)$ et $\mathcal{G}(2k+2)$ regroupent les mots de Christoffel selon qu'ils soient négatifs ou bien positifs. Enfin, dans le puits apparaissent les suites sturmiennes n'appartenant à aucune des catégories précédemment citées. Pour

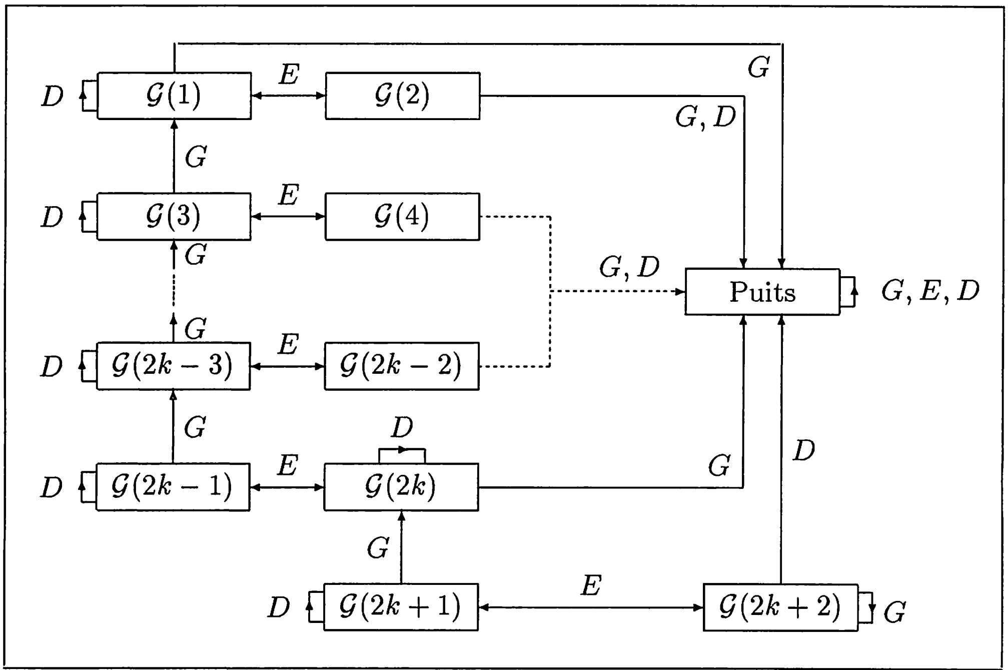

FIG. 3.10: Graphe des suites $s_{\nu,1-k\nu}$ avec $k \geq 2$ et $(\nu, 1-k\nu) \in \Lambda$

établir que ce graphe est correct, on utilise la proposition 3.1, et on recherche tous les antécédents sturmiens, par St, des suites $s_{\nu,1-k\nu}$ avec $(\nu, 1-k\nu) \in \Lambda$. On se rend compte qu'on est amené à effectuer de tels calculs pour les mots $s_{\nu,1-(k-j)\nu}$ avec $(\nu, 1-(k-j)\nu) \in \Lambda$, mais aussi $s'_{\nu,(k-j)(1-\nu)}$ avec $(\nu, (k-j)(1-\nu)) \in \Lambda'$, l'entier j étant compris entre 0 et $k-2$. Soit $i \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq i \leq k-2$. Clairement, le morphisme E permute les états $\mathcal{G}(2i+1)$ et $\mathcal{G}(2i+2)$. Soit ν un irrationnel tel que $(\nu, (k-i)(1-\nu)) \in \Lambda'$. Comme on a $\nu > \frac{k-i-1}{k-i} \geq \frac{1}{2}$, il n'y a pas d'antécédent sturmien du mot $s'_{\nu,(k-i)(1-\nu)}$ ni par G ni par D. On considère maintenant un irrationnel ν tel que $(\nu, 1-(k-i)\nu) \in \Lambda$. On a $(\frac{\nu}{1-\nu}, 1-(k-i-1)\frac{\nu}{1-\nu}) \in \Lambda$ et $G(s_{\frac{\nu}{1-\nu},1-(k-i-1)\frac{\nu}{1-\nu}}) = s_{\nu,1-(k-i)\nu}$. De la même façon, on montre que s'il existe un mot sturmien x tel que $D(x) = s_{\nu,1-(k-i)\nu}$, on a $x = s_{\frac{\nu}{1-\nu},1-(k-i)\frac{\nu}{1-\nu}}$, et ce mot convient à condition d'avoir $\nu < \frac{1}{k-i+1}$. Enfin, il suffit d'utiliser la preuve de la proposition 3.5 pour caractériser les antécédents sturmiens des suites appartenant à $\mathcal{G}(2k-1)$.

On définit un automate, en choisissant, comme état initial et final, l'état $\mathcal{G}(1)$. Clairement, le comportement, traduit en termes de morphismes sturmiens, est égal à D^*. Soit m un entier non nul. Le morphisme D^m transforme les lettres 0 en 0 et 1 en 10^m. Les points fixes infinis de D^m sont exactement les mots appartenant à l'ensemble $\{0^\omega; 0^c10^\omega \mid c \in \mathbb{N}\}$. Ces mots n'étant pas sturmiens, la première partie du résultat énoncé est établi. À présent, on considère un nouvel automate, toujours construit sur le graphe de la figure 3.10, dont l'état initial et final coïncide avec l'état $\mathcal{G}(2)$. Le comportement, traduit en termes de morphismes, est ED^*E. Soit $m' \in \mathbb{N}^*$. Le morphisme $ED^{m'}E$ envoie la lettre 0 sur $01^{m'}$ et 1 sur 1. Les points fixes infinis de $ED^{m'}E$ sont exactement les mots de l'ensemble $\{1^\omega; 1^c01^\omega \mid c \in \mathbb{N}\}$. Il est alors facile de conclure. ⋆

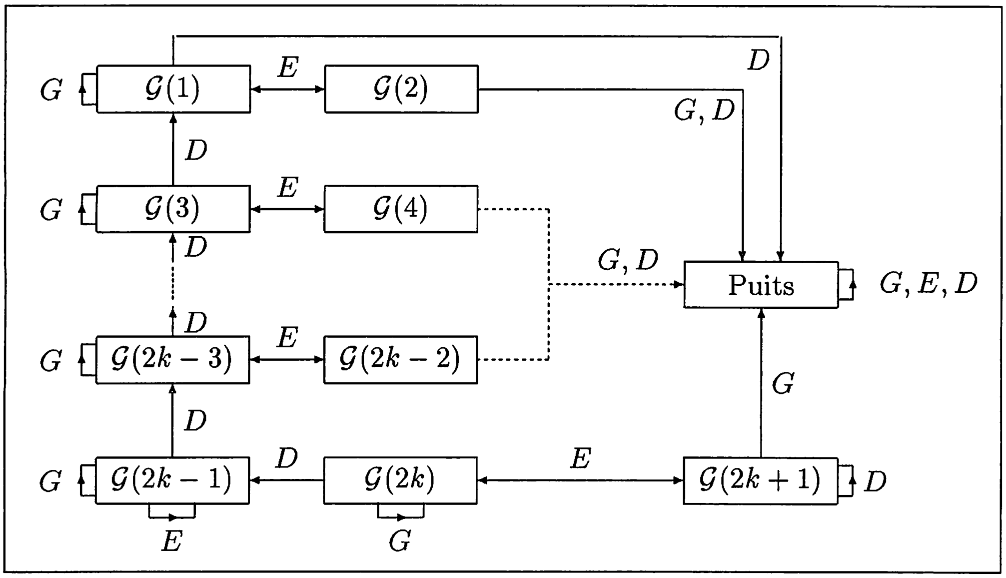

FIG. 3.11: Graphe des suites $s_{\nu,k\nu}$ avec $k \geq 2$ et $(\nu, k\nu) \in \Lambda$

Preuve de la proposition 3.15.
Page 61, on présente un graphe dont la répartition des états est donnée comme suit. Soit i un entier compris entre 0 et $k-2$. On note

$$\mathcal{G}(2i+1) = \{s_{\nu,(k-i)\nu} \mid (\nu, (k-i)\nu) \in \Lambda\}$$

et

$$\mathcal{G}(2i+2) = \{s'_{\nu,(1-k+i)+(k-i)\nu} \mid (\nu, (1-k+i)+(k-i)\nu) \in \Lambda'\}.$$

L'état $\mathcal{G}(2k-1)$ regroupe l'ensemble des suites caractéristiques. De plus, les états $\mathcal{G}(2k)$ et $\mathcal{G}(2k+1)$ sont constitués des mots de Christoffel selon qu'ils soient positifs ou bien négatifs. Enfin, dans le puits apparaissent les suites sturmiennes n'appartenant à aucune des catégories précédemment citées. La démonstration est en tout point similaire à celle de la proposition précédente. ⋆

Remarque. Ces derniers résultats mettent en exergue la difficulté pour généraliser, de façon homogène, les propriétés des suites admissibles. Si on s'intéresse aux mots sturmiens définis sur $\mathbb{Z}$, et non plus sur $\mathbb{N}$, le problème devient beaucoup plus simple. Une solution complète est donnée dans l'article intitulé *"Substitution invariant Sturmian bisequences"* [87].

Chapitre 4

Transformations périodiques sur les mots sturmiens

Dans ce chapitre, un transducteur est un mécanisme de réécriture des mots infinis, construit à partir d'un système de transitions $\mathcal{T}$ opérant sur un ensemble fini d'états $\Diamond$. Les éléments de $\mathcal{T}$ sont des quadruplets (∇, y, ∇', y') avec $(\nabla, \nabla') \in \Diamond^2$ et $(y, y') \in \mathcal{A}^+ \times \mathcal{A}^*$. Une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}^\omega$ est un ensemble fini de mots appartenant à $\mathcal{A}^+$ tel que tout mot infini possède comme préfixe un et un seul des éléments de $\mathcal{B}$. Soit $\nabla \in \Diamond$. L'ensemble des mots y, pour lesquels il existe ∇' et y' tels que $(\nabla, y, \nabla', y') \in \mathcal{T}$, constitue une base de $\mathcal{A}^\omega$, notée $\mathcal{B}_\nabla$. De plus, étant donné un mot y de $\mathcal{B}_\nabla$, il existe un unique couple (∇', y') de $\Diamond \times \mathcal{A}^*$ tel que (∇, y, ∇', y') appartient à $\mathcal{T}$.

Le transducteur ainsi défini fonctionne de la façon suivante : on choisit un état ∇_0, dit initial, où on entre un mot infini X. Soit x_0 le préfixe de X appartenant à $\mathcal{B}_{\nabla_0}$. On note $(\nabla_0, x_0, \nabla_1, x'_0)$ la transition associée. Soit $x_1 \in \mathcal{B}_{\nabla_1}$ le préfixe du mot X_1 défini par $X = x_0 X_1$. Le couple (∇_1, x_1) est transformé en (∇_2, x'_1), et ainsi de suite. L'image du mot X par le transducteur est finalement égale au mot infini $x'_0 x'_1 \ldots$

Les phénomènes de suppression périodique des lettres 0 et 1 sont analysés en détail. Ces opérations sont réalisées par des transducteurs qui préservent globalement l'ensemble des mots sturmiens. La preuve donnée ici est de nature arithmétique, et fait intervenir les écritures exponentielles des mots sturmiens, définies à la section 4.1.

Les mots de Christoffel permettent de manipuler les nombres irrationnels à partir de leur développement en fraction continue. Des techniques pour passer d'une représentation à l'autre sont présentées. Plus précisément, étant donné un irrationnel dont on ne connaît qu'un nombre fini de quotients partiels, on peut déterminer le plus grand préfixe commun à toutes les suites caractéristiques associées. Un procédé très simple assure la construction réciproque, sans avoir à utiliser un autre mot que la suite initiale. On peut ainsi calculer l'image d'un développement en fraction continue infini par une homographie à coefficients entiers.

4.1 Formes exponentielles

Dans un premier temps, on étudie les fonctions de répartition définies dans le cas homogène par J. Rosenblatt [95].

Définition 4.1 *À un irrationnel α et un réel ρ, on associe les fonctions de répartition $H_{\alpha,\rho}$ et $H'_{\alpha,\rho}$, définies pour tout entier n par*

$$H_{\alpha,\rho}(n) = \#\{c \in \mathbb{N} \mid \lfloor c\alpha + \rho \rfloor = n\}$$

et

$$H'_{\alpha,\rho}(n) = \#\{c \in \mathbb{N} \mid \lceil c\alpha + \rho \rceil = n\}.$$

Ces fonctions peuvent être mises en relation avec les mots sturmiens :

Lemme 4.1 *Soient α un irrationnel de $]0,1[$ et ρ un réel de $[0,1[$. On a*

$$\forall\, i \in \mathbb{N}^* \;\; H_{\alpha,\rho}(i) = s'_{\frac{1}{\alpha},\frac{-\rho}{\alpha}}(i) + \left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor$$

et

$$\forall\, i \in \mathbb{N},\; i \geq 2,\;\; H'_{\alpha,\rho}(i) = s_{\frac{1}{\alpha},\frac{-\rho}{\alpha}}(i-1) + \left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor.$$

Preuve. Soit i un entier non nul. On vérifie successivement

$$\begin{aligned} H_{\alpha,\rho}(i) &= \#\{c \in \mathbb{N} \mid i \leq c\alpha + \rho < i+1\} \\ &= \#\{c \in \mathbb{N} \mid \tfrac{i}{\alpha} - \tfrac{\rho}{\alpha} \leq c < \tfrac{i+1}{\alpha} - \tfrac{\rho}{\alpha}\} \\ &= \#\{c \in \mathbb{N} \mid 0 \leq c < \tfrac{i+1}{\alpha} - \tfrac{\rho}{\alpha}\} - \#\{c \in \mathbb{N} \mid 0 \leq c < \tfrac{i}{\alpha} - \tfrac{\rho}{\alpha}\} \\ &= \lceil \tfrac{i+1}{\alpha} - \tfrac{\rho}{\alpha} \rceil - \lceil \tfrac{i}{\alpha} - \tfrac{\rho}{\alpha} \rceil \\ &= s'_{\frac{1}{\alpha},-\frac{\rho}{\alpha}}(i) + \lfloor \tfrac{1}{\alpha} \rfloor. \end{aligned}$$

Soit i un entier supérieur à deux. On a

$$\begin{aligned} H'_{\alpha,\rho}(i) &= \#\{c \in \mathbb{N} \mid i-1 < c\alpha + \rho \leq i\} = \#\{c \in \mathbb{N} \mid \tfrac{i-1}{\alpha} - \tfrac{\rho}{\alpha} < c \leq \tfrac{i}{\alpha} - \tfrac{\rho}{\alpha}\} \\ &= \#\{c \in \mathbb{N} \mid 0 \leq c \leq \tfrac{i}{\alpha} - \tfrac{\rho}{\alpha}\} - \#\{c \in \mathbb{N} \mid 0 \leq c \leq \tfrac{i-1}{\alpha} - \tfrac{\rho}{\alpha}\} \\ &= \lfloor \tfrac{i}{\alpha} - \tfrac{\rho}{\alpha} \rfloor - \lfloor \tfrac{i-1}{\alpha} - \tfrac{\rho}{\alpha} \rfloor = s_{\frac{1}{\alpha},-\frac{\rho}{\alpha}}(i-1) + \lfloor \tfrac{1}{\alpha} \rfloor. \;\star \end{aligned}$$

Ces résultats préliminaires permettent de représenter les mots sturmiens sous une forme qui est particulièrement adaptée au type de transformations que l'on étudie. Étant données une lettre a et une suite $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'entiers, on note $(a\overline{a}^{\mu_i})_{i\in\mathbb{N}}$ le mot infini $a\overline{a}^{\mu_0}a\overline{a}^{\mu_1}a\overline{a}^{\mu_2}\ldots$ et $(\overline{a}^{\mu_i}a)_{i\in\mathbb{N}}$ le mot $\overline{a}^{\mu_0}a\overline{a}^{\mu_1}a\overline{a}^{\mu_2}a\ldots$

Lemme 4.2 *Soient α un irrationnel de $]0,\frac{1}{2}[$ et ρ un réel de $[0,1[$. On a*

$$s_{\alpha,\rho} = 1^{\lfloor \frac{\rho}{1-\alpha} \rfloor}\left(01^{s_{\frac{\alpha}{1-\alpha},\frac{\rho}{1-\alpha}}(i)}\right)_{i\in\mathbb{N}} = \left(0^{H_{\frac{\alpha}{1-\alpha},\frac{\rho}{1-\alpha}}(i)}1\right)_{i\in\mathbb{N}}.$$

Soient α un irrationnel de $]\frac{1}{2},1[$ et ρ un réel de $[0,1[$. On a

$$s_{\alpha,\rho} = 0^{\lceil \frac{1-\rho}{\alpha} \rceil - 1}\left(10^{s'_{\frac{1-\alpha}{\alpha},\frac{1-\rho}{\alpha}}(i)}\right)_{i\in\mathbb{N}} = \left(1^{H'_{\frac{1-\alpha}{\alpha},\frac{1-\rho}{\alpha}}(i+1)}0\right)_{i\in\mathbb{N}}.$$

Preuve. Soient α un irrationnel de $]0,\frac{1}{2}[$ et ρ un réel de $[0,1[$. On pose $\beta = \frac{\alpha}{1-\alpha}$. Comme β appartient à $]0,1[$, on a $G(s_{\beta,\frac{\rho}{1-\alpha}}) = G(s_{\beta,\frac{\rho}{1-\alpha}-\lfloor\frac{\rho}{1-\alpha}\rfloor}) = S^{\lfloor\frac{\rho}{1-\alpha}\rfloor}(s_{\alpha,\rho})$. Par définition de G, on obtient $G(s_{\beta,\frac{\rho}{1-\alpha}}) = \left(01^{s_{\frac{\alpha}{1-\alpha},\frac{\rho}{1-\alpha}}(i)}\right)_{i\in\mathbb{N}}$. Si $\rho < 1-\alpha$, le résultat est établi. Dans l'hypothèse $\rho \geq 1-\alpha$, comme $0<\alpha<\frac{1}{2}$ on a $\left\lfloor\frac{\rho}{1-\alpha}\right\rfloor = 1$ et on conclut en remarquant $s_{\alpha,\rho}(0) = \lfloor\alpha+\rho\rfloor = 1$.

On cherche maintenant à décrire $s_{\alpha,\rho}$ sous la forme $(0^{\mu_i}1)_{i\in\mathbb{N}}$ pour une suite d'entiers $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ à déterminer. En supposant $0\leq\rho<1-\alpha$, on a

$$s_{\alpha,\rho} = \left(01^{s_{\frac{\alpha}{1-\alpha},\frac{\rho}{1-\alpha}}(i)}\right)_{i\in\mathbb{N}}.$$

On pose $c_0 = H_{\frac{\alpha}{1-\alpha},\frac{\rho}{1-\alpha}}(0)$. Clairement, on a $c_0\geq 1$ puis

$$\left\lfloor c_0\frac{\alpha}{1-\alpha}+\frac{\rho}{1-\alpha}\right\rfloor = 1 \quad \text{et} \quad \left\lfloor i\frac{\alpha}{1-\alpha}+\frac{\rho}{1-\alpha}\right\rfloor = 0 \;\text{ pour }\; 0\leq i\leq c_0-1.$$

On en déduit

$$s_{\frac{\alpha}{1-\alpha},\frac{\rho}{1-\alpha}}(c_0-1) = 1 \quad \text{et} \quad s_{\frac{\alpha}{1-\alpha},\frac{\rho}{1-\alpha}}(i) = 0 \;\text{ pour }\; 0\leq i\leq c_0-2.$$

On vérifie ainsi $\mu_0 = c_0$ et $(0^{\mu_i}1)_{i\in\mathbb{N}^*} = \left(01^{s_{\frac{\alpha}{1-\alpha},\frac{\rho}{1-\alpha}}(i)}\right)_{i\geq c_0}$. Par itération, on a

$$\forall\, i\in\mathbb{N} \quad \mu_i = H_{\frac{\alpha}{1-\alpha},\frac{\rho}{1-\alpha}}(i).$$

En supposant désormais $1-\alpha\leq\rho<1$, on écrit $s_{\alpha,\rho} = 1\left(01^{s_{\frac{\alpha}{1-\alpha},\frac{\rho}{1-\alpha}}(i)}\right)_{i\in\mathbb{N}}$. On remarque $\mu_0 = 0 = H_{\frac{\alpha}{1-\alpha},\frac{\rho}{1-\alpha}}(0)$. L'entier μ_1 est défini par

$$\mu_1 - 1 = \min\{c\in\mathbb{N} \mid s_{\frac{\alpha}{1-\alpha},\frac{\rho}{1-\alpha}}(c) = 1\}.$$

On obtient ainsi $H_{\frac{\alpha}{1-\alpha},\frac{\rho}{1-\alpha}}(1) = \mu_1$ car on a

$$\left\lfloor \mu_1\frac{\alpha}{1-\alpha}+\frac{\rho}{1-\alpha}\right\rfloor = 2 \quad \text{et} \quad \left\lfloor i\frac{\alpha}{1-\alpha}+\frac{\rho}{1-\alpha}\right\rfloor = 1 \;\text{ pour }\; 0\leq i\leq \mu_1-1.$$

On conclut, comme précédemment, en itérant cette démarche.

On démontre de façon similaire pour tout irrationnel β de $]0, \frac{1}{2}[$ et tout réel δ de $]0, 1]$:

$$s'_{\beta,\delta} = 1^{\lceil \frac{\delta}{1-\beta} \rceil - 1} \left(01^{s'_{\frac{\beta}{1-\beta}, \frac{\delta}{1-\beta}}(i)} \right)_{i \in \mathbb{N}} = \left(0^{H'_{\frac{\beta}{1-\beta}, \frac{\delta}{1-\beta}}(i+1)} 1 \right)_{i \in \mathbb{N}}.$$

Soient α un irrationnel de $]\frac{1}{2}, 1[$ et ρ un réel de $[0, 1[$. En appliquant les formules précédentes au couple $(1-\alpha, 1-\rho)$, on obtient

$$s'_{1-\alpha,1-\rho} = 1^{\lceil \frac{1-\rho}{\alpha} \rceil - 1} \left(01^{s'_{\frac{1-\alpha}{\alpha}, \frac{1-\rho}{\alpha}}(i)} \right)_{i \in \mathbb{N}} = \left(0^{H'_{\frac{1-\alpha}{\alpha}, \frac{1-\rho}{\alpha}}(i+1)} 1 \right)_{i \in \mathbb{N}}.$$

Comme $E(s'_{1-\alpha,1-\rho}) = s_{\alpha,\rho}$, on a finalement

$$s_{\alpha,\rho} = 0^{\lceil \frac{1-\rho}{\alpha} \rceil - 1} \left(10^{s'_{\frac{1-\alpha}{\alpha}, \frac{1-\rho}{\alpha}}(i)} \right)_{i \in \mathbb{N}} = \left(1^{H'_{\frac{1-\alpha}{\alpha}, \frac{1-\rho}{\alpha}}(i+1)} 0 \right)_{i \in \mathbb{N}}. \star$$

Proposition 4.1 *Soient α un irrationnel de $]0, 1[$ et ρ un réel de $[0, 1[$. On a*

$$s_{\alpha,\rho} = 1^{\lfloor \frac{\rho}{1-\alpha} \rfloor} \left(01^{s_{\frac{\alpha}{1-\alpha}, \frac{\rho}{1-\alpha}}(i) + \lfloor \frac{\alpha}{1-\alpha} \rfloor} \right)_{i \in \mathbb{N}} = 0^{\lceil \frac{1-\rho}{\alpha} \rceil - 1} \left(10^{s'_{\frac{1-\alpha}{\alpha}, \frac{1-\rho}{\alpha}}(i) + \lfloor \frac{1-\alpha}{\alpha} \rfloor} \right)_{i \in \mathbb{N}}.$$

Soient α un irrationnel de $]0, 1[$ et ρ un réel de $]0, 1]$. On a

$$\begin{aligned} s'_{\alpha,\rho} &= 1^{\lceil \frac{\rho}{1-\alpha} \rceil - 1} \left(01^{s'_{\frac{\alpha}{1-\alpha}, \frac{\rho}{1-\alpha}}(i) + \lfloor \frac{\alpha}{1-\alpha} \rfloor} \right)_{i \in \mathbb{N}} \\ &= 0^{\lfloor \frac{1-\rho}{\alpha} \rfloor} \left(10^{s_{\frac{1-\alpha}{\alpha}, \frac{1-\rho}{\alpha}}(i) + \lfloor \frac{1-\alpha}{\alpha} \rfloor} \right)_{i \in \mathbb{N}}. \end{aligned}$$

Preuve. Soient α un irrationnel de $]0, 1[$ et ρ un réel de $[0, 1[$. Dans un premier temps, on cherche à montrer $s_{\alpha,\rho} = 1^{\lfloor \frac{\rho}{1-\alpha} \rfloor} \left(01^{s_{\frac{\alpha}{1-\alpha}, \frac{\rho}{1-\alpha}}(i) + \lfloor \frac{\alpha}{1-\alpha} \rfloor} \right)_{i \in \mathbb{N}}$. D'après le lemme 4.2, ce résultat est acquis si α appartient à $]0, \frac{1}{2}[$. On se place donc dans l'hypothèse $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1[$. On doit alors vérifier

$$\left(1^{H'_{\frac{1-\alpha}{\alpha}, \frac{1-\rho}{\alpha}}(i+1)} 0 \right)_{i \in \mathbb{N}} = 1^{\lfloor \frac{\rho}{1-\alpha} \rfloor} \left(01^{s_{\frac{\alpha}{1-\alpha}, \frac{\rho}{1-\alpha}}(i) + \lfloor \frac{\alpha}{1-\alpha} \rfloor} \right)_{i \in \mathbb{N}}.$$

On sépare la preuve en différents cas. Si $\alpha + \rho > 1$, d'après le lemme 4.1, on a

$$\begin{aligned} s_{\alpha,\rho} &= 1^{H'_{\frac{1-\alpha}{\alpha}, \frac{1-\rho}{\alpha}}(1)} 0 \left(1^{s_{\frac{\alpha}{1-\alpha}, \frac{\rho-1}{1-\alpha}}(i) + \lfloor \frac{\alpha}{1-\alpha} \rfloor} 0 \right)_{i \in \mathbb{N}^*} \\ &= 1^{H'_{\frac{1-\alpha}{\alpha}, \frac{1-\rho}{\alpha}}(1)} 0 \left(1^{s_{\frac{\alpha}{1-\alpha}, \frac{\rho}{1-\alpha}}(i) + \lfloor \frac{\alpha}{1-\alpha} \rfloor} 0 \right)_{i \in \mathbb{N}}. \end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit alors de remarquer

$$\begin{aligned} H'_{\frac{1-\alpha}{\alpha},\frac{1-\rho}{\alpha}}(1) &= \#\{c \in \mathbb{N} \mid 0 < c\tfrac{1-\alpha}{\alpha} + \tfrac{1-\rho}{\alpha} \leq 1\} \\ &= \#\{c \in \mathbb{N} \mid 0 \leq c \leq \tfrac{\alpha+\rho-1}{1-\alpha}\} = \left\lfloor \tfrac{\alpha+\rho-1}{1-\alpha} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \tfrac{\rho}{1-\alpha} \right\rfloor. \end{aligned}$$

On suppose désormais $\alpha + \rho < 1$ et donc $1 < \frac{1-\rho}{\alpha} < 2$. On montre ainsi

$$s_{\alpha,\rho} = 1^{H'_{\frac{1-\alpha}{\alpha},\frac{1-\alpha-\rho}{\alpha}}(0)} 0 1^{H'_{\frac{1-\alpha}{\alpha},\frac{1-\alpha-\rho}{\alpha}}(1)} 0 \left(1^{s_{\frac{\alpha}{1-\alpha},\frac{\alpha+\rho-1}{1-\alpha}}(i)+\lfloor\frac{\alpha}{1-\alpha}\rfloor} 0\right)_{i\in\mathbb{N}^*}.$$

Clairement, on a $H'_{\frac{1-\alpha}{\alpha},\frac{1-\alpha-\rho}{\alpha}}(0) = 0$ et on vérifie

$$\begin{aligned} H'_{\frac{1-\alpha}{\alpha},\frac{1-\alpha-\rho}{\alpha}}(1) &= \#\{c \in \mathbb{N} \mid 0 < c\tfrac{1-\alpha}{\alpha} + \tfrac{1-\alpha-\rho}{\alpha} \leq 1\} \\ &= \#\{c \in \mathbb{N} \mid 0 \leq c \leq \tfrac{2\alpha+\rho-1}{1-\alpha}\} = \left\lfloor \tfrac{\alpha+\rho}{1-\alpha} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Comme $\rho < 1 - \alpha$ et $s_{\frac{\alpha}{1-\alpha},\frac{\rho}{1-\alpha}}(0) = \left\lfloor \frac{\alpha+\rho}{1-\alpha} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{\alpha}{1-\alpha} \right\rfloor$, on a bien

$$s_{\alpha,\rho} = 1^{\lfloor\frac{\rho}{1-\alpha}\rfloor} \left(0 1^{s_{\frac{\alpha}{1-\alpha},\frac{\rho}{1-\alpha}}(i)+\lfloor\frac{\alpha}{1-\alpha}\rfloor}\right)_{i\in\mathbb{N}}.$$

Enfin, si $\rho = 1 - \alpha$, le résultat est immédiat car on a $s_{\alpha,1-\alpha} = 1s_{\alpha,0}$.

En revenant au cas général, où α est un irrationnel de $]0,1[$ et ρ un réel de $[0,1[$, on doit montrer $s_{\alpha,\rho} = 0^{\lceil\frac{1-\rho}{\alpha}\rceil-1} \left(1 0^{s'_{\frac{1-\alpha}{\alpha},\frac{1-\rho}{\alpha}}(i)+\lfloor\frac{1-\alpha}{\alpha}\rfloor}\right)_{i\in\mathbb{N}}$. D'après le lemme 4.2, ce résultat est acquis si α appartient à $]\frac{1}{2},1[$. On suppose donc $\alpha \in]0,\frac{1}{2}[$. Par un raisonnement similaire à celui développé précédemment, on obtient

$$\left(0^{H_{\frac{\alpha}{1-\alpha},\frac{\rho}{1-\alpha}}(i)} 1\right)_{i\in\mathbb{N}} = 0^{\lceil\frac{1-\rho}{\alpha}\rceil-1} \left(1 0^{s'_{\frac{1-\alpha}{\alpha},\frac{1-\rho}{\alpha}}(i)+\lfloor\frac{1-\alpha}{\alpha}\rfloor}\right)_{i\in\mathbb{N}}$$

en utilisant le lemme 4.1. Il ne reste plus qu'à appliquer le morphisme d'inversion E pour conclure. ⋆

4.2 Transducteurs de décimation périodique

Au couple d'entiers (k, a), avec $a \geq 2$ et $a \geq k \geq 1$, on associe des transducteurs qui opèrent sur les mots binaires :

Définition 4.2 *On note $M_{k,a}$ et $D_{k,a}$ les transformations qui suppriment respectivement les occurrences des lettres* 0 *et* 1, *exceptées celles qui sont congrues à k modulo a.*

Par une approche de nature géométrique, J. Justin et G. Pirillo montrent que les transformations du type $M_{k_1,a}D_{k_2,a}$ préservent globalement l'ensemble des suites sturmiennes. Cependant, ils ne s'intéressent pas à l'action séparée de ces deux transducteurs et ne présentent aucune formule concernant l'évolution des intercepts. La proposition suivante permet donc de préciser certains des résultats de l'article [61].

Proposition 4.2 *Soient α un irrationnel de $]0,1[$ et ρ un réel de $[0,1[$. On a*

$$M_{k,a}(s_{\alpha,\rho}) = s_{\frac{a\alpha}{(a-1)\alpha+1},\frac{(k-1)\alpha+\rho}{(a-1)\alpha+1}} \quad et \quad D_{k,a}(s_{\alpha,\rho}) = s_{\frac{\alpha}{a(1-\alpha)+\alpha},\frac{(a-k)(1-\alpha)+\rho}{a(1-\alpha)+\alpha}}.$$

Soient α un irrationnel de $]0,1[$ et ρ un réel de $]0,1]$. On a

$$M_{k,a}(s'_{\alpha,\rho}) = s'_{\frac{a\alpha}{(a-1)\alpha+1},\frac{(k-1)\alpha+\rho}{(a-1)\alpha+1}} \quad et \quad D_{k,a}(s'_{\alpha,\rho}) = s'_{\frac{\alpha}{a(1-\alpha)+\alpha},\frac{(a-k)(1-\alpha)+\rho}{a(1-\alpha)+\alpha}}.$$

On peut ainsi diviser l'intercept d'un mot sturmien par un entier, ajouter ou retrancher un rationnel à l'intercept d'une suite caractéristique, ou encore le multiplier par un rationnel positif :

Corollaire 4.1 *Soit α un irrationnel de $]0,1[$. On a*

$$M_{a+1-k,a}D_{k,a}(s_{\alpha,0}) = s_{\alpha,-\frac{k}{a}}$$

ainsi que

$$M_{k,a}D_{a+1-k,a}(s'_{\alpha,0}) = s'_{\alpha,\frac{k}{a}} \quad et \quad M_{k,a}D_{a,a}(s_{\alpha,\alpha}) = s_{\alpha,\frac{k}{a}\alpha}.$$

Soit ρ un réel de $]0,1[$. On a

$$M_{1,a}D_{a,a}(s_{\alpha,\rho}) = s_{\alpha,\frac{\rho}{a}} \quad et \quad M_{1,a}D_{a,a}(s'_{\alpha,\rho}) = s'_{\alpha,\frac{\rho}{a}}.$$

Preuve de la proposition 4.2 (Action de $M_{k,a}$). Soient α un irrationnel de $]0,1[$ et ρ un réel de $[0,1[$. On choisit d'écrire $s_{\alpha,\rho}$ sous la forme

$$s_{\alpha,\rho} = 1^{\left\lfloor\frac{\rho}{1-\alpha}\right\rfloor}\left(01^{s_{\frac{\alpha}{1-\alpha},\frac{\rho}{1-\alpha}}(i)+\left\lfloor\frac{\alpha}{1-\alpha}\right\rfloor}\right)_{i\in\mathbb{N}}.$$

En posant $v = \left\lfloor\dfrac{\rho}{1-\alpha}\right\rfloor + \displaystyle\sum_{i=0}^{k-2}\left(s_{\frac{\alpha}{1-\alpha},\frac{\rho}{1-\alpha}}(i) + \left\lfloor\dfrac{\alpha}{1-\alpha}\right\rfloor\right)$ on en déduit

$$\begin{aligned} M_{k,a}(s_{\alpha,\rho}) &= 1^v\left(01^{\sum_{i=ja+k-1}^{(j+1)a+k-2}\left(s_{\frac{\alpha}{1-\alpha},\frac{\rho}{1-\alpha}}(i)+\left\lfloor\frac{\alpha}{1-\alpha}\right\rfloor\right)}\right)_{j\in\mathbb{N}} \\ &= 1^{\left\lfloor\frac{\rho}{1-\alpha}+(k-1)\frac{\alpha}{1-\alpha}\right\rfloor}\left(01^{s_{\frac{a\alpha}{1-\alpha},\frac{\rho}{1-\alpha}+(k-1)\frac{\alpha}{1-\alpha}}(j)+\left\lfloor\frac{a\alpha}{1-\alpha}\right\rfloor}\right)_{j\in\mathbb{N}}. \end{aligned}$$

On pose $\beta = \frac{a\alpha}{1+(a-1)\alpha}$ et $\delta = \frac{\rho+(k-1)\alpha}{1+(a-1)\alpha}$. Clairement, les réels β et δ sont de partie entière nulle. De plus, on a $\frac{\beta}{1-\beta} = \frac{a\alpha}{1-\alpha}$ et $\frac{\delta}{1-\beta} = \frac{\rho+(k-1)\alpha}{1-\alpha}$. Par la proposition 4.1, on obtient

$$M_{k,a}(s_{\alpha,\rho}) = s_{\frac{a\alpha}{1+(a-1)\alpha},\frac{\rho+(k-1)\alpha}{1+(a-1)\alpha}}.$$

On étudie à présent la suite $s'_{\alpha,\rho}$ où α est un irrationnel de $]0,1[$ et ρ un réel de $]0,1]$. À partir de la relation $s'_{\alpha,\rho} = 1^{\lceil\frac{\rho}{1-\alpha}\rceil-1}0\left(1^{s'_{\frac{\alpha}{1-\alpha},\frac{\rho}{1-\alpha}}(i)+\lfloor\frac{\alpha}{1-\alpha}\rfloor}0\right)_{i\in\mathbb{N}}$, on vérifie l'égalité entre $M_{k,a}(s'_{\alpha,\rho})$ et

$$1^{\lceil\frac{\rho}{1-\alpha}\rceil-1+\sum_{i=0}^{k-2}\left(s'_{\frac{\alpha}{1-\alpha},\frac{\rho}{1-\alpha}}(i)+\lfloor\frac{\alpha}{1-\alpha}\rfloor\right)}\left(01^{\sum_{i=ja+k-1}^{(j+1)a+k-2}\left(s'_{\frac{\alpha}{1-\alpha},\frac{\rho}{1-\alpha}}(i)+\lfloor\frac{\alpha}{1-\alpha}\rfloor\right)}\right)_{j\in\mathbb{N}}$$

d'où

$$\begin{aligned} M_{k,a}(s'_{\alpha,\rho}) &= 1^{\lceil\frac{(k-1)\alpha+\rho}{1-\alpha}\rceil-1}\left(01^{s'_{\frac{a\alpha}{1-\alpha},\frac{\rho+(k-1)\alpha}{1-\alpha}}(j)+\lfloor\frac{a\alpha}{1-\alpha}\rfloor}\right)_{j\in\mathbb{N}} \\ &= s'_{\frac{a\alpha}{1+(a-1)\alpha},\frac{\rho+(k-1)\alpha}{1+(a-1)\alpha}}.\ \star \end{aligned}$$

Preuve de la proposition 4.2 (Action de $D_{k,a}$). Soient α un irrationnel de $]0,1[$ et ρ un réel de $[0,1[$. Comme on effectue des suppressions périodiques de la lettre 1, on choisit de représenter $s_{\alpha,\rho}$ sous la forme

$$s_{\alpha,\rho} = 0^{\lceil\frac{1-\rho}{\alpha}\rceil-1}\left(10^{s'_{\frac{1-\alpha}{\alpha},\frac{1-\rho}{\alpha}}(i)+\lfloor\frac{1-\alpha}{\alpha}\rfloor}\right)_{i\in\mathbb{N}}.$$

En posant $v = \left\lceil\frac{1-\rho}{\alpha}\right\rceil - 1 + \sum_{i=0}^{k-2}\left(s'_{\frac{1-\alpha}{\alpha},\frac{1-\rho}{\alpha}}(i) + \left\lfloor\frac{1-\alpha}{\alpha}\right\rfloor\right)$ on en déduit

$$\begin{aligned} D_{k,a}(s_{\alpha,\rho}) &= 0^v\left(10^{\sum_{i=ja+k-1}^{(j+1)a+k-2}\left(s'_{\frac{1-\alpha}{\alpha},\frac{1-\rho}{\alpha}}(i)+\lfloor\frac{1-\alpha}{\alpha}\rfloor\right)}\right)_{j\in\mathbb{N}} \\ &= 0^{\lceil\frac{1-\rho+(k-1)(1-\alpha)}{\alpha}\rceil-1}\left(10^{s'_{\frac{a(1-\alpha)}{\alpha},\frac{1-\rho+(k-1)(1-\alpha)}{\alpha}}(j)+\lfloor\frac{a(1-\alpha)}{\alpha}\rfloor}\right)_{j\in\mathbb{N}}. \end{aligned}$$

En posant $\beta = \frac{\alpha}{a(1-\alpha)+\alpha}$ et $\delta = \frac{\rho+(a-k)(1-\alpha)}{a(1-\alpha)+\alpha}$, comme β et δ sont de partie entière nulle, on identifie une des écritures de $s_{\beta,\delta}$.
On suppose maintenant que α est un irrationnel de $]0,1[$ et ρ un réel de $]0,1]$. Pour démontrer $D_{k,a}(s'_{\alpha,\rho}) = s'_{\frac{\alpha}{a(1-\alpha)+\alpha},\frac{\rho+(a-k)(1-\alpha)}{a(1-\alpha)+\alpha}}$ on procède de façon similaire à partir de l'égalité

$$s'_{\alpha,\rho} = 0^{\lfloor\frac{1-\rho}{\alpha}\rfloor}\left(10^{s_{\frac{1-\alpha}{\alpha},\frac{1-\rho}{\alpha}}(i)+\lfloor\frac{1-\alpha}{\alpha}\rfloor}\right)_{i\in\mathbb{N}}.\ \star$$

Preuve du corollaire 4.1. Soient α un irrationnel de $]0,1[$ et ρ un réel de $]0,1[$. Soient k_1 et k_2 des entiers compris entre 1 et a. D'après la proposition 4.2, on obtient

$$M_{k_1,a}D_{k_2,a}(s_{\alpha,\rho}) = s_{\alpha,\frac{\rho+a-k_2+(k_1-1+k_2-a)\alpha}{a}}$$

et

$$M_{k_1,a}D_{k_2,a}(s'_{\alpha,\rho}) = s'_{\alpha,\frac{\rho+a-k_2+(k_1-1+k_2-a)\alpha}{a}}.$$

On en déduit

$$M_{1,a}D_{a,a}(s_{\alpha,\rho}) = s_{\alpha,\frac{\rho}{a}}$$

ainsi que

$$M_{1,a}D_{a,a}(s'_{\alpha,\rho}) = s'_{\alpha,\frac{\rho}{a}} \text{ et } M_{k_1,a}D_{a,a}(s_{\alpha,\alpha}) = s_{\alpha,\frac{k_1}{a}\alpha}.$$

Enfin, comme on a

$$M_{k_1,a}D_{k_2,a}(s_{\alpha,0}) = s_{\alpha,\frac{a-k_2+(k_1-1+k_2-a)\alpha}{a}}$$

et

$$M_{k_1,a}D_{k_2,a}(s'_{\alpha,0}) = s'_{\alpha,\frac{a-k_2+1+(k_1-1+k_2-a)\alpha}{a}}$$

on vérifie $M_{a+1-k_2,a}D_{k_2,a}(s_{\alpha,0}) = s_{\alpha,-\frac{k_2}{a}}$ et $M_{k_1,a}D_{a+1-k_1,a}(s'_{\alpha,0}) = s'_{\alpha,\frac{k_1}{a}}$. ⋆

Remarques.
Pour multiplier l'intercept d'une suite $s_{\alpha,\alpha}$ par n'importe quel rationnel positif, on utilise le procédé suivant. Soit $c \in \mathbb{N}$. On effectue la division euclidienne de c par a sous la forme $c = aq+r$ avec $0 \leq r < a$, et on remarque $s_{\alpha,\frac{c}{a}\alpha} = S^q(s_{\alpha,\frac{r}{a}\alpha})$. Si r est nul la propriété est triviale, sinon on a $s_{\alpha,\frac{c}{a}\alpha} = S^q(M_{r,a}D_{a,a}(s_{\alpha,\alpha}))$. Plus généralement, par application des transducteurs produits $M_{k_1,a}D_{k_2,a}$ sur les mots $s_{\alpha,\alpha}$, on retrouve toutes les suites admissibles associées à l'ensemble $\mathcal{C}(a)$. La propriété d'invariance des suites caractéristiques, énoncée au corollaire suivant, est obtenue par J. Justin et G. Pirillo [61], à partir d'un résultat découvert par G. Rauzy [93].

Corollaire 4.2 *Les suites caractéristiques, les mots de Christoffel positifs d'une part et négatifs d'autre part, sont les mots sturmiens respectivement laissés fixes par les transducteurs $M_{a,a}D_{a,a}$, $M_{1,a}D_{a,a}$ et $M_{a,a}D_{1,a}$. Les mots sturmiens laissés fixes par $M_{1,a}D_{1,a}$ sont les suites $s_{\alpha,1-\alpha}$ et $s'_{\alpha,1-\alpha}$ avec $(\alpha, 1-\alpha) \in \Lambda$.*

Preuve. Soient α un irrationnel de $]0,1[$ et (ρ,ρ') un couple de réels appartenant à $[0,1[\times]0,1]$. On vérifie facilement

$$s_{\alpha,\rho} = M_{a,a}D_{a,a}(s_{\alpha,\rho}) \Leftrightarrow s_{\alpha,\rho} = s_{\alpha,\frac{\rho+(a-1)\alpha}{a}} \Leftrightarrow \rho = \alpha$$

et le mot $s'_{\alpha,\rho'}$ est laissé fixe par $M_{a,a}D_{a,a}$ si et seulement si on a $\rho' = \alpha$.
En remarquant

$$s_{\alpha,\rho} = M_{1,a}D_{a,a}(s_{\alpha,\rho}) \Leftrightarrow s_{\alpha,\rho} = s_{\alpha,\frac{\rho}{a}} \Leftrightarrow \rho = 0$$

et $M_{1,a}D_{a,a}(s'_{\alpha,\rho'}) = s'_{\alpha,\frac{\rho'}{a}}$, il apparaît que les seuls mots sturmiens laissés fixes par $M_{1,a}D_{a,a}$ sont les mots de Christoffel positifs. Le résultat concernant le transducteur $M_{a,a}D_{1,a}$ et les mots de Christoffel négatifs se démontre de la même façon. Enfin, on a

$$s_{\alpha,\rho} = M_{1,a}D_{1,a}(s_{\alpha,\rho}) \Leftrightarrow s_{\alpha,\rho} = s_{\alpha,\frac{\rho+(a-1)(1-\alpha)}{a}} \Leftrightarrow \rho = 1-\alpha$$

et

$$s'_{\alpha,\rho'} = M_{1,a}D_{1,a}(s'_{\alpha,\rho'}) \Leftrightarrow s'_{\alpha,\rho'} = s'_{\alpha,\frac{\rho'+(a-1)(1-\alpha)}{a}} \Leftrightarrow \rho' = 1-\alpha. \star$$

Remarque. Par la suite, on étudie plus précisément les propriétés des transducteurs $M_{1,a}$ et $D_{a,a}$. Afin de simplifier les notations, on pose $M_a = M_{1,a}$ et $D_a = D_{a,a}$.

4.3 Mots de Christoffel

4.3.1 Définition géométrique

À tout mot sur l'alphabet $\mathcal{A}$, on associe un chemin dans le réseau des points à coordonnées entières : à chaque occurrence de la lettre 0 correspond un pas horizontal dirigé vers la droite, et à chaque occurrence de 1, un pas vertical vers le haut.

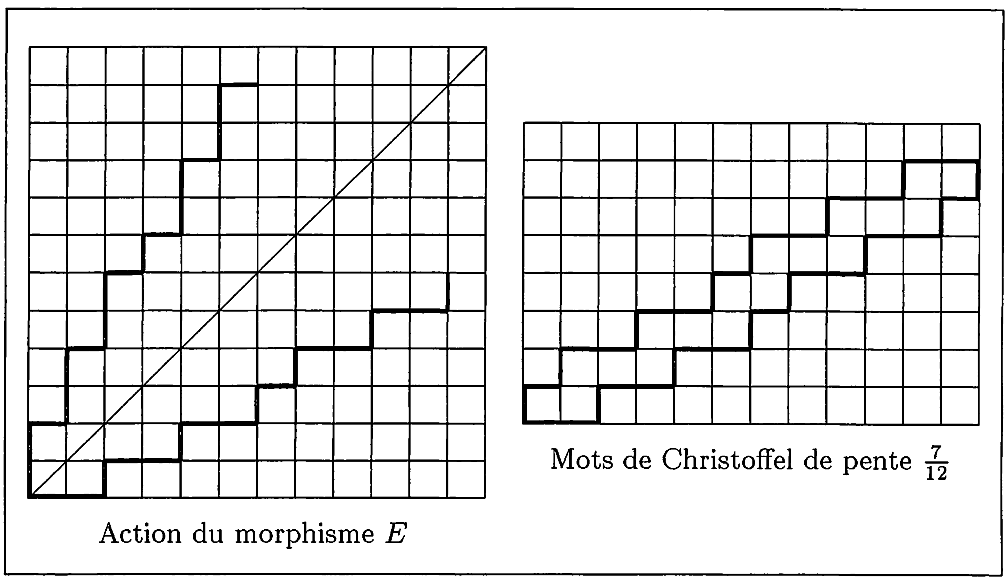

FIG. 4.1: Illustration géométrique des mots de Christoffel

Définition 4.3 *Soit (p, q) un couple d'entiers premiers entre eux, avec $p \geq 0$ et $q \geq 1$. Soit $r = \dfrac{p}{q}$. Soit D_r la demi-droite de pente r passant par l'origine.*
Le mot de Christoffel positif de pente r, noté $Chrp(r)$, est le mot de longueur

$p+q$, dont le chemin est le plus proche de D_r, parmi les mots dont le chemin reste au-dessous de D_r. Le mot de Christoffel négatif de pente r, noté $Chrn(r)$, est le mot de longueur $p+q$, dont le chemin est le plus proche de D_r, parmi les mots dont le chemin reste au-dessus de D_r. On pose $Chrp(\infty) = 1$ et $Chrn(\infty) = 1$.

À partir d'une demi-droite D_θ de pente égale à un irrationnel θ positif, on définit de façon similaire les mots de Christoffel infinis. Comme D_θ ne rencontre aucun point du réseau à coordonnées entières, hormis l'origine, il n'y a pas d'ambiguïté possible dans la construction de tels mots. La proposition 4.3, démontrée par J.-P. Borel et F. Laubie à partir des intervalles de Farey [22], permet de justifier la double terminologie employée jusqu'ici :

Proposition 4.3 *Soit θ un irrationnel positif. Les mots de Christoffel $Chrp(\theta)$ et $Chrn(\theta)$ sont respectivement égaux à $s_{\frac{\theta}{\theta+1},0}$ et $s'_{\frac{\theta}{\theta+1},0}$.*

Preuve. Par simple traduction de l'énoncé géométrique, on a

$$Chrp(\theta) = \left(01^{\lfloor (k+1)\theta \rfloor - \lfloor k\theta \rfloor}\right)_{k\in\mathbb{N}}.$$

D'après la proposition 4.1, on reconnaît une écriture du mot $s_{\frac{\theta}{\theta+1},0}$. De façon similaire, on obtient $Chrn(\theta) = \left(1^{\lceil (k+1)\theta \rceil - \lceil k\theta \rceil}0\right)_{k\in\mathbb{N}} = s'_{\frac{\theta}{\theta+1},0}$. ⋆

Remarque.
Si on reformule la proposition 4.2 dans le cas des mots de Christoffel positifs, on montre $M_a(Chrp(\theta)) = Chrp(a\theta)$ et $D_a(Chrp(\theta)) = Chrp\left(\frac{\theta}{a}\right)$. On retrouve ainsi, en cas particulier, une propriété établie géométriquement par J.-P. Borel [21].

4.3.2 Transducteurs et homographies

Soit θ un irrationnel positif dont on connaît un début de développement en fraction continue. On cherche à en déduire celui de $f(\theta)$ où f est une homographie à coefficients entiers, de discriminant non nul. On traite ce problème, résolu notamment par G. N. Raney [91], en mettant en évidence certaines propriétés des mots de Christoffel.

Lemme 4.3 (Borel et Laubie, [22]) *Soit θ un irrationnel positif.*
On a $S(Chrp(\theta)) = S(Chrn(\theta))$ ainsi que

$$E(Chrp(\theta)) = Chrn(\frac{1}{\theta}) \text{ et } EDE(Chrp(\theta)) = Chrp(\theta+1).$$

Preuve. Par symétrie par rapport à la première bissectrice, on démontre le second résultat. La proposition 4.3 permet de conclure. ⋆

Proposition 4.4 *Soit (t, u, v, w) un quadruplet d'entiers positifs dont le discriminant est non nul. Soit θ un irrationnel positif. Il existe un transducteur qui transforme le mot de Christoffel $Chrp(\theta)$ en $Chrp(\frac{t\theta+u}{v\theta+w})$.*

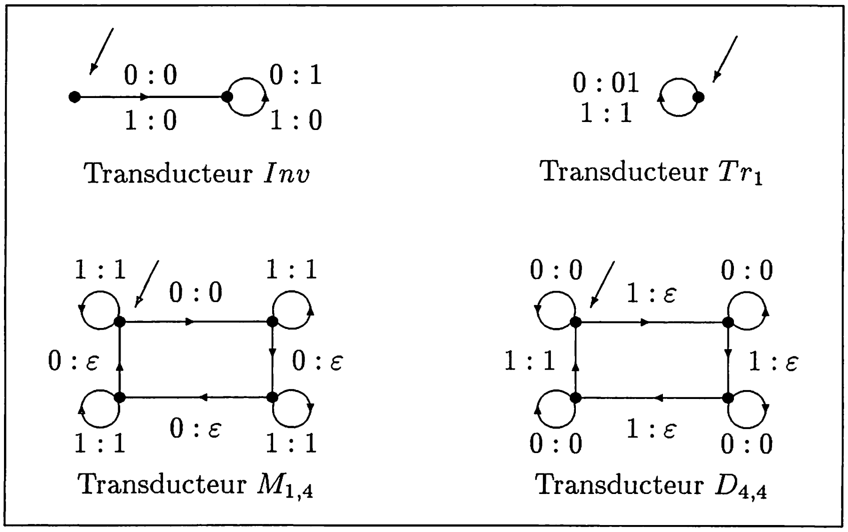

FIG. 4.2: Exemples de transducteurs

Preuve. On note Inv la transformation qui à un mot infini x associe $0ES(x)$. Pour tout entier e, on pose $Tr_e = ED^eE$. Soit β un irrationnel positif. D'après le lemme 4.3, la substitution Tr_e transforme le mot de Christoffel $Chrp(\beta)$ en $Chrp(\beta + e)$. Et l'image de $Chrp(\beta)$ par Inv est égale à $Chrp(\frac{1}{\beta})$. Soit δ le discriminant de (t, u, v, w) et soit $h(\theta) = \frac{t\theta+u}{v\theta+w}$.

Si $\delta < 0$ on a nécessairement $v \neq 0$ et $h(\theta) = \dfrac{t + \frac{uv-tw}{v\theta+w}}{v}$. On passe donc de $Chrp(\theta)$ à $Chrp(h(\theta))$ par le transducteur $D_vTr_tM_{uv-tw}InvTr_wM_v$. Si $\delta > 0$ on vérifie $t \neq 0$ et on a $\dfrac{1}{h(\theta)} = \dfrac{v\theta + w}{t\theta + u} = \dfrac{v + \frac{tw-uv}{t\theta+u}}{t}$. On remarque alors que l'application $InvD_tTr_vM_{tw-uv}InvTr_uM_t$ convient. $\star$

On cherche maintenant à construire le développement en fraction continue d'un irrationnel à partir de sa suite caractéristique. Ce problème est résolu en 1960 par I. G. Connell [35], à l'aide d'un algorithme relativement coûteux. Une autre approche, liée aux propriétés des intervalles *standard*, est formulée par J.-P. Borel et F. Laubie [22]. On choisit de présenter une nouvelle méthode de calcul, qui permet de répondre à la question posée, sans avoir à manipuler un autre mot que la suite initiale.

Définition 4.4
Soit $\alpha = [0, a_1, a_2, \ldots]$. La suite des réduites de α, notée $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n\geq 0}$, est définie par les règles suivantes :

$$\begin{array}{llll} p_{-1} = 1, & p_0 = 0, & p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} & (n \geq 1), \\ q_{-1} = 0, & q_0 = 1, & q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} & (n \geq 1). \end{array}$$

Proposition 4.5 *Soit* $\alpha = [0, a_1, a_2, \ldots]$. *Soit* $(q_n)_{n \geq -1}$ *la suite des dénominateurs des réduites de* α. *On a*

$$\forall\, i \in \mathbb{N}^* \quad a_i = \min\{c \in \mathbb{N},\ c \geq 2 \mid s_{\alpha,\alpha}(cq_{i-1} + q_{i-2} - 2) = i \pmod 2\} - 1.$$

Pour établir cette proposition, on utilise le lemme suivant :

Lemme 4.4 (Fraenkel, Mushkin et Tassa, [50], Lemme 2)
Soit $\alpha = [0, a_1, a_2, \ldots]$. *Soit* $(q_n)_{n \geq -1}$ *la suite des dénominateurs des réduites de* α. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Si* q *est un entier compris entre* 0 *et* $q_n - 3$, *on a*

$$s_{\alpha,\alpha}(q + q_{n-1}) = s_{\alpha,\alpha}(q).$$

Preuve. Soit q' un entier avec $1 \leq q' \leq q_n - 1$. La relation

$$\lfloor (q' + q_{n-1})\alpha \rfloor = p_{n-1} + \lfloor q'\alpha \rfloor$$

est un résultat classique de la théorie des fractions continues. Ainsi, pour tout entier q compris entre 0 et $q_n - 3$, on a

$$s_{\alpha,\alpha}(q + q_{n-1}) = \lfloor (q + q_{n-1} + 2)\alpha \rfloor - \lfloor (q + q_{n-1} + 1)\alpha \rfloor = s_{\alpha,\alpha}(q). \star$$

Preuve de la proposition 4.5. Comme le mot $0^{a_1 - 1}1$ est un préfixe de $s_{\alpha,\alpha}$, on remarque $\min\{c \in \mathbb{N},\ c \geq 2 \mid s_{\alpha,\alpha}(c - 2) = 1\} = a_1 + 1$. Soit $i \geq 2$ et soit j un entier compris entre 1 et $a_i - 1$. On a $0 \leq jq_{i-1} + q_{i-2} - 2 \leq q_i - 3$. On en déduit

$$s_{\alpha,\alpha}(jq_{i-1} + q_{i-2} - 2) = s_{\alpha,\alpha}((j+1)q_{i-1} + q_{i-2} - 2)$$

ce qui permet d'affirmer

$$\forall\, j \in \mathbb{N},\ 1 \leq j \leq a_i,\ \ s_{\alpha,\alpha}(jq_{i-1} + q_{i-2} - 2) = s_{\alpha,\alpha}(q_i - 2) = \lfloor q_i\alpha \rfloor - \lfloor (q_i - 1)\alpha \rfloor.$$

Si l'entier i est pair, on vérifie facilement $\lfloor q_i\alpha \rfloor = p_i$ et $\lfloor (q_i - 1)\alpha \rfloor = p_i - 1$, d'où

$$\forall\, j \in \mathbb{N},\ 1 \leq j \leq a_i,\ \ s_{\alpha,\alpha}(jq_{i-1} + q_{i-2} - 2) = 1 \neq i \pmod 2.$$

Si l'entier i est impair, on a $\lfloor q_i\alpha \rfloor = p_i - 1$ et $\lfloor (q_i - 1)\alpha \rfloor = p_i - 1$, d'où

$$\forall\, j \in \mathbb{N},\ 1 \leq j \leq a_i,\ \ s_{\alpha,\alpha}(jq_{i-1} + q_{i-2} - 2) = 0 \neq i \pmod 2.$$

Il reste à montrer, pour tout entier $i \geq 2$, que l'on a

$$s_{\alpha,\alpha}((a_i + 1)q_{i-1} + q_{i-2} - 2) = i \pmod 2.$$

À l'aide d'arguments similaires à ceux développés jusqu'ici, on montre

$$\begin{aligned} s_{\alpha,\alpha}((a_i + 1)q_{i-1} + q_{i-2} - 2) &= s_{\alpha,\alpha}(q_i + q_{i-1} - 2) \\ &= \lfloor q_{i+1}\alpha \rfloor - \lfloor (q_{i+1} - 1)\alpha \rfloor = i \pmod 2. \end{aligned}$$

En résumé, on obtient

$$\min\{c \in \mathbb{N},\ c \geq 2 \mid s_{\alpha,\alpha}(cq_{i-1} + q_{i-2} - 2) = i \pmod 2\} = a_i + 1. \star$$

Pour terminer, il reste à décrire un procédé permettant de construire efficacement une suite caractéristique à partir du développement en fraction continue de sa pente. On choisit de présenter le lemme 4.5 qui est en étroite relation avec un résultat conjecturé par E. B. Christoffel [31], démontré par A. A. Markov [75] et repris récemment par T. C. Brown [28].

Définition 4.5
Soit $\alpha = [0, a_1, a_2, \ldots]$. On pose $u_0 = 0$ et $u_n = G^{a_1-1}ED \ldots G^{a_n-1}ED(0)$ pour tout entier n non nul.

Lemme 4.5 *Soient $\alpha = [0, a_1, a_2, \ldots]$ et $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}}$ la suite dont le terme général est $\alpha_j = [0, a_{j+1}, a_{j+2}, \ldots]$ pour $j \in \mathbb{N}$. On a*

$$s_{\alpha,\alpha} = u_1 \ldots u_n(G^{a_1-1}ED \ldots G^{a_n-1}ED(s_{\alpha_n,\alpha_n})) \text{ pour } n \geq 1$$

et

$$u_m = u_{m-1}^{a_m-1} u_{m-2} u_{m-1} \text{ pour } m \geq 2.$$

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On remarque

$$u_1 \ldots u_n(G^{a_1-1}ED \ldots G^{a_n-1}ED(s_{\alpha_n,\alpha_n})) = u_1 \ldots u_{n-1}(G^{a_1-1}ED \ldots G^{a_{n-1}-1}ED(s_{\alpha_{n-1},\alpha_{n-1}})).$$

Par itération, on a

$$\begin{aligned} u_1 \ldots u_n(G^{a_1-1}ED \ldots G^{a_n-1}ED(s_{\alpha_n,\alpha_n})) &= u_1 G^{a_1-1}ED(s_{\alpha_1,\alpha_1}) \\ &= G^{a_1-1}ED(s_{\alpha_1,0}) = s_{\alpha,\alpha}. \end{aligned}$$

La seconde propriété est immédiate par récurrence. $\star$

En pratique, on ne suppose connaître qu'un nombre fini de quotients partiels : c'est pourquoi on introduit la proposition 4.6.

Proposition 4.6 *Soit $\alpha = [0, a_1, a_2, \ldots]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le mot*

$$u_1 \ldots u_n(u_{n-1}^{a_n-1} \ldots u_1^{a_2-1} u_0^{a_1-1})$$

est le plus grand préfixe de $s_{\alpha,\alpha}$ que l'on peut construire à partir des quotients partiels $(a_1, \ldots, a_n)$ de α.

Preuve. Soit $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $\alpha_j = [0, a_{j+1}, a_{j+2}, \ldots]$. Soit $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_0 = 1$ et $v_m = G^{a_1-1}ED \ldots G^{a_m-1}ED(1)$ pour $m \in \mathbb{N}^*$. Pour tout entier m, on note z_m le plus grand préfixe commun à u_m et v_m.

On observe $z_1 = 0^{a_1-1} = u_0^{a_1-1} z_0$ et $|z_1| < \min(|u_1|, |v_1|)$. Soit $m \in \mathbb{N}$ avec $m \geq 2$. On remarque

$$u_m = G^{a_1-1}ED \ldots G^{a_{m-1}-1}ED(0^{a_m-1}1)$$

et

$$v_m = G^{a_1-1}ED\dots G^{a_{m-1}-1}ED(0^{a_m-1}01).$$

Autrement dit, on a $u_m = u_{m-1}^{a_m-1}v_{m-1}$ et $v_m = u_{m-1}^{a_m-1}u_{m-1}v_{m-1}$. Ainsi, par récurrence, on obtient $|z_i| < \min(|u_i|, |v_i|)$ et $z_i = u_{i-1}^{a_i-1}z_{i-1}$ pour tout entier i non nul. On en déduit immédiatement

$$z_n = u_{n-1}^{a_n-1}\dots u_1^{a_2-1}u_0^{a_1-1}.$$

D'après le lemme précédent, on a

$$s_{\alpha,\alpha} = u_1\dots u_n(G^{a_1-1}ED\dots G^{a_n-1}ED(s_{\alpha_n,\alpha_n})).$$

Le quotient partiel a_{n+1} étant supposé inconnu, on ne peut pas décider si s_{α_n,α_n} appartient à $0\mathcal{A}^\omega$ ou $1\mathcal{A}^\omega$. Comme on a $|z_n| < \min(|u_n|, |v_n|)$, il est facile de conclure. $\star$

Remarques. L'algorithme détaillé est donné page 119. Les propositions 4.4, 4.5 et 4.6 assurent la validité de la démarche.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On affirme que le mot $u_1\dots u_n(u_{n-1}^{a_n-1}\dots u_1^{a_2-1}u_0^{a_1-1})$ est un palindrome. La démonstration de ce résultat est présentée page 92.

Chapitre 5

Antécédents des mots sturmiens

La définition arithmétique permet de manipuler les mots sturmiens, sans avoir recours à leur écriture sur l'alphabet $\mathcal{A}$. Cependant, comme l'illustre le chapitre précédent, cette représentation purement formelle est parfois insuffisante. C'est pourquoi il est intéressant de disposer d'un algorithme de construction des mots sturmiens, en ayant pour objectif de limiter le nombre de parties entières à calculer. La méthode suivie est intimement liée à l'étude des antécédents des mots sturmiens par les morphismes sturmiens.

Dans un premier temps, on caractérise tous les mots dont l'image par un morphisme sturmien est équilibrée. Des procédés de correction des mots déséquilibrés sont ainsi mis en évidence.

Soit y un mot sturmien donné sous forme arithmétique. En utilisant les résultats précédents, on résout l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x, où f est un morphisme décomposé sur le monoïde de Sturm. On montre alors qu'il existe une suite de morphismes sturmiens, de longueur strictement croissante, pour lesquels la solution trouvée est un mot sturmien. En introduisant ainsi la notion de mots infiniment sturmiens, on obtient l'algorithme annoncé. Dans certains cas, des formules récurrentes aux propriétés remarquables sont présentées.

5.1 Correction des mots déséquilibrés

Définition 5.1 *Soient $\mathcal{E}$ l'ensemble des mots infinis équilibrés et $\mathcal{D}$ son complémentaire parmi les mots infinis.*

On commence par décrire les antécédents des mots sturmiens par les générateurs du monoïde de Sturm. Les résultats énoncés aux lemmes 5.1, 5.2 et 5.3 sont évoqués dans une des preuves de l'article [80].

Lemme 5.1 *Soit x un mot infini. On a*

$$E(x) \in \mathcal{E} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathcal{E} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(x) \in \mathcal{E}.$$

Preuve. Clairement, il suffit d'établir la seconde équivalence. On suppose que x est un élément de $\mathcal{E}$. Si $\varphi(x)$ appartient à $\mathcal{D}$, il existe un préfixe fini w de x tel que $\varphi(w)$ est déséquilibré. Grâce au lemme 2.4, on obtient une contradiction en remarquant que w est équilibré. Réciproquement, on suppose que x est un élément de $\mathcal{D}$. Il existe alors un mot fini s et une lettre a tels que $0s0$ et $1s1a$ sont simultanément des facteurs de x. On a donc $1\varphi(s)01 \in \mathcal{F}act(\varphi(x))$ ainsi que $0\varphi(s)00 \in \mathcal{F}act(\varphi(x))$. On en déduit $\varphi(x) \in \mathcal{D}$. $\star$

Lemme 5.2 *Le morphisme $\tilde{\varphi}$ préserve globalement l'ensemble $\mathcal{E}$.*

Preuve. Il suffit d'utiliser les lemmes 2.1 et 5.1. $\star$

Lemme 5.3 *Soit x un élément de $\mathcal{D}$. Le mot $\tilde{\varphi}(x)$ est équilibré si et seulement si le mot x appartient à l'ensemble $1\mathcal{E}$.*

Preuve. Si le mot x commence par 0, il existe un mot fini u et une lettre a tels que $0u0 \in \mathcal{F}act(x)$ et $a1u1 \in \mathcal{F}act(x)$. On a ainsi $10\tilde{\varphi}(u)1 \in \mathcal{F}act(\tilde{\varphi}(x))$ et $00\tilde{\varphi}(u)0 \in \mathcal{F}act(\tilde{\varphi}(x))$ puis $\tilde{\varphi}(x) \in \mathcal{D}$. On suppose désormais qu'il existe un mot x' tel que $x = 1x'$. On a alors $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x')$ et le lemme 5.1 permet de conclure. $\star$

À l'aide des ensembles suivants, on définit une partition de $\mathcal{A}^\omega$:

Définition 5.2 *Un mot fini appartient à $\mathcal{X}$ s'il contient 0 et 1 comme facteurs. On pose $\mathcal{D}_k = \bigcup_{a\in\mathcal{A}} a^k\overline{a}\mathcal{E} \cap a^k\mathcal{D}$ pour tout entier k non nul.*

Lemme 5.4
Les ensembles $\mathcal{X}\mathcal{D}$, $0^+\mathcal{E} \cup 1^+\mathcal{E}$ et $\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \mathcal{D}_k$ forment une partition de $\mathcal{A}^\omega$.

Preuve. Clairement, ces trois ensembles sont disjoints. Soit x un mot infini qui n'appartient ni à $0^+\mathcal{E} \cup 1^+\mathcal{E}$ ni à $\mathcal{X}\mathcal{D}$. En particulier, il apparaît que le mot x est déséquilibré. De plus, on a $x \in \mathcal{A}^*\mathcal{E}$. En effet, si ce n'est pas le cas, aucun shift de x n'est équilibré, et il est alors facile de vérifier que x appartient à $\mathcal{X}\mathcal{D}$, ce qui est contraire aux hypothèses. Il existe donc un mot fini u, une lettre a et un mot infini y tels que $x = uay$ avec $y \in \mathcal{E}$ et $ay \in \mathcal{D}$. Comme $x \notin \mathcal{X}\mathcal{D}$, on a même $u \in a^*$ ou bien $u \in \overline{a}^+$. Si $u \in a^*$ alors $x \in a^+\mathcal{E}$, ce qui est absurde. Il existe donc un entier $k \geq 1$ tel que $x \in \overline{a}^k a\mathcal{E} \cap \overline{a}^k\mathcal{D}$. On en déduit $x \in \mathcal{D}_k$, ce qui permet de conclure. $\star$

L'action de St sur les ensembles $\mathcal{X}\mathcal{D}$ et $0^+\mathcal{E} \cup 1^+\mathcal{E}$ est illustrée par les lemmes 5.5 et 5.6.

Lemme 5.5 *Soient $u \in \mathcal{X}$ et $v \in \mathcal{D}$. Pour tout morphisme sturmien f, le mot $f(uv)$ est déséquilibré.*

Preuve. D'après le lemme 5.1, les mots $E(uv)$ et $\varphi(uv)$ appartiennent à $\mathcal{X}\mathcal{D}$. On cherche à montrer $\tilde{\varphi}(uv) \in \mathcal{X}\mathcal{D}$. Si la lettre 1 est un suffixe de u, il existe un mot u' tel que $u = u'1$. On vérifie alors $\tilde{\varphi}(uv) = \tilde{\varphi}(u')0\tilde{\varphi}(v) = \tilde{\varphi}(u')\tilde{\varphi}(1v)$. Comme

la lettre 0 est un facteur de u', le mot $\tilde{\varphi}(u')$ est un élément de $\mathcal{X}$. De plus, on a $\tilde{\varphi}(1v) \in \mathcal{D}$ et donc $\tilde{\varphi}(uv) \in \mathcal{X}\mathcal{D}$.
On suppose à présent qu'il existe un mot u' tel que $u = u'0$. Comme $1 \in \mathcal{F}act(u')$, on a $0 \in \mathcal{F}act(\tilde{\varphi}(u'))$. On remarque alors $\tilde{\varphi}(uv) = \tilde{\varphi}(u')10\tilde{\varphi}(v) = \tilde{\varphi}(u')1\tilde{\varphi}(1v)$. Comme $\tilde{\varphi}(u')1 \in \mathcal{X}$ et $\tilde{\varphi}(1v) \in \mathcal{D}$, on a $\tilde{\varphi}(uv) \in \mathcal{X}\mathcal{D}$.
On montre ainsi par récurrence que la relation $f(uv) \in \mathcal{X}\mathcal{D}$ est satisfaite pour tout morphisme sturmien f. $\star$

Lemme 5.6 *Soient un entier $k \geq 1$ et x un mot de $\mathcal{E}$. Les mots $(\tilde{\varphi}E)^{k-1}\tilde{\varphi}(1^k x)$ et $(\tilde{\varphi}E)^k(0^k x)$ sont équilibrés.*

Preuve. On commence par remarquer que le mot $\tilde{\varphi}(1x)$ est équilibré.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $z = (\tilde{\varphi}E)^{n-1}\tilde{\varphi}(1^n x)$. On a

$$\begin{aligned}(\tilde{\varphi}E)^n\tilde{\varphi}(1^{n+1}x) &= (\tilde{\varphi}E)((\tilde{\varphi}E)^{n-1}(0)(\tilde{\varphi}E)^{n-1}\tilde{\varphi}(1^n x)) \\ &= (\tilde{\varphi}E)(0(\tilde{\varphi}E)^{n-1}\tilde{\varphi}(1^n x)).\end{aligned}$$

Si z appartient à $\mathcal{E}$, on en déduit $(\tilde{\varphi}E)^n\tilde{\varphi}(1^{n+1}x) = (\tilde{\varphi}E)(0z) = \tilde{\varphi}(1E(z)) \in \mathcal{E}$, ce qui permet d'établir le premier résultat par récurrence. Autrement dit, pour tout entier $k \geq 1$ et tout mot $y \in \mathcal{E}$, on a $(\tilde{\varphi}E)^{k-1}\tilde{\varphi}(1^k y) \in \mathcal{E}$. En appliquant cette formule au mot équilibré $y = E(x)$, on obtient finalement

$$(\tilde{\varphi}E)^k(0^k x) = (\tilde{\varphi}E)^{k-1}\tilde{\varphi}E(0^k x) = (\tilde{\varphi}E)^{k-1}\tilde{\varphi}(1^k E(x)) \in \mathcal{E}. \star$$

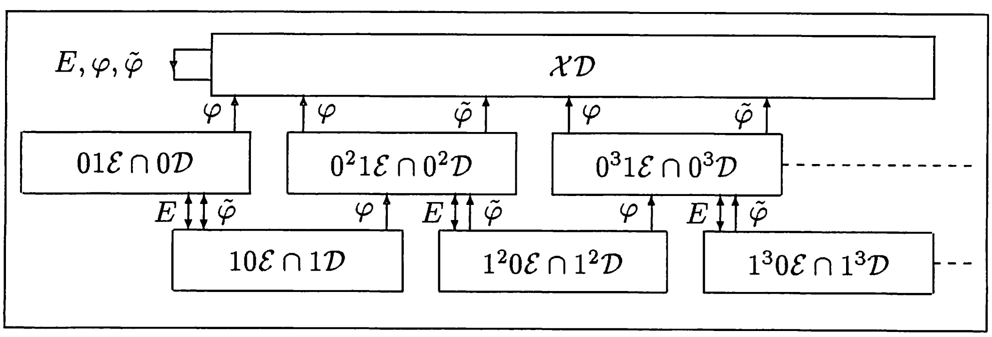

FIG. 5.1: Action de St sur $\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \mathcal{D}_k$

Proposition 5.1 *Soit $x \in \mathcal{A}^\omega$. On a*

$$\exists\, \gamma \in St \;\; \gamma(x) \in \mathcal{E} \;\Leftrightarrow\; \exists\, a \in \mathcal{A} \;\; \exists\, n \in \mathbb{N} \;\; \exists\, y \in \mathcal{E} \quad x = a^n y.$$

Preuve. Dans un premier temps, on suppose que le mot x appartient à $0^+\mathcal{E} \cup 1^+\mathcal{E}$. D'après le lemme 5.6, il existe un morphisme sturmien γ tel que $\gamma(x)$ est équilibré. En revanche, si $x \in \mathcal{X}\mathcal{D}$, d'après le lemme 5.5, aucun morphisme sturmien ne peut corriger x. En utilisant la partition de $\mathcal{A}^\omega$ définie au lemme 5.4, il reste à étudier l'action des morphismes sturmiens sur les mots appartenant à $\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \mathcal{D}_k$.

À cet effet, on construit le graphe présenté page 79. Soit k un entier non nul. On commence par remarquer que le morphisme E permute les états $0^k1\mathcal{E} \cap 0^k\mathcal{D}$ et $1^k0\mathcal{E} \cap 1^k\mathcal{D}$. On vérifie ensuite la validité des transitions associées à φ et $\tilde{\varphi}$.

Soit $z \in 1^k0\mathcal{E} \cap 1^k\mathcal{D}$. Il existe un mot équilibré w tel que $z = 1^k0w$. On a $\varphi(1^k0w) = 0^{k+1}1\varphi(w)$ et $\varphi(w) \in \mathcal{E}$. Comme $1\varphi(w) = 10\tilde{\varphi}(w) = \tilde{\varphi}(0w)$ et $0w \in \mathcal{D}$, d'après le lemme 5.3, on affirme que $1\varphi(w)$ est déséquilibré. Le mot $\varphi(z)$ appartient donc à $0^{k+1}1\mathcal{E} \cap 0^{k+1}\mathcal{D}$. De plus, on a $\tilde{\varphi}(1^k0w) = 0^k1\tilde{\varphi}(1w)$ et $\tilde{\varphi}(1w) \in \mathcal{E}$. Comme $1\tilde{\varphi}(1w) = \tilde{\varphi}(0w) \in \mathcal{D}$, on montre que $\tilde{\varphi}(z)$ appartient à $0^k1\mathcal{E} \cap 0^k\mathcal{D}$.

Soit $z \in 0^k1\mathcal{E} \cap 0^k\mathcal{D}$. Soit w le mot équilibré tel que $z = 0^k1w$. Clairement, on a

$$\varphi(0^k1w) = (01)^k\varphi(1w) \in \mathcal{X}\mathcal{D}.$$

De plus, si $k \geq 2$ on vérifie $\tilde{\varphi}(0^k1w) = (10)^k\tilde{\varphi}(1w) = (10)^{k-1}1\tilde{\varphi}(11w) \in \mathcal{X}\mathcal{D}$. Si $k = 1$ on montre $\tilde{\varphi}(z) \in 10\mathcal{E} \cap 1\mathcal{D}$. En effet, on a $\tilde{\varphi}(01w) = 10\tilde{\varphi}(1w) \in 10\mathcal{E}$ et $0\tilde{\varphi}(1w) = \varphi(1w) \in \mathcal{D}$.

Cet ensemble de relations permet d'établir la validité des transitions. Soient γ un morphisme sturmien et x un mot de $\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \mathcal{D}_k$. Par lecture sur le graphe, il apparaît que le mot $\gamma(x)$ appartient soit à $\mathcal{X}\mathcal{D}$ soit à $\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \mathcal{D}_k$. Dans les deux cas, le mot $\gamma(x)$ est déséquilibré.

En résumé, pour tout mot infini x, on a :

$$\exists\, \gamma \in St \;\; \gamma(x) \in \mathcal{E} \;\Leftrightarrow x \in 0^+\mathcal{E} \cup 1^+\mathcal{E}.$$

Pour conclure, il suffit de remarquer $0^+\mathcal{E} \cup 1^+\mathcal{E} = 0^*\mathcal{E} \cup 1^*\mathcal{E}$. ⋆

En notant $\overline{\mathcal{P}}$ l'ensemble des mots infinis non ultimement périodiques, on obtient finalement la caractérisation cherchée :

Corollaire 5.1 *Soit $x \in \mathcal{A}^\omega$. On a*

$$\exists\, \gamma \in St \;\; \gamma(x) \in \mathcal{E} \cap \overline{\mathcal{P}} \;\Leftrightarrow\; x \in \overline{\mathcal{P}} \cap \bigcup_{a\in\mathcal{A},\, n\in\mathbb{N}} a^n\mathcal{E}.$$

Preuve. Il suffit d'utiliser la proposition précédente et le lemme 2.3. ⋆

Remarque. À ce stade, il est légitime de s'interroger sur les procédés de correction des mots finis. On note $\mathcal{E}_f$ l'ensemble des mots finis équilibrés. Soit $x \in \mathcal{A}^*$, on vérifie :

$$\exists\, \gamma \in St \;\; \gamma(x) \in \mathcal{E}_f \;\Leftrightarrow\; \exists\, a \in \mathcal{A} \;\; x \in a^*\mathcal{E}_f a^*.$$

Les techniques de démonstration sont les mêmes que pour les mots infinis.

5.2 Bassin d'attraction

À présent, on cherche à déterminer $\{x \in \mathcal{A}^\omega \mid \gamma(x) \in \mathcal{E} \cap \overline{\mathcal{P}}\}$, pour un morphisme sturmien γ donné. Comme ce calcul est utilisé par la suite avec la définition arithmétique des mots sturmiens, on choisit les morphismes E, G et D comme générateurs du monoïde de Sturm.

En rappelant $D^{-1}(1^2\mathcal{A}^\omega) = \emptyset = G^{-1}(1\mathcal{A}^\omega)$, le lemme 5.7 permet d'assurer que le graphe 5.2 est correct. L'algorithme associé est présenté page 110.

Lemme 5.7 *On a les relations suivantes :*

1. $G^{-1}(\mathcal{E} \cap \overline{\mathcal{P}}) = \mathcal{E} \cap \overline{\mathcal{P}}$;
2. $\forall\, j \in \mathbb{N}^*$ $G^{-1}(0^j\mathcal{E} \cap \overline{\mathcal{P}} \cap 0^{j-1}\mathcal{D}) = 0^j\mathcal{E} \cap \overline{\mathcal{P}} \cap 0^{j-1}\mathcal{D}$;
3. $D^{-1}(\mathcal{E} \cap \overline{\mathcal{P}}) = (\mathcal{E} \cap \overline{\mathcal{P}}) \cup (0\mathcal{E} \cap \mathcal{D} \cap \overline{\mathcal{P}})$;
4. $\forall\, j \in \mathbb{N}^*$ $D^{-1}(0^j\mathcal{E} \cap \overline{\mathcal{P}} \cap 0^{j-1}\mathcal{D}) = 0^{j+1}\mathcal{E} \cap \overline{\mathcal{P}} \cap 0^j\mathcal{D}$;
5. $D^{-1}(1\mathcal{E} \cap \overline{\mathcal{P}} \cap \mathcal{D}) = 1\mathcal{E} \cap \overline{\mathcal{P}} \cap \mathcal{D}$.

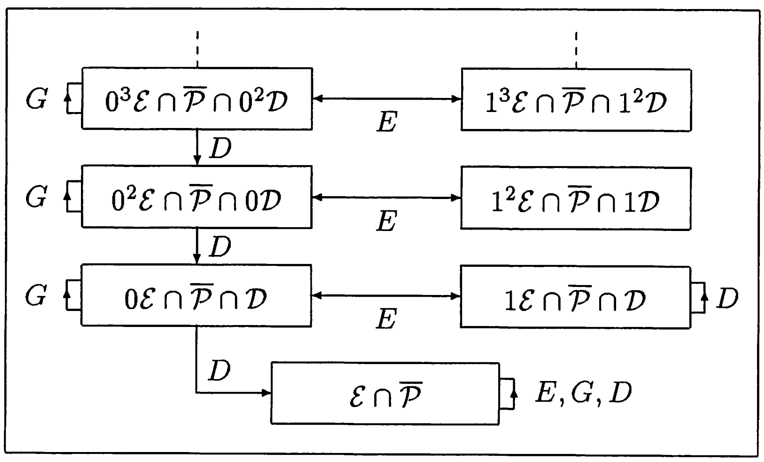

FIG. 5.2: Antécédents de $\mathcal{E} \cap \overline{\mathcal{P}}$ par St

Preuve. Soit x un mot infini.

Si $G(x)$ appartient à $\mathcal{E} \cap \overline{\mathcal{P}}$, alors d'après les lemmes 2.1, 2.3 et 5.1, le mot x est un élément de $\mathcal{E} \cap \overline{\mathcal{P}}$. L'inclusion réciproque est assurée par le lemme 5.1.

Soit j un entier non nul. On suppose $G(x) \in 0^j\mathcal{E} \cap 0^{j-1}\mathcal{D} \cap \overline{\mathcal{P}}$. Par définition même du morphisme G, le mot 0^{j-1} est un préfixe de x. On peut même affirmer que 0^j est un préfixe de x. En effet, si ce n'est pas le cas, il existe un mot x' tel que $x = 0^{j-1}1x'$. On montre alors

$$\begin{aligned} 0^j\tilde{\varphi}(0E(x')) &= 0^j10\tilde{\varphi}(E(x')) = 0^j1\varphi(E(x')) = 0^j1G(x') \\ &= G(0^{j-1}1x') = G(x) \in 0^j\mathcal{E}. \end{aligned}$$

Par suite, on a $1x' \in \mathcal{E}$ et $G(x) = 0^{j-1}G(1x') \in 0^{j-1}\mathcal{E}$, ce qui est absurde. Il existe donc un mot x'' tel que $x = 0^j x''$. On en déduit que $G(x'')$ est équilibré, et ainsi x appartient à $0^j\mathcal{E}$. Comme $0^{j-1}G(0x'') = G(x) \in 0^{j-1}\mathcal{D}$, on a $0x'' \in \mathcal{D}$ et $x \in 0^{j-1}\mathcal{D}$. En résumé, on obtient $x \in 0^j\mathcal{E} \cap 0^{j-1}\mathcal{D} \cap \overline{\mathcal{P}}$. Réciproquement, si $x \in 0^j\mathcal{E} \cap 0^{j-1}\mathcal{D} \cap \overline{\mathcal{P}}$ on vérifie immédiatement $G(x) \in 0^j\mathcal{E} \cap 0^{j-1}\mathcal{D} \cap \overline{\mathcal{P}}$.

On démontre, à présent, les résultats concernant le morphisme D.

En supposant $D(x) \in \mathcal{E} \cap \overline{\mathcal{P}}$, d'après le lemme 5.3, si x n'est pas équilibré alors x commence par 0 et son premier shift est équilibré. On en déduit

$$x \in (\mathcal{E} \cap \overline{\mathcal{P}}) \cup (0\mathcal{E} \cap \mathcal{D} \cap \overline{\mathcal{P}}).$$

Soit j un entier non nul. On suppose $D(x) \in 0^j\mathcal{E} \cap \overline{\mathcal{P}} \cap 0^{j-1}\mathcal{D}$. Clairement, il existe un mot x' tel que $x = 0^j x'$. Comme $D(0x')$ est déséquilibré, on a $x' \in \mathcal{D}$ et $x \in 0^j\mathcal{D}$. De plus, on a $D(x') \in \mathcal{E}$ et il existe un mot x'' tel que $x' = 0x''$ avec $x'' \in \mathcal{E}$. Finalement, le mot x appartient à $0^{j+1}\mathcal{E} \cap 0^j\mathcal{D} \cap \overline{\mathcal{P}}$.

Si on a $D(x) \in 1\mathcal{E} \cap \overline{\mathcal{P}} \cap \mathcal{D}$, le mot x est déséquilibré. De plus, il existe un mot x' tel que $x = 1x'$. On vérifie alors $D(0x') \in \mathcal{E}$, puis $x' \in \mathcal{E}$ et finalement $x \in 1\mathcal{E} \cap \mathcal{D} \cap \overline{\mathcal{P}}$.

Les lemmes 5.2 et 5.3 permettent d'établir les réciproques des trois dernières propriétés. $\star$

5.3 Calculs d'images réciproques

On précise les résultats obtenus à partir de la définition combinatoire, en privilégiant à nouveau une approche arithmétique. En deux étapes, on caractérise les mots appartenant à $D(\mathcal{E} \cap \overline{\mathcal{P}})$.

Lemme 5.8 *Soit* $(\alpha, \rho) \in \Lambda$. *On a*

$$\exists\, x \in \mathcal{E} \cap \overline{\mathcal{P}} \;\; D(x) = s_{\alpha,\rho} \;\Leftrightarrow\; \alpha \in]0, \tfrac{1}{2}[\textit{ et } \rho \in [\alpha, 1[.$$

Preuve. On suppose qu'il existe un mot sturmien x tel que $D(x) = s_{\alpha,\rho}$. D'après le lemme 3.20, on a $x = s_{\beta,\delta}$ avec $(\beta, \delta) \in \Lambda$. On en déduit $s_{\alpha,\rho} = s_{\frac{\beta}{\beta+1}, \frac{\beta+\delta}{\beta+1}}$ puis $\beta = \frac{\alpha}{1-\alpha}$ et $\delta = \frac{\rho-\alpha}{1-\alpha}$, par injectivité de l'application s sur Λ. On vérifie ainsi $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$ et $\rho \in [\alpha, 1[$. Réciproquement, si ces deux hypothèses sont satisfaites, l'image de $s_{\frac{\alpha}{1-\alpha}, \frac{\rho-\alpha}{1-\alpha}}$ par D est égale à $s_{\alpha,\rho}$. $\star$

Lemme 5.9 *Soit* $(\alpha, \rho) \in \Lambda'$. *On a*

$$\exists\, x \in \mathcal{E} \cap \overline{\mathcal{P}} \;\; D(x) = s'_{\alpha,\rho} \;\Leftrightarrow\; \alpha \in]0, \tfrac{1}{2}[\textit{ et } \rho \in [\alpha, 1].$$

Preuve. Par un raisonnement similaire à celui développé précédemment, en utilisant le lemme 3.21, on obtient la première implication. Pour établir la réciproque, on suppose $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$. Si $\rho \in]\alpha, 1]$ on a $D(s'_{\frac{\alpha}{1-\alpha}, \frac{\rho-\alpha}{1-\alpha}}) = s'_{\alpha,\rho}$. Si $\rho = \alpha$ c'est le mot $s_{\frac{\alpha}{1-\alpha}, 0}$ qui convient. $\star$

Comme les antécédents des mots sturmiens par le morphisme D sont les mots non ultimement périodiques de l'ensemble $\mathcal{E} \cup 0\mathcal{E}$, il reste à étudier l'image par D de $0\mathcal{E} \cap \overline{\mathcal{P}}$.

Lemme 5.10 *Soit* $(\alpha, \rho) \in \Lambda$. *On a*

$$\exists\, x \in 0\mathcal{E} \cap \overline{\mathcal{P}} \;\; D(x) = s_{\alpha,\rho} \;\Leftrightarrow\; \alpha \in]0, \tfrac{1}{2}[\text{ et } \rho \in [0, 1-\alpha[.$$

Preuve. On suppose qu'il existe un mot sturmien y tel que $D(0y) = s_{\alpha,\rho}$. En particulier, on a $s_{\alpha,\rho}(0) = 0$ et $D(y) = s_{\alpha,\rho+\alpha}$. On en déduit $0 \leq \rho < 1 - \alpha$ et $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Réciproquement, si ces deux hypothèses sont vérifiées, on a $D(0s_{\frac{\alpha}{1-\alpha}, \frac{\rho}{1-\alpha}}) = s_{\alpha,\rho}$, ce qui permet de conclure. $\star$

Lemme 5.11 *Soit* $(\alpha, \rho) \in \Lambda'$. *On a*

$$\exists\, x \in 0\mathcal{E} \cap \overline{\mathcal{P}} \;\; D(x) = s'_{\alpha,\rho} \;\Leftrightarrow\; \alpha \in]0, \tfrac{1}{2}[\text{ et } \rho \in]0, 1-\alpha].$$

Preuve. Soit y un mot sturmien tel que $D(0y) = s'_{\alpha,\rho}$. On a donc $s'_{\alpha,\rho}(0) = 0$ et $D(y) = s'_{\alpha,\rho+\alpha}$, d'où $0 < \rho \leq 1 - \alpha$ et $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Réciproquement, on pose $x = 0s'_{\frac{\alpha}{1-\alpha}, \frac{\rho}{1-\alpha}}$ et on vérifie $D(x) = s'_{\alpha,\rho}$ si on a $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$ et $\rho \in]0, 1-\alpha]$. $\star$

À l'aide de ces différents lemmes, les calculs d'images réciproques des mots sturmiens par le morphisme D sont désormais possibles :

Proposition 5.2 *Soit* (α, ρ) *un élément de* Λ. *On a*

$$D^{-1}(\{s_{\alpha,\rho}\}) = \begin{cases} \{s_{\frac{\alpha}{1-\alpha}, \frac{\rho-\alpha}{1-\alpha}}\} & \text{si } \alpha \in]0, \frac{1}{2}[\text{ et } 1 > \rho \geq \alpha, \\ \{0s_{\frac{\alpha}{1-\alpha}, \frac{\rho}{1-\alpha}}\} & \text{si } \alpha \in]0, \frac{1}{2}[\text{ et } 0 \leq \rho < \alpha, \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit (α, ρ) *un élément de* Λ'. *On a*

$$D^{-1}(\{s'_{\alpha,\rho}\}) = \begin{cases} \{s'_{\frac{\alpha}{1-\alpha}, \frac{\rho-\alpha}{1-\alpha}}\} & \text{si } \alpha \in]0, \frac{1}{2}[\text{ et } 1 \geq \rho > \alpha, \\ \{s_{\frac{\alpha}{1-\alpha}, 0}\} & \text{si } \alpha \in]0, \frac{1}{2}[\text{ et } \rho = \alpha, \\ \{0s'_{\frac{\alpha}{1-\alpha}, \frac{\rho}{1-\alpha}}\} & \text{si } \alpha \in]0, \frac{1}{2}[\text{ et } 0 < \rho < \alpha, \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve. Dans l'hypothèse $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$, on remarque $0s_{\frac{\alpha}{1-\alpha}, \frac{\rho}{1-\alpha}} = s_{\frac{\alpha}{1-\alpha}, \frac{\rho-\alpha}{1-\alpha}}$ si on a $\alpha \leq \rho < 1 - \alpha$, et $0s'_{\frac{\alpha}{1-\alpha}, \frac{\rho}{1-\alpha}} = s'_{\frac{\alpha}{1-\alpha}, \frac{\rho-\alpha}{1-\alpha}}$ si $\alpha < \rho \leq 1 - \alpha$, et enfin $0s'_{\frac{\alpha}{1-\alpha}, \frac{\alpha}{1-\alpha}} = s_{\frac{\alpha}{1-\alpha}, 0}$. Les lemmes 5.8 à 5.11 permettent de conclure. $\star$

Grâce à la définition combinatoire, on sait que l'image d'un mot par le morphisme G est sturmienne si et seulement si ce mot est lui-même sturmien. La proposition 5.3 permet de préciser ce résultat.

Proposition 5.3 *Soit (α, ρ) un élément de Λ. On a*

$$G^{-1}(\{s_{\alpha,\rho}\}) = \begin{cases} \{s_{\frac{\alpha}{1-\alpha},\frac{\rho}{1-\alpha}}\} & \textit{si } \alpha \in]0, \frac{1}{2}[\textit{ et } 0 \leq \rho < 1 - \alpha, \\ \emptyset & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Soit (α, ρ) un élément de Λ'. On a

$$G^{-1}(\{s'_{\alpha,\rho}\}) = \begin{cases} \{s'_{\frac{\alpha}{1-\alpha},\frac{\rho}{1-\alpha}}\} & \textit{si } \alpha \in]0, \frac{1}{2}[\textit{ et } 0 < \rho \leq 1 - \alpha, \\ \emptyset & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Preuve. Soit $(\alpha, \rho) \in \Lambda$. On commence par montrer :

$$\exists\, x \in \mathcal{A}^\omega \;\; G(x) = s_{\alpha,\rho} \;\Leftrightarrow\; \alpha \in]0, \tfrac{1}{2}[\text{ et } \rho \in [0, 1-\alpha[.$$

Soit un mot x tel que $G(x) = s_{\alpha,\rho}$. Nécessairement, le mot x est sturmien, et plus précisément on a $x = s_{\beta,\delta}$ avec $(\beta, \delta) \in \Lambda$. On en déduit $\alpha = \frac{\beta}{1+\beta}$ et $\rho = \delta(1-\alpha)$, d'où $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$ et $0 \leq \rho < 1 - \alpha$. Réciproquement, si ces deux hypothèses sont vérifiées, on a $G(s_{\frac{\alpha}{1-\alpha},\frac{\rho}{1-\alpha}}) = s_{\alpha,\rho}$.

Soit $(\alpha, \rho) \in \Lambda'$, on affirme :

$$\exists\, x \in \mathcal{A}^\omega \;\; G(x) = s'_{\alpha,\rho} \;\Leftrightarrow\; \alpha \in]0, \tfrac{1}{2}[\text{ et } \rho \in]0, 1-\alpha].$$

En effet, soit un mot x tel que $G(x) = s'_{\alpha,\rho}$. On sait qu'alors x est un élément de $\mathcal{E} \cap \overline{\mathcal{P}}$. D'après le lemme 3.21, il existe un couple (β, δ) de Λ' tel que $x = s'_{\beta,\delta}$. On en déduit $\alpha = \frac{\beta}{\beta+1} \in]0, \frac{1}{2}[$ et $\rho = \delta(1-\alpha) \in]0, 1-\alpha]$. La réciproque est triviale. $\star$

Afin d'itérer les calculs présentés aux propositions 5.2 et 5.3, on introduit le lemme 5.12 dû à G. A. Hedlund et M. Morse [83]. Il s'agit en fait de la traduction arithmétique du lemme 1.15.

Lemme 5.12 *Soit (α, ρ) un élément de Λ. On a*

$$0s_{\alpha,\rho} \in \mathcal{E} \cap \overline{\mathcal{P}} \;\Leftrightarrow\; 1 > \rho \geq \alpha \quad \textit{et} \quad 1s_{\alpha,\rho} \in \mathcal{E} \cap \overline{\mathcal{P}} \;\Leftrightarrow\; \alpha \geq \rho \geq 0.$$

Soit (α, ρ) un élément de Λ'. On a

$$0s'_{\alpha,\rho} \in \mathcal{E} \cap \overline{\mathcal{P}} \;\Leftrightarrow\; 1 \geq \rho \geq \alpha \quad \textit{et} \quad 1s'_{\alpha,\rho} \in \mathcal{E} \cap \overline{\mathcal{P}} \;\Leftrightarrow\; \alpha \geq \rho > 0.$$

Preuve. Soit $(\alpha, \rho) \in \Lambda$. On suppose que le mot $x = 0s_{\alpha,\rho}$ est sturmien. On a alors $x = s_{\alpha,\rho-\alpha}$ ou bien $x = s'_{\alpha,\rho-\alpha}$. On vérifie facilement $0s_{\alpha,\rho} = s_{\alpha,\rho-\alpha}$ si et seulement si $\rho \geq \alpha$. On a aussi

$$0s_{\alpha,\rho} = s'_{\alpha,\rho-\alpha} \Leftrightarrow (\alpha, \rho) \in \mathcal{U} \text{ et } \lceil\rho\rceil = \lceil\rho - \alpha\rceil \Leftrightarrow (\alpha, \rho) \in \mathcal{U} \text{ et } \alpha < \rho,$$

ce qui permet d'établir la première propriété.

De la même façon, on montre

$$1s_{\alpha,\rho} = s_{\alpha,\rho-\alpha} \Leftrightarrow \rho < \alpha$$

et

$$1s_{\alpha,\rho} = s'_{\alpha,\rho-\alpha} \Leftrightarrow (\alpha,\rho) \in \mathcal{U} \text{ et } \rho \leq \alpha,$$

d'où $1s_{\alpha,\rho} \in \mathcal{E} \cap \overline{\mathcal{P}} \ \Leftrightarrow \ \alpha \geq \rho \geq 0$.

Pour conclure, il suffit d'appliquer le morphisme E aux deux relations obtenues. ⋆

Remarques. Par le lemme 5.12 et la proposition 5.2, il apparaît que $D(0\mathcal{E}\cap\mathcal{D}\cap\overline{\mathcal{P}})$ constitue le complémentaire de $D(\mathcal{E} \cap \overline{\mathcal{P}})$, parmi les mots sturmiens de pente appartenant à $]0, \frac{1}{2}[$. De plus, à tout mot sturmien x, il est possible d'associer une lettre a telle que le mot ax reste sturmien, il y a même unicité si x n'est pas une suite caractéristique. On peut ainsi préciser la structure des états qui composent le graphe 5.2, donné page 81. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$0^k\mathcal{E}\cap\overline{\mathcal{P}}\cap 0^{k-1}\mathcal{D} = 0^k\{s_{\alpha,\rho} \mid (\alpha,\rho) \in \Lambda \text{ et } \rho < \alpha\} \cup 0^k\{s'_{\alpha,\rho} \mid (\alpha,\rho) \in \Lambda' \text{ et } \rho < \alpha\},$$

$$1^k\mathcal{E}\cap\overline{\mathcal{P}}\cap 1^{k-1}\mathcal{D} = 1^k\{s_{\alpha,\rho} \mid (\alpha,\rho) \in \Lambda \text{ et } \rho > \alpha\} \cup 1^k\{s'_{\alpha,\rho} \mid (\alpha,\rho) \in \Lambda' \text{ et } \rho > \alpha\}.$$

Page 111, on présente un algorithme qui permet de résoudre l'équation $f(x) = y$ avec $f \in St$ et $y \in \mathcal{E} \cap \overline{\mathcal{P}}$. On est donc amené à calculer les antécédents, par G et D, des suites que l'on vient de décrire.

Proposition 5.4 *Soit k un entier non nul.*
Soit (α,ρ) un couple de Λ tel que $0^ks_{\alpha,\rho}$ appartient à $0^k\mathcal{E} \cap 0^{k-1}\mathcal{D}$. On a

$$G^{-1}(\{0^ks_{\alpha,\rho}\}) = \begin{cases} \{0^ks_{\frac{\alpha}{1-\alpha},\frac{\rho}{1-\alpha}}\} & si\ \alpha < \frac{1}{2} \\ \emptyset & sinon \end{cases}$$

et

$$D^{-1}(\{0^ks_{\alpha,\rho}\}) = \begin{cases} \{0^{k+1}s_{\frac{\alpha}{1-\alpha},\frac{\rho}{1-\alpha}}\} & si\ \alpha < \frac{1}{2} \\ \emptyset & sinon. \end{cases}$$

Soit (α,ρ) un couple de Λ' tel que $0^ks'_{\alpha,\rho}$ appartient à $0^k\mathcal{E} \cap 0^{k-1}\mathcal{D}$. On a

$$G^{-1}(\{0^ks'_{\alpha,\rho}\}) = \begin{cases} \{0^ks'_{\frac{\alpha}{1-\alpha},\frac{\rho}{1-\alpha}}\} & si\ \alpha < \frac{1}{2} \\ \emptyset & sinon \end{cases}$$

et

$$D^{-1}(\{0^ks'_{\alpha,\rho}\}) = \begin{cases} \{0^{k+1}s'_{\frac{\alpha}{1-\alpha},\frac{\rho}{1-\alpha}}\} & si\ \alpha < \frac{1}{2} \\ \emptyset & sinon. \end{cases}$$

Soit (α,ρ) un couple de Λ tel que $1s_{\alpha,\rho}$ appartient à $1\mathcal{E} \cap \mathcal{D}$. On a

$$D^{-1}(\{1s_{\alpha,\rho}\}) = \begin{cases} \{1s_{\frac{\alpha}{1-\alpha},\frac{\rho}{1-\alpha}}\} & si\ \rho < 1-\alpha \\ \emptyset & sinon. \end{cases}$$

Soit (α, ρ) *un couple de* Λ' *tel que* $1s'_{\alpha,\rho}$ *appartient à* $1\mathcal{E} \cap \mathcal{D}$*. On a*

$$D^{-1}(\{1s'_{\alpha,\rho}\}) = \begin{cases} \{1s'_{\frac{\alpha}{1-\alpha},\frac{\rho}{1-\alpha}}\} & si\ \rho \leq 1-\alpha \\ \emptyset\ sinon. \end{cases}$$

Preuve. Par symétrie des démonstrations, on ne traite que le premier et le troisième cas. Soit (α, ρ) un élément de Λ.

On suppose $0^k s_{\alpha,\rho} \in 0^k\mathcal{E} \cap 0^{k-1}\mathcal{D}$. D'après la remarque précédente, on peut affirmer $0 \leq \rho < \alpha$. Si α est inférieur à $\frac{1}{2}$, on a $\rho < 1-\alpha$ puis

$$G(0^k s_{\frac{\alpha}{1-\alpha},\frac{\rho}{1-\alpha}}) = 0^k s_{\alpha,\rho} \text{ et } D(0^{k+1} s_{\frac{\alpha}{1-\alpha},\frac{\rho}{1-\alpha}}) = 0^k s_{\alpha,\rho}.$$

Si $\alpha > \frac{1}{2}$ l'ensemble $G^{-1}(\{0^k s_{\alpha,\rho}\})$ est vide. En effet, s'il existe un mot z tel que $G(z) = 0^k s_{\alpha,\rho}$, on peut construire un suffixe z' de z tel que $G(z')$ est un mot sturmien de pente α, ce qui est absurde car α appartient à $]\frac{1}{2}, 1[$. La preuve concernant le morphisme D est similaire.

Dans l'hypothèse $1s_{\alpha,\rho} \in 1\mathcal{E} \cap \mathcal{D}$, on a $\rho > \alpha$. Si $\rho \geq 1-\alpha$ alors $s_{\alpha,\rho} \in 1\mathcal{A}^\omega$ et l'ensemble $D^{-1}(\{1s_{\alpha,\rho}\})$ est vide. En revanche, si $\rho < 1-\alpha$ on a $\alpha < \frac{1}{2}$ et $D(1s_{\frac{\alpha}{1-\alpha},\frac{\rho}{1-\alpha}}) = 1s_{\alpha,\rho}$. ⋆

5.4 Mots infiniment sturmiens

Définition 5.3 *Un mot sturmien* y *est infiniment sturmien si on a*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, f \in St,\ ||f|| \geq n,\ \ \exists\, x \in \mathcal{E} \cap \overline{\mathcal{P}}\ \ f(x) = y.$$

Proposition 5.5 *Tout mot sturmien est infiniment sturmien.*

Preuve effective. Soient f_0 l'application identité et x_0 un mot sturmien. On construit par récurrence une suite de morphismes sturmiens, notée $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$, à laquelle on associe une suite de mots sturmiens $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tels que $f_m(x_m) = x_0$ pour tout entier m. Soit $m \in \mathbb{N}$. Quitte à transformer x_m en $E(x_m)$, on suppose que sa pente α_m, prise dans $]0, 1[$, appartient à $]0, \frac{1}{2}[$.

S'il existe un réel ρ_m de $[0, 1[$ tel que $x_m = s_{\alpha_m,\rho_m}$, on définit f_{m+1} et x_{m+1} par $f_{m+1} = f_m G$ et $G(x_{m+1}) = x_m$, ou bien $f_{m+1} = f_m D$ et $D(x_{m+1}) = x_m$, selon qu'on ait $1-\alpha_m > \rho_m$ ou $\rho_m \geq 1-\alpha_m$.

S'il existe un réel ρ_m de $]0, 1]$ tel que $x_m = s'_{\alpha_m,\rho_m}$, on définit f_{m+1} et x_{m+1} par $f_{m+1} = f_m G$ et $G(x_{m+1}) = x_m$, ou bien $f_{m+1} = f_m D$ et $D(x_{m+1}) = x_m$, selon qu'on ait $1-\alpha_m \geq \rho_m$ ou $\rho_m > 1-\alpha_m$.

Les propositions 5.2 et 5.3 assurent que cette démarche est correcte. ⋆

Définition 5.4 *Soit* α *un irrationnel de* $]0, 1[$*. La suite directrice de* α*, notée* $(d_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$*, est définie par* $\alpha = [0, 1+d_1, d_2, d_3, d_4, \ldots]$.

Le corollaire suivant décrit sommairement un procédé de construction des mots sturmiens. On le présente en détail, page 117, sous la forme d'un programme Maple.

Corollaire 5.2 *Soit α un irrationnel de $]0,1[$. Soient $(d_i)_{i\geq 1}$ la suite directrice et $(q_i)_{i\geq -1}$ la suite des dénominateurs des réduites de α. Soit y un mot sturmien de pente α. Soit k un entier non nul. Il existe un morphisme f appartenant à $\{E,G,D\}^{d_1+\sum_{i=2}^{k}(1+d_i)}$ et une lettre a tels que $f(a)$ est un préfixe de y de longueur q_{k-1} ou q_k.*

Preuve. Soit $\gamma = G^{d_1}E\ldots G^{d_{k-1}}EG^{d_k}$. D'après la proposition 5.5, il existe un morphisme sturmien f, Ω-équivalent à γ, pour lequel on peut définir un mot sturmien x tel que $f(x) = y$. Soit t un entier non nul et soit $h_t = G^{t-1}EG$. On pose $\alpha = [0, a_1, a_2, a_3, \ldots]$. Par récurrence sur l'entier m, on montre facilement que la longueur de $h_{a_1}\ldots h_{a_m}(0)$ est égale à q_m. On conclut en remarquant :

$$\begin{aligned}|f(0)| &= |G^{d_1}E\ldots G^{d_{k-1}}EG^{d_k}(0)|\\ &= |G^{d_1}E\ldots G^{d_{k-1}}EG(0)|\\ &= |h_{a_1}\ldots h_{a_{k-1}}(0)| = q_{k-1}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}|f(1)| &= |G^{d_1}E\ldots G^{d_{k-1}}EG^{d_k}(1)|\\ &= |G^{d_1}E\ldots G^{d_k}EG(0)|\\ &= |h_{a_1}\ldots h_{a_k}(0)| = q_k. \star\end{aligned}$$

Dans certains cas, on peut présenter des formules récurrentes aux propriétés remarquables. Le corollaire 5.3 et la proposition 5.7 sont à mettre en parallèle avec des résultats décrits dans l'article de synthèse [12].

Lemme 5.13 *Soit α un irrationnel de $]0,1[$. Soit $(d_i)_{i\geq 1}$ la suite directrice de α. Soit $(\alpha_j)_{j\geq 2}$ la suite de terme général $\alpha_j = [0, d_j, d_{j+1}, d_{j+2}, \ldots]$. Pour tout entier k non nul, on a*

$$s_{\alpha,\alpha} = G^{d_1}E\ldots G^{d_k}EG\left(s_{\alpha_{k+1},\alpha_{k+1}}\right),$$

$$s_{\alpha,0} = G^{d_1}ED^{d_2}E\ldots G^{d_{2k+1}}ED^{d_{2k+2}}E\left(s_{\frac{\alpha_{2k+3}}{\alpha_{2k+3}+1},0}\right),$$

$$s'_{\alpha,0} = D^{d_1}EG^{d_2}E\ldots D^{d_{2k+1}}EG^{d_{2k+2}}E\left(s'_{\frac{\alpha_{2k+3}}{\alpha_{2k+3}+1},0}\right),$$

$$s_{\alpha,1-\alpha} = D^{d_1}E\ldots D^{d_{2k+2}}E\left(s_{\frac{\alpha_{2k+3}}{\alpha_{2k+3}+1},\frac{1}{\alpha_{2k+3}+1}}\right)$$

et

$$s'_{\alpha,1-\alpha} = D^{d_1}E\ldots D^{d_{2k+2}}E\left(s'_{\frac{\alpha_{2k+3}}{\alpha_{2k+3}+1},\frac{1}{\alpha_{2k+3}+1}}\right).$$

Preuve. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a $\frac{\alpha_{2k+3}}{\alpha_{2k+3}+1} = [0, d_{2k+3}+1, d_{2k+4}, d_{2k+5}, \ldots]$. Grâce aux matrices de Raney, les calculs concernant l'évolution des pentes s'effectuent facilement. Les propositions 3.3, 3.4 et 3.5 permettent de terminer la preuve. $\star$

Remarque. Avec des définitions évidentes, il apparaît que toute suite caractéristique est "infiniment caractéristique", et tout mot de Christoffel est "infiniment de Christoffel".

Proposition 5.6 *Soit α un irrationnel de $]0,1[$. Soit $(d_i)_{i\geq 1}$ la suite directrice de α. On a*

$$s_{\alpha,\alpha} = \lim_{k\to+\infty} G^{d_1}E\ldots G^{d_k}E(0)$$

et

$$s_{\alpha,0} = \lim_{k\to+\infty} G^{d_1}ED^{d_2}E\ldots G^{d_{2k+1}}ED^{d_{2k+2}}E(0)$$

ainsi que

$$s'_{\alpha,0} = \lim_{k\to+\infty} D^{d_1}EG^{d_2}E\ldots D^{d_{2k+1}}EG^{d_{2k+2}}E(1),$$

$$s_{\alpha,1-\alpha} = \lim_{k\to+\infty} D^{d_1}E\ldots D^{d_{2k+2}}E(1)$$

et

$$s'_{\alpha,1-\alpha} = \lim_{k\to+\infty} D^{d_1}E\ldots D^{d_{2k+2}}E(0).$$

Preuve. Pour tout entier k non nul, le lemme 5.13 permet d'affirmer que le mot $G^{d_1}E\ldots G^{d_k}E(0)$ est un préfixe de $s_{\alpha,\alpha}$. Il suffit de remarquer que la suite de terme général $|G^{d_1}E\ldots G^{d_k}E(0)|$ est strictement croissante pour conclure dans ce cas. Comme pour tout irrationnel β, on a $s_{\beta,0}(0) = 0$, $s'_{\beta,0}(0) = 1$, $s_{\beta,1-\beta}(0) = 1$ et $s'_{\beta,1-\beta}(0) = 0$, la fin de la preuve est triviale. $\star$

Définition 5.5 *Soit α un irrationnel de $]0,1[$. Soit $(d_i)_{i\geq 1}$ la suite directrice de α. On construit les suites de mots $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(j_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'aide des relations*

$$b_0 = e_0 = g_0 = j_0 = 0 \text{ et } c_0 = f_0 = h_0 = k_0 = 1,$$

puis par récurrence, pour tout entier n :

$$b_{n+1} = ({b_n}^{d_{2n+1}}c_n)^{d_{2n+2}}b_n \text{ et } c_{n+1} = {b_n}^{d_{2n+1}}c_n,$$

$$e_{n+1} = e_n({e_n}^{d_{2n+1}}f_n)^{d_{2n+2}} \text{ et } f_{n+1} = {e_n}^{d_{2n+1}}f_n,$$

$$g_{n+1} = (h_n{g_n}^{d_{2n+1}})^{d_{2n+2}}g_n \text{ et } h_{n+1} = h_n{g_n}^{d_{2n+1}}$$

ainsi que

$$j_{n+1} = j_n(k_nj_n^{d_{2n+1}})^{d_{2n+2}} \text{ et } k_{n+1} = k_n{j_n}^{d_{2n+1}}.$$

Corollaire 5.3 *Soit α un irrationnel de $]0,1[$. Pour tout entier n non nul, les mots b_n, e_n, h_n, k_n et j_n sont respectivement des préfixes de $s_{\alpha,\alpha}$, $s_{\alpha,0}$, $s'_{\alpha,0}$, $s_{\alpha,1-\alpha}$ et $s'_{\alpha,1-\alpha}$. On a même $s_{\alpha,\alpha} = \lim_{n\to+\infty} b_n$, $s_{\alpha,0} = \lim_{n\to+\infty} e_n$, $s'_{\alpha,0} = \lim_{n\to+\infty} h_n$, $s_{\alpha,1-\alpha} = \lim_{n\to+\infty} k_n$ et $s'_{\alpha,1-\alpha} = \lim_{n\to+\infty} j_n$.*

Preuve. Soit $(d_i)_{i\geq 1}$ la suite directrice de α. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche à établir : $b_n = G^{d_1}EG^{d_2}E\ldots G^{d_{2n-1}}EG^{d_{2n}}E(0)$ et $c_n = G^{d_1}EG^{d_2}E\ldots G^{d_{2n-1}}EG^{d_{2n}}E(1)$. Pour $n=1$, il suffit de remarquer

$$G^{d_1}EG^{d_2}E(0) = (0^{d_1}1)^{d_2}0 = b_1 \text{ et } G^{d_1}EG^{d_2}E(1) = 0^{d_1}1 = c_1.$$

Si l'hypothèse est vraie au rang n, on pose

$$\gamma_n = G^{d_1}EG^{d_2}E\ldots G^{d_{2n-1}}EG^{d_{2n}}E$$

et on a

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= ({b_n}^{d_{2n+1}}c_n)^{d_{2n+2}}b_n = (\gamma_n(0)^{d_{2n+1}}\gamma_n(1))^{d_{2n+2}}\gamma_n(0) \\ &= \gamma_n((0^{d_{2n+1}}1)^{d_{2n+2}}0) = \gamma_n G^{d_{2n+1}}EG^{d_{2n+2}}E(0) \end{aligned}$$

ainsi que $c_{n+1} = {b_n}^{d_{2n+1}}c_n = \gamma_n(0^{d_{2n+1}}1) = \gamma_n G^{d_{2n+1}}EG^{d_{2n+2}}E(1)$, ce qui achève par récurrence la preuve de ce premier résultat. Pour montrer

$$e_n = G^{d_1}ED^{d_2}E\ldots G^{d_{2n-1}}ED^{d_{2n}}E(0)$$

et

$$f_n = G^{d_1}ED^{d_2}E\ldots G^{d_{2n-1}}ED^{d_{2n}}E(1)$$

on commence par vérifier

$$G^{d_1}ED^{d_2}E(0) = 0(0^{d_1}1)^{d_2} = e_1 \text{ et } G^{d_1}ED^{d_2}E(1) = 0^{d_1}1 = f_1.$$

Puis, si l'hypothèse est établie au rang n, on pose

$$\gamma_n = G^{d_1}ED^{d_2}E\ldots G^{d_{2n-1}}ED^{d_{2n}}E$$

et ainsi on a

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= e_n({e_n}^{d_{2n+1}}f_n)^{d_{2n+2}} = \gamma_n(0)(\gamma_n(0)^{d_{2n+1}}\gamma_n(1))^{d_{2n+2}} \\ &= \gamma_n(0(0^{d_{2n+1}}1)^{d_{2n+2}}) = \gamma_n G^{d_{2n+1}}ED^{d_{2n+2}}E(0) \end{aligned}$$

$$f_{n+1} = {e_n}^{d_{2n+1}}f_n = \gamma_n(0^{d_{2n+1}}1) = \gamma_n G^{d_{2n+1}}ED^{d_{2n+2}}E(1).$$

On considère à présent les relations

$$g_n = D^{d_1}EG^{d_2}E\ldots D^{d_{2n-1}}EG^{d_{2n}}E(0)$$

et

$$h_n = D^{d_1}EG^{d_2}E\ldots D^{d_{2n-1}}EG^{d_{2n}}E(1).$$

Pour $n=1$, on a $D^{d_1}EG^{d_2}E(0) = (10^{d_1})^{d_2}0 = g_1$ et $D^{d_1}EG^{d_2}E(1) = 10^{d_1} = h_1$. Si le résultat est vrai au rang n, on pose $\gamma_n = D^{d_1}EG^{d_2}E\ldots D^{d_{2n-1}}EG^{d_{2n}}E$. On remarque alors

$$\begin{aligned} g_{n+1} &= (h_n{g_n}^{d_{2n+1}})^{d_{2n+2}}g_n = (\gamma_n(1)\gamma_n(0)^{d_{2n+1}})^{d_{2n+2}}\gamma_n(0) \\ &= \gamma_n((10^{d_{2n+1}})^{d_{2n+2}}0) = \gamma_n D^{d_{2n+1}}EG^{d_{2n+2}}E(0) \end{aligned}$$

et

$$h_{n+1} = h_n {g_n}^{d_{2n+1}} = \gamma_n(10^{d_{2n+1}}) = \gamma_n D^{d_{2n+1}} E G^{d_{2n+2}} E(1).$$

Pour terminer, on cherche à montrer

$$j_n = D^{d_1} E D^{d_2} E \dots D^{d_{2n-1}} E D^{d_{2n}} E(0)$$

et

$$k_n = D^{d_1} E D^{d_2} E \dots D^{d_{2n-1}} E D^{d_{2n}} E(1).$$

Au rang un, on a $D^{d_1} E D^{d_2} E(0) = 0(10^{d_1})^{d_2} = j_1$ et $D^{d_1} E D^{d_2} E(1) = 10^{d_1} = k_1$. Puis, si l'hypothèse est vraie au rang n, on pose

$$\gamma_n = D^{d_1} E D^{d_2} E \dots D^{d_{2n-1}} E D^{d_{2n}} E.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} j_{n+1} &= j_n (k_n {j_n}^{d_{2n+1}})^{d_{2n+2}} = \gamma_n(0)(\gamma_n(1)\gamma_n(0)^{d_{2n+1}})^{d_{2n+2}} \\ &= \gamma_n(0(10^{d_{2n+1}})^{d_{2n+2}}) = \gamma_n D^{d_{2n+1}} E D^{d_{2n+2}} E(0) \end{aligned}$$

$$k_{n+1} = k_n {j_n}^{d_{2n+1}} = \gamma_n(10^{d_{2n+1}}) = \gamma_n D^{d_{2n+1}} E D^{d_{2n+2}} E(1).$$

En utilisant la proposition 5.6, il est facile de conclure. ⋆

De nombreux liens existent entre les suites définies en 5.5. On remarque notamment qu'elles peuvent être construites à partir d'une même famille de palindromes.

Définition 5.6 *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x = x_1 \dots x_{n-1} x_n$ un mot fini. L'image miroir de x est le mot $\tilde{x} = x_n x_{n-1} \dots x_1$. Le mot x est un palindrome si $\tilde{x} = x$.*

Proposition 5.7 *Soit α un irrationnel de $]0,1[$. Soient $(d_i)_{i\geq 1}$ la suite directrice et $(q_i)_{i\geq -1}$ la suite des dénominateurs des réduites de α. Pour tout entier n, on a*

$$\widetilde{b_n} = j_n,\ \widetilde{c_n} = k_n,\ \widetilde{e_n} = g_n \text{ et } \widetilde{f_n} = h_n.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$|b_n| = |j_n| = |g_n| = |e_n| = q_{2n} \text{ et } |c_n| = |k_n| = |h_n| = |f_n| = q_{2n-1},$$

ainsi que

$$\begin{aligned} e_n &= Chrp([0, d_1, \dots, d_{2n}]) \quad \text{et} \quad f_n = Chrp([0, d_1, \dots, d_{2n-1}]), \\ g_n &= Chrn([0, d_1, \dots, d_{2n}]) \quad \text{et} \quad h_n = Chrn([0, d_1, \dots, d_{2n-1}]). \end{aligned}$$

Pour $n \geq 2$, il existe des palindromes notés P_{2n-1} et P_{2n} tels que

$$e_n = 0P_{2n}1,\ f_n = 0P_{2n-1}1,\ g_n = 1P_{2n}0,\ h_n = 1P_{2n-1}0,$$

et

$$b_n = P_{2n}10,\ j_n = 01P_{2n},\ k_n = 10P_{2n-1} \text{ et } c_n = P_{2n-1}01.$$

Preuve. On commence par s'intéresser aux propriétés des images miroirs et des longueurs. Soit n un entier. Pour obtenir $\widetilde{b_n} = j_n$ et $\widetilde{c_n} = k_n$, il suffit de remarquer $\widetilde{b_0} = j_0$ et $\widetilde{c_0} = k_0$, puis par récurrence :

$$\widetilde{b_{n+1}} = \widetilde{b_n}(\widetilde{c_n}\widetilde{b_n}^{d_{2n+1}})^{d_{2n+2}} = j_n(k_n j_n^{d_{2n+1}})^{d_{2n+2}} = j_{n+1}$$

et

$$\widetilde{c_{n+1}} = \widetilde{c_n}\widetilde{b_n}^{d_{2n+1}} = k_n j_n^{d_{2n+1}} = k_{n+1}.$$

Soit n un entier non nul. Pour démontrer les relations $|b_n| = q_{2n}$ et $|c_n| = q_{2n-1}$, on part de $|b_1| = d_2(d_1 + 1) + 1 = q_2$ et $|c_1| = d_1 + 1 = q_1$, et on vérifie par récurrence :

$$|b_{n+1}| = d_{2n+2}(d_{2n+1}q_{2n} + q_{2n-1}) + q_{2n} = q_{2n+2}$$

et

$$|c_{n+1}| = d_{2n+1}q_{2n} + q_{2n-1} = q_{2n+1}.$$

Les résultats concernant les autres suites s'établissent de façon similaire.

Pour tout entier n, on passe de (e_n, f_n) à (e_{n+1}, f_{n+1}) en appliquant d_{2n+1} fois la transformation qui à un couple de mots finis (u, v) associe (u, uv), puis d_{2n+2} fois celle qui à (u, v) associe (uv, v). Comme on a $(e_0, f_0) = (0, 1)$, on retrouve le procédé de construction des mots de Christoffel finis, voir [22] pour plus de détails. Ainsi, pour tout entier n non nul, on a

$$e_n = Chrp([0, d_1, \ldots, d_{2n}]) \text{ et } f_n = Chrp([0, d_1, \ldots, d_{2n-1}]),$$

$$g_n = \widetilde{e_n} = Chrn([0, d_1, \ldots, d_{2n}]) \text{ et } h_n = \widetilde{f_n} = Chrn([0, d_1, \ldots, d_{2n-1}]).$$

À présent, on met en évidence le rôle des palindromes. Soient p et q des entiers non nuls, premiers entre eux. Par traduction de l'énoncé géométrique, on montre qu'il existe un mot X tel que $Chrp(\frac{p}{q}) = 0X1$ et $Chrn(\frac{p}{q}) = 1X0$. Comme le mot $Chrn(\frac{p}{q})$ est l'image miroir de $Chrp(\frac{p}{q})$, on a $\tilde{X} = X$.

Soit un entier $n \geq 2$. D'après le point précédent, les mots e_n et f_n se décomposent sous la forme $e_n = 0P_{2n}1$ et $f_n = 0P_{2n-1}1$, où P_{2n-1} et P_{2n} sont des palindromes. On en déduit $g_n = \widetilde{e_n} = 1P_{2n}0$ et $h_n = \widetilde{f_n} = 1P_{2n-1}0$. Comme e_n et b_n sont des préfixes respectifs de $s_{\alpha,0}$ et $s_{\alpha,\alpha}$, on obtient $b_n = P_{2n}10$ et $j_n = \widetilde{b_n} = 01P_{2n}$ en remarquant $|b_n| = |e_n|$ et $s_{\alpha,\alpha}(q_{2n} - 1) = 0$.

En outre, le mot $0P_{2n-1}1 = f_n$ est un suffixe de $e_n = 0P_{2n}1$. On vérifie ainsi que P_{2n-1} est un suffixe de P_{2n} de longueur $q_{2n-1} - 2$. Ces deux mots étant des palindromes, le mot P_{2n-1} est un préfixe de P_{2n}, donc de b_n. Comme le mot $S^2(k_n)$ est un préfixe de $S^2(s_{\alpha,1-\alpha})$, on a $k_n = 10P_{2n-1}$ et $c_n = \widetilde{k_n} = P_{2n-1}01$ car $k_n = 10S^2(k_n)$. ⋆

Remarques. De plus amples détails concernant les rapports entre les palindromes et les mots sturmiens apparaissent dans un article de X. Droubay [43]. Les propriétés des suites caractéristiques, énoncées à partir du lemme 5.13, sont à mettre en parallèle avec le théorème de H. J. S. Smith [102] et les règles de G. Rauzy [93]. Ces suites peuvent aussi être définies en utilisant les nombres de Zeckendorff [47, 109] ou les mots de Lyndon [22], voir à ce sujet les travaux de T. C. Brown [28] et G. Melançon [76]. On cite enfin les références [65, 66] et [67], où T. Komatsu étudie un procédé de construction des suites sturmiennes générales. Le dernier papier est une version corrigée d'un article de K. Nishioka, I. Shiokawa et J. I. Tamura [84].

Pour être tout à fait complet, il reste à prouver la propriété suivante, conjecturée page 76 :

Proposition 5.8 *Soit* $\alpha = [0, a_1, a_2, \ldots]$.
Pour tout entier n non nul, le mot $u_1 \ldots u_n(u_{n-1}^{a_n-1} \ldots u_1^{a_2-1} u_0^{a_1-1})$ *est un palindrome.*

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $Z_n = u_1 \ldots u_n(u_{n-1}^{a_n-1} \ldots u_1^{a_2-1} u_0^{a_1-1})$.
D'après la proposition 4.6, le mot Z_n est le préfixe de $s_{\alpha,\alpha}$ de longueur égale à $2q_n + q_{n-1} - 2$. On doit donc montrer

$$\forall\, i \in \mathbb{N},\ 0 \leq i \leq 2q_n + q_{n-1} - 3,\ \ s_{\alpha,\alpha}(i) = s_{\alpha,\alpha}(2q_n + q_{n-1} - 3 - i).$$

D'après la proposition 5.7 et la preuve du corollaire 5.3, le préfixe de $s_{\alpha,\alpha}$ de longueur $q_{n+2} - 2$ est un palindrome : il suffit de rappeler que l'on a $b_m = P_{2m}10$ et $c_m = P_{2m-1}01$ pour tout entier $m \geq 2$. On en déduit

$$\forall\, j \in \mathbb{N},\ 0 \leq j \leq q_{n+2} - 3,\ \ s_{\alpha,\alpha}(j) = s_{\alpha,\alpha}(q_{n+2} - 3 - j).$$

Soit i un entier compris entre 0 et $2q_n + q_{n-1} - 3$. A fortiori, on a

$$0 \leq i \leq q_{n+1} + q_n - 3 \leq q_{n+2} - 3,$$

d'où $s_{\alpha,\alpha}(i) = s_{\alpha,\alpha}(q_{n+2} - 3 - i)$. Comme $q_{n+2} = a_{n+2}q_{n+1} + q_n$, quitte à utiliser $a_{n+2} - 1$ fois le lemme 4.4 si $a_{n+2} \geq 2$, on obtient

$$s_{\alpha,\alpha}(i) = s_{\alpha,\alpha}(q_{n+1} + q_n - 3 - i) = s_{\alpha,\alpha}((a_{n+1} + 1)q_n + q_{n-1} - 3 - i).$$

Si $a_{n+1} = 1$, le résultat est acquis. Sinon, toujours d'après le lemme 4.4, on vérifie

$$s_{\alpha,\alpha}(i) = s_{\alpha,\alpha}(a_{n+1}q_n + q_{n-1} - 3 - i) = \cdots = s_{\alpha,\alpha}(2q_n + q_{n-1} - 3 - i),$$

ce qui permet de conclure. $\star$

Conclusion

À ce stade, on s'interroge sur d'éventuelles extensions des résultats décrits aux chapitres précédents. Tout d'abord, il serait intéressant de connaître l'ensemble des substitutions qui laissent fixe une suite admissible. En remarquant que les mots sturmiens sont rigides, au sens défini dans [80, 99], il semble raisonnable de penser que le morphisme, obtenu par la preuve effective du théorème 3.2, engendre le monoïde des solutions. D'autres propriétés d'invariance apparaissent grâce à la technique de saturation des graphes évoquée à la section 3.5. Mais ces résultats sont beaucoup trop disparates pour être mentionnés ici. La caractérisation complète des mots sturmiens, laissés fixes par une substitution non triviale, demeure donc une question ouverte. Cependant, en utilisant la description des morphismes sturmiens à partir des conjugués des morphismes standard [99], une solution est peut-être envisageable.

Un autre thème abordé est le calcul d'images réciproques des mots sturmiens par les morphismes sturmiens. Pour résoudre entièrement le problème du bassin d'attraction, il reste à déterminer les antécédents d'un mot sturmien donné, par l'ensemble des morphismes sturmiens. Il pourrait aussi s'avérer judicieux de décrire précisément ces procédés de correction dans le cas des mots finis, en espérant voir apparaître des mots de Christoffel, de Lyndon ou de Robinson. De plus, le monoïde de Sturm est unitaire à gauche et à droite, mais il semble que son radical n'ait pas encore été identifié. Un peu plus généralement, on peut se demander s'il existe une substitution, n'appartenant pas à St, dont une puissance est un morphisme sturmien. En outre, existe-t-il un mot infini déséquilibré x et une substitution f, non sturmienne, tels que $f(x)$ est un mot sturmien ?

La majeure partie du travail proposé est liée à l'étude de tranformations qui préservent globalement l'ensemble des mots sturmiens. Il est donc naturel de vouloir caractériser tous les transducteurs qui vérifient cette propriété. Dans cette perspective, on est amené à considérer différents phénomènes de suppression et d'insertion périodique. Quelques résultats très partiels existent à ce sujet.

Soit ${}^{\omega}\mathcal{A}^{\omega}$ l'ensemble des mots infinis à gauche et à droite. On montre qu'une suite sturmienne, définie sur ${}^{\omega}\mathcal{A}^{\omega}$, est laissée fixe par une substitution non triviale si et seulement si sa pente α est un nombre de Sturm et son intercept appartient au corps de rupture $\mathbb{Q}(\alpha)$. Ce résultat fait l'objet d'un article, accepté au Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux [87]. Bien évidemment, les autres thèmes abordés dans cette thèse peuvent aussi être adaptés aux suites sturmiennes définies sur $\mathbb{Z}$. Ce travail est en cours de réalisation.

Enfin, le problème de la généralisation des mots sturmiens semble au cœur de toutes les préoccupations : l'intérêt se porte notamment sur la complexité de suites doubles, les alphabets à trois lettres, les pavages du plan à l'aide de polygones plus ou moins réguliers, ou l'utilisation de tores. On remarque aussi un intérêt grandissant vis-à-vis des mots de Lyndon [13], qui interviennent dans l'étude des fonctions de Riemann ou encore dans les calculs de bases de Groebner [81]. Et ce ne sont là que quelques exemples du vaste champ d'application des mots sturmiens ...

Bibliographie

[1] J.-P. Allouche, *Sur la complexité des suites infinies*, Bull. Belg. Math. Soc. 1 (1994), 133–143.

[2] J.-P. Allouche, J. Bétréma et J. Shallit, *Sur des points fixes de morphismes d'un monoïde libre*, Inform. Théor. Appl. 23-3 (1989), 235–249.

[3] J.-P. Allouche and M. Mendès France, *Quasicrystal using chain and automata theory*, J. Stat. Phys. 42 (1986), 809–821.

[4] P. Arnoux et G. Rauzy, *Représentation géométrique des suites de complexité* $2n+1$, Bull. Soc. Math. France 119 (1991), 199–215.

[5] T. Bang, *On the sequence* $\lfloor n\alpha \rfloor$, Math. Scand. 5 (1957), 69–76.

[6] S. Beatty, *Problem 3173*, Amer. Math. Monthly 33 (1926) 159. Solutions, *ibid.*, 34 (1927) 159.

[7] J. Bernoulli III, *Sur une nouvelle espèce de calcul*, Recueil pour les astronomes 1, Berlin, (1772), 255–284.

[8] J. Berstel, *Sur les mots sans carré définis par un morphisme*, Lect. Notes Comp. Sci. 71 (1979), 16–25.

[9] J. Berstel, *Mots sans carré et morphismes itérés*, Discrete Math. 29 (1980), 235–244.

[10] J. Berstel, *Mots de Fibonacci*, LITP Sémin. Inform. Théor. (1980-81), 57–78.

[11] J. Berstel, *Tracé de droites, fractions continues et morphismes itérés*, Rapport LITP 87-61 (1987).

[12] J. Berstel, *Recent results on Sturmian words*, in: J. Dassow eds., Proc. DLT'95, World Scientific, Singapore (1996).

[13] J. Berstel and A. de Luca, *Sturmian words, Lyndon words and trees*, Theoret. Comput. Sci. 178 (1997), 171–203.

[14] J. Berstel and M. Pocchiola, *A geometric proof of the enumeration formula for Sturmian words*, Internat. J. Algebra Comput. 3 (1993), 349–355.

[15] J. Berstel and M. Pocchiola, *Random generations of Sturmian factors*, Rapport LITP 94-4 (1994).

[16] J. Berstel and P. Séébold, *A characterization of Sturmian morphisms*, Lect. Notes Comp. Sci. 711 (1993), 281–290.

[17] J. Berstel et P. Séébold, *Morphismes de Sturm*, Bull. Belg. Math. Soc. 1 (1994), 175–189.

[18] J. Berstel and P. Séébold, *A remark on morphic Sturmian words*, Inform. Théor. Appl. 28 (1994), 255–263.

[19] V. Berthé, *Fréquences des facteurs des suites sturmiennes*, Theoret. Comput. Sci. 165 (1996), 295–309.

[20] E. Bombieri and J. E. Taylor, *Which distributions of matter diffract? An initial investigation*, J. Phys. 47 (1986) Colloque C3, 19–28.

[21] J.-P. Borel, *Opérations sur les mots de Christoffel*, C. R. Acad. Sci. Paris 325 (1997), 239–242.

[22] J.-P. Borel et F. Laubie, *Construction de mots de Christoffel*, C. R. Acad. Sci. Paris 313 (1991), 483–485.

[23] J.-P. Borel et F. Laubie, *Quelques mots sur la droite projective réelle*, J. Théorie des Nombres de Bordeaux 5 (1993), 23–51.

[24] J. M. Borwein and P. B. Borwein, *On the generating function of the integer part* $\lfloor n\alpha + \gamma \rfloor$, J. Number Theory 43 (1993), 293–318.

[25] D. Bowman, *Approximation of* $\lfloor n\alpha+s \rfloor$ *and the zero of* $\{n\alpha+s\}$, J. Number Theory 50 (1995), 128–144.

[26] J. E. Bresenham, *Algorithm for computer control of a digital plotter*, IBM Systems J. 4 (1965), 25–30.

[27] T. C. Brown, *A characterization of the quadratic irrationals*, Canad. Math. Bull. 34 (1991), 36–41.

[28] T. C. Brown, *Descriptions of the characteristic sequence of an irrational*, Canad. Math. Bull. 36 (1993), 15–21.

[29] T. C. Brown and P. Shiue, *Sums of fractional parts of integer multiples of an irrational*, J. Number Theory 50 (1995), 181–192.

[30] A. Châtelet, *Contribution à la théorie des fractions continues arithmétiques*, Bull. Soc. Math. France 40 (1912), 1–25.

[31] E. B. Christoffel, *Observatio arithmetica*, Annali di mathematica 6 (1875), 145–152.

[32] G. Christol, T. Kamae, M. Mendès France et G. Rauzy, *Suites algébriques, automates et substitutions*, Bull. Soc. Math. France 108 (1980), 401–419.

[33] H. Cohen, *Multiplication par un entier d'une fraction continue périodique*, Acta Arith. XXVI (1974), 129–148.

[34] I. G. Connell, *Some properties of Beatty sequences I*, Canad. Math. Bull. 2 (1959), 190–197.

[35] I. G. Connell, *Some properties of Beatty sequences II*, Canad. Math. Bull. 3 (1960), 17–22.

[36] E. M. Coven and G. A. Hedlund, *Sequences with minimal block growth*, Math. Systems Theory 7 (1973), 138–153.

[37] D. Crisp, W. Moran, A. Pollington and P. Shiue, *Substitution invariant cutting sequences*, J. Théorie des Nombres de Bordeaux 5 (1993), 123–137.

[38] K. Culik II and T. Harju, *Dominoes, slicing semigroups and DNA*, Discrete Applied Math. 31 (1991), 261–277.

[39] K. Culik II and J. Kari, *Image compression using weighted automata*, Computer and Graphics 17 (1993), 305–313.

[40] A. de Luca, *A combinatorial property of the Fibonacci word*, Inform. Process. Lett. 12 (1981), 193–195.

[41] A. de Luca, *Standard Sturmian morphisms*, Theoret. Comput. Sci. 178 (1997), 205–224.

[42] A. de Luca and F. Mignosi, *Some combinatorial properties of Sturmian words*, Theoret. Comput. Sci. 136 (1994), 361–385.

[43] X. Droubay, *Palindromes in the Fibonacci word*, Inform. Process. Lett. 55 (1995), 217–221.

[44] S. Dulucq et D. Gouyou-Beauchamps, *Sur les facteurs des suites de Sturm*, Theoret. Comput. Sci. 71 (1990), 381–400.

[45] N. J. Fine and H. S. Wilf, *Uniqueness theorems for periodic functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1965), 109–114.

[46] A. S. Fraenkel, *Complementary systems of integers*, Amer. Math. Monthly 84 (1977), 114–115.

[47] A. S. Fraenkel, *Systems of numeration*, Amer. Math. Monthly 92 (1985), 105–114.

[48] A. S. Fraenkel and R. Holzman, *Gap problems for integer part and fractional part sequences*, J. Number Theory 50 (1995), 66–86.

[49] A. S. Fraenkel, J. Levitt and M. Shimshoni, *Characterization of the set of values* $f(n) = \lfloor n\alpha \rfloor$, Discrete Math. 2 (1972), 335–345.

[50] A. S. Fraenkel, M. Mushkin and U. Tassa, *Determination of* $\lfloor n\theta \rfloor$ *by its sequence of differences*, Canad. Math. Bull. 21 (1978), 441–446.

[51] R. L. Graham, *Covering the positive integers by disjoint sets of the form* $\{\lfloor n\alpha + \beta \rfloor : n = 1, 2, \ldots\}$, J. Comb. Theor. Ser. A15 (1973), 354–358.

[52] M. Hall, *On the sum and product of continued fractions*, Ann. of Math. 48 (1947), 966–993.

[53] Y. Hara-Mimachi and S. Ito, *A characterization of real quadratic numbers by Diophantine algorithms*, Tokyo J. Math. 14 (1991), 251–267.

[54] T. Harju and M. Linna, *The equations* $h(w) = w^n$ *in binary alphabets*, Theoret. Comput. Sci. 33 (1984), 327–329.

[55] G. A. Hedlund, *Sturmian minimal sets*, Amer. J. Math. 66 (1944), 605–620.

[56] G. A. Hedlund, *Endomorphisms ans automorphisms of the shift dynamical system*, Math. Systems Theory 3 (1969), 320–375.

[57] S. Ito, *On a dynamical system related to sequences* $\lfloor nx+y\rfloor - \lfloor (n-1)x+y\rfloor$, Collection: Dynamical Systems and Related Topics, Nagoya (1990), 192–197.

[58] S. Ito and N. Hitoshi, *Approximations of real numbers by the sequence* $\{n\alpha\}$ *and their metrical theory*, Acta Math. Hungar. 52 1-2 (1988), 91–100.

[59] S. Ito and S. Yasutomi, *On continued fractions, substitutions and characteristic sequences*, Japan. J. Math. 16 (1990), 287–306.

[60] J. Justin and G. Pirillo, *On a combinatorial property of Sturmian words*, Theoret. Comput. Sci. 154 (1996), 387–394.

[61] J. Justin and G. Pirillo, *Decimations and Sturmian words*, Inform. Théor. Appl. 31-3 (1997), 271–290.

[62] J. Karhumaki, *On strongly cube-free* ω*-words generated by binary morphisms*, Lect. Notes Comp. Sci. 117 (1981), 182–189.

[63] J. Karhumaki, *On cube-free* ω*-words generated by binary morphisms*, Discrete Applied Math. 5 (1983), 279–297.

[64] D. E. Knuth, J. H. Morris and V. R. Pratt, *Fast pattern matching in strings*, SIAM J. Comput. 6 (1977), 323–350.

[65] T. Komatsu, *The fractional part of* $n\theta+\varphi$ *and Beatty sequences*, J. Théorie des Nombres de Bordeaux 7 (1995), 387–406.

[66] T. Komatsu, *On the characteristic word of the inhomogeneous Beatty sequence*, Bull. Austral. Math. Soc. 51 (1995), 337–351.

[67] T. Komatsu, *A certain power series associated with a Beatty sequence*, Acta Arith. LXXVI 2 (1996), 109–128.

[68] T. Komatsu and A. J. van der Poorten, *Substitution invariant Beatty sequences*, Japan. J. Math. 22 (1996), 349–354.

[69] M. Kósa, *Problems and solutions*, EATCS Bulletin 32 (1987), 331–333.

[70] J. Lambek and L. Moser, *Inverse and complementary sequences of natural numbers*, Amer. Math. Monthly 61 (1954), 454–458.

[71] F. Laubie, *Prolongements homographiques des substitutions de mots de Christoffel*, C. R. Acad. Sci. Paris 313 (1991), 565–567.

[72] F. Laubie et É. Laurier, *Calcul de multiples de mots de Christoffel*, C. R. Acad. Sci. Paris 320 (1995), 765–768.

[73] M. Lothaire, *Combinatorics on words*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 17 Addison-Wesley, Reading, MA (1983).

[74] W. F. Lunnon and P. A. B. Pleasants, *Characterization of two-distance sequences*, J. Austral. Math. Soc. 53 (1992), 198–218.

[75] A. A. Markov, *Sur une question de Jean Bernoulli*, Math. Ann. 19 (1882), 27–36.

[76] G. Melançon, *Lyndon factorization of Sturmian words*, Rapport LaBRI (1995).

[77] M. Mendès France, *Sur les fractions continues limitées*, Acta Arith. XXIII (1973), 207–215.

[78] F. Mignosi, *Infinite words with linear subword complexity*, Theoret. Comput. Sci. 65 (1989), 221–242.

[79] F. Mignosi, *On the number of factors of Sturmian words*, Theoret. Comput. Sci. 82 (1991), 71–84.

[80] F. Mignosi et P. Séébold, *Morphismes sturmiens et règles de Rauzy*, J. Théorie des Nombres de Bordeaux 5 (1993), 221–233.

[81] H. N. Minh and M. Petitot, *Lyndon words, polylogarithmic functions and the Riemann ζ function*, Preprint (1997).

[82] M. Morse and G. A. Hedlund, *Symbolic Dynamics*, Amer. J. Math. 60 (1938), 815–866.

[83] M. Morse and G. A. Hedlund, *Symbolic Dynamics II. Sturmian trajectories*, Amer. J. Math. 62 (1940), 1–42.

[84] K. Nishioka, I. Shiokawa and J. I. Tamura, *Arithmetical properties of a certain power series*, J. Number Theory 42 (1992), 61–87.

[85] J.-J. Pansiot, *Complexité des facteurs des mots infinis engendrés par morphismes itérés*, Lect. Notes Comp. Sci. 172 (1984), 380–389.

[86] B. Parvaix, *Propriétés d'invariance des mots sturmiens*, J. Théorie des Nombres de Bordeaux 9 (1997), 351–369.

[87] B. Parvaix, *Substitution invariant Sturmian bisequences*, J. Théorie des Nombres de Bordeaux – to appear.

[88] B. Parvaix, *Continued fractions and certain Sturmian transducers*, Acta Arith. – submitted.

[89] A. D. Pollington, *On the density of sequences $\{n_k\xi\}$*, Illinois J. Math. 23 (1979), 511–515.

[90] M. Queffélec, *Substitution dynamical systems*, Lect. Notes Math. 1294 (1987).

[91] G. N. Raney, *On continued fractions and finite automata*, Math. Ann. 206 (1973), 265–283.

[92] G. Rauzy, *Suites à termes dans un alphabet fini*, Sémin. Théorie des Nombres de Bordeaux (1982-1983), 25-01 25-16.

[93] G. Rauzy, *Mots infinis en arithmétique*, in: M. Nivat and D. Perrin, eds., Automata on infinite words, Lect. Notes Comp. Sci. 192 (1985), 165–171.

[94] G. Rauzy, *Rotations sur les groupes, nombres algébriques, et substitutions*, Sémin. Théorie des Nombres de Bordeaux (1987-1988), Exposé 21.

[95] J. Rosenblatt, *The sequence of greatest integers of an arithmetic progression*, J. Lond. Math. Soc. 17 (1978), 213–218.

[96] A. Salomaa, *Jewels of formal language theory*, Computer Science Press (1981).

[97] P. Séébold, *An effective solution to the D0L-periodicity problem in the binary case*, EATCS Bull. 36 (1988), 137–151.

[98] P. Séébold, *Fibonacci morphisms and Sturmian words*, Theoret. Comput. Sci. 88 (1991), 365–384.

[99] P. Séébold, *On the conjugation of standard morphisms*, Theoret. Comput. Sci. 195 (1998), 91–109.

[100] C. Series, *The geometry of Markoff numbers*, Math. Intelligencer 7 (1985), 20–29.

[101] J. Shallit, *Characteristic words as fixed points of homomorphisms*, Univ. of Waterloo, Dept. of Computer Science, Tech. Report CS-91-72 (1991).

[102] H. J. S. Smith, *Note on continued fractions*, Messenger of Math. 6 (1876), 1–14.

[103] K. B. Stolarsky, *Beatty sequences, continued fractions and certain shift operators*, Canad. Math. Bull. 19 (1976), 473–482.

[104] R. Tijdeman, *On disjoint pairs of Sturmian bisequences*, Mathematical Institute University of Leiden, Report W96-02 (1996).

[105] R. Tijdeman, *On complementary triples of Sturmian bisequences*, Indag. Math. 7 (1996), 419–424.

[106] R. Tijdeman, *Intertwinings of periodic sequences*, Indag. Math. 9 (1998), 113-122.

[107] B. A. Venkov, *Elementary number theory*, Wolters-Noordhoff, Groningen (1970).

[108] Z.-X. Wen and Z.-Y. Wen, *Local isomorphisms of invertible substitutions*, C. R. Acad. Sci. Paris 318 (1994), 299–304.

[109] E. Zeckendorff, *Représentation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas*, Bull. Soc. Royale Sci. Liège 42 (1972), 179–182.

Annexe A

Programmes Maple

A.1 Décomposition des morphismes sturmiens

L'algorithme proposé permet de tester si un morphisme f est sturmien, et donne, le cas échéant, une décomposition de f sur le monoïde de Sturm. La démarche suivie est fondée sur la preuve de la proposition 2.6. Les chaînes de caractères $f(0)$ et $f(1)$ constituent l'entrée de la procédure principale *Decomposition*. Les morphismes φ, $\tilde{\varphi}$ et E sont représentés par les mots réservés *phi*, *phit* et *E*. Les calculs d'antécédents sont effectués par les procédures *AntePhi*, *AntePhit*, *AnteInv* et *AnteMorph*.

```
AntePhi := proc(Mot)
    local Long,i,Antecedent,Aux,Test;
        Long := length(Mot); Antecedent := ``;
        i := 1; Test := true;
        while Test and (i < Long) do
            Aux := substring(Mot,i .. i+1);
            if Aux = `01` then
                Antecedent := cat(Antecedent,`0`); i := i+2
            else
                if Aux = `00` then
                    Antecedent := cat(Antecedent,`1`); i := i+1
                else Test := false
                fi
            fi
        od;
        if i = Long then
            if substring(Mot,Long .. Long) = `0` then
                Antecedent := cat(Antecedent,`1`)
            else Test := false
            fi
        fi;
        if Test then RETURN(Antecedent) else RETURN() fi
    end;

AntePhit := proc(Mot)
    local Long,i,Antecedent,Aux,Test;
        Long := length(Mot); Antecedent := ``;
        i := 1; Test := true;
        while Test and (i < Long) do
            Aux := substring(Mot,i .. i+1);
            if Aux = `10` then
                Antecedent := cat(Antecedent,`0`); i := i+2
            else
                if Aux = `01` then
                    Antecedent := cat(Antecedent,`1`); i := i+1
```

```
                else
                    if Aux = `00` then
                      Antecedent := cat(Antecedent,`11`); i := i+2
                    else Test := false
                    fi
                fi
            fi
        od;
        if i = Long then
            if substring(Mot,Long .. Long) = `0` then
                Antecedent := cat(Antecedent,`1`)
            else Test := false
            fi
        fi;
        if Test then RETURN(Antecedent) fi;
        RETURN()
    end;

AnteInv := proc(Mot)
local i,Long,Permute;
  Permute := proc(Lettre)
             if Lettre = `0` then RETURN(`1`) else RETURN(`0`) fi
             end;
  Long := length(Mot);
  RETURN(cat(seq(Permute(substring(Mot,i..i)),i=1..Long)))
end;

AnteMorph := proc(Mots,Morph)
    local Nb,i,NewMots,Test;
        NewMots := Mots; Nb := nops(Morph);
        Test := true; i := 1;
        while (i <= Nb) and Test do
            if Morph[i] = E then
              NewMots := map(AnteInv,NewMots)
            fi;
            if Morph[i] = phi then
              NewMots := map(AntePhi,NewMots)
            fi;
            if Morph[i] = phit then
              NewMots := map(AntePhit,NewMots)
            fi;
            Test := nops(NewMots) = 2; i := i+1
        od;
        if Test then RETURN(NewMots) else RETURN([]) fi
    end;
```

```
Decomposition := proc(f0,f1)
local Long,TestLong,TestSturm,Decomp,L0,L1,LetFin0,LetFin1,
    LetDeb0,LetDeb1,Antecedents,Candidat,Im0,Im1,i;
    if cat(f0,f1) = cat(f1,f0) then RETURN() fi;
    Im0 := f0; Im1 := f1; L0 := length(Im0);
    L1 := length(Im1); Long := L0+L1; TestLong := 3 <= Long;
    TestSturm := true; Decomp := []; Candidat := [];
    while TestLong and TestSturm do
        LetFin0 := substring(Im0,L0 .. L0);
        LetFin1 := substring(Im1,L1 .. L1);
        LetDeb0 := substring(Im0,1 .. 1);
        LetDeb1 := substring(Im1,1 .. 1);
        if LetFin0 = LetFin1 then
            if LetFin0 = `0` then
              if member(`11`,
                   [seq(substring(Im0,i..i+1),i=1..L0-1)])
               or member(`11`,
                   [seq(substring(Im1,i..i+1),i=1..L1-1)])
              then
                Candidat := [E,phi]
              else Candidat := [phit]
              fi
            fi;
            if LetFin0 = `1` then
              if member(`00`,
                  [seq(substring(Im0,i..i+1),i=1..L0-1)])
               or member(`00`,
                  [seq(substring(Im1,i..i+1),i=1..L1-1)])
              then
                Candidat := [phi]
              else Candidat := [E,phit]
              fi
            fi
        else
            if LetDeb0 = LetDeb1 then
              if LetDeb0 = `0` then
                if member(`11`,
                     [seq(substring(Im0,i..i+1),i=1..L0-1)])
                 or member(`11`,
                     [seq(substring(Im1,i..i+1),i=1..L1-1)])
                then
                  Candidat := [E,phit]
                else Candidat := [phi]
                fi
```

```
                fi;
                if LetDeb0 = `1` then
                  if member(`00`,
                       [seq(substring(Im0,i..i+1),i=1..L0-1)])
                    or member(`00`,
                       [seq(substring(Im1,i..i+1),i=1..L1-1)])
                  then
                    Candidat := [phit]
                  else Candidat := [E,phi]
                  fi
                fi
              else TestSturm := false
              fi
        fi;
        Antecedents := AnteMorph([Im0,Im1],Candidat);
        if TestSturm then
            TestSturm := evalb(Antecedents <> [])
        fi;
        if TestSturm then
            Im0 := Antecedents[1]; Im1 := Antecedents[2];
            Decomp := [op(Decomp),op(Candidat)];
            L0 := length(Im0); L1 := length(Im1);
            Long := L0+L1; TestLong := 3 <= Long
        fi
    od;
    if TestSturm then
        if (Im0 = `0`) and (Im1 = `1`) then
           RETURN(Decomp)
        fi;
        if (Im0 = `1`) and (Im1 = `0`) then
           RETURN([op(Decomp),E])
        fi
    fi;
    RETURN()
end;
```

Exemples.

On teste trois morphismes respectivement cyclique, acyclique et déséquilibré, et sturmien.

Decomposition(`0101`,`010101`)	$\to$	;
Decomposition(`010`,`0101`)	$\to$	;
Decomposition(`0010010`,`00100100010`)	$\to$	[phit,E,phi,phit,phi,phi,E].

A.2 Invariance des suites admissibles

Soit x une des suites étudiées au corollaire 3.2. Comme on cherche à construire un morphisme non trivial qui laisse fixe cette suite, on suppose que sa pente α est un nombre de Sturm. En reprenant les notations de la définition 3.2, deux cas se présentent :

- si $\alpha = [0, 1+k_n, \overline{k_{n-1}, \ldots, k_2, k_1+k_n}\ ]$ avec $(k_1, k_n) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on pose $Forme = 1$ et $Dfc = [0, 1+k_n, k_{n-1}, \ldots, k_2, k_1+k_n]$;
- si $\alpha = [0, 1, k_n, \overline{k_{n-1}, \ldots, k_2, k_1+k_n}\ ]$ avec $k_1 \in \mathbb{N}^*$, on pose $Forme = 2$ et $Dfc = [0, 1, k_n, k_{n-1}, \ldots, k_2, k_1+k_n]$.

De plus, on introduit le paramètre $TypeSeq$, égal à zéro ou un, selon que x est issu de l'application s ou s'. Enfin, il existe un triplet d'entiers, que l'on note (a, b, n), tel que l'intercept de x est égal à $\frac{a}{n} + \frac{b}{n}\alpha$.

Pour commencer, on traduit l'action des morphismes E, G et D sur les triplets (u, v, n) lorsque (u, v) parcourt l'ensemble $C'(n)$.

```
e := proc(u,v,n)
   if (u = 0) and (v = 0) then
     RETURN(0,0,n)
   else
     RETURN(n-u-v,v,n)
   fi
 end;

g := proc(u,v,n) RETURN(u, v - u, n) end;

d := proc(u,v,n) RETURN(u, v - u + n, n) end;
```

On teste ensuite si un couple d'entiers donné appartient à $C(n)$, ou à l'ensemble dérivé, défini à partir du graphe de la page 54.

```
Admissible1 := proc(u,v,n)
 local Test;
  Test := (((v=0) and (1<=u) and (u<=n-1))  or
          ((1<=v) and (v<=n-1) and (0<=u) and (u<=n-v)) or
          ((v<=-1) and (1-n<=v) and (1-v<=u) and (u<=n-1)));
  RETURN(Test)
 end;

Admissible2 := proc(u,v,n)
 local Test;
  Test := (((v=0) and (1<=u) and (u<=n-1)) or
          ((1<=v) and (v<=n-1) and (0<u) and (u<n-v)) or
          ((v<=-1) and (1-n<=v) and (-v<=u) and (u<=n)));
  RETURN(Test)
 end;
```

On présente enfin la procédure qui construit un morphisme répondant au problème posé.

```
ConsMorphFixe := proc(Typeseq,Dfc,Forme,a,b,n)
 local i,t,NewDfc,NewTriple,NewTypes,Morph,ConsMorphFixeForme1;
  ConsMorphFixeForme1 := proc(Dfc,a,b,n,Typeseq)
    local Liste,Aux,t,TripleDeb,TripleArr,Test,Morph,aa,bb,nn,
    gg,i,j,Res,X,Y,Fonction,Types;
      gg := igcd(a,b,n); aa := a/gg;
      bb := b/gg; nn := n/gg;
      Aux := Dfc; t := nops(Aux);
      Liste := [Aux[t]-Aux[2]+1,
            seq(Aux[t-i+1],i = 2 .. t-2),Aux[2]-1];
      t := nops(Liste);
      if (aa = 0) and (bb = nn) then
          RETURN(cat(op([seq(G,i = 1 .. Liste[t]),
                 seq(op([E,seq(G,i = 1 .. Liste[t-j])]),
                 j = 1 .. t-1)])))
      fi;
      if (aa=0) and (bb=0) or (nn=1) and (aa=1) and (bb=-1) then
             if type(t,odd) then
                 Res := [seq(X,j = 1 .. Liste[t]),seq(op([E,
                     seq(Y,j = 1 .. Liste[t-2*i+1]),E,
                     seq(X,j = 1 .. Liste[t-2*i])]),
                     i = 1 .. 1/2*t-1/2)]
             fi;
             if type(t,even) then
                 Res := [seq(X,j = 1 .. Liste[t]),E,
                     seq(Y,j = 1 .. Liste[t-1]),seq(op([E,
                     seq(X,j = 1 .. Liste[t-2*i]),E,
                     seq(Y,j = 1 .. Liste[t-2*i-1])]),
                     i = 1 .. 1/2*t-1),
                     `||`,seq(Y,j = 1 .. Liste[t]),E,
                     seq(X,j = 1 .. Liste[t-1]),seq(op([E,
                     seq(Y,j = 1 .. Liste[t-2*i]),E,
                     seq(X,j = 1 .. Liste[t-2*i-1])]),
                     i = 1 .. 1/2*t-1)]
             fi;
             if (aa = 0) and (bb = 0) then
                 if Typeseq = 0 then Res := subs(X = G,Y = D,Res)
                 else Res := subs(X = D,Y = G,Res)
                 fi
             fi;
             if (aa = 1) and (bb = -1) and (nn = 1) then
```

```
                Res := subs(X = D,Y = D,Res)
            fi;
            RETURN(cat(op(Res)))
        fi;
        if Admissible1(aa,bb,nn) then Fonction := Admissible1
        else
            if Admissible2(aa,bb,nn) then Fonction := Admissible2
            else RETURN([])
            fi
        fi;
        TripleDeb := aa,bb,nn; TripleArr := aa,bb,nn;
        Test := false; Morph := [];
        while not Test do
            for i to t do
                for j to Liste[i] do
                    if Fonction(g(TripleArr)) then
                        TripleArr := g(TripleArr);
                        Morph := [G,op(Morph)]
                    else
                        TripleArr := d(TripleArr);
                        Morph := [D,op(Morph)]
                    fi
                od;
                if i <> t then
                    TripleArr := e(TripleArr);
                    Morph := [E,op(Morph)]
                fi
            od;
            Test := evalb(TripleDeb = TripleArr);
            if not Test then Morph := [`||`,op(Morph)] fi
        od;
        RETURN(cat(op(Morph)))
    end;
    t := nops(Dfc);
    if Forme = 2 then
        NewDfc := [0,1+Dfc[3],seq(Dfc[i],i = 4 .. t)];
        NewTypes := 1-Typeseq;
        NewTriple := e(a,b,n);
        Morph := ConsMorphFixeForme1(NewDfc,NewTriple,NewTypes);
        Morph := cat(E,Morph,E)
    else Morph := ConsMorphFixeForme1(Dfc,a,b,n,Typeseq)
    fi;
    RETURN(Morph)
end;
```

Exemples.

On considère l'irrationnel $\frac{3-\sqrt{5}}{4}$ de fraction continue $[0,5,\overline{4}\,]$. La session Maple obtenue est la suivante :

ConsMorphFixe(0,[0,5,4],1,0,0,1)	$\rightarrow$	GGGGE||DDDDE;
ConsMorphFixe(1,[0,5,4],1,0,0,1)	$\rightarrow$	DDDDE||GGGGE;
ConsMorphFixe(0,[0,5,4],1,0,1,1)	$\rightarrow$	GGGGE;
ConsMorphFixe(0,[0,5,4],1,1,-1,1)	$\rightarrow$	DDDDE||DDDDE;
ConsMorphFixe(1,[0,5,4],1,1,-1,1)	$\rightarrow$	DDDDE||DDDDE;

ConsMorphFixe(0,[0,5,4],1,1,2,3) $\rightarrow$

DGGDE||DGDDE||GDDGE||GGGGE||DDGDE||GGDGE||GDGGE||GGGGE;

ConsMorphFixe(0,[0,5,4],1,1,-1,3) $\rightarrow$

GGDGE||DDGDE||DGDDE||DDDDE||GDDGE||GDGGE||DGGDE||DDDDE.

On présente une nouvelle série d'exemples avec $\alpha = [0,1,2,\overline{4,3}\,] = \frac{9-4\sqrt{3}}{3}$.

ConsMorphFixe(0,[0,1,2,4,3],2,0,0,1)	$\rightarrow$	EDDEGGGGEDE;
ConsMorphFixe(1,[0,1,2,4,3],2,0,0,1)	$\rightarrow$	EGGEDDDDEGE;
ConsMorphFixe(0,[0,1,2,4,3],2,0,1,1)	$\rightarrow$	EGGEGGGGEGE;
ConsMorphFixe(0,[0,1,2,4,3],2,1,-1,1)	$\rightarrow$	EDDEDDDDEDE;
ConsMorphFixe(1,[0,1,2,4,3],2,1,-1,1)	$\rightarrow$	EDDEDDDDEDE;

ConsMorphFixe(0,[0,1,2,4,3],2,1,2,3) $\rightarrow$

EGGEDGGDED||GDEGGDGEG||DGEGDGGEGE;

ConsMorphFixe(0,[0,1,2,4,3],2,1,-1,3) $\rightarrow$

EDDEGGDGED||DGEGDGGED||GGEDGGDEDE.

Remarques. L'algorithme proposé est particulièrement efficace puisqu'aucun calcul sur les pentes et les intercepts n'est effectué. En effet, seules interviennent des opérations élémentaires sur des triplets d'entiers. De plus, il est inutile de mémoriser les différentes étapes dans la construction des morphismes, car le procédé suivi est en tout point déterministe.

A.3 Bassin d'attraction

On rappelle que les antécédents des mots sturmiens par les morphismes sturmiens sont les mots appartenant à l'un des ensembles $a^k\mathcal{E} \cap \overline{\mathcal{P}}$ avec $a \in \mathcal{A}$ et $k \in \mathbb{N}$. En référence au graphe de la page 81, pour $j \in \mathbb{N}^*$, l'état $0^j\mathcal{E} \cap \overline{\mathcal{P}} \cap 0^{j-1}\mathcal{D}$ est symbolisé par $[0, j]$ et $1^j\mathcal{E} \cap \overline{\mathcal{P}} \cap 1^{j-1}\mathcal{D}$ par $[1, j]$. L'ensemble des mots sturmiens est représenté indifféremment par $[0, 0]$ ou $[1, 0]$. De plus, la donnée d'un morphisme sturmien f, décomposé sur l'alphabet $\{E, G, D\}$, constitue l'entrée de la procédure principale *AttractMorph*. En sortie, on obtient le langage des mots dont l'image par f est sturmienne. La procédure *AttractGen* permet d'effectuer de tels calculs pour les générateurs du monoïde de Sturm.

```
AttractGen := proc(Gen,Etat)
   if Gen = E then RETURN([[1-Etat[1],Etat[2]]]) fi;
   if Gen = G then
     if Etat[2] = 0 then RETURN([Etat])
     else
       if Etat[1] = 1 then RETURN([]) else RETURN([Etat]) fi
     fi
   fi;
   if Gen = D then
     if Etat[2] = 0 then RETURN([Etat,[0,1]])
     else
       if Etat[1] = 0 then RETURN([[Etat[1],Etat[2]+1]]) fi;
       if Etat[1] = 1 then
         if Etat[2] = 1 then RETURN([Etat]) else RETURN([]) fi
       fi
     fi
   fi
 end;

AttractMorph := proc(Morph)
local Long,i,L,Etat;
  L := [[0,0]]; Long := length(Morph);
  for i to Long do
    L := [seq(op(AttractGen(substring(Morph,i..i),Etat)),Etat=L)]
  od;
  RETURN(L)
end;
```

<u>Exemple.</u>

AttractMorph('DGEGDDDE') $\rightarrow$ [[0, 0], [1, 1], [1, 2], [1, 3]].

A.4 Résolution de l'équation $f(x) = y$ où $f \in St$ et $y \in \mathcal{E} \cap \overline{\mathcal{P}}$

Soit $y \in \mathcal{E} \cap \overline{\mathcal{P}}$. Soit $f \in St$. Pour résoudre l'équation $f(x) = y$ sur $\mathcal{A}^\omega$, on est amené à manipuler des mots appartenant à $\bigcup_{a \in \mathcal{A}} a^*\mathcal{E} \cap \overline{\mathcal{P}}$. Soit w l'un d'eux. Soit z le plus grand suffixe sturmien de w, calculé à l'aide de la procédure *MaxSturm*. On écrit $z = s_{\alpha,\rho}$ avec $(\alpha, \rho) \in \Lambda$ ou bien $z = s'_{\alpha',\rho'}$ avec $(\alpha', \rho') \in \Lambda'$. De plus, il existe une lettre a et un entier k tels que $w = a^k z$. Le mot w est donc représenté par le quintuplet $[a, k, 0, \alpha, \rho]$ ou $[a, k, 1, \alpha', \rho']$ selon que z est égal à $s_{\alpha,\rho}$ ou bien $s'_{\alpha',\rho'}$. La procédure *RecipMorph* permet de calculer l'image réciproque de w par une substitution f, décomposée sur le monoïde de Sturm. La démarche suivie est en relation avec les propositions 5.2, 5.3, 5.4 et le lemme 5.12. Les calculs d'antécédents par les morphismes E, G et D sont respectivement effectués par les fonctions *RecipE*, *RecipG* et *RecipD*. Enfin, *ImageMorph* permet de réaliser le travail inverse, à l'aide notamment des fonctions *ImageG* et *ImageD*.

```
MaxSturm := proc(Mot)
    local Test,Test1,Test2,MaxMot,Res,ResEval;
        MaxMot := Mot; Test := true;
        while Test and (0 < MaxMot[2]) do
            Res := simplify(MaxMot[5]-MaxMot[4]);
            ResEval := evalf(Res);
            if MaxMot[3] = 0 then
              if MaxMot[1] = 0 then
                Test := evalb(0 <= ResEval);
                if Test then
                  MaxMot := subsop(2 = MaxMot[2]-1,5 = Res,MaxMot)
                fi
              else
                Test1 := evalb(ResEval < 0);
                Test2 := evalb(Res = 0);
                Test := Test1 or Test2;
                if Test then
                  MaxMot := subsop(2 = MaxMot[2]-1,MaxMot)
                fi;
                if Test1 then
                  MaxMot := subsop(5 = simplify(Res+1),MaxMot)
                fi;
                if Test2 then
                  MaxMot := subsop(3 = 1,5 = 1,MaxMot)
                fi
              fi
            else
```

```
          Test2 := evalb(Res = 0);
          if MaxMot[1] = 0 then
            Test1 := evalb(0 < ResEval);
            Test := evalb(Test1 or Test2);
            if Test then
              MaxMot := subsop(2 = MaxMot[2]-1,MaxMot)
            fi;
            if Test1 then
              MaxMot := subsop(5 = Res,MaxMot)
            fi;
            if Test2 then
              MaxMot := subsop(3 = 0,5 = 0,MaxMot)
            fi
          else
            Test1 := evalb(ResEval < 0);
            Test := evalb(Test1 or Test2);
            if Test then
              MaxMot := subsop(2 = MaxMot[2]-1,MaxMot)
            fi;
            if Test1 then
              MaxMot := subsop(5 = simplify(Res+1),MaxMot)
            fi;
            if Test2 then MaxMot := subsop(5 = 1,MaxMot) fi
          fi
        fi
    od;
    RETURN(MaxMot)
  end;

RecipE := proc(Mot)
    RETURN(subsop(1 = 1-Mot[1],3 = 1-Mot[3],
           4 = simplify(1-Mot[4]), 5 = simplify(1-Mot[5]),Mot))
  end;

RecipG := proc(Mot)
    local Res,ResEval;
      if (Mot[1] = 1) and (0 < Mot[2]) then RETURN([]) fi;
      if evalb(1/2 < evalf(Mot[4])) then RETURN([]) fi;
      Res := simplify(Mot[4]+Mot[5]); ResEval := evalf(Res);
      if Mot[3] = 0 then
        if evalb(ResEval < 1) then
          RETURN([0,Mot[2],0,normal(Mot[4]/(1-Mot[4]),expanded),
                 normal(Mot[5]/(1-Mot[4]),expanded)])
        else RETURN([])
        fi
```

```
      else
        if evalb(Res = 1) then
          RETURN([0,Mot[2],1,normal(Mot[4]/(1-Mot[4]),expanded),1])
        fi;
        if evalb(ResEval < 1) then
          RETURN([0,Mot[2],1,normal(Mot[4]/(1-Mot[4]),expanded),
                 normal(Mot[5]/(1-Mot[4]),expanded)])
        else RETURN([])
        fi
      fi
    end;

RecipD := proc(Mot)
  local Res,ResEval;
     if evalb(1/2 < evalf(Mot[4])) then RETURN([]) fi;
     if (Mot[1] = 1) and (1 < Mot[2]) then RETURN([]) fi;
     if (Mot[1] = 1) and (Mot[2] = 1) then
       if evalb((Mot[3] = 1) and (Mot[5] = 1)) then
         RETURN([])
       fi;
       Res := simplify(Mot[4]+Mot[5]);
       ResEval := evalf(Res);
       if Mot[3] = 0 then
         if evalb(ResEval < 1) then
           RETURN([1,1,0,normal(Mot[4]/(1-Mot[4]),expanded),
                  normal(Mot[5]/(1-Mot[4]),expanded)])
         else
           RETURN([])
         fi
       else
         if evalb(Res = 1) then
           RETURN([1,1,1,normal(Mot[4]/(1-Mot[4]),expanded),1])
         fi;
         if evalb(ResEval < 1) then
           RETURN([1,1,1,normal(Mot[4]/(1-Mot[4]),expanded),
                  normal(Mot[5]/(1-Mot[4]),expanded)])
         fi;
         RETURN([])
       fi
     fi;
     Res := simplify(Mot[5]-Mot[4]);
     ResEval := evalf(Res);
     if Mot[3] = 0 then
       if evalb(ResEval < 0) then
```

```
        RETURN([0,Mot[2]+1,0,normal(Mot[4]/(1-Mot[4]),expanded),
                normal(Mot[5]/(1-Mot[4]),expanded)])
      fi;
      if evalb(0 <= ResEval) then
        RETURN([0,0,0,normal(Mot[4]/(1-Mot[4]),expanded),
                normal((Mot[5]-Mot[4])/(1-Mot[4]),expanded)])
      fi;
      RETURN([])
    else
      if evalb(Mot[5] = 1) then
        RETURN([0,0,1,normal(Mot[4]/(1-Mot[4]),expanded),1])
      fi;
      if evalb(Res = 0) then
        RETURN([0,0,0,normal(Mot[4]/(1-Mot[4]),expanded),0])
      fi;
      if evalb(ResEval < 0) then
        RETURN([0,Mot[2]+1,1,normal(Mot[4]/(1-Mot[4]),expanded),
                normal(Mot[5]/(1-Mot[4]),expanded)])
      fi;
      if evalb(0 < ResEval) then
        RETURN([0,0,1,normal(Mot[4]/(1-Mot[4]),expanded),
                normal((Mot[5]-Mot[4])/(1-Mot[4]),expanded)])
      fi;
      RETURN([])
    fi
  end;

RecipMorph := proc(Mot,Morph)
     local Long,Liste,i,j,TestVide,x;
       x := Mot;
       i := 1;
       Long := length(Morph);
       TestVide := false;
       Liste := [seq(substring(Morph,j .. j),j = 1 .. Long)];
       while (i <= Long) and not TestVide do
         if Liste[i] = 'D' then x := RecipD(x) fi;
         if Liste[i] = 'G' then x := RecipG(x) fi;
         if Liste[i] = 'E' then x := RecipE(x) fi;
         TestVide := x = []; i := i+1
       od;
       RETURN(x)
     end;

ImageG := proc(Mot)
   if (Mot[1] = 1) and (0 < Mot[2]) then RETURN([]) fi;
```

```
   RETURN([0,Mot[2],Mot[3],normal(Mot[4]/(Mot[4]+1),expanded),
           normal(Mot[5]/(Mot[4]+1),expanded)])
  end;
ImageD := proc(Mot)
   if (Mot[1] = 1) and (1 < Mot[2]) then RETURN([]) fi;
   if (Mot[1] = 1) and (Mot[2] = 1) then
     RETURN([1,1,Mot[3],normal(Mot[4]/(Mot[4]+1),expanded),
             normal(Mot[5]/(Mot[4]+1),expanded)])
   fi;
   if Mot[2] = 0 then
     RETURN([0,0,Mot[3],normal(Mot[4]/(Mot[4]+1),expanded),
             normal((Mot[4]+Mot[5])/(Mot[4]+1),expanded)])
   else
     RETURN([0,Mot[2]-1,Mot[3],normal(Mot[4]/(Mot[4]+1),expanded),
             normal(Mot[5]/(Mot[4]+1),expanded)])
   fi
  end;
ImageMorph := proc(Mot,Morph)
     local Long,Liste,i,j,TestVide,x;
       x := Mot; Long := length(Morph);
       i := Long; TestVide := false;
       Liste := [seq(substring(Morph,j .. j),j = 1 .. Long)];
       while (1 <= i) and not TestVide do
            if Liste[i] = 'D' then x := ImageD(x) fi;
            if Liste[i] = 'G' then x := ImageG(x) fi;
            if Liste[i] = 'E' then x := RecipE(x) fi;
            TestVide := x = []; i := i-1
       od;
       RETURN(x)
     end;
```

Exemples (avec une précision contrôlée par : Digits:=15).

En utilisant la procédure *RecipMorph*, on cherche à retrouver les propriétés d'invariance des suites $s_{\frac{3-\sqrt{5}}{4},\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\frac{3-\sqrt{5}}{4}}$ et $s_{\frac{9-4\sqrt{3}}{3},\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\frac{9-4\sqrt{3}}{3}}$ évoquées précédemment.

Pour

$f = DGGDEDGDDEGDDGEGGGGEDDGDEGGDGEGDGGEGGGGE$

on a

Recipf:=RecipMorph($[0,0,0,\frac{3-\sqrt{5}}{4},\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\frac{3-\sqrt{5}}{4}], f$) $\rightarrow$

$$[1,0,0,\frac{1}{4}\frac{-271443+121393\sqrt{5}}{-51841+23184\sqrt{5}},\frac{1}{6}\frac{-375125+167761\sqrt{5}}{-51841+23184\sqrt{5}}].$$

Pour conclure, il suffit de remarquer

$$\begin{array}{lcl} \text{simplify(Recipf[4]-}\frac{3-\sqrt{5}}{4}) & \to & 0; \\ \text{simplify(Recipf[5]-}(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\frac{3-\sqrt{5}}{4})) & \to & 0; \end{array}$$

et

$$\text{ImageMorph(Recipf,f)} \;\to\; [0,0,0,\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{5},\frac{5}{6}-\frac{1}{6}\sqrt{5}].$$

Pour le second exemple, on pose

$$f = (EDDEGGDGEDDGEGDGGEDGGEDGGDEDE)^2.$$

On vérifie :

$$\text{Recipf:=RecipMorph}([0,0,0,\tfrac{9-4\sqrt{3}}{3},\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{3}\tfrac{9-4\sqrt{3}}{3}],f) \;\to$$

$$[1,0,0,\frac{1}{3}\frac{-58144329+33569644\sqrt{3}}{-3650401+2107560\sqrt{3}},-\frac{2}{9}\frac{-23596563+13623482\sqrt{3}}{-3650401+2107560\sqrt{3}}];$$

$$\begin{array}{lcl} \text{simplify(Recipf[4]-}\frac{9-4\sqrt{3}}{3}) & \to & 0; \\ \text{simplify(Recipf[5]-}(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\frac{9-4\sqrt{3}}{3})) & \to & 0; \end{array}$$

et enfin

$$\text{ImageMorph(Recipf,f)} \;\to\; [1,0,0,3-\frac{4}{3}\sqrt{3},-\frac{2}{3}+\frac{4}{9}\sqrt{3}].$$

Remarques. On constate une nette augmentation de la taille des coefficients intervenant dans les calculs d'images réciproques. Ce problème peut être résolu dans certains cas. Soit un irrationnel quadratique α de polynôme minimal P. Soit x un mot sturmien dont la pente et l'intercept appartiennent au corps de rupture $\mathbb{Q}(\alpha)$. En utilisant l'isomorphisme canonique entre $\mathbb{Q}[X]/P(X)\mathbb{Q}[X]$ et $\mathbb{Q}(\alpha)$, on peut déterminer plus simplement les antécédents de x par les morphismes sturmiens.

A.5 Construction des mots sturmiens

Soit y un mot sturmien. Selon qu'on a $y = s_{\beta,\delta}$ avec $(\beta, \delta) \in \Lambda$ ou bien $y = s'_{\beta,\delta}$ avec $(\beta, \delta) \in \Lambda'$, on pose $TypeSeq = 0$ ou $TypeSeq = 1$. Pour tout entier N, on construit un morphisme f, décomposé non trivialement sur $\{E, G, D\}^N$, tel que la solution de l'équation $f(x) = y$ est un mot sturmien. D'après la proposition 5.5, on obtient un préfixe de y en sortie de $ConsMorph$.

```
ConsMorphAux := proc(TypeSeq,Beta,Delta)
 local TestG,TestG1,TestG2;
   if evalb(1/2 < evalf(Beta)) then RETURN('E') fi;
   TestG1 := (TypeSeq=0) and (evalf(simplify(Beta+Delta))<1);
   TestG2 := (TypeSeq=1) and (evalf(simplify(Beta+Delta))<=1);
   TestG := evalb(TestG1 or TestG2);
   if TestG then RETURN('G') fi;
   RETURN('D')
end;

ConsMorph := proc(TypeSeq,Beta,Delta,N)
local i,f,Gamma,y,a,Long,Res,ResEval,Image;
    Image := proc(Mot,Im0,Im1)
    local j,Choix;
        Choix := proc(Lettre,Im0,Im1)
           if Lettre = 0 then
             RETURN(op(Im0)) else RETURN(op(Im1))
           fi
        end;
        RETURN([seq(Choix(Mot[j],Im0,Im1),j = 1 .. nops(Mot))])
    end;
    f := []; y := [0,0,TypeSeq,Beta,Delta];
    for i to N do
        Gamma := [ConsMorphAux(y[3],y[4],y[5])];
        f := [op(f),op(Gamma)];
        if op(Gamma) = 'E' then y := RecipE(y,cat(op(Gamma))) fi;
        if op(Gamma) = 'G' then y := RecipG(y,cat(op(Gamma))) fi;
        if op(Gamma) = 'D' then y := RecipD(y,cat(op(Gamma))) fi
    od;
    Res := simplify(y[4]+y[5]);
    if Res = 1 then if y[3] = 0 then a := [1] else a := [0] fi
    else
        ResEval := evalf(Res);
        if ResEval < 1 then a := [0] else a := [1] fi
    fi;
    Long := nops(f);
    for i from Long by -1 to 1 do
```

```
        if f[i] = 'E' then a := Image(a,[1],[0]) fi;
        if f[i] = 'G' then a := Image(a,[0],[0,1]) fi;
        if f[i] = 'D' then a := Image(a,[0],[1,0]) fi
    od;
    RETURN(a)
end;
```

Exemples (avec une précision contrôlée par : Digits:=15).

On considère une famille de sept mots sturmiens de pente égale à

$$\frac{\sqrt{5}}{5} = [0, 2, \overline{4}].$$

Le tableau suivant récapitule les longueurs des préfixes obtenus, en fonction du nombre d'étapes indiqué. Conformément au résultat du corollaire 5.2, on retrouve les dénominateurs des réduites de $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

	$S_{\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{ln(3)}{2}}$	$S'_{\frac{\sqrt{5}}{5},2-3\frac{\sqrt{5}}{5}}$	$S_{\frac{\sqrt{5}}{5},0}$	$S'_{\frac{\sqrt{5}}{5},1-\frac{\sqrt{5}}{5}}$	$S_{\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{10}}$	$S_{\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{exp(2)}{14}}$	$S_{\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{7}}$
6	2	9	9	2	9	9	9
11	38	38	9	38	38	38	9
16	161	38	161	38	161	38	161
21	682	682	161	682	682	682	682
26	2889	682	2889	682	2889	682	2889
31	12238	12238	2889	12238	12238	12238	2889
36	51841	12238	51841	51841	51841	51841	51841

Remarque. Soit y un mot sturmien de pente α égale à $[0, 1 + d_1, d_2, d_3, \ldots]$. Soit $(q_i)_{i \geq -1}$ la suite des dénominateurs des réduites de α. Par construction même de la procédure *ConsMorph*, si on réalise $2\left(k + \sum_{i=1}^{k+1} d_i\right)$ calculs de parties entières, on obtient un préfixe de y de longueur supérieure ou égale à q_k. Le rendement de l'algorithme est donc la fonction qui, à tout entier k non nul, associe $\frac{q_k}{2(k + \sum_{i=1}^{k+1} d_i)}$. Les réels équivalents au nombre d'or sont les valeurs pour lesquelles la convergence vers le mot de départ est la plus lente.

A.6 Image d'une fraction continue par une homographie

Soit f une homographie, de discriminant non nul, associée au quadruplet d'entiers positifs (a, b, c, d). Soit *Dvpt* un début de développement en fraction continue d'un irrationnel α positif. On cherche à calculer l'image de *Dvpt* par f. À cet effet, on détermine le plus grand préfixe de $Chrp(\alpha)$ pouvant être construit à partir de *Dvpt*.

```
ConstructChristoffel := proc(Dvpt)
    local i,j,Nb,Dfc,X,Y,Z,Liste,Aux,Suff,L_Dfc;
        L_Dfc := proc(Dvpt)
           local k,N;
              N := nops(Dvpt);
              if Dvpt[1] = 0 then
                RETURN([0,Dvpt[2]+1,seq(Dvpt[k],k = 3 .. N)])
              else RETURN([0,1,op(Dvpt)])
              fi
        end;
        Dfc := L_Dfc(Dvpt);
        Nb := nops(Dfc);
        if Nb <= 1 then RETURN([0]) fi;
        X := [0]; Aux := seq(0,i = 1 .. Dfc[2]-1);
        Y := [Aux,1];
        Liste := [Y];
        Suff := [Aux];
        for i from 3 to Nb do
            Aux := seq(op(Y),j = 1 .. Dfc[i]-1);
            Suff := [Aux,op(Suff)];
            Z := Y;
            Y := [Aux,op(X),op(Y)];
            Liste := [op(Liste),Y];
            X := Z
        od;
        RETURN([0,seq(op(Liste[i]),i = 1 .. nops(Liste)),op(Suff)])
    end;
```

Les opérations modulaires sont réalisées par la procédure suivante :

```
MyMod := proc(x,y)
   local Res;
      Res := x mod y;
      if Res = 0 then RETURN(y) else RETURN(Res) fi
   end;
```

On construit successivement les transducteurs de multiplication, de division, d'addition et d'inversion, associés aux mots de Christoffel positifs infinis.

```
MultChristo := proc(Christo,p)
    local i,Aux,Taille,k,Mot;
        Taille := nops(Christo); Mot := Christo;
        Aux := [];  k := 0;
        for i to Taille do
           if Mot[i] = 1 then Aux := [op(Aux),1]
           else
             k := k+1;
             if MyMod(k,p) = 1 then Aux := [op(Aux),0] fi
           fi
        od;
        RETURN(Aux)
    end;

DivChristo := proc(Christo,p)
    local i,Aux,Taille,k,Mot;
        Taille := nops(Christo); Mot := Christo;
        Aux := []; k := 0;
        for i to Taille do
           if Mot[i] = 0 then Aux := [op(Aux),0]
           else
             k := k+1;
             if MyMod(k,p) = p then Aux := [op(Aux),1] fi
           fi
        od;
        RETURN(Aux)
    end;

Trn := proc(Mot,n)
 local i,Image;
  Image := proc(Mot,Im0,Im1)
  local j,Choix;
     Choix := proc(Lettre,Im0,Im1)
        if Lettre = 0 then RETURN(op(Im0))
        else RETURN(op(Im1))
        fi
     end;
     RETURN([seq(Choix(Mot[j],Im0,Im1),j = 1 .. nops(Mot))])
  end;
  RETURN(Image(Mot,[0,seq(1,i = 1 .. n)],[1]))
 end;

Inv := proc(Christo)
       local i;
           RETURN([0,seq(1-Christo[i],i = 2 .. nops(Christo))])
       end;
```

```
TransducteurHomographie := proc(Dvpt,a,b,c,d)
 local Delta,Aux;
     Aux := ConstructChristoffel(Dvpt); Delta := a*d-b*c;
     if Delta < 0 then
       if d = 0 then
         RETURN(DivChristo(Trn(MultChristo(Inv(Aux),b),a),c))
       fi;
       if a = 0 then
         RETURN(MultChristo(Inv(Trn(MultChristo(Aux,c),d)),b))
       fi;
       RETURN(DivChristo(Trn(MultChristo(Inv(
          Trn(MultChristo(Aux,c),d)),-Delta),a),c))
     fi;
     if 0 < Delta then
       if evalb((b = 0) and (c = 0)) then
         if d = 1 then RETURN(MultChristo(Aux,a)) fi;
         if a = 1 then RETURN(DivChristo(Aux,d)) fi;
         RETURN(MultChristo(DivChristo(Aux,d),a))
       fi;
       if b = 0 then
         RETURN(Inv(DivChristo(
            Trn(MultChristo(Inv(Aux),d),c),a)))
       fi;
       if c = 0 then
         RETURN(Inv(MultChristo(Inv(
            Trn(MultChristo(Aux,a),b)),d)))
       fi;
       RETURN(Inv(DivChristo(Trn(MultChristo(Inv(
          Trn(MultChristo(Aux,a),b)),Delta),c),a)))
     fi
 end;
```

La procédure *HomographieDfc* a pour paramètres les coefficients de l'homographie f, ainsi que le début de développement en fraction continue de α. En sortie, on obtient celui de $f(\alpha)$.

```
HomographieDfc := proc(Dvpt,a,b,c,d)
 local Sturm,u,v,i,j,Test,Dfc,Pos,Aux,Position;
     Position := proc(x,y,Val,Mot)
         local cc,Tests;
             Tests := true;
             cc := 2;
             while Tests and (cc*y+x-1 <= nops(Mot)) do
                 Tests := Mot[cc*y+x-1] <> Val;
                 if Tests then cc := cc+1 fi
```

```
          od;
          if Tests then RETURN(0) else RETURN(cc-1) fi
    end;
    Sturm := subsop(1 = NULL,
             TransducteurHomographie(Dvpt,a,b,c,d));
    Dfc := [];
    u := 0; v := 1;
    Test := true;
    i := 1;
    while Test do
        Pos := Position(u,v,i mod 2,Sturm);
        if Pos = 0 then Test := false
        else
            Dfc := [op(Dfc),Pos];
            Aux := Pos*v+u; u := v;
            v := Aux;
            i := i+1
        fi
    od;
    if nops(Dfc) = 0 then RETURN([]) fi;
    if Dfc[1] = 1 then
      RETURN([seq(Dfc[j],j = 2 .. nops(Dfc))])
    fi;
    RETURN([0,Dfc[1]-1,seq(Dfc[j],j = 2 .. nops(Dfc))])
end;
```

Exemples.
On compare la procédure *HomographieDfc* et l'algorithme de G. N. Raney [91] sur les exemples donnés ci-dessous :

	Fraction continue	Homographie
1.	$[0,2,3,4,2,3,1,2,3]$	$y \mapsto 2y$
2.	$[0,1,6,2,4,1,1,5,1]$	$y \mapsto \frac{y}{2}$
3.	$[0,2,3,2,4,3,2,1,1,3,2,1,2]$	$y \mapsto 3y$
4.	$[1,3,4,2,3,3,1,11]$	$y \mapsto \frac{y}{3}$
5.	$[0,2,1,2,1,1,1,3,2,1,2,1,1,1]$	$y \mapsto \frac{5y}{3}$
6.	$[0,2,3,4,2,3,2,2]$	$y \mapsto \frac{5y}{3}$
7.	$[0,2,2,1,1,2,3,1,2,1]$	$y \mapsto \frac{3y}{5}$
8.	$[2,1,4,2,3,5,4,5,2]$	$y \mapsto \frac{7y+2}{5y+8}$
9.	$[2,2,3,1,2,1,2,1,1]$	$y \mapsto \frac{6y+1}{y+2}$
10.	$[0,1,1,2,1,1,1,1]$	$y \mapsto 5y$
11.	$[0,2,1,2,3,1,1,1,2,4]$	$y \mapsto 9y$
12.	$[4,1,2,3,1,2,1,2,1]$	$y \mapsto 11y$
13.	$[4,2,3,1,2,1,5,1,2]$	$y \mapsto 6y$
14.	$[6,2,1,4,2,1,5,5]$	$y \mapsto 9y$

Les résultats obtenus sont récapitulés dans le tableau suivant :

	HomographieDfc	Raney
1.	$[0, 1, 6, 2, 4, 1, 1, 5, 1]$	$[0, 1, 6, 2, 4, 1, 1, 5, 1]$
2.	$[0, 2, 3, 4, 2, 3, 1, 2]$	$[0, 2, 3, 4, 2, 3, 1, 2]$
3.	$[1, 3, 4, 2, 3, 3, 1, 11]$	$[1, 3, 4, 2, 3, 3, 1, 11]$
4.	$[0, 2, 3, 2, 4, 3, 2, 1, 1, 3]$	$[0, 2, 3, 2, 4, 3, 2, 1, 1, 3]$
5.	$[0, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 5, 1]$	$[0, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 5, 1, 17]$
6.	$[0, 1, 2, 1, 1, 2, 3, 1]$	$[0, 1, 2, 1, 1, 2, 3, 1, 4]$
7.	$[0, 3, 1]$	$[0, 3, 1, 42]$
8.	$[0, 1, 58, 1]$	$[0, 1, 58, 1, 33, 1, 1]$
9.	$[3, 1, 1, 10]$	$[3, 1, 1, 10, 2, 1]$
10.	$[2, 1, 9]$	$[2, 1]$
11.	$[3, 2, 1, 16, 2, 1]$	$[3, 2, 1, 16]$
12.	$[51, 1, 1, 1, 2, 1, 2]$	$[51, 1, 1, 1, 2, 1]$
13.	$[26, 1, 1, 1, 4, 1, 3, 2]$	$[26, 1, 1, 1, 4, 1, 3]$
14.	$[57, 5, 52]$	$[57, 5]$

Remarques. On constate que le nombre de quotients partiels obtenus varie sensiblement d'une méthode à l'autre. De plus, on note une perte d'informations lorsque l'on compose des applications réciproques. Parmi les améliorations, on peut envisager une construction dynamique des mots de Christoffel, en utilisant un découpage par blocs adapté. On peut aussi essayer de réduire le nombre d'états des transducteurs produits.

Résumé

Un mot infini binaire est sturmien s'il est équilibré et non ultimement périodique. Un morphisme est sturmien s'il préserve globalement l'ensemble des mots sturmiens. L'une des premières contributions proposées est l'extension, aux suites sturmiennes générales, des formules décrivant l'action du monoïde de Sturm sur les pentes et les intercepts. Les nombres de Sturm caractérisent les pentes des mots laissés fixes par un morphisme non trivial. En introduisant les suites sturmiennes admissibles, de nouvelles propriétés d'invariance apparaissent. Les phénomènes de décimation périodique, étudiés ensuite, sont réalisés par des transducteurs qui opèrent sur l'ensemble des mots sturmiens. On peut ainsi déterminer l'image d'une fraction continue par une homographie à coefficients entiers, en utilisant certaines propriétés des mots de Christoffel. Enfin, les calculs d'antécédents des mots sturmiens par les morphismes sturmiens sont évoqués en détail. Il apparaît notamment que tout mot sturmien est infiniment sturmien. On en déduit un algorithme de construction des mots sturmiens, en proposant, dans certains cas, des formules récurrentes aux propriétés remarquables.

Abstract

An infinite binary word is said to be Sturmian, if it is balanced and not ultimately periodic. A morphism is Sturmian if it preserves all Sturmian words. First we describe the evolution of the slopes and intercepts of Sturmian words under Sturmian morphisms. If a Sturmian word is fixed by some non-trivial morphism then its slope is a Sturm number. Introducing the class of permitted sequences, we obtain new results about substitution invariant Sturmian words. Next we study a particular class of transducers which perform periodic decimations on Sturmian sequences. We therefore get an algorithm to compute the image of a continued fraction under any homography with integer coefficients. By the way we also describe a full correspondence between irrational numbers and Christoffel words. Finally we study inverse images of Sturmian words under Sturmian morphisms from several points of view. Thus we prove that any Sturmian word is infinitely Sturmian. A mechanical system of construction of all Sturmian sequences proceeds from this work, and some rules with remarkable properties are called up.

Discipline

Théorie des Nombres, Mathématiques appliquées et Informatique.

Mots Clés

- Combinatoire des mots, Dynamique symbolique, Fractions continues, Transducteurs.
- Mots sturmiens, Morphismes sturmiens, Nombres de Sturm.
- Suites caractéristiques, Mots de Christoffel.

Laboratoire

Laboratoire d'arithmétique, de calcul formel et d'optimisation (L.A.C.O.)
Faculté des Sciences – 123 avenue Albert Thomas – 87060 Limoges Cedex – France.

135