

Publications du **Laboratoire de
Combinatoire et d'
Informatique
Mathématique**

22

Stéphane Poirier

**Fonctions symétriques, ensembles de
descentes et classes de conjugaison
dans les produits en couronne**

Départements de mathématiques et d'informatique



Université du Québec à Montréal

Ce numéro constitue la publication d'une thèse soutenue devant jury, le 26 juin 1995, pour l'obtention du Ph.D.

Composition du Jury

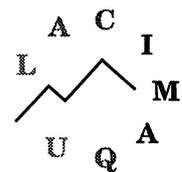
Christophe Reutenauer	UQAM, directeur de recherche
Robert Bédard	UQAM
André Joyal	UQAM
François Bergeron	UQAM
Dominique Foata	Université de Strasbourg
Luc Vinet	CRM, Université de Montréal

Dépôt légal-Bibliothèque nationale du Québec, 1996.

ISBN 2-89276-150-6 LACIM Montréal

© LACIM, Montréal, Mai 1996.

Laboratoire de combinatoire et d'informatique mathématique
Département de mathématiques et d'informatique
Université du Québec à Montréal
C.P. 8888, Succ. Centre-Ville
Montréal, Qc.
Canada H3C 3P8



UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

FONCTIONS SYMÉTRIQUES, ENSEMBLES DE DESCENTES ET
CLASSES DE CONJUGAISON DANS LES PRODUITS EN
COURONNE

THÈSE
PRÉSENTÉE
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DU DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES

PAR
STÉPHANE POIRIER

MAI 1995

REMERCIEMENTS

Je remercie tout d'abord Christophe Reutenauer qui m'a toujours soutenu et aidé dans la préparation de ce travail et qui restera pour moi beaucoup plus qu'un directeur de thèse.

Je tiens à remercier Dominique Foata qui m'a fait l'honneur d'être le rapporteur principal de cette thèse, ainsi que Robert Bédard, François Bergeron, André Joyal et Luc Vinet qui ont accepté de faire partie du Jury.

Je voudrais aussi remercier l'ENS de Paris, l'ISM, et le LaCIM pour leur support financier.

Je tiens aussi à remercier mes amis, et plus particulièrement Farès pour sa gentillesse et sa patience.

Je remercie enfin ma famille qui, en dépit de l'éloignement, est restée un soutien très efficace.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES SYMBOLES	iv
CHAPITRE I	
UNE GÉNÉRALISATION DE LA FONCTION CARACTÉRISTIQUE DE FROBENIUS.....	4
1.1 Introduction	4
1.2 L'anneau de caractères des produits en couronne	5
1.3 Construction des représentations irréductibles des produits en couronne et fonction caractéristique	6
1.4 Cas où G est abélien	10
1.5 Séries génératrices d'espaces et fonction caractéristique	19
CHAPITRE II	
ENSEMBLES DE DESCENTES.....	33
2.1 Introduction	33
2.2 Fonctions quasi-symétriques	33
2.3 Séries génératrices quasi-symétriques et fonctions symétriques	40
2.4 Dénombrement des éléments de G_n ayant un ensemble de de- scentes signé donné et dont l'inverse a un ensemble de descentes signé donné	47
CHAPITRE III	
TYPE CYCLIQUE	53
3.1 Introduction	53
3.2 Éléments de Lie et type cyclique	53
CHAPITRE IV	
APPLICATIONS.....	58
4.1 Introduction	58

4.2	Fonctions symétriques d'Euler généralisées.....	58
4.3	Généralisation des polynômes eulériens symétriques.....	66
CHAPITRE V		
CAS DES GROUPES HYPEROCTAHÉDRAUX		69
5.1	Introduction	69
5.2	Représentations de Solomon pour les groupes hyperoctaédraux ..	69
CHAPITRE VI		
ALGÈBRES DE HOPF DE TABLEAUX.....		78
6.1	Résumé.....	78
6.2	Introduction	78
6.3	Algèbre de Hopf sur les permutations.....	79
6.4	Algèbres de Hopf sur les tableaux de Young	80
6.5	Homomorphismes.....	83
6.6	Description par jeu de taquin des produits et coproduits.....	85
6.7	Applications	88
INDEX.....		95

7



LISTE DES SYMBOLES

A	Alphabet, union des X^i , p. 19
$bh(C, v)$	Bande horizontale associée à la composition signée (C, v) , p. 42
B_n	Groupe hyperoctaédral à n générateurs, p. 69
ch	Fonction caractéristique, p. 8
$comp$	Bijection de l'ensemble des sous-ensembles signés vers les compositions signées, p. 34
$csts(w)$	costandardisé de w , p. 37
C	Base canonique de E_n , p. 24
\mathbf{C}	Corps des complexes, p. 5
$\mathbf{C} \langle A \rangle$	Algèbre des combinaisons linéaires de mots à coefficients dans \mathbf{C} , p. 19
$C_n(t)$	p. 66
$COS_X(t)$	Cosinus symétrique sur l'alphabet X , p. 59
$CS(\sigma)$	Composition de descentes signée associée à σ , p. 36
$C(t)$	p. 66
$deg(c, b)$	Nombre d'occurrences de b dans c , p. 26
$ds(\sigma)$	Ensemble de descentes signé associé à σ , p. 36
$Des(\sigma)$	Ensemble de descentes de Solomon de σ , p. 70
ens	Bijection de l'ensemble des compositions signée vers les ensembles de descentes signés, p. 34
$ev(w)$	Evaluation du mot w , p. 38
\mathcal{E}_A	p. 20
E_n	p. 20
$\mathcal{E}(V^G)$	Groupe des isomorphismes de V laissant stable chacun des V^i , p. 26
E_α	p. 20
$f \times g$	Produit tensoriel externe des caractères f et g , p. 5

8

$f.g$	Produit dans R des caractères f et g , p. 5
$f_{\text{rég}}$	Représentation régulière de G_n , p. 19
f_{λ}	Valeur du caractère f sur les éléments de type cyclique λ , p. 15
F^i	Représentation irréductible du groupe G , p. 7
F^*	Représentation irréductible du groupe G^n , p. 7
$F_{(C,v)}$	Fonction quasi-symétrique définie à partir de $F_{[S,m]}$ via <i>comp</i> , p. 36
$F_{[S,m]}$	p. 36
G	Groupe fini, p. 5
\mathcal{G}	Sous-ensemble de $C \times A^n$, p. 26
G_n	Produit en couronne de G par S_n , p. 5
G^n	Puissance directe $n^{\text{ème}}$ du groupe G , p. 5
\hat{G}	Dual de G quand G est abélien, p. 10
$G \wr H$	Produit en couronne de G par H , p. 5
$G_m \times G_n$	Produit direct des groupes G_m et G_n , p. 5
$h_{(C,v)}$	Fonction homogène associée à (C, v) , p. 42
$h_{[T,m]}$	Fonction homogène associée à $[T, m]$ (définie à partir de $h_{(C,v)}$, p. 42
h_{λ}	Fonction homogène, p. 13
H	Sous-espace assez stable de $\mathbf{C} \langle A \rangle$, p. 22
\mathcal{H}	Noyau de q , p. 23
$H(F^i, l, t)$	Série génératrice des fonctions homogènes, p. 16
H_n	Partie multi-linéaire de H , p. 22
$H_X(t)$	Série génératrice des fonctions homogènes sur X , p. 58
ind_H^G	Opérateur d'induction de H vers G , p. 5
I_n	Ensemble $\{0, \dots, n-1\}$, p. 70
$l(z)$	Longueur d'un cycle z , p. 12
$L(A)$	\mathbf{Q} -Algèbre de Lie libre sur A , p. 53
L_{λ}	Fonction génératrice quasi-symétrique des permutations signées de type cyclique λ , p. 55
$m(T)$	Mot associé à un p -tableau semi-standard T , p. 43
m_{λ}	Fonction monomiale, p. 13
M'	p. 26
$M_{(C,v)}$	Fonction quasi-symétrique associée à (C, v) , p. 35
n_{α}	Dimension de l'espace $H \cap E_{\alpha}$, p. 22

p	Nombre de représentations irréductibles de G , p. 8
$p_r(X^j)$	$r^{\text{ème}}$ fonction de puissance, p. 14
\mathcal{P}	Ensemble des partages d'entiers, p. 12
$\mathcal{P}^{\mathcal{G}}$	Ensemble des partages signés, p. 12
PN_{λ}	Série génératrice de multi-ensembles de mots circulaires, p. 55
$P_r^{F_i}(X, l)$	p. 14
$P_{\lambda}^{F_i}(X, l)$	p. 14
$P_{\lambda}(X, l)$	Série de puissance, p. 14
$P_{\lambda}(X)$	p. 14
q	p. 23
$\mathbf{Q} \langle A \rangle$	\mathbf{Q} -algèbre associative libre engendrée par A , p. 53
$r(C, v)$	ruban associé à la composition signée (C, v) , p. 42
res_J^K	Opérateur de restriction du groupe K au groupe J , p. 9
R	Anneau des caractères des produits en couronne, p. 5
\mathbf{R}	Corps de nombres réels.
R^n	\mathbf{Z} -module engendré par les caractères irréductibles de G_n , p. 5
$sign(i, j)$	Signe de (i, j) , p. 11
$sign(a, i)$	Signe de la lettre (a, i) , p. 19
$std(w)$	Standardisé de w , p. 37
S_C	Fonction de Schur gauche associée à la composition C , p. 44
$Sign(z)$	Signe du cycle z , p. 12
$SIN_X(t)$	Sinus symétrique sur l'alphabet X , p. 59
S_n	Groupe symétrique, p. 5
$S_{(n)}$	Sous-groupe de Young de S_n , p. 7
$S'_{(n)}$	Sous-groupe de Young de S_n plongé dans G_n , p. 7
$S_{[S, m]}$	Fonction symétrique associée à l'ensemble de descentes signé $[S, m]$, p. 41
$tc(\alpha)$	Type cyclique de α , p. 12
$triv_J$	Représentation triviale du groupe J .
T_{λ}	Série génératrice de $U_{ i }$, p. 55
U_k	p. 53
U_{λ}	p. 54
V	Somme directe de V^i , p. 21
V^i	Espace vectoriel engendré par les lettres de X^i , p. 21

w_α	Mot de E_n associé à α , p. 20
W_K	Sous-groupe de B_n , p. 70
X	Alphabet, p. 8
X^i	Alphabet, p. 8
Y^r	Union des alphabets X^i ($i \geq_p r$), p. 51
z_λ	p. 15
\mathbf{Z}	Anneau des entiers relatifs.
$\mathbf{Z}[[A]]$	Anneau des séries formelles à variables dans A , p. 20
β_k^l	p. 24
$\beta.x$	Action de β sur $x \in E_n \otimes V^{\otimes n}$, p. 22
$\Gamma_r(t)$	p. 61
$\Delta_r(t)$	p. 61
ϵ	p. 70
η_K	Idempotent de $\mathbf{Q}[B_n]$, p. 70
η_n^l	p. 18
λ	Partage signé, p. 12
λ^-	p. 13
$\lambda(C, v)$	Partage d'entier associé à (C, v) , p. 45
$\lambda(C, v)$	Partage signé associé à (C, v) , p. 41
(λ, μ)	Type cyclique d'un élément de B_n , p. 71
ξ_K	Idempotent de $\mathbf{Q}[B_n]$, p. 70
$\tilde{\sigma}$	p. 49
τ	Isomorphisme de $\mathcal{E}(V^G)$ associé à τ , p. 20
ϕ_K	Caractère de B_n , p. 70
$\chi_{(C,v)}$	Représentation de G_n dont l'image par ch est $S_{(C,v)}$, p. 49
χ_{H_n}	Représentation de G_n sur H_n , p. 22
$\chi_{[S,m]}$	Représentation de G_n dont l'image par ch est $S_{[S,m]}$, p. 49
χ_λ	Caractère de G_n sur la partie multilinéaire de U_λ , p. 57
χ_λ	Caractère irréductible de G_n , p. 15
ψ	p. 14
ψ_K	Caractère de B_n , p. 70
$\Lambda(X^i)$	Algèbre des fonctions symétriques à variables dans X^i , p. 8

Λ^G	Produit tensoriel des $\Lambda(X^i)$, p. 8
Ω_n	Ensemble des caractères irréductibles de G^n , p. 7
$\langle -, - \rangle$	Produit scalaire sur R , p. 8
$\langle -, - \rangle_{G^n}$	Produit scalaire sur R^n , p. 6
$\langle -, - \rangle_{\mathbf{C}}$	Produit hermitien sur $\Lambda_{\mathbf{C}}^G$, p. 8
$ (i, j) $	Valeur absolue i de (i, j) , p. 11
$ \sigma $	Valeur absolue de la permutation signée σ , p. 11
$ (a, j) $	Valeur absolue a de (a, j) , p. 19
$ w_b $	Nombre d'occurrences de b dans w , p. 19
\leq_p	Ordre total sur $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, p. 33
$[S, m]$	Ensemble signé, p. 34
$[\tilde{S}_m, \tilde{m}]$	p. 49
(C, v)	Composition signée, p. 34
\leq	Ordre partiel sur les ensembles signés, p. 35
\leq_l	Ordre lexicographique sur A , p. 37
\leq_r	Ordre lexicographique inverse sur A , p. 37

RÉSUMÉ

Nous étendons au cas des produits en couronne des S_n par un groupe G la fonction caractéristique de Frobenius (théorème 1.4). Dans le cas où G est abélien, nous pouvons donner une expression directe de cette fonction et nous généralisons la dualité de Schur-Weyl (théorème 1.16).

Nous introduisons ensuite des fonctions quasi-symétriques sur plusieurs alphabets ; elles généralisent les fonctions quasi-symétriques classiques. En les liant à des fonctions symétriques, nous pouvons étendre un théorème de Gessel (1984) (voir théorème 2.9). Comme application, nous énumérons les permutations signées ayant un ensemble de descentes signé donné, et dont l'inverse a un ensemble de descentes signé fixé, en terme de produit scalaire de caractères de G_n (théorème 2.11).

En étudiant certaines algèbres de Lie libres, et en raffinant le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt, nous associons à chaque classe de conjugaison λ de G_n un espace vectoriel U_λ (proposition 3.1). Le nombre d'éléments de G_n dans la classe de conjugaison λ ayant un ensemble de descentes signé donné s'exprime alors comme un produit scalaire de deux caractères de G_n , dont l'un est naturellement associé à U_λ .

Nous étendons ensuite les fonctions symétriques d'Euler au cas des produits en couronne, et nous pouvons écrire les séries obtenues en termes de cosinus et de sinus symétriques (théorème 4.2). Nous donnons aussi une expression de la série symétrique des permutations signées, comptées selon leur nombre de descentes, à partir de fonctions génératrices homogènes (théorème 4.5).

Dans le cas des groupes hyperoctaédraux, nous revenons à la définition classique de descentes (donnée par Solomon), et nous donnons des versions de résultats des chapitres II et III adaptées à cette notion (corollaires 5.6 et 5.7).

Enfin, et indépendamment du reste, nous trouvons, à partir de structures duales d'algèbres de Hopf sur les permutations, deux structures d'algèbres de Hopf sur les tableaux de Young standards, qui sont duales l'une de l'autre. Nous étudions quelques homomorphismes de ces algèbres vers des algèbres classiques (théorèmes 6.8 et 6.9). Nous décrivons les produits et coproduits obtenus en terme de jeu de taquin, et nous donnons quelques applications.

INTRODUCTION

L'utilisation de fonctions symétriques dans la résolution de questions d'énumération remonte à MacMahon et à sa solution du problème de Newcomb (voir (MacMahon, 1915-1916)). Plus récemment, l'étude des fonctions symétriques s'est considérablement développée, notamment sous l'impulsion de Littlewood et Foulkes (voir (Foulkes, 1976 ; Littlewood, 1950, 1961)) ; et elles apparaissent de plus en plus dans les problèmes d'énumération, soit directement (Désarménien et Wachs, 1988 ; Knuth, 1970 ; Macdonald, 1979 ; Strehl, 1981) soit à travers la théorie des représentations (Joyal, 1981 ; Kerber et Thürlings, 1983). Il a ainsi été possible de dénombrer des permutations soumises à certaines contraintes, à partir de produits scalaires (voir (Foulkes, 1976 ; Gessel, 1984 ; Gessel et Reutenauer, 1993)), ou de séries génératrices de fonctions symétriques (voir (Désarménien, 1983)).

D'autre part, l'intérêt s'est porté vers certaines généralisations des groupes symétriques, comme les groupes de Coxeter et les produits en couronne. On songera notamment à la notion de descentes, étudiée du point de vue algébrique, que ce soit dans les groupes de Coxeter (voir (Solomon, 1976)) ou dans les produits en couronne (voir (Mantaci et Reutenauer, 1992)), du dénombrement par ensemble de descentes (voir (Solomon, 1968)) ou par nombre de descentes (voir (Foata et Zeilberger, 1991 ; Bergeron et Favreau, 1992 ; Reiner, 1993)). On notera aussi les extensions de la série génératrice exponentielle des permutations alternantes (voir (Springer, 1970 ; Arnold, 1992 ; Ehrenborg et Readdy, 1994)).

Dans ce travail nous nous intéressons, à partir de fonctions symétriques, aux ensembles de descentes et aux classes de conjugaisons dans les produits en couronne des S_n par des groupes cycliques ; on notera ces groupes G_n et leurs éléments seront appelés *permutations signées*.

Pour cela, nous développons dans le premier chapitre une généralisation de la fonction caractéristique de Frobenius (voir théorème 1.4 et proposition 1.9). Cette fonction, ch , est un isomorphisme isométrique entre une algèbre définie sur les caractères des G_n (proposition 1.1) et l'algèbre $\Lambda^G = \Lambda \otimes \dots \otimes \Lambda$, $|G|$ fois, où Λ est l'algèbre des fonctions symétriques.

Cette notion nous permet de généraliser la dualité de Schur-Weyl et d'exprimer ainsi les images caractéristiques de certaines représentations des G_n en termes de séries génératrices d'espaces vectoriels (voir théorème 1.16).

Dans le second chapitre, nous introduisons les sous-ensembles signés $[T, m]$

de $\{1, \dots, n-1\}$ (équation (2.2.1)) et les compositions signées (C, v) de n qui, comme dans le cas classique, sont en bijection (lemme 2.1). Nous généralisons ensuite les fonctions quasi-symétriques F_C de (Gessel, 1984) en des fonctions $F_{(C,v)}$ qui sont elles aussi linéairement indépendantes (proposition 2.3). Le lemme 2.4 nous permet d'exprimer les $F_{(C,v)}$ comme la somme d'évaluations de mots. Ce lemme étend un résultat très utilisé en théorie des $P-\omega$ -partitions de Stanley.

Nous définissons aussi des fonctions symétriques $S_{(C,v)}$ (équation (2.3.11)) dont l'équivalent pour le groupe symétrique, qui remonte à MacMahon, a été abondamment étudié. On introduit aussi la *série génératrice quasi-symétrique* g de $\Pi \subseteq \bigcup_{n \geq 0} G_n$, qui est la somme des $F_{[T,m]}$, où la somme se fait sur les ensembles de descentes signés des permutations signés dans Π . On peut alors énoncer le résultat principal du chapitre (théorème 2.9) : si g est dans Λ^G le nombre de σ dans Π ayant pour composition de descentes signée (C, v) est le produit scalaire $\langle g, S_{(C,v)} \rangle$. Ceci étend un résultat de (Gessel, 1984) pour S_n .

En application, nous généralisons un autre résultat de (Gessel, 1984) : on montre que le nombre de permutations signées σ telles que σ ait pour ensemble de descentes signé $[T, m]$, et σ^{-1} ait $[U, f]$ pour ensemble de descentes signé, est le produit scalaire $\langle S_{[\tilde{T}_m, \tilde{m}]}, S_{[U, f]} \rangle$, où $[\tilde{T}_m, \tilde{m}]$ est obtenu à partir de $[T, m]$ par un automorphisme naturel (théorème 2.11).

On considère, dans le troisième chapitre, l'algèbre de Lie libre sur un alphabet A . Le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt donne une décomposition de son algèbre enveloppante (l'algèbre associative libre sur A) ; en raffinant cette décomposition, on trouve des sous-espaces U_λ indexés par les partages signés (i.e. les fonctions de G vers l'ensemble des partages d'entiers), (proposition 3.1). En appliquant le théorème 1.16, on obtient des caractères χ_λ des G_n indexés par les partages signés. Comme application des théorèmes 2.9 et 3.2, on montre alors que le nombre de permutations signées de type cyclique λ et d'ensemble de descentes signé $[T, m]$ est le produit scalaire des caractères $\langle \chi_\lambda, \chi_{[T,m]} \rangle$, où $\chi_{[T,m]}$ est la pré-image de $S_{[T,m]}$ par ch .

Dans le quatrième chapitre, nous introduisons des fonctions symétriques qui généralisent les séries d'énumération des permutations alternantes. Ces séries s'expriment au moyen du sinus et du cosinus symétrique qui ont été considérés par Désarménien, (théorème 4.2). Ce théorème étend un résultat de (Désarménien, 1983) et un résultat énumératif de (Ehrenborg et Readdy, 1994) ; il est basé essentiellement sur le lemme 4.4.

Ce même lemme ressort dans la section suivante, où l'on introduit des analogues symétriques des séries génératrices des permutations signées par nombre de descentes. Ces séries s'expriment simplement en fonction d'analogues symétriques de l'exponentielle (théorème 4.5). Ce théorème étend des résultats de (Désarménien, 1983 ; Bergeron et Favreau, 1992) ; il est aussi lié à des relations données dans (Foata et Zeilberger, 1991).

Le cinquième chapitre est consacré plus particulièrement à l'étude des groupes hyperoctaédraux B_n . Pour ces groupes, il existe une autre notion d'ensemble de descentes (appelée ici *de Solomon*) provenant de leur structure de groupes de Coxeter. A chaque ensemble $K \subseteq \{0, \dots, n-1\}$, Solomon associe une représentation de B_n , de caractère, ψ_K dont la dimension est le nombre d'éléments de B_n ayant pour ensemble de descentes de Solomon K (voir proposition 5.1 et (Solomon, 1968)). Cette notion est une spécialisation de celle de sous-ensemble de descentes signé, et nous pouvons dire (corollaire 5.6) que le nombre d'éléments de B_n ayant pour ensemble de descentes de Solomon K et pour type cyclique (λ, μ) est égal à $\langle \psi_K, \omega'_1(\chi_{(\lambda, \mu)}) \rangle$ où ω'_1 est une isométrie naturelle de l'algèbre des caractères des B_n . De même, on montre (corollaire 5.7) que le nombre de σ de B_n ayant pour ensemble de descentes de Solomon K et tels que σ^{-1} ait J comme ensemble de descentes de Solomon est $\langle \psi_K, \psi_J \rangle$.

La seconde partie, totalement indépendante des premiers chapitres, est constituée du sixième chapitre.

Sur $\mathbf{ZS} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathbf{ZS}_n$, on peut définir deux structures d'algèbres de Hopf, duales l'une de l'autre, et conjuguées sous l'automorphisme $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$ (voir (Malvenuto et Reutenauer, 1995)). Les deux produits font de \mathbf{ZS} une algèbre associative libre.

Par restriction aux classes plaxiques, on obtient deux structures duales d'algèbres de Hopf sur \mathbf{ZT} , qui est le \mathbf{Z} -module libre sur les tableaux de Young standards. L'un des produits relève d'un résultat de Schützenberger : le mélange de deux classes plaxiques sur des alphabets disjoints est une réunion de classes plaxiques. L'algèbre $(\mathbf{ZT}, *)$ est associative et librement engendrée par les tableaux connexes (i.e. les tableaux qui correspondent aux classes plaxiques qui ne contiennent aucun élément appartenant à un sous groupe de Young propre).

Les opérateurs d'évacuation et de transposition sont, selon les cas, des automorphismes ou des anti-automorphismes pour ces deux structures (théorème 6.8). Nous donnons aussi un certain nombre de morphismes naturels concernant ces deux algèbres de Hopf (théorème 6.9).

Nous décrivons ensuite les différents produits et coproduits à l'aide du jeu de taquin.

CHAPITRE 1

UNE GÉNÉRALISATION DE LA FONCTION CARACTÉRISTIQUE DE FROBENIUS

1.1 Introduction

La fonction caractéristique est un outil essentiel de l'étude des représentations des groupes symétriques, voir (Macdonald, 1979 ; Sagan, 1991 ; Zelevinski, 1981). Nous en donnons ici une généralisation aux produits en couronne liée à la construction des caractères irréductibles de ces groupes donnée dans (Kerber, 1971). On en trouve aussi une version provenant de l'étude des foncteurs polynomiaux dans (Macdonald, 1980) et une utilisant les algèbres de Hopf dans (Zelevinski, 1981).

La quatrième section est consacrée au cas où G est abélien. Dans ce cas nous pouvons donner une construction combinatoire de notre fonction caractéristique directement à partir des valeurs des caractères. La première construction, pour les groupes hyperoctaédraux, a été publiée dans (Geissinger, 1977), voir aussi (Geissinger et Kinch, 1978). Stembridge en a aussi donné une version différente dans (Stembridge 1992a).

Enfin, nous démontrons un résultat apparenté à une extension de la dualité de Schur-Weyl au cas des produits en couronne par des groupes abéliens finis ; ceci nous permet de lier certaines séries caractéristiques à des séries génératrices d'espaces vectoriels. Nous ne donnons ici que la partie de la dualité de Schur-Weyl qui nous intéresse directement pour la suite du travail.

1.2 L'anneau de caractères des produits en couronne

Soit G un groupe fini. Le *produit en couronne* $G \wr H$ de G avec H , où H est un sous-groupe de S_n , est le produit semi-direct à droite de G^n par H avec l'opération :

$$(1.2.1) \quad (g'_1, \dots, g'_n, s')(g_1, \dots, g_n, s) = (g'_{s(1)}g_1, \dots, g'_{s(n)}g_n, s's).$$

En particulier, on vérifie aisément que $(1_G, \dots, 1_G, 1_H)$ est l'élément unité de $G \wr H$ et que l'inverse de (g_1, \dots, g_n, s) est

$$(g_{s^{-1}(1)}^{-1}, \dots, g_{s^{-1}(n)}^{-1}, s^{-1}).$$

On notera G_n le produit en couronne de G avec le groupe symétrique S_n .

Remarque La règle de multiplication que l'on donne ici n'est pas la même que celle donnée dans (Kerber, 1971), mais un anti-isomorphisme permet de passer de l'une à l'autre. En particulier, cela nous permettra d'appliquer sans problème les résultats que Kerber donne sur la construction des représentations irréductibles des groupes G_n .

Pour tous les couples d'entiers (m, n) , on peut plonger le produit direct $G_m \times G_n$ dans G_{m+n} de la façon suivante

$$((g_1, \dots, g_m, \alpha), (h_1, \dots, h_n, \beta)) \mapsto (g_1, \dots, g_m, h_1, \dots, h_n, \alpha \times \beta)$$

$$\text{où } (\alpha \times \beta)(i) = \begin{cases} \alpha(i) & \text{si } 1 \leq i \leq m \\ m + \beta(i - m + 1) & \text{si } m + 1 \leq i \leq m + n. \end{cases}$$

On note R^n le \mathbf{Z} -module engendré par les caractères irréductibles de G_n et R la somme directe des R^n pour $n \geq 0$; on pose, par convention, $R^0 = \mathbf{Z}$. Les caractères considérés sont ceux définis sur le corps \mathbf{C} des complexes.

Si f et g sont des éléments de R^n et R^m respectivement, alors $f \times g$, le produit tensoriel externe de f par g , est une combinaison \mathbf{Z} -linéaire de caractères irréductibles de $G_n \times G_m$ ($(f \times g)(\sigma, \beta) = f(\sigma)g(\beta)$). On définit $f.g$, le produit de f par g dans R , à l'aide de la relation suivante :

$$f.g = \text{ind}_{G_n \times G_m}^{G_{n+m}} (f \times g),$$

où $\text{ind}_H^G(f)$ est la représentation induite de f de H à G .

L'opération d'induction est \mathbf{Z} -linéaire, donc $f.g$ est un élément de R^{n+m} . Le \mathbf{Z} -module $R = \bigoplus_{n \geq 0} R^n$ est ainsi muni d'une structure d'anneau gradué, comme énoncé dans la proposition suivante, voir (Zelevinski, 1981, p. 94).

Proposition 1.1 *L'anneau $R = \bigoplus_{n \geq 0} R^n$ est gradué, commutatif et unitaire.*

Preuve (analogue à celle pour S_n , voir (Macdonald, 1979) chap. I)

i) Commutativité.

Les groupes $G_n \times G_m$ et $G_m \times G_n$ sont des sous-groupes conjugués de G_{n+m} et on peut trouver un isomorphisme entre $f \times g$ et $g \times f$. On a donc

$$\text{ind}_{G_n \times G_m}^{G_{n+m}}(f \times g) = \text{ind}_{G_m \times G_n}^{G_{n+m}}(g \times f),$$

ce qui montre que R est commutatif.

ii) Associativité.

On a

$$\begin{aligned} f.(g.h) &= \text{ind}_{G_n \times G_{m+l}}^{G_{n+m+l}}(f \times \text{ind}_{G_m \times G_l}^{G_{m+l}}(g \times h)) \\ &= \text{ind}_{G_n \times G_{m+l}}^{G_{n+m+l}}(\text{ind}_{G_n \times G_m \times G_l}^{G_n \times G_{m+l}}(f \times g \times h)) \\ &= \text{ind}_{G_n \times G_m \times G_l}^{G_{n+m+l}}(f \times g \times h), \end{aligned}$$

par transitivité de l'induction. De la même façon, on obtient :

$$(f.g).h = \text{ind}_{G_n \times G_m \times G_l}^{G_{n+m+l}}(f \times g \times h).$$

iii) L'élément unité de R est l'unité de R^0 . \square

On munit R d'un produit scalaire $\langle -, - \rangle$ de la façon suivante : si $f = \sum_{n \geq 0} f_n$ et $g = \sum_{n \geq 0} g_n$, où f_n et g_n sont dans R^n , on définit

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \sum_{n \geq 0} \langle f_n, g_n \rangle_{G_n}, \\ \text{où } \langle f_n, g_n \rangle_{G_n} &= \frac{1}{|G_n|} \sum_{\sigma \in G_n} f_n(\sigma) \overline{g_n(\sigma)}. \end{aligned}$$

Le groupe G_n est fini. Donc, pour tout $\sigma \in G_n$ on a $\overline{g_n(\sigma)} = g_n(\sigma^{-1})$ si $g_n \in R^n$ (voir (Serre, 1978, p. 23)). On obtient donc la formule suivante pour le produit scalaire de deux éléments f et g de R^n :

$$(1.2.2) \quad \langle f, g \rangle = \langle f, g \rangle_{G_n} = \frac{1}{|G_n|} \sum_{\sigma \in G_n} f(\sigma) g(\sigma^{-1}).$$

La proposition suivante énonce un résultat classique de théorie des représentations. On pourra en trouver une preuve dans les ouvrages de Serre (Serre, 1978) ou de Sagan (Sagan, 1991).

Proposition 1.2 *Les caractères irréductibles de G_n forment une base orthonormale de R^n .*

1.3 Construction des représentations irréductibles des produits en couronne et fonction caractéristique

Dans cette section on reprend, en le résumant, le chapitre 5 de (Kerber, 1971). On construit les \mathbf{C} -représentations irréductibles de G_n de la façon suivante.

Les \mathbf{C} -représentations irréductibles de G^n sont les produits tensoriels externes $F^* = F_1 \# \dots \# F_n$, où les F_i sont des \mathbf{C} -représentations irréductibles de G .

Soit F^1, \dots, F^p un arrangement des représentations irréductibles de G à équivalence près. On dit que $F^* = F_1 \# \dots \# F_n$ est de type $(n) = (n_1, \dots, n_p)$ si n_i est le nombre de facteurs F_j équivalents à F^i . On supposera dans la suite, sans perte de généralité, que ces F_j sont tous égaux à F^i . Soit $F^{(n)} = F^1 \# \dots \# F^1 \# F^2 \# \dots \# F^p$ la représentation de G^n telle que F^i apparait n_i fois pour tout i élément de $\{1, \dots, p\}$. On note Ω_n l'ensemble de tous les $F^{(n)}$ quand $n_1 + n_2 + \dots + n_p = n$.

Soit S_{n_i} le groupe des éléments de S_n qui permutent les n_i indices des facteurs de F^* égaux à F^i . On pose alors $S_{(n)} = S_{n_1} \times \dots \times S_{n_p}$ et $S'_{(n)} = \{(1_G, \dots, 1_G, \pi) \mid \pi \in S_{(n)}\}$.

La matrice représentant $F^*(g_1, \dots, g_n)$ est le produit tensoriel des matrices $F^i(g_i)$, ses coefficients sont donc les

$$(f_{\alpha_1 \beta_1}^1(g_1) \dots f_{\alpha_n \beta_n}^n(g_n))_{\substack{1 \leq \alpha_i \leq d_i \\ 1 \leq \beta_i \leq d_i}}$$

où $(f_{\alpha_i \beta_i}^i(g_i))_{\substack{1 \leq \alpha_i \leq d_i \\ 1 \leq \beta_i \leq d_i}}$ est la matrice qui représente g_i par F_i et d_i sa dimension.

On étend alors F^* à une représentation \tilde{F}^* de $G \wr S_{(n)}$ par la méthode suivante :

$$\tilde{F}^*(g_1, \dots, g_n, \pi) = (f_{\alpha_1 \beta_{\pi^{-1}(1)}}^1(g_1) \dots f_{\alpha_n \beta_{\pi^{-1}(n)}}^n(g_n))_{\substack{1 \leq \alpha_i \leq d_i \\ 1 \leq \beta_i \leq d_i}}.$$

Ceci revient à échanger certaines colonnes dans la matrice $\tilde{F}^*(g_1, \dots, g_n, 1_{S_{(n)}})$. On peut montrer que \tilde{F}^* est une représentation de $G \wr S_{(n)}$. On plonge G^n dans G_n en identifiant (g_1, \dots, g_n) et $(g_1, \dots, g_n, 1_{S_n})$; la restriction de \tilde{F}^* à G^n est alors F^* .

Soit F'' une \mathbf{C} -représentation irréductible de $S_{(n)}$. On définit la représentation F' de $G \wr S_{(n)}$ par

$$F'(g_1, \dots, g_n, \pi) = F''(\pi).$$

Le produit tensoriel interne $\tilde{F}^* \otimes F'$ est alors une représentation de $G \wr S_{(n)}$. On peut montrer, à l'aide de la théorie de Clifford que $\tilde{F}^* \otimes F'$ est irréductible (voir (Boerner, 1963 ; Kerber, 1971)).

De plus, le théorème 5.20 de (Kerber, 1971) nous donne le théorème suivant, voir aussi (Specht, 1932 ; Kerber, 1968, 1969).

Théorème 1.3 *Les \mathbf{C} -représentations $F = \text{ind}_{G \wr S_{(n)}}^{G \wr S_n} (\tilde{F}^* \otimes F')$ forment un ensemble complet de \mathbf{C} -représentations irréductibles de $G \wr S_n$ à équivalence près si F^* parcourt Ω_n et, une fois F^* fixé de type (n) , F'' parcourt un ensemble comprenant toutes les représentations irréductibles de $S_{(n)}$ à isomorphisme près.*

D'après la définition de $S_{(n)}$, ses représentations irréductibles sont les produits $\phi_1 \times \cdots \times \phi_p$ où ϕ_i est une représentation irréductible de S_{n_i} . Les caractères irréductibles de G_n sont donc indexés par les produits $\phi_1 \times \cdots \times \phi_p$ où chaque ϕ_i est un caractère irréductible de S_{n_i} et où les n_i varient de sorte que $n_1 + \cdots + n_p = n$.

De plus, la fonction caractéristique de Frobenius \mathcal{F} fournit une isométrie entre les caractères des groupes symétriques et les fonctions symétriques sur un alphabet infini ; elle envoie les caractères irréductibles sur les fonctions de Schur (voir (Macdonald, 1979, p. 62 où \mathcal{F} est noté ch)).

Soit X un alphabet infini, on note $X^i = X \times \{i\}$ pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$; on rappelle que $\{1, \dots, p\}$ indexe les représentations irréductibles de G .

Soit $\Lambda(X^i)$ l'algèbre des fonctions symétriques à variables dans X^i engendrée par les combinaisons \mathbf{Z} -linéaires des fonctions de Schur. On note Λ^G le produit tensoriel $\Lambda(X^1) \otimes \cdots \otimes \Lambda(X^p)$. Pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $\Lambda(X^i)$ est un anneau gradué, commutatif, associatif et unitaire. L'anneau Λ^G a donc les mêmes propriétés (la multiplication dans Λ^G est $(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p)(y_1 \otimes \cdots \otimes y_p) = (x_1 y_1 \otimes \cdots \otimes x_p y_p)$).

Remarque Si pour un anneau K , on note $\Lambda_K(X) = \Lambda(X) \otimes_{\mathbf{Z}} K$, on écrit alors

$$\Lambda_K^G = \Lambda_K(X^1) \otimes \cdots \otimes \Lambda_K(X^p) = \Lambda^G \otimes_{\mathbf{Z}} K.$$

Cette notation nous servira principalement quand $K = \mathbf{C}$.

La relation suivante définit un produit scalaire sur Λ^G :

$$(1.3.3) \quad \langle f, g \rangle = \langle f_1, g_1 \rangle \cdots \langle f_p, g_p \rangle$$

si $f = f_1 \otimes \cdots \otimes f_p$, $g = g_1 \otimes \cdots \otimes g_p$ et si $\langle f_i, g_i \rangle$ est le produit scalaire habituel sur $\Lambda(X^i)$ (voir (Macdonald, 1979) p. 34).

On étend ce produit scalaire à un produit hermitien sur $\Lambda_{\mathbf{C}}^G$ par la formule

$$(1.3.4) \quad \langle f \otimes z, g \otimes z' \rangle_{\mathbf{C}} = z \bar{z}' \langle f, g \rangle.$$

On définit la *fonction caractéristique* \mathbf{Z} -linéaire ch de R vers Λ^G qui envoie le caractère irréductible de G_n associé à $\phi_1 \times \cdots \times \phi_p$ sur $\mathcal{F}(\phi_1)(X^1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}(\phi_p)(X^p)$. Le théorème suivant est une extension d'un résultat classique de théorie de la représentation du groupe symétrique. Il reformule des résultats de (Zelevinski, 1981) et (Macdonald, 1980), voir aussi (Geissinger, 1977).

Théorème 1.4 *La fonction caractéristique ch est un isomorphisme isométrique d'anneaux gradués de R vers Λ^G .*

Preuve La fonction ch est un isomorphisme isométrique de \mathbf{Z} -modules, car elle envoie la base orthonormale des caractères irréductibles des G_n sur la base orthonormale des produits tensoriels de fonctions de Schur.

Il suffit maintenant de montrer que ch est un morphisme d'anneaux. Comme ch est linéaire il reste à montrer que pour f et h , deux éléments quelconques de

R , on a $\text{ch}(f.h) = \text{ch}(f) \text{ch}(h)$. Par bilinéarité des produits de R et de Λ^G , il suffit de le prouver quand f et g sont des éléments d'une base de R .

Soient $f = \text{ind}_{G \wr S(m)}^{G_m} (\widetilde{F}^{(m)} \otimes F')$ et $h = \text{ind}_{G \wr S(n)}^{G_n} (\widetilde{H}^{(n)} \otimes H')$ deux représentations irréductibles de G_m et G_n respectivement. Le produit $f.h$ est alors égal à

$$\text{ind}_{G_m \times G_n}^{G_{m+n}} (\text{ind}_{G \wr S(m)}^{G_m} (\widetilde{F}^{(m)} \otimes F') \times \text{ind}_{G \wr S(n)}^{G_n} (\widetilde{H}^{(n)} \otimes H')).$$

On écrit $F' = \phi_1 \times \cdots \times \phi_p$ et $H' = \psi_1 \times \cdots \times \psi_p$, et en remarquant que $G \wr S(m) \cong G \wr S_{m_1} \times \cdots \times G \wr S_{m_p}$, on voit que

$$\begin{aligned} \widetilde{F}^{(m)} \otimes F' &= (\tilde{F}_{m_1}^1 \otimes \phi_1) \times \cdots \times (\tilde{F}_{m_p}^p \otimes \phi_p), \text{ et} \\ \widetilde{H}^{(n)} \otimes H' &= (\tilde{F}_{n_1}^1 \otimes \psi_1) \times \cdots \times (\tilde{F}_{n_p}^p \otimes \psi_p), \end{aligned}$$

où $\tilde{F}_m^i = F^i \# \cdots \# F^i$, m fois.

On a alors, grâce à la transitivité de l'induction des représentations et à la commutativité du produit tensoriel,

$$\begin{aligned} f.h &= \text{ind}_{G_{m_1} \times G_{n_1} \times \cdots \times G_{m_p} \times G_{n_p}}^{G_{m+n}} ((\tilde{F}_{m_1}^1 \otimes \phi_1 \times \tilde{F}_{n_1}^1 \otimes \psi_1) \times \cdots \\ &\quad \times (\tilde{F}_{m_p}^p \otimes \phi_p \times \tilde{F}_{n_p}^p \otimes \psi_p)) \\ &= \text{ind}_{G_{m_1+n_1} \times \cdots \times G_{m_p+n_p}}^{G_{m+n}} ((\text{ind}_{G_{m_1} \times G_{n_1}}^{G_{m_1+n_1}} (\tilde{F}_{m_1}^1 \otimes \phi_1 \times \tilde{F}_{n_1}^1 \otimes \psi_1)) \times \cdots \\ &\quad \times (\text{ind}_{G_{m_p} \times G_{n_p}}^{G_{m_p+n_p}} (\tilde{F}_{m_p}^p \otimes \phi_p \times \tilde{F}_{n_p}^p \otimes \psi_p))). \end{aligned}$$

Ici on a séparé les différentes composantes de notre produit. Comme le produit dans Λ^G s'effectue composante par composante, on peut travailler indépendamment sur chacune d'entre elles. Il suffit donc de montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$ on a

$$(1.3.5) \text{ind}_{G_{m_i} \times G_{n_i}}^{G_{m_i+n_i}} (\tilde{F}_{m_i}^i \otimes \phi_i \times \tilde{F}_{n_i}^i \otimes \psi_i) = \tilde{F}_{m_i+n_i}^i \otimes \text{ind}_{S_{m_i} \times S_{n_i}}^{S_{m_i+n_i}} (\phi_i \times \psi_i).$$

Mais le groupe $G_{m_i} \times G_{n_i}$ est isomorphe au groupe $G \wr (S_{m_i} \times S_{n_i})$ et les représentations $\tilde{F}_{m_i}^i \otimes \phi_i \times \tilde{F}_{n_i}^i \otimes \psi_i$ et $(\tilde{F}_{m_i}^i \times \tilde{F}_{n_i}^i) \otimes (\phi_i \times \psi_i)$ sont équivalentes. De plus on a $\tilde{F}_{m_i}^i \times \tilde{F}_{n_i}^i = \text{res}_{G_{m_i} \times G_{n_i}}^{G_{m_i+n_i}} \tilde{F}_{m_i+n_i}^i$. On sait aussi (voir (Serre, 1978, p. 73)) que si J est un sous groupe de K et si α (resp. β) est une représentation de K (resp. J) ; alors on a

$$\text{ind}_J^K (\text{res}_J^K (\alpha) \otimes \beta) = \alpha \otimes \text{ind}_J^K (\beta),$$

où $\text{res}_J^K (\alpha)$ est la restriction de α de K à J .

Ceci appliqué à $\alpha = \tilde{F}_{m_i+n_i}^i$ et $\beta = \phi_i \times \psi_i$ montre la relation (1.3.5). \square

1.4 Cas où G est abélien

On supposera, dans toute la suite, que G est abélien et on le notera additivement. On identifiera l'ensemble sous-jacent de G et celui qui indexe les représentations irréductibles F^i de G ; par abus de notation, on écrira G pour cet ensemble. En outre, il est bien connu que les caractères irréductibles de G forment un groupe \hat{G} isomorphe à G que l'on appelle le *dual* de G . On utilisera un tel isomorphisme (non canonique) de G vers \hat{G} pour indexer les caractères irréductibles de G . De plus, \hat{G} est un groupe de morphismes de G vers le cercle unité de \mathbf{C} . On note F^i l'élément de \hat{G} associé à $i \in G$.

La discussion suivante montre que l'on peut toujours trouver un isomorphisme entre G et son dual qui vérifie, pour tout i et tout l dans G :

$$(1.4.6) \quad F^i(l) = F^l(i),$$

on utilisera dans toute la suite des isomorphismes vérifiant cette propriété.

On suppose d'abord que G est cyclique d'ordre p , on l'identifie alors au groupe additif $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Soit ζ une racine primitive $p^{\text{ème}}$ de l'unité, on utilise l'isomorphisme de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ vers son dual qui à i associe la fonction $F^i : l \mapsto \zeta^{il}$ (comme la fonction de \mathbf{Z} dans \mathbf{C}^* $k \mapsto \zeta^k$ est périodique de période p , F^i est bien définie sur les entiers modulo p). On remarquera qu'en identifiant G à $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, on a ainsi, avec tous les choix de ζ racine primitive $p^{\text{ème}}$ de l'unité, tous les isomorphismes de G vers son dual. On a bien dans ce cas $F^i(l) = F^l(i)$.

Si G n'est pas cyclique, on utilise le théorème de structure des groupes abéliens finis. On pose alors $G = C_1 \times \cdots \times C_k$ où chaque C_j est un groupe cyclique. Pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$ on choisit une racine ζ_j de 1 dont l'ordre est le cardinal de C_j . L'isomorphisme utilisé est alors le produit des isomorphismes des C_j vers les \hat{C}_j , c'est-à-dire :

$$i = (i_1, \dots, i_k) \mapsto (l = (l_1, \dots, l_k) \mapsto F^i(l) = (\zeta_1^{i_1} \times \cdots \times \zeta_k^{i_k})(l_1, \dots, l_k)).$$

On a donc

$$\begin{aligned} F^i(l) &= \prod_{j=1}^k \zeta_j^{i_j l_j} = (\zeta_1^{l_1} \times \cdots \times \zeta_k^{l_k})(i_1, \dots, i_k) \\ &= F^l(i). \end{aligned}$$

Remarque Dans le cas où G n'est pas abélien on ne dispose plus d'une structure naturelle de groupe sur l'ensemble des caractères irréductibles de G . De ce fait, la construction combinatoire de la fonction caractéristique que l'on donne ici ne peut se faire.

Les liens entre G et son dual et le fait que \hat{G} soit un groupe de morphismes de G vers le cercle unité de \mathbf{C} permettent d'énoncer les deux propriétés suivantes. Celles-ci nous serviront par la suite.

Proposition 1.5 Soient i et l deux éléments de G . On a alors

$$i) F^i(-l) = F^{-i}(l)$$

$$ii) \sum_{j \in G} F^j(l) = p \text{ si } l = 0 \\ = 0 \text{ si } l \neq 0.$$

Preuve

i) Les fonctions F^i et F^{-i} sont inverses l'une de l'autre, donc, pour tout $l \in G$, on a $F^i(l)F^{-i}(l) = 1$. Mais $F^i(-l) = \frac{1}{F^i(l)}$, car F^i est une représentation de G ; et alors $F^{-i}(l) = F^i(-l)$.

iii) Ceci est la relation classique d'orthogonalité des caractères des groupes abéliens finis, le lecteur pourra en trouver une preuve dans (Serre, 1988, p. 105). \square

Soit (i, j) un élément de $\{1, \dots, n\} \times G$. On définit $sign(i, j)$ le *signe* et $|(i, j)|$ la *valeur absolue* de (i, j) par les relations

$$(1.4.7) \quad sign(i, j) = j$$

$$(1.4.8) \quad |(i, j)| = i.$$

Soit ρ l'application de G_n vers le groupe des permutations de $\{1, \dots, n\} \times G$ tel que :

$$\rho((g_1, \dots, g_n, s)) = (\sigma : (i, j) \mapsto (s(i), j + g_i)).$$

Cette application est un morphisme de groupes, en effet d'après (1.2.1) on a :

$$\rho((g'_1, \dots, g'_n, s'))(g_1, \dots, g_n, s) = \rho((g'_{s(1)} + g_1, \dots, g'_{s(n)} + g_n, s's)) \\ = (i, j) \mapsto (s'(s(i)), j + g'_{s(i)} + g_i).$$

D'autre part,

$$\rho(g'_1, \dots, g'_n, s')\rho(g_1, \dots, g_n, s) = \\ (\sigma' : (i, j) \mapsto (s'(i), j + g'_i)) \circ (\sigma : (i, j) \mapsto (s(i), j + g_i)) \\ = ((i, j) \mapsto (s'(s(i)), j + g'_{s(i)} + g_i)) \\ = \rho((g'_1, \dots, g'_n, s'))(g_1, \dots, g_n, s).$$

Le groupe G_n peut alors être identifié au sous-groupe des permutations σ de $\{1, \dots, n\} \times G$ qui vérifient :

$$(1.4.9) \quad \sigma(i, j) = (|\sigma(i, 0)|, j + sign(\sigma(i, 0))).$$

Ceci montre que σ est déterminé par les $\sigma(i, 0)$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$. Pour tout $\sigma = (g_1, \dots, g_n, s)$ élément de G_n on appelle *valeur absolue de σ* et on note $|\sigma|$ la fonction de $\{1, \dots, n\} \times G$ dans lui même qui envoie (i, j) sur $(s(i), 0) = (|\sigma(i, j)|, 0)$. On remarquera que $|\sigma|$ n'est pas un élément de G_n .

Nous utiliserons dans la suite des liens entre les signes des $\sigma(i, j)$ et des $\sigma^{-1}(i, j)$ qui sont établis dans la proposition suivante.

Proposition 1.6 Si σ est un élément de G_n et (i, j) un élément de $\{1, \dots, n\} \times G$, on a

$$\text{sign}\sigma^{-1}(|\sigma|(i, j)) = -\text{sign}\sigma(i, j) + j = -\text{sign}\sigma(i, 0).$$

Si $j = 0$ on obtient $\text{sign}\sigma^{-1}(|\sigma|(i, 0)) = -\text{sign}\sigma(i, 0)$.

Preuve On sait que $\sigma^{-1}(\sigma(i, j)) = (i, j)$ et que

$$\sigma^{-1}(\sigma(i, j)) = (|\sigma^{-1}(\sigma(i, j))|, \text{sign}\sigma^{-1}(|\sigma(i, j)|, 0) + \text{sign}\sigma(i, j));$$

on a donc $\text{sign}\sigma^{-1}(|\sigma(i, j)|, 0) + \text{sign}\sigma(i, j) = j$. De plus, l'équation (1.4.9) nous donne

$\text{sign}\sigma(i, j) = \text{sign}\sigma(i, 0) + j$. Ce qui achève la preuve de la proposition. \square

Soit $\sigma = (x_1, \dots, x_n, s)$ un élément de G_n . Si $c = (i_1, \dots, i_k)$ est un cycle de s et si $g = x_{i_1} + \dots + x_{i_k}$ alors l'ensemble des

$$((i_1, j), (i_2, x_{i_1} + j), \dots, (i_k, x_{i_1} + \dots + x_{i_{k-1}} + j), (i_1, g + j), \dots, (i_k, -x_{i_k} + j)),$$

où j varie dans G est un ensemble de cycles de σ , où σ est considéré comme une permutation de $\{1, \dots, n\} \times G$. En fait, il suffit de connaître l'un d'eux pour les connaître tous. De plus, la donnée des suites (i_1, \dots, i_k) et $(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$ détermine complètement cet ensemble. Dans toute la suite on notera cet ensemble

$$\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_{k-1} & i_k \\ x_{i_1} & \dots & x_{i_{k-1}} & x_{i_k} \end{pmatrix} \text{ et on l'appellera un } \textit{cycle} \text{ de } \sigma.$$

Remarque En général cet ensemble ne contient pas p éléments distincts, en fait le seul cas où tous les cycles sont distincts est celui où $g = 0$; auquel cas on obtient l'ensemble des cycles :

$$((i_1, j), (i_2, x_{i_1} + j), (i_3, x_{i_1} + x_{i_2} + j), \dots, (i_k, x_{i_1} + \dots + x_{i_{k-1}} + j)).$$

On notera $l(z)$ (resp. $\text{Sign}(z)$) la longueur k (resp. le signe $g = x_{i_1} + \dots + x_{i_k}$) de

$$z = \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_{k-1} & i_k \\ x_{i_1} & \dots & x_{i_{k-1}} & x_{i_k} \end{pmatrix}.$$

Soit \mathcal{P} l'ensemble de tous les partages d'entiers. On note alors \mathcal{P}^G l'ensemble des fonctions de G dans \mathcal{P} , ces fonctions seront appelées *partages signés* et seront notées par une lettre grecque minuscule en gras. A chaque élément α de G_n on associe un élément de \mathcal{P}^G , appelé le *type cyclique* de α et noté $tc(\alpha)$. Les parts de $tc(\alpha)(g)$, $g \in G$, sont les longueurs des cycles de α dont le signe est égal à g .

Exemple Si G est le groupe cyclique d'ordre 4 engendré par i et si $n = 8$ alors on considère $\sigma = (i^2, i^0, i^1, i^3, i^1, i^1, i^2, i^3, 45317826)$ et $tc(\sigma)$ est la fonction définie ci dessous :

$$\begin{aligned} \{i^0, i^1, i^2, i^3\} &\rightarrow \mathcal{P} \\ i^0 &\mapsto 2 \\ i^1 &\mapsto (2, 1) \\ i^2 &\mapsto \emptyset \\ i^3 &\mapsto 3. \end{aligned}$$

En effet, les cycles de $(i^2, i^0, i^1, i^3, i^1, i^1, i^2, i^3, 45317826)$ sont

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ i^2 & i^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ i^0 & i^1 & i^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ i^1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ i^1 & i^3 \end{pmatrix}.$$

La proposition suivante énonce un résultat classique sur les produits en couronne d'un groupe fini avec S_n (voir (Kerber, 1971) p.47 ou (Macdonald, 1980)), la preuve en est laissée au lecteur.

Proposition 1.7 *Deux éléments de G_n sont dans la même classe de conjugaison si et seulement s'ils ont le même type cyclique.* \square

La proposition suivante établit un lien entre le type cyclique de σ et celui de son inverse.

Proposition 1.8 *Si $\lambda = tc(\sigma)$ alors $\lambda^- = tc(\sigma^{-1})$ où $\lambda^-(j) = \lambda(-j)$ pour tout $j \in G$.*

Preuve Soit

$$z = \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_{k-1} & i_k \\ x_{i_1} & \dots & x_{i_{k-1}} & x_{i_k} \end{pmatrix}$$

un cycle de σ ; alors

$$z' = \begin{pmatrix} i_k & \dots & i_2 & i_1 \\ -x_{i_k} & \dots & -x_{i_2} & -x_{i_1} \end{pmatrix}.$$

est un cycle de σ^{-1} . Donc à tout cycle de longueur k et de signe g de σ on associe un cycle de longueur k et de signe $-g$ de σ^{-1} . Ce qui montre la proposition. \square

Rappelons la notation $\Lambda^G = \bigotimes_{i \in G} \Lambda(X^i)$. L'ordre n'a pas de véritable importance ici, dans la mesure où l'on précise toujours sur quel alphabet on travaille, on identifie $f(X^i)$ à $f(X^i) \prod_{j \neq i} 1$. En fait on plongera canoniquement l'anneau $\Lambda(X^i)$ dans Λ^G .

On définit les *fonctions homogènes (resp. fonctions monomiales)* $h_\lambda(X)$ (resp. $m_\lambda(X)$), où $\lambda \in \mathcal{P}^G$, par

$$(1.4.10) \quad h_\lambda(X) = \prod_{i \in G} h_{\lambda(i)}(X^i)$$

$$(1.4.11) \quad m_\lambda(X) = \prod_{i \in G} m_{\lambda(i)}(X^i).$$

On sait que les familles $(h_\lambda(X^i))_{\lambda \in \mathcal{P}}$ et $(m_\lambda(X^i))_{\lambda \in \mathcal{P}}$ sont des bases duales du \mathbf{Z} -module $\Lambda(X^i)$. Les familles $(h_\lambda(X))_{\lambda \in \mathcal{P}^G}$ et $(m_\lambda(X))_{\lambda \in \mathcal{P}^G}$ sont donc des bases duales de Λ^G , voir (Macdonald, 1979, p. 34). De même, la famille $(h_n(X^i))_{i \in G, n \in \mathbf{N}}$ est une base algébrique de Λ^G .

Pour tout entier r et tout élément l de G on note :

$$(1.4.12) \quad P_r^{F^i}(X, l) = \sum_{j \in G} F^i(j) p_r(X^{j+l}), \text{ où } p_r(X^j) = \sum_{x \in X^j} x^r.$$

Exemple Si $G = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ on a :

$$\begin{aligned} P_r^{F^0}(X, 0) &= p_r(X^0) + p_r(X^1) \\ P_r^{F^0}(X, 1) &= p_r(X^1) + p_r(X^0) \\ P_r^{F^1}(X, 0) &= p_r(X^0) - p_r(X^1) \\ P_r^{F^1}(X, 1) &= p_r(X^1) - p_r(X^0). \end{aligned}$$

Remarque L'introduction du décalage de l correspond à une simple rotation des X^i dans le cas où G est un groupe cyclique ; elle nous sera surtout utile dans la preuve de la proposition 1.9.

Si λ est un partage à k parts on note

$$(1.4.13) \quad P_\lambda^{F^i}(X, l) = P_{\lambda_1}^{F^i}(X, l) \dots P_{\lambda_k}^{F^i}(X, l).$$

Pour tout élément λ de \mathcal{P}^G , on définit la série de puissance $P_\lambda(X, l)$ par

$$(1.4.14) \quad P_\lambda(X, l) = \prod_{i \in G} P_{\lambda(i)}^{F^i}(X, l).$$

Si $l = 0$ on écrit $P_\lambda(X)$.

On définit la fonction ψ de la façon suivante:

$$(1.4.15) \quad \begin{aligned} \psi : G_n &\rightarrow \Lambda_{\mathbf{C}}^G = \bigotimes_{j \in G} \Lambda_{\mathbf{C}}(X^j) \\ \psi(\alpha) &= \prod_{i \in G} \prod_{k=1}^{l(\lambda(i))} \sum_{j \in G} F^i(j) p_{\lambda(i)_k}(X^j) \\ &= \prod_{i \in G} \prod_{k=1}^{l(\lambda(i))} P_{\lambda(i)_k}(X) \\ &= P_\lambda(X) \end{aligned}$$

où λ est le type cyclique de la permutation signée α , $\lambda(i)_k$ la k -ème part de $\lambda(i)$ et $p_r(X^j) = p_r(X^j) \prod_{i \neq j} 1$ (comme il n'y a pas d'ambiguïté dans la notation $p_r(X^j)$, on omet les autres composantes du produit tensoriel). La fonction ψ est évidemment une fonction centrale sur G_n , elle dépend de l'isomorphisme entre G et son dual.

On peut alors montrer la proposition suivante qui permet de donner une construction combinatoire de la fonction ch. Ce résultat est une extension d'un théorème de (Geissinger, 1977) et se rapproche de certains résultats de (Zelevinski, 1981) écrits en termes d'algèbres de Hopf.

Proposition 1.9 *Pour tout caractère f de G_n , on a*

$$\langle f, \psi \rangle = \text{ch}(f) = \frac{1}{|G_n|} \sum_{\sigma \in G_n} f(\sigma) \psi(\sigma^{-1}).$$

On va prouver ce résultat en construisant des représentations irréductibles χ^λ de G_n telles que $\langle \chi^\lambda, \psi \rangle = \prod_{i \in G} s_{\lambda(i)}(X^i)$, et en montrant que $\text{ch}(\chi^\lambda) = \prod_{i \in G} s_{\lambda(i)}(X^i)$. La proposition se déduit alors par linéarité.

Pour ce faire, nous avons besoin de quelques définitions et résultats préliminaires.

On définit tout d'abord z_λ pour tout partage signé λ par

$$z_\lambda = \prod_{j \in G} \prod_{i \geq 1} i^{n_i(j)} (n_i(j)!) = \prod_{j \in G} z_{\lambda(j)},$$

où pour tout $j \in G$ on a $\lambda(j) = 1^{n_1(j)} 2^{n_2(j)} \dots$. La longueur $l(\lambda)$ de λ sera alors la somme $\sum_{j \in G} \sum_{i \geq 1} n_i(j)$. On note de plus f_λ la valeur du caractère f aux permutations signées de type cyclique λ . On peut ainsi exprimer le produit scalaire $\langle f, \psi \rangle$ en fonction des z_λ , f_λ et P_λ .

Lemme 1.10 *Si f est un élément de R^n , alors le produit scalaire de f et ψ est donné par la formule suivante*

$$\langle f, \psi \rangle = \sum z_\lambda^{-1} p^{-l(\lambda)} f_\lambda P_{\lambda^-}(X).$$

Preuve Remarquons tout d'abord que, pour tout i et j dans G on a

$$\overline{F^i(j)} = F^i(j)^{-1} = F^i(-j) = F^{-i}(j) \quad (\text{voir la proposition 1.5}).$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \overline{\psi(\sigma)} &= \prod_{i \in G} \prod_{k=1}^{l(\lambda(i))} \sum_{j \in G} F^{-i}(j) p_{\lambda(i)_k}(X^j) \\ &= \prod_{i \in G} \prod_{k=1}^{l(\lambda(-i))} \sum_{j \in G} F^i(j) p_{\lambda(-i)_k}(X^j) \text{ on change } i \text{ en } -i. \end{aligned}$$

La définition de λ^- nous donne alors :

$$\begin{aligned} \overline{\psi(\sigma)} &= \prod_{i \in G} \prod_{k=1}^{l(\lambda^-(i))} \sum_{j \in G} F^i(j) p_{\lambda^-(i)_k}(X^0) \\ &= P_{\lambda^-}(X). \end{aligned}$$

D'après un résultat de (Specht, 1932) (voir aussi (Kerber, 1971)), le nombre d'éléments de G_n de type cyclique λ avec $\lambda(i) = 1^{n_1(i)} 2^{n_2(i)} \dots$ est égal à

$$\frac{|G_n|}{\prod_{i \in G} (\prod_{j \geq 1} n_j(i)! (j^j)^{n_j(i)})} = \frac{|G_n|}{z_\lambda p^{l(\lambda)}}.$$

Comme f et ψ sont des fonctions centrales on a

$$\begin{aligned} \langle f, \psi \rangle &= \frac{1}{|G_n|} \sum_{\sigma \in G_n} f(\sigma) \overline{\psi(\sigma^{-1})} \\ &= \frac{1}{|G_n|} \sum_{\lambda \vdash n} \frac{|G_n|}{z_\lambda p^{l(\lambda)}} f_\lambda P_{\lambda^-}(X). \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration du lemme. \square

Lemme 1.11 *L'application linéaire qui à f associe $\langle f, \psi \rangle$ est un homomorphisme d'algèbres.*

Preuve Si $f \in R^n$ et si $g \in R^m$, on a par définition de la multiplication dans R :

$$\begin{aligned} \langle f.g, \psi \rangle &= \langle \text{ind}_{G_n \times G_m}^{G_{n+m}}(f \times g), \psi \rangle_{G_{n+m}} \\ &= \langle f \times g, \text{res}_{G_n \times G_m}^{G_{n+m}} \psi \rangle \text{ par réciprocity de Frobenius} \\ &= \langle f, \psi \rangle \langle g, \psi \rangle \quad \text{car } \psi(\alpha \times \beta) = \psi(\alpha)\psi(\beta). \square \end{aligned}$$

Lemme 1.12 *Pour tout $l \in G$ on a*

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \in \mathcal{P}^G} z_\lambda^{-1} p^{-l(\lambda)} P_\lambda(X, l) t^{|\lambda|} &= \prod_{j \geq 1} (1 - x_j^l t)^{-1} \\ &= \sum_{r \geq 0} h_r(X^l) t^r. \end{aligned}$$

Preuve Cette preuve est une extension de celle de (Macdonald, 1979).

On appelle *série génératrice des fonctions homogènes* la série définie par la relation suivante :

$$(1.4.16) \quad H(F^i, l, t) = \prod_{k \in G} \exp\left(\frac{F^i(k)}{p} \log\left(\sum_{r \geq 0} h_r(X^{k+l}) t^r\right)\right).$$

La formule suivante démontre la deuxième égalité du lemme 1.12

$$\sum_{n \geq 0} h_n(X^l) t^n = \prod_{j \geq 1} (1 - x_j^l t)^{-1} \text{ (Macdonald, 1979, p. 14).}$$

De plus, on en déduit que

$$(1.4.17) \quad H(F^i, l, t) = \prod_{k \in G} \exp\left(-\frac{F^i(k)}{p} \log\left(\prod_{j \geq 1} (1 - x_j^{k+l} t)\right)\right).$$

En prenant le logarithme des deux côtés de cette relation, on trouve :

$$\log(H(F^i, l, t)) = \sum_{k \in G} \sum_{j \geq 1} \frac{F^i(k)}{p} \log\left(\frac{1}{1 - x_j^{k+l} t}\right).$$

On dérive le second membre par rapport à t , et on utilise le résultat classique suivant sur les fonctions symétriques, voir (Macdonald, 1979, p. 16),

$$\frac{d}{dt} \sum_{j \geq 1} \log \frac{1}{1 - x_j^k t} = \sum_{r \geq 1} p_r(X^k) t^{r-1}.$$

les deux relations précédentes entraînent alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \log(H(F^i, l, t)) &= \sum_{r \geq 1} \sum_{k \in G} \frac{F^i(k)}{p} p_r(X^{k+l}) t^{r-1} \\ &= \sum_{r \geq 1} \frac{1}{p} P_r^{F^i}(X, l) t^{r-1}. \end{aligned}$$

On intègre et on prend l'exponentielle de cette dernière formule pour obtenir :

$$\begin{aligned} H(F^i, l, t) &= \exp \sum_{r \geq 1} \frac{1}{p} P_r^{F^i}(X, l) \frac{t^r}{r} \\ &= \prod_{r \geq 1} \exp\left(\frac{1}{p} P_r^{F^i}(X, l) \frac{t^r}{r}\right) \\ &= \prod_{r \geq 1} \sum_{m_r \geq 0} (P_r^{F^i}(X, l) t^r)^{m_r} \frac{1}{p^{m_r} r^{m_r} m_r!}. \end{aligned}$$

Dont on déduit

$$(1.4.18) \quad H(F^i, l, t) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} z_\lambda^{-1} p^{-l(\lambda)} P_\lambda^{F^i}(X, l) t^{|\lambda|}.$$

Si on multiplie les $H(F^i, l, t)$ en faisant varier i dans G , on trouve :

$$\begin{aligned} \prod_{i \in G} H(F^i, l, t) &= \prod_{i \in G} \prod_{k \in G} \prod_{j \geq 1} \exp\left(-\frac{F^i(k)}{p} \log(1 - x_j^{k+l} t)\right) \text{ d'après (1.4.17)} \\ &= \prod_{k \in G} \prod_{j \geq 1} \exp\left(-\frac{1}{p} \sum_{i \in G} F^i(k) \log(1 - x_j^{k+l} t)\right) \\ (1.4.19) \quad &= \prod_{j \geq 1} (1 - x_j^l t)^{-1} \text{ d'après la proposition 1.5.} \end{aligned}$$

On remplace maintenant $H(F^i, l, t)$ dans (1.4.19) par le second membre de (1.4.18), ce qui donne

$$\begin{aligned} \prod_{j \geq 1} (1 - x_j^l t)^{-1} &= \prod_{i \in G} \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} z_\lambda^{-1} p^{-l(\lambda)} P_\lambda^{F^i}(X, l) t^{|\lambda|} \\ &= \sum_{\lambda \in \mathcal{P}^G} z_\lambda^{-1} p^{-l(\lambda)} P_\lambda(X, l) t^{|\lambda|} \end{aligned}$$

Ceci démontre la première égalité du lemme 1.12. \square

Preuve de la proposition 1.9 On sait que ch est un isomorphisme d'algèbres. Donc, si cet isomorphisme coïncide avec un homomorphisme sur un ensemble qui est envoyé sur une base algébrique de Λ^G , alors ces deux homomorphismes d'algèbres sont égaux.

On définit η_n^l où $l \in G$ et $n \in \mathbb{N}$ par

$$\eta_n^l(g_1, \dots, g_n, s) = F^l(g_1 + \dots + g_n) = \prod_{i=1}^n F^l(g_i).$$

On a donc $\text{ch}(\eta_n^l) = h_n(X^l)$ car η_n^l est construit en prenant $F^* = F^l \# \dots \# F^l$ (n fois) et F^l la représentation triviale de $S_n = S_{(n)}$. En effet, la fonction caractéristique de Frobenius envoie la représentation triviale de S_n sur la fonction symétrique h_n et d'après la définition de ch (voir p.8) on conclut immédiatement.

Il reste à montrer que

$$\langle \eta_n^l, \psi \rangle = h_n(X^l).$$

Soit $\alpha = (g_1, \dots, g_n, s)$ une permutation signée qui a pour type cyclique λ , alors chaque cycle $\begin{pmatrix} j_1 & \dots & j_k \\ g_{j_1} & \dots & g_{j_k} \end{pmatrix}$ de α de signe i , donne $g_{j_1} + \dots + g_{j_k} = i$. La somme $g_1 + \dots + g_n$ est donc égale à la somme $\sum_{i \in G} l(\lambda(i))i$ où $l(\lambda(i))$ est le nombre de parts de $\lambda(i)$, ce qui représente aussi le nombre de cycles de α de signe i .

On en déduit que η_n^l est le caractère de G_n qui envoie chaque permutation signée de type λ sur $F^l(\sum_{i \in G} l(\lambda(i))i) = \prod_{i \in G} F^l(l(\lambda(i))i) = \prod_{i \in G} (F^l(i))^{l(\lambda(i))}$, car F^l est un morphisme d'un groupe additif vers un groupe multiplicatif.

On calcule maintenant le produit scalaire $\langle \eta_n^l, \psi \rangle$ à l'aide du lemme 1.10 :

$$\begin{aligned} \langle \eta_n^l, \psi \rangle &= \sum_{|\lambda|=n} z_\lambda^{-1} p^{-l(\lambda)} P_{\lambda^-}(X) F^l(\sum_{i \in G} l(\lambda(i))i) \\ &= \sum_{|\lambda|=n} z_\lambda^{-1} p^{-l(\lambda)} \prod_{j \in G} P_{\lambda(-j)}^{F^j}(X) \prod_{i \in G} F^l(l(\lambda(i))i) \\ &= \sum_{|\lambda|=n} z_\lambda^{-1} p^{-l(\lambda)} \prod_{i \in G} F^l(l(\lambda(i))i) P_{\lambda(i)}^{F^{-i}}(X) \text{ on pose } i = -j, \\ &= \sum_{|\lambda|=n} z_\lambda^{-1} p^{-l(\lambda)} \prod_{i \in G} \prod_{k=1}^{l(\lambda(i))} F^i(l) P_{\lambda(i)_k}^{F^{-i}}(X) \quad \text{par (1.4.6)}. \end{aligned}$$

On travaille maintenant sur chacun des $F^i(l) P_{\lambda(i)_k}^{F^{-i}}(X)$; l'équation (1.4.12) nous donne

$$\begin{aligned} F^i(l) P_r^{F^{-i}}(X) &= \sum_{j \in G} F^{-i}(-l) F^{-i}(j) p_r(X^j) \\ &= \sum_{j \in G} F^{-i}(j-l) p_r(X^j) \quad \text{par la proposition 1.5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k \in G} F^{-i}(k) p_r(X^{k+l}) \quad \text{en posant } k = j - l \\
&= P_r^{F^{-i}}(X, l).
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\langle \eta_n^l, \psi \rangle = \sum_{|\lambda|=n} z_\lambda^{-1} p^{-l(\lambda)} P_{\lambda^-}(X, l)$$

et, en vertu du lemme 1.12, on a $\langle \eta_n^l, \psi \rangle = h_n(X^l)$.

Comme les $h_n(X^l)$ forment une base algébrique de Λ^G , les homomorphismes ch et $f \mapsto \langle f, \psi \rangle$ sont égaux. \square

La proposition suivante énonce un cas particulier de la proposition 1.9 dont nous nous resservirons par la suite.

Proposition 1.13 *Pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'image de la représentation régulière $f_{\text{rég}}^n$ de G_n par ch est*

$$\text{ch}(f_{\text{rég}}^n) = h_1(X)^n = \left(\sum_{i \in G} h_1(X^i) \right)^n.$$

Preuve On rappelle que le caractère de la représentation régulière de G_n associe $|G_n| = p^n n!$ à 1_G et 0 aux autres permutations signés (voir (Serre, 1978)). On a alors

$$\begin{aligned}
\text{ch}(f_{\text{rég}}^n) &= \frac{1}{|G_n|} \sum_{\sigma \in G_n} \chi_{f_{\text{rég}}^n}(\sigma) \psi(\sigma^{-1}) \\
&= \psi(1_{G_n}) \\
&= \left(\sum_{i \in G} h_1(X^i) \right)^n
\end{aligned}$$

car le type cyclique de 1_{G_n} est λ où $\lambda(0_G) = 1^n$ et $\lambda(i) = \emptyset$ si $i \neq 0_G$. \square

1.5 Séries génératrices d'espaces et fonction caractéristique

Dans cette section, nous donnons une généralisation d'un résultat apparenté à la dualité de Schur-Weyl (voir (Reutenauer, 1993)) ; nous l'établissons à l'aide de techniques de multilinéarisation.

Soit X un alphabet infini ; soit $A = \bigcup_{i \in G} X^i$. Les éléments de A sont les couples (a, i) où $a \in X$ et $i \in G$. La *valeur absolue* de (a, i) est $|(a, i)| = a$ et le *signe* de (a, i) est $\text{sign}(a, i) = i$.

On note $\mathbf{C} \langle A \rangle$ l'algèbre des mots sur A à coefficients dans \mathbf{C} . Un élément P de $\mathbf{C} \langle A \rangle$ est appelé un *polynôme homogène* s'il est combinaison linéaire de mots de même longueur.

Le *degré partiel* $|w_a|$ d'un mot $w \in A^*$ en une lettre $a \in A$ est le nombre d'occurrences de a dans w . Un polynôme de $\mathbf{C} \langle A \rangle$ est dit *finement homogène*

s'il est combinaison linéaire de mots ayant, pour chaque lettre de A , tous les mêmes degrés partiels.

Le *signe d'un polynôme finement homogène* P est la somme des signes des lettres apparaissant dans chacun des mots qui composent P . Ce signe est bien défini car G est un groupe abélien.

Exemple On prend $X = \{a, b, c, d, \dots\}$ et $G = \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$; alors le polynôme $P = (a, 1)(d, 2)(b, 0) - (c, 1)(a, 2)(d, 1) + 2(a, 0)(d, 2)(b, 2)$ est homogène et $Q = (a, 1)(d, 2)(b, 0) - (b, 0)(a, 1)(d, 2) + 9(b, 0)(d, 2)(a, 1)$ est finement homogène de degré partiel 1 en $(a, 1)$ et de signe $1 + 2 + 0 = 0$.

Soit $\alpha = (\alpha_a)_{a \in A}$ une famille d'entiers naturels presque tous nuls ; $|\alpha|$ désigne alors la somme des α_a quand a parcourt A ($|\alpha| = \sum_{a \in A} \alpha_a$). L'ensemble de ces familles est noté \mathcal{E}_A . On note E_α le sous-espace vectoriel de $\mathbf{C} \langle A \rangle$ engendré par les mots de A^* de degré partiel α_a en chaque $a \in A$.

Soit H un sous-espace de $\mathbf{C} \langle A \rangle$; on appelle *série génératrice* de H la série

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{E}_A} \dim(H \cap E_\alpha) \prod_{a \in A} a^{\alpha_a} \in \mathbf{Z}[[A]],$$

où $\mathbf{Z}[[A]]$ est l'algèbre des séries à variables commutatives dans A .

On suppose maintenant que X contient $\{1, \dots, n\}$. On peut donc associer à tout élément σ de G_n le mot $w_\sigma = \sigma(1, 0) \dots \sigma(n, 0) \in A^*$. Dans la suite, pour simplifier les notations, on écrira i à la place de $(i, 0)$. On note E_n l'espace engendré par les w_σ quand σ varie dans G_n .

A chaque élément τ de G_n , on associe l'automorphisme d'algèbre $\underline{\tau}$ de $\mathbf{C} \langle A \rangle$ défini par

$$(1.5.20) \quad \begin{aligned} \underline{\tau}(k, j) &= F^{\text{sign}\tau(k)}(j)(|\tau(k)|, j) & \text{si } k \in \{1, \dots, n\} \\ \underline{\tau}(a, j) &= (a, j) & \text{si } a \notin \{1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

L'espace E_n est stable sous l'action de chaque isomorphisme $\underline{\tau}$; en effet, si τ et σ sont éléments de G_n on a

$$\begin{aligned} \underline{\tau}(w_\sigma) &= F^{\text{sign}\tau(|\sigma(1)|, 0)}(\text{sign}(\sigma(1)))(|\tau(\sigma(1))|, \text{sign}\sigma(1)) \dots \\ &\quad F^{\text{sign}\tau(|\sigma(n)|, 0)}(\text{sign}(\sigma(n)))(|\tau(\sigma(n))|, \text{sign}\sigma(n)) \\ &= \left(\prod_{i=1}^n F^{\text{sign}\tau(|\sigma(i)|, 0)}(\text{sign}(\sigma(i)))(|\tau(\sigma(i))|, \text{sign}\sigma(i)) \right) \dots \\ &\quad (|\tau(\sigma(n))|, \text{sign}\sigma(n)), \end{aligned}$$

et $(|\tau(\sigma(1))|, \text{sign}\sigma(1)) \dots (|\tau(\sigma(n))|, \text{sign}\sigma(n))$ est un élément de E_n .

On a ainsi une action de G_n sur E_n appelée *action à gauche*. Cette action est l'action naturelle par valeurs de G_n après changement de variables. Nous verrons plus tard que c'est l'action qui se comporte bien vis-à-vis des questions de stabilité des espaces que nous étudierons.

Soit V le \mathbf{C} -espace vectoriel engendré par les éléments de A ; alors $V = \bigoplus_{i \in G} V^i$ où V^i est le sous-espace de V engendré par les lettres de X^i . On définit l'action par positions de $\beta \in G_n$ sur $V^{\otimes n}$ par

$$(1.5.21) \quad \beta(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = u_1 \otimes \dots \otimes u_n$$

où $u_i = \sum_{j \in G} F^{sign(\beta^{-1}(i))}(j) x_{|\beta^{-1}(i)|}^j$ si $v_k = \sum_{j \in G} x_k^j$ ($x_k^j \in V^j$). En fait β échange ici les positions des v_i de la même manière que dans l'action par positions classique des permutations, mais on multiplie chacune des composantes de $v_k = \sum_{j \in G} x_k^j$ par un coefficient qui dépend du signe de $\beta^{-1}(i)$.

On peut alors démontrer le résultat suivant.

Lemme 1.14 *L'action par positions de G_n sur $V^{\otimes n}$ est une action de groupe à gauche.*

Preuve On note tout d'abord que

$$(\alpha\beta)(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = t_1 \otimes \dots \otimes t_n,$$

où $t_i = \sum_{j \in G} F^{sign(\beta^{-1}(\alpha^{-1}(i)))}(j) x_{|\beta^{-1}(\alpha^{-1}(i))|}^j$.

D'autre part, on a :

$$\alpha(\beta(v_1 \otimes \dots \otimes v_n)) = \alpha(u_1 \otimes \dots \otimes u_n),$$

où $u_k = \sum_{j \in G} F^{sign(\beta^{-1}(k))}(j) x_{|\beta^{-1}(k)|}^j = \sum_{j \in G} y_k^j$.

On trouve ainsi

$$\alpha(\beta(v_1 \otimes \dots \otimes v_n)) = r_1 \otimes \dots \otimes r_n,$$

où $r_i = \sum_{j \in G} F^{sign(\alpha^{-1}(i))}(j) y_{|\alpha^{-1}(i)|}^j$. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$; on pose $k = |\alpha^{-1}(i)|$ et on remplace $y_{|\alpha^{-1}(i)|}^j = y_k^j$ par son expression en fonction de $x_{|\beta^{-1}(k)|}^j$ pour trouver

$$\begin{aligned} r_i &= \sum_{j \in G} F^{sign(\alpha^{-1}(i))}(j) F^{sign(\beta^{-1}(k))}(j) x_{|\beta^{-1}(k)|}^j \\ &= \sum_{j \in G} F^{sign(\alpha^{-1}(i)) + sign(\beta^{-1}(k))}(j) x_{|\beta^{-1}(k)|}^j, \end{aligned}$$

car pour tout $j \in G$, la fonction $i \mapsto F^i(j)$ est un morphisme de groupes. De plus, on a $|\beta^{-1}(k)| = |\beta^{-1}(\alpha^{-1}(i))|$ et l'équation (1.4.9) nous donne

$$sign(\alpha^{-1}(i)) + sign(\beta^{-1}(k)) = sign(\beta^{-1}(\alpha^{-1}(i))).$$

On trouve ainsi

$$r_i = \sum_{j \in G} F^{sign(\beta^{-1}(\alpha^{-1}(i)))}(j) x_{|\beta^{-1}(\alpha^{-1}(i))|}^j = t_i. \quad \square$$

On déduit de ces deux actions, une représentation de G_n sur $E_n \otimes V^{\otimes n}$ qui est le produit tensoriel des deux actions précédemment définies. Si $x = w_\sigma \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n$ et si $\beta \in G_n$, on notera

$$(1.5.22) \quad \beta.x = \underline{\beta}(w_\sigma) \otimes \beta(v_1 \otimes \dots \otimes v_n).$$

Supposons que H soit un sous-espace de $\mathbf{C} \langle A \rangle$ stable sous l'action de tout endomorphisme d'algèbre qui envoie chaque lettre sur une combinaison linéaire de lettres du même signe, H sera dit *assez stable*. On peut montrer le lemme suivant, dont la démonstration est basée sur la technique de multilinéarisation ; cette preuve n'utilise que partiellement le fait que H soit assez stable, cette hypothèse nous sera par contre nécessaire dans le théorème qui le suit.

Lemme 1.15 *Si H est un sous-espace assez stable de $\mathbf{C} \langle A \rangle$, alors H admet une base formée d'éléments finement homogènes.*

Preuve Soit P un élément de H et a une lettre de A . On décompose P en somme d'éléments de $\mathbf{C} \langle A \rangle$ suivant le nombre d'occurrences de a qu'ils contiennent ; c'est-à-dire $P = \sum_{i=0}^n P_i$ où P_i est une combinaison linéaire de mots contenant i fois la lettre a .

Soit M_α l'endomorphisme d'algèbre de $\mathbf{C} \langle A \rangle$ engendré par l'endomorphisme de V qui change a en αa et ne modifie pas les autres lettres. On a alors

$$M_\alpha(P) = \sum_{i=0}^n \alpha^i P_i \in H.$$

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ n scalaires non nuls, distincts deux à deux. La matrice qui permet de passer des P_i aux $M_{\alpha_i}(P)$ est une matrice de Vandermonde, elle est donc inversible. On peut donc exprimer les P_i comme des combinaisons linéaires des $M_{\alpha_i}(P)$ qui sont tous éléments de H . Chaque P_i est donc élément de H .

On refait le même raisonnement pour chacune des lettres qui apparaissent dans P . On voit ainsi que chaque composante finement homogène de P est dans H et que H admet une base finement homogène. \square

L'espace $H_n = H \cap E_n$, appelé la *partie multilinéaire* de H , est alors invariant sous l'action à gauche de G_n . On note χ_{H_n} le caractère de cette représentation et n_α désigne la dimension de $H \cap E_\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathcal{E}_A$.

Le théorème suivant établit une correspondance entre χ_{H_n} et la série génératrice de l'espace H ; il généralise une partie de la dualité de Schur-Weyl (voir (Boerner, 1963 ; Weyl, 1946)).

Théorème 1.16 *Si H est un espace assez stable, on a*

$$ch(\chi_{H_n}) = \sum_{|\alpha|=n} n_\alpha \prod_{a \in A} a^{\alpha_a}.$$

Remarque On peut voir assez facilement que, par rapport à la dualité de Schur-Weyl classique, on a remplacé S_n par G_n d'une part, et $GL(V)$ par $GL(V^1) \times \dots \times GL(V^p)$ d'autre part.

On remarque aussi que dans ce cas, $\text{ch}(\chi_{H_n})$ ne dépend pas du choix de l'isomorphisme entre G et \hat{G} mais uniquement de l'espace H . Ce théorème est une conséquence du lemme suivant.

Lemme 1.17 *Soit q l'application linéaire définie par*

$$\begin{aligned} q : E_n \otimes V^{\otimes n} &\rightarrow \mathbf{C} \langle A \rangle \\ w_\sigma \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n &\mapsto t_1 \dots t_n \end{aligned}$$

où $t_k = x_{|\sigma(k)|}^{\text{sign}\sigma(k)}$ si $v_i = \sum_{j \in G} x_i^j$ et $\sigma \in G_n$.

On a alors, avec les hypothèses du théorème précédent,

- le noyau de q est $\mathcal{H} = \langle \{x - \beta.x \mid x \in E_n \otimes V^{\otimes n}, \beta \in G_n\} \rangle$;
- l'image de $H_n \otimes V^{\otimes n}$ est H .

Preuve

a) Pour montrer que $\mathcal{H} \subseteq \ker(q)$ il suffit de montrer que, pour tous β et σ dans G_n et pour tous $v_i = \sum x_i^j$ ($1 \leq i \leq n$) dans V , on a $q(\beta.(w_\sigma \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n)) = q(w_\sigma \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n)$. On pose $q(w_\sigma \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = t'_1 \dots t'_n$ où $t'_i = x_{|\sigma(i)|}^{\text{sign}(\sigma(i))}$. Pour raccourcir les formules, on notera $x = \beta.(w_\sigma \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n)$.

On sait que

$$q(x) = q(\underline{\beta}(w_\sigma) \otimes u_1 \otimes \dots \otimes u_n)$$

et d'après la définition de $\underline{\beta}(w_\sigma)$ (voir éq.1.5.20), on trouve

$$\begin{aligned} \underline{\beta}(w_\sigma) &= \prod_{i=1}^n F^{\text{sign}\beta|\sigma(i)|}(\text{sign}\sigma(i))(|\beta(\sigma(i))|, \text{sign}\sigma(i)) \\ &= \left(\prod_{i=1}^n F^{\text{sign}\beta|\sigma(i)|}(\text{sign}\sigma(i)) \right) (|\beta(\sigma(1))|, \text{sign}\sigma(1)) \dots \\ &\quad (|\beta(\sigma(n))|, \text{sign}\sigma(n)). \end{aligned}$$

Par linéarité de q on obtient pour $q(x)$

$$\begin{aligned} &\left\{ \prod_{i=1}^n F^{\text{sign}\beta|\sigma(i)|}(\text{sign}\sigma(i)) \right\} q((|\beta(\sigma(1))|, \text{sign}\sigma(1)) \dots \\ &\quad (|\beta(\sigma(n))|, \text{sign}\sigma(n)) \otimes u_1 \otimes \dots \otimes u_n). \end{aligned}$$

On travaille maintenant sur la seconde partie de cette formule.

Soit $i \in \{1, \dots, n\}$; si $|\sigma(i)|$ est égal à k et si $|\beta(k)| = |\beta(\sigma(i))|$ est égal à l , alors on a $|\beta^{-1}(l)| = k = |\sigma(i)|$. On pose alors

$$q((|\beta(\sigma(1))|, \text{sign}\sigma(1)) \dots (|\beta(\sigma(n))|, \text{sign}\sigma(n)) \otimes u_1 \otimes \dots \otimes u_n) = t_1 \dots t_n.$$

D'après la définition de q , t_i est la composante de signe $\text{sign}(\sigma(i))$ de $u_{|\beta(\sigma(i))|}$. Mais on a

$$u_l = \sum_{j \in G} F^{\text{sign}\beta^{-1}(l)}(j) x_{|\beta^{-1}(l)|}^j \quad \text{d'après (1.5.21)}$$

$$= \sum_{j \in G} F^{\text{sign}\beta^{-1}(l)}(j) x_k^j \quad \text{car } k = |\beta^{-1}(l)|,$$

donc

$$\begin{aligned} t_i &= F^{\text{sign}\beta^{-1}(l)}(\text{sign}\sigma(i)) x_k^{\text{sign}\sigma(i)} \\ &= F^{\text{sign}\beta^{-1}(l)}(\text{sign}\sigma(i)) x_{|\sigma(i)|}^{\text{sign}(\sigma(i))} \quad \text{car } k = |\sigma(i)|. \end{aligned}$$

Rappelons que $l = |\beta(\sigma(i))|$; on a donc

$$\begin{aligned} t_1 \dots t_n &= \left\{ \prod_{i=1}^n F^{\text{sign}\beta^{-1}(|\beta(\sigma(i))|)}(\text{sign}\sigma(i)) \right\} x_{|\sigma(1)|}^{\text{sign}(\sigma(1))} \dots x_{|\sigma(n)|}^{\text{sign}(\sigma(n))} \\ &= \left\{ \prod_{i=1}^n F^{\text{sign}\beta^{-1}(|\beta(\sigma(i))|)}(\text{sign}\sigma(i)) \right\} t'_1 \dots t'_n. \end{aligned}$$

On a alors, en multipliant $t_1 \dots t_n$ et la première partie de $q(x)$:

$$q(x) = \left\{ \prod_{i=1}^n F^{(\text{sign}(\beta|\sigma(i)|) + \text{sign}(\beta^{-1}(|\beta(\sigma(i))|)))(\text{sign}\sigma(i))} \right\} t'_1 \dots t'_n.$$

Mais la proposition 1.6 affirme que

$$\text{sign}(\beta^{-1}|\beta(\sigma(i))|) + \text{sign}(\beta|\sigma(i)|) = 0,$$

on a donc $F^{(\text{sign}(\beta|\sigma(i)|) + \text{sign}(\beta^{-1}(|\beta(\sigma(i))|)))(\text{sign}\sigma(i))} = 1$. La formule précédente devient alors

$$q(\beta \cdot (\sigma \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n)) = q(\sigma \otimes t'_1 \otimes \dots \otimes t'_n).$$

Ceci montre que $\mathcal{H} \subseteq \ker(q)$.

Il reste à montrer que le noyau de q est inclus dans \mathcal{H} pour finir la preuve de a). Cette démonstration s'effectue en trois étapes.

i) Si C est égal à $\{w_\sigma | \sigma \in G_n\}$ alors $C \times A^n$ est une base de $E_n \otimes V^{\otimes n}$. On va montrer que $\ker(q) \cap (C \times A^n)$ est inclus dans $\mathcal{H} \cap (C \times A^n)$.

Soit, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ et tout $l \in G$, β_l^k l'élément de G_n défini par

$$w_{\beta_l^k} = (1, 0) \dots (k-1, 0)(k, l)(k+1, 0) \dots (n, 0).$$

Remarquons que les β_l^k commutent tous entre eux, que $(\beta_l^k)^{-1} = \beta_{-l}^k$ et que pour tout $\sigma \in G_n$ et tous $v_i \in V$ on a, en posant $j = -\text{sign}\sigma^{-1}(k)$,

$$\begin{aligned} (1.5.23) \quad & \beta_l^k \cdot (w_\sigma \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n) \\ &= \underline{\beta_l^k}(w_\sigma) \otimes v_1 \otimes \dots \otimes \sum_{i \in G} F^{-l}(i) x_k^i \otimes \dots \otimes v_n \\ &= F^l(j) w_\sigma \otimes v_1 \otimes \dots \otimes \sum_{i \in G} F^l(-i) x_k^i \otimes \dots \otimes v_n \end{aligned}$$

$$= w_\sigma \otimes v_1 \otimes \dots \otimes \sum_{i \in G} F^l(j-i)x_k^i \otimes \dots \otimes v_n.$$

On a alors, à l'aide de la proposition 1.5 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \sum_{l \in G} \beta_l^k \cdot (w_\sigma \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n) &= \frac{1}{p} w_\sigma \otimes v_1 \otimes \dots \otimes \sum_{l \in G, i \in G} F^l(j-i)x_k^i \otimes \dots \otimes v_n \\ &= w_\sigma \otimes v_1 \otimes \dots \otimes x_k^j \otimes \dots \otimes v_n. \end{aligned}$$

En posant $f = \prod_{k=1}^n (\frac{1}{p} \sum_{l \in G} \beta_l^k)$, on trouve

$$f \cdot (w_\sigma \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = w_\sigma \otimes x_1^{-\text{sign}\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes x_n^{-\text{sign}\sigma^{-1}(n)}.$$

En particulier, si $w_\sigma \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n$ est un élément de $C \times A^n$ on a

$$\text{soit } f \cdot (w_\sigma \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = w_\sigma \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n$$

si les $x_i^{-\text{sign}(\sigma^{-1}(i))}$ sont tous non nuls ;

$$\text{soit } f \cdot (w_\sigma \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = 0$$

si l'un des $x_i^{-\text{sign}(\sigma^{-1}(i))}$ est nul.

D'autre part, on a $q(w_\sigma \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = x_{|\sigma(1)|}^{\text{sign}\sigma(1)} \dots x_{|\sigma(n)|}^{\text{sign}\sigma(n)}$. Donc, si $x = \sigma \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n$ est dans $C \times A^n$, alors $q(x) = 0$ implique qu'il existe i tel que $x_{|\sigma(i)|}^{\text{sign}\sigma(i)} = 0$. Si on pose $k = |\sigma(i)|$ on obtient, d'après la proposition 1.6, $x_k^{-\text{sign}\sigma^{-1}(k)} = 0$, ce qui donne $f(x) = 0$.

Ceci montre que $\ker(q) \cap (C \times A^n)$ est inclus dans $\ker(f) \cap (C \times A^n)$.

La définition de f donne $f = \frac{1}{p^n} \prod_{k=1}^n \sum_{l \in G} \beta_l^k$. On déduit de cela que

$$f = \frac{1}{p^n} (1_{G_n} + \sum_{i \in I} \gamma^i) \text{ où } \gamma^i \in G_n \text{ et } |I| = p^n - 1.$$

Si x est dans le noyau de f , on a $x + \sum \gamma^i \cdot x = 0$, donc

$$\begin{aligned} p^n x &= (p^n - 1)x - \sum_{i \in I} \gamma^i \cdot x \\ &= \sum_{i \in I} (x - \gamma^i \cdot x). \end{aligned}$$

Les γ^i sont dans G_n et on travaille avec un corps de caractéristique nulle donc x doit être dans \mathcal{H} . Il en résulte que $\ker(f)$ est inclus dans \mathcal{H} donc que $\ker(f) \cap (C \times A^n)$ est inclus dans $\mathcal{H} \cap (C \times A^n)$. Ce qui montre que $\ker(q) \cap (C \times A^n)$ est inclus dans $\mathcal{H} \cap (C \times A^n)$.

Avant d'entamer la seconde étape, on va faire quelques remarques qui permettront de circonscrire le problème.

Soit M un endomorphisme de V qui laisse stable chacun des V^i . On fait agir M diagonalement sur $E_n \otimes V^{\otimes n}$ de la façon suivante

$$M(w_\sigma \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = w_\sigma \otimes M(v_1) \otimes \dots \otimes M(v_n).$$

On note M' l'endomorphisme d'algèbre de $\mathbf{C} \langle A \rangle$ induit par l'action diagonale de M : $M'(w_1 \dots w_n) = M(w_1) \dots M(w_n)$. On a alors,

$$(1.5.24) \quad q(M(\sigma \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n)) = M'q(\sigma \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n).$$

Soit $\mathcal{E}(V^G)$, le groupe des isomorphismes de V qui laissent stables chacun de V^i . On fait agir $\mathcal{E}(V^G)$ diagonalement sur $E_n \otimes V^{\otimes n}$ et sur $\mathbf{C} \langle A \rangle$ pour obtenir deux actions de groupes.

La relation 1.5.24 montre que le noyau de q est stable sous l'action de $\mathcal{E}(V^G)$. De plus, les actions de $\mathcal{E}(V^G)$ et de G_n sur $E_n \otimes V^{\otimes n}$ commutent. En effet les éléments de $\mathcal{E}(V^G)$ ne changent pas les signes des lettres qu'ils modifient, les coefficients qui interviennent dans l'action à gauche et dans l'action par position de G_n restent donc les mêmes. Tout ceci montre que \mathcal{H} est stable sous l'action de $\mathcal{E}(V^G)$ car $M(x - \beta.x) = M(x) - \beta.M(x)$.

En outre, si $q(\sum_{c \in C \times A^n} \alpha_c c) = \sum_{c \in C \times A^n} \alpha_c q(c)$ est nul, alors chaque composante finement homogène de $\sum_{c \in C \times A^n} \alpha_c q(c)$ est nulle (on rappelle que $C = \{w_\sigma | \sigma \in G_n\}$).

Le *degré partiel* de $c = w_\sigma \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n \in C \times A^n$ en b est le nombre $deg(c, b)$ d'occurrences de la lettre b dans (v_1, \dots, v_n) . Un élément $P = \sum \alpha_c c$ de $E_n \otimes V^{\otimes n}$ est dit *finement homogène* si, pour tous les α_c et $\alpha_{c'}$ non nuls et toutes les lettres $b \in A$, on a $deg(c, b) = deg(c', b)$.

Soit $\mathcal{G} = (C \times A^n) \setminus \mathcal{H} \subseteq (C \times A^n) \setminus \ker q$, l'ensemble des éléments de $C \times A^n$ qui ne sont pas dans \mathcal{H} . On remarque à l'aide de la première étape que, pour tout c dans \mathcal{G} et toute lettre A de A , le degré partiel de $q(c)$ en A est le même que celui de c en A . Pour montrer que $\ker(q)$ est inclus dans \mathcal{H} , il suffit donc de montrer que, pour tout élément P de $E_n \otimes V^{\otimes n}$ finement homogène, si P est dans $\ker(q)$ alors P est dans \mathcal{H} .

Mais si un polynôme P est finement homogène, il peut s'écrire sous la forme

$$P = \sum_{i=1}^k \alpha_i w_{\sigma_i} \otimes v_{\delta_i(1)} \otimes \dots \otimes v_{\delta_i(n)},$$

où $\alpha_i \in \mathbf{C}$, $\sigma_i \in G_n$, $\delta_i \in S_n$ et les v_i sont des éléments de A .

ii) Dans cette étape on étudie le cas où tous les δ_i sont égaux. On va montrer que, pour tous v_i dans A , si $x = (\sum_i \alpha_i c_i) \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n \in \ker(q)$ avec les c_i dans C , alors x est aussi dans \mathcal{H} .

Supposons maintenant que $P = (\sum_{\sigma_i \in G_n} \alpha_i w_{\sigma_i}) \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n$ est dans le noyau de q et que chaque lettre de A apparaît au plus une fois dans (v_1, \dots, v_n) . Le i) nous permet de supposer que si $\alpha_i \neq 0$ alors $w_{\sigma_i} \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n$ est dans \mathcal{G} . Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ on pose $v_k = (a_k, j_k)$: le signe de $\sigma_i(k)$ est alors égal à $j_{\sigma_i(k)}$, sinon on aurait $w_{\sigma_i} \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n \in \ker q$.

On définit l'isomorphisme M de V qui échange (i, j) et (a_i, j) , pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et tout $j \in G$, et qui laisse les autres lettres de A fixes. Alors, chaque V^J est invariant sous l'action de M et on a

$$\begin{aligned} q(M(P)) &= M'(q(P)) \quad \text{d'après l'équation (1.5.24).} \\ &= 0 \quad \text{car } P \in \ker(q). \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} q(M(P)) &= q\left(\sum_{\sigma_i \in G_n} \alpha_i w_{\sigma_i} \otimes (1, j_1) \otimes \dots \otimes (n, j_n)\right) \\ &= \sum_{\sigma_i \in G_n} \alpha_i q(w_{\sigma_i} \otimes (1, j_1) \otimes \dots \otimes (n, j_n)) \\ &= \sum_{\sigma_i \in G_n} \alpha_i (\sigma_i(1), j_{\sigma_i(1)}) \dots (\sigma_i(n), j_{\sigma_i(n)}) \\ &= \sum_{\sigma_i \in G_n} \alpha_i w_{\sigma_i} \end{aligned}$$

Ce qui donne $\sum_{\sigma_i \in G_n} \alpha_i w_{\sigma_i} = 0$ et

$$P = \left(\sum_{\sigma_i \in G_n} \alpha_i w_{\sigma_i}\right) \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n = 0$$

est élément de \mathcal{H} .

On suppose maintenant qu'il existe k lettres ($k \geq 1$) dans A qui apparaissent s fois ($s > 1$) dans (v_1, \dots, v_n) et qu'aucune lettre de A n'y apparaît plus de s fois. On fait une récurrence sur k et s .

Soit b une lettre apparaissant s fois dans (v_1, \dots, v_n) . Il existe alors une lettre b' de même signe que b qui n'y apparaît pas. On note $P(v)$ l'élément de $E_n \otimes V^{\otimes n}$ obtenu en remplaçant b par v dans P , où v est une combinaison linéaire de lettres de même signe que b . On définit :

$$Q(b, b') = P(b + b') - P(b) - P(b').$$

La lettre b' n'apparaît pas dans (v_1, \dots, v_n) et P est dans le noyau de q , donc $P(b + b')$ et $P(b')$ sont eux aussi dans le noyau de q . En effet, $P(b + b') = M^1(P(b))$ (*resp.* $P(b') = M^2(P(b))$) si M^1 change b en $b + b'$ (*resp.* échange b et b') et laisse les autres lettres inchangées ; de plus $\mathcal{E}(V^G)$ laisse stable le noyau de q .

La composante finement homogène $Q'(b, b')$ de $Q(b, b')$ de degré $s - 1$ en b et 1 en b' est donc dans le noyau de q ; par récurrence sur k et s elle est dans \mathcal{H} .

Soit M l'endomorphisme de V qui change b' en b et laisse fixes les autres lettres de A , alors

$$M.Q'(b, b') = Q'(b, b) = sP(b) \in \mathcal{H}.$$

On en déduit que P est dans \mathcal{H} .

iii) Ici, on montre que tout élément finement homogène du noyau de q est dans \mathcal{H} . Soit P un tel élément. On écrit P sous la forme

$$P = \sum_{i=1}^k c_i \otimes v_{\delta_i(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\delta_i(n)},$$

où les c_i sont éléments de E_n et où les δ_i sont des éléments de S_n tous distincts. On peut en outre supposer que $\delta_k = 1_{S_n}$. On utilisera le plongement naturel de S_n dans G_n pour dire que les δ_i sont dans G_n . Comme P est dans le noyau de q , on a

$$q(P) = q\left(\sum_{i=1}^k c_i \otimes v_{\delta_i(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\delta_i(n)}\right) = 0.$$

Le noyau de q contient \mathcal{H} , d'où

$$\begin{aligned} 0 &= q(\delta_{k-1}^{-1} \cdot (c_k \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) - c_k \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \\ &= q((\underline{\delta_{k-1}^{-1}}(c_k)) \otimes v_{\delta_{k-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\delta_{k-1}(n)} - c_k \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_n). \end{aligned}$$

Ce qui donne, en ajoutant $q(P)$,

$$q\left(\sum_{i=1}^{k-2} c_i \otimes v_{\delta_i(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\delta_i(n)} + (c_{k-1} + \underline{\delta_{k-1}^{-1}}(c_k)) \otimes v_{\delta_{k-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\delta_{k-1}(n)}\right) = 0.$$

Par récurrence sur k , on trouve

$$\sum_{i=1}^{k-2} c_i \otimes v_{\delta_i(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\delta_i(n)} + (c_{k-1} + \underline{\delta_{k-1}^{-1}}(c_k)) \otimes v_{\delta_{k-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\delta_{k-1}(n)} \in \mathcal{H}.$$

Mais on a $c_k \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_n - \delta_{k-1}^{-1} \cdot (c_k \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \in \mathcal{H}$, donc

$$\begin{aligned} P &= \sum_{i=1}^{k-2} c_i \otimes v_{\delta_i(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\delta_i(n)} + (c_{k-1} + \underline{\delta_{k-1}^{-1}}(c_k)) \otimes v_{\delta_{k-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\delta_{k-1}(n)} \\ &\quad + c_k \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_n - \delta_{k-1}^{-1} \cdot (c_k \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \end{aligned}$$

est un élément de \mathcal{H} . Ceci termine la démonstration de $\ker(q) \subseteq \mathcal{H}$ et celle du a) du lemme 1.17.

b) Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, y_i désigne la somme $\sum_{j \in G} (i, j)$. Soit $\sigma \in G_n$; on a, d'après la définition de q (voir lemme 1.17)

$$q(w_\sigma \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_n) = x_{|\sigma(1)|}^{\text{sign}(\sigma(1))} \cdots x_{|\sigma(n)|}^{\text{sign}(\sigma(n))},$$

où $y_i = \sum_{j \in G} x_i^j$. Mais $y_i = \sum_{j \in G} (i, j)$, donc $x_i^j = (i, j)$ et on a

$$\begin{aligned} q(w_\sigma \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_n) &= (|\sigma(1)|, \text{sign}(\sigma(1))) \cdots (|\sigma(n)|, \text{sign}(\sigma(n))) \\ &= w_\sigma. \end{aligned}$$

Soit $\sum \alpha_i c_i \in H_n$; on a alors

$$(1.5.25) \quad q\left(\left(\sum \alpha_i c_i\right) \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_n\right) = \sum \alpha_i c_i \in H_n.$$

Ce qui montre que H_n est inclus dans $q(H_n \otimes V^{\otimes n})$.

Soit M un endomorphisme de V laissant stable chacun des V^i , on rappelle que M' est l'endomorphisme d'algèbre de $\mathbf{C} \langle A \rangle$ correspondant ; on a alors :

$$\begin{aligned} M'.\sum \alpha_i c_i &= q(M.((\sum \alpha_i c_i) \otimes y_1 \otimes \dots \otimes y_n)) \\ &= q((\sum \alpha_i c_i) \otimes M(y_1) \otimes \dots \otimes M(y_n)). \end{aligned}$$

De plus, les y_i sont construits de telle façon que $M(y_1) \otimes \dots \otimes M(y_n)$ parcourt $V^{\otimes n}$ quand M varie dans $\mathcal{E}(V^G)$. Il découle de cela que l'image de $H_n \otimes V^{\otimes n}$ par q est incluse dans H . En effet, on a $M'(H) \subseteq H$ car H est assez stable.

Pour montrer l'autre inclusion, on choisit un élément P de H finement homogène. Cette condition n'est pas restrictive car le lemme 1.15 montre que H admet une base formée d'éléments finement homogènes.

Si pour tout $a \in A$, le degré partiel de P en a est au plus 1, on peut échanger les lettres de P avec des lettres signées dont la valeur absolue varie de 1 à n ; on rappelle que $\mathcal{E}(V^G)$ agit indépendamment sur les différents alphabets. On obtient ainsi, par l'action d'un isomorphisme M de $\mathcal{E}(V^G)$, un élément Q de H_n . L'espace H_n étant inclus dans $q(H_n \otimes V^{\otimes n})$, il existe un R dans $H_n \otimes V^{\otimes n}$ tel que $q(R) = Q = M'.P$. Le polynôme $M'.P$ est dans $q(H_n \otimes V^{\otimes n})$, M' est inversible et son inverse est dans $\mathcal{E}(V^G)$, donc P est dans $q(H_n \otimes V^{\otimes n})$.

On suppose maintenant qu'il y a k ($k \geq 1$) lettres (dont b) qui apparaissent s fois ($s > 1$) dans P , et qu'il n'y a aucune lettre de A qui apparaît plus de s fois dans P . Si b' est une lettre de même signe que b qui n'apparaît pas dans P , on note $P'(b, b')$ le polynôme obtenu en remplaçant b par $b + b'$ dans P et en ne gardant que la composante finement homogène de degré $s - 1$ en b et 1 en b' . Alors $P'(b, b')$ est un élément de H , par récurrence, c'est aussi un élément de l'image de $H_n \otimes V^{\otimes n}$ par q . Si M est l'endomorphisme de V qui change la lettre b en b' et ne modifie pas les autres éléments de A et si $P'(b, b')$ est l'image de R par q , alors

$$P = sM'.P'(b, b') = sM'.q(R) = q((sM).R).$$

On conclut que P est élément de $q(H_n \otimes V^{\otimes n})$, et que l'espace H est inclus dans $q(H_n \otimes V^{\otimes n})$. \square

Soient deux groupes H et J (J est fini) agissant sur l'espace vectoriel W de sorte que $h(j(x)) = j(h(x))$ pour tous $h \in H$, $j \in J$ et $x \in W$. On définit l'action de $H \times J$ sur W par $(h, j)(x) = h(j(x))$. Le lemme suivant est un résultat découlant directement de la théorie des représentations ; il précise l'exercice 2.3.1 de (Serre, 1978). On en donne ici une preuve élémentaire vue dans un cours donné par A. Joyal.

Lemme 1.18 *Si W/\mathcal{J} désigne l'espace quotient de W par le sous-espace $\mathcal{J} = \langle x - j(x) \mid x \in W, j \in J \rangle$, alors H agit sur W/\mathcal{J} et, pour tout $h \in H$ on a*

$$Tr_{W/\mathcal{J}}(h) = \frac{1}{|J|} \sum_{j \in J} Tr_W(h, j).$$

Preuve Comme $h(j(x)) = j(h(x))$ \mathcal{J} est stable sous l'action de H , donc H agit sur W/\mathcal{J} .

On note

$$\begin{aligned} f : W &\rightarrow W \\ x &\mapsto \frac{1}{|J|} \sum_{j \in J} j(x). \end{aligned}$$

Il est bien connu que \mathcal{J} est le noyau de f .

Si \bar{x} est la classe de x dans W/\mathcal{J} on définit

$$\begin{aligned} t : W &\rightarrow W/\mathcal{J} \\ x &\mapsto \bar{x} \\ \text{et } i : W/\mathcal{J} &\rightarrow W \\ \bar{x} &\mapsto f(x), \end{aligned}$$

la fonction i est bien définie car \mathcal{J} est le noyau de f .

On a alors pour tout $j \in J$ et pour tout $h \in H$,

$$\begin{aligned} t \circ (h, j) \circ i(\bar{x}) &= t \circ (h, j) f(x) \\ &= t \circ h(f(x)) && \text{car } j \circ f = f \\ &= \overline{h(f(x))} \\ &= \overline{f(h(x))} && \text{car } h \circ f(x) = f \circ h(x) \\ &= \overline{h(x)} && \text{car } h(x) = f(h(x)) \text{ mod } \mathcal{J} \\ &= h_{W/\mathcal{J}}(\bar{x}). \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} Tr_{W/\mathcal{J}}(h) &= Tr(t \circ (h, j) \circ i) \\ &= Tr((h, j) \circ i \circ t). \end{aligned}$$

Or $i \circ t$ est égal à f , on peut donc calculer $(h, j) \circ i \circ t(x)$:

$$\begin{aligned} (h, j) \circ i \circ t(x) &= (h, j) \frac{1}{|J|} \sum_{\sigma \in J} \sigma(x) \\ &= \frac{1}{|J|} \sum_{\sigma \in J} (h, j\sigma)(x) \\ &= \frac{1}{|J|} \sum_{\sigma \in J} (h, \sigma)(x) \end{aligned}$$

Le lemme 1.18 découle immédiatement de cette dernière relation. \square

Preuve du Théorème 1.16 Les groupes $\mathcal{E}(V^G)$ et G_n agissent sur $W = H_n \otimes V^{\otimes n}$, de plus on a $\sigma.M(x) = M.\sigma(x)$ car les actions commutent. On note (M, σ) l'action de l'élément (M, σ) de $\mathcal{E}(V^G) \times G_n$ sur l'espace $H_n \otimes V^{\otimes n}$.

On a donc, d'après le lemme 1.18,

$$(1.5.26) \quad Tr_{E \otimes V^{\otimes n} / G_n}(M) = \frac{1}{|G_n|} \sum_{\sigma \in G_n} Tr(M, \sigma).$$

L'isomorphisme (M, σ) appliqué à $x = c \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n$ donne

$$(M, \sigma)(x) = \underline{\sigma}(c) \otimes M(u_1) \otimes \dots \otimes M(u_n),$$

où $u_i = \sum_{j \in G} F^{sign\sigma^{-1}(i)}(j) x_{|\sigma^{-1}(i)|}^j$.

L'action de (M, σ) sur la première composante du produit tensoriel est donc indépendante de M et l'on a

$$(1.5.27) \quad Tr(M, \sigma) = Tr_{H_n}(\sigma) \cdot Tr(M^{\otimes \sigma}),$$

où $M^{\otimes \sigma}(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = M(u_1) \otimes \dots \otimes M(u_n)$.

On se place maintenant dans le cas particulier où

$$\begin{aligned} M : \mathbf{C} \langle A \rangle &\rightarrow \mathbf{C} \langle A \rangle \\ b &\mapsto \beta_b b. \end{aligned}$$

Pour calculer la trace de $M^{\otimes \sigma}$, on étudie son action sur la base A^n de $V^{\otimes n}$. Si $(v_1, \dots, v_n) \in A^n$, on pose $v_i = (x_i, g_i)$, alors $M^{\otimes \sigma}(v_1 \otimes \dots \otimes v_n)$ est égal à

$$\beta_{u_1} u_1 \otimes \dots \otimes \beta_{u_n} u_n,$$

où $u_i = F^{sign(\sigma^{-1}(i))}(g_i)(x_{|\sigma^{-1}(i)|}, g_{|\sigma^{-1}(i)|})$ car chacun des v_k n'a qu'une composante non nulle dans sa décomposition en somme d'éléments des V^j ($j \in G$). Cela donne

$$M^{\otimes \sigma}(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = \left\{ \prod_{i=1}^n \beta_{v_i} F^{sign(\sigma^{-1}(i))}(sign v_{|\sigma^{-1}(i)|}) \right\} v_{|\sigma^{-1}(1)|} \otimes \dots \otimes v_{|\sigma^{-1}(n)|}.$$

Pour obtenir un terme non nul dans la trace, il faut que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on ait $v_{|\sigma^{-1}(i)|} = v_i$. On pose $\sigma = (h_1, \dots, h_n, s)$ et alors, pour chaque cycle (i_1, \dots, i_k) de s , on doit avoir $v_{i_1} = \dots = v_{i_k}$. Si cette condition est vérifiée on obtient

$$\begin{aligned} M^{\otimes \sigma}(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) &= \left\{ \prod_{\substack{c \text{ cycle de } s \\ c=(i_1, \dots, i_k)}} \beta_{v_{i_1}}^k F^{\sum sign\sigma^{-1}(i_j)}(sign v_{i_1}) \right\} (v_1 \otimes \dots \otimes v_n) \\ &= \left\{ \prod (\beta_{v_{i_1}})^k F^{-sign(c)}(sign v_{i_1}) \right\} v_1 \otimes \dots \otimes v_n. \end{aligned}$$

Les choix des v_i sont totalement indépendants d'un cycle de σ à l'autre ; la trace de $M^{\otimes \sigma}$ est donc donnée par la formule

$$Tr(M^{\otimes \sigma}) = \prod_{c \text{ cycle de } \sigma} \sum_{b \in A} \beta_b^{l(c)} F^{-sign(c)}(sign(b))$$

$$= \prod_{c \text{ cycle de } \sigma} P_{l(c)}^{F^{-\text{sign}(c)}}(X),$$

si $X^i = \{\beta_b | b \in X^i\}$ et où $P_{l(c)}^{F^{-\text{sign}(c)}}(X)$ est défini par l'équation (1.4.12). Cette dernière relation, associée à (1.5.26) et (1.5.27), nous permet de déduire que

$$\text{Tr}_{H_n \otimes V^{\otimes n} / G_n}(M) = \frac{1}{|G_n|} \sum_{\sigma \in G_n} \chi_{H_n}(\sigma) P_{ct(\sigma)-}(X),$$

où $P_{ct(\sigma)-}(X)$ est défini par l'équation (1.4.14). L'équation (1.4.15), la proposition 1.8 et le lemme 1.10 nous donnent alors

$$(1.5.28) \quad \text{Tr}_{H_n \otimes V^{\otimes n} / G_n}(M) = \langle \chi_{H_n}, \psi \rangle .$$

D'autre part, q induit un isomorphisme q' de $(H_n \otimes V^{\otimes n}) / G_n$ sur H , on a donc

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{(H_n \otimes V^{\otimes n}) / G_n}(M) &= \text{Tr}_H((q')^{-1} \circ M \circ q') \\ &= \text{Tr}_H(M'). \end{aligned}$$

Soit P un élément de la base finement homogène de H qui est aussi dans E_α ($\alpha = (\alpha_b)_{b \in A}$). Alors l'action de M' sur P a pour effet de le multiplier par $\prod_{b \in A} \beta_b^{\alpha_b}$. On trouve donc pour la trace de M sur $(H_n \otimes V^{\otimes n}) / G_n$:

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{H_n \otimes V^{\otimes n} / G_n}(M) &= \text{Tr}_H(M') \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{E}_A} \dim(E_\alpha \cap H) \prod_{b \in A} \beta_b^{\alpha_b} \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{E}_A} n_\alpha \prod_{b \in A} \beta_b^{\alpha_b}. \end{aligned}$$

En vertu de l'équation (1.5.28), on a

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{E}_A} n_\alpha \prod_{b \in A} \beta_b^{\alpha_b} = \langle \chi_{H_n}, \psi \rangle .$$

Ce qui démontre le théorème 1.16, d'après la proposition 1.9. \square

CHAPITRE 2

ENSEMBLES DE DESCENTES

2.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude des ensembles de descentes dans les produits en couronne d'un groupe cyclique par S_n .

Nous y développons d'abord une généralisation des fonctions quasi-symétriques (voir (Stanley, 1972 ; Gessel, 1984 ; Malvenuto et Reutenauer, 1995)) qui nous permet d'étendre certains résultats de (Reutenauer, 1993).

Ensuite nous analysons les liens qu'ont ces fonctions quasi-symétriques avec les fonctions symétriques apparues dans le premier chapitre. Nous pouvons ainsi généraliser dans le théorème 2.9 le théorème 3 de (Gessel, 1984) (voir aussi (Reutenauer, 1993 ; Gessel et Reutenauer, 1993)).

Nous donnons enfin une application du théorème 2.9 au problème de l'énumération des permutations signées ayant un ensemble de descentes donné et dont l'inverse a un ensemble de descentes fixé, voir théorème 2.11. Ce résultat étend ceux de (Foulkes, 1976) et (Gessel, 1984).

Une étude algébrique de ces ensembles de descentes a été effectuée dans (Mantaci et Reutenauer, 1992) ; nous n'étudions ici que certaines propriétés combinatoires des ensembles de descentes.

2.2 Fonctions quasi-symétriques

On identifie le groupe cyclique G à p éléments et le groupe $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ des entiers modulo p . On considérera le plus souvent que l'ensemble sous-jacent est $\{1, \dots, p\}$; 0_G est alors égal à p . Soit \leq_p l'ordre linéaire sur $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ défini par

$$1 <_p 2 <_p \dots <_p p.$$

Soit \leq_r l'ordre lexicographique inverse sur $\{1, \dots, n\} \times \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, c'est-à-dire :

$$(1, 1) <_r (2, 1) <_r \dots <_r (n, 1) <_r (1, 2) <_r \dots <_r (n, p).$$

Un *sous-ensemble signé* $[S, m]$ de $\{1, \dots, n-1\}$ est la donnée d'un sous-ensemble S de $\{1, \dots, n-1\}$ et d'une fonction $m : \{1, \dots, n\} \mapsto \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ telle que

$$(2.2.1) \quad i \notin S \Rightarrow m(i) \leq_p m(i+1).$$

Nous verrons dès le lemme 2.1 l'utilité de cette condition.

Une *composition signée* de n est un couple (C, v) où

- C est une composition (c_1, \dots, c_k) de n ;
- v est une matrice d'entiers naturels à k lignes et p colonnes telle que $\sum_{j=1}^p v_{i,j} = c_i$.

On remarquera que cette notation est redondante : si on connaît v on connaît C . On garde C dans cette notation parce qu'il est pratique d'y conserver la donnée de la composition, comme on va le voir dans la preuve du lemme suivant.

Lemme 2.1 *Il existe une bijection naturelle comp entre l'ensemble des sous-ensembles signés de $\{1, \dots, n-1\}$ et l'ensemble des compositions signées de n .*

Preuve Il existe une bijection classique entre les compositions de n et les sous-ensembles de $\{1, \dots, n-1\}$, qui à $C = (c_1, \dots, c_k)$ fait correspondre $S = \{c_1, c_1 + c_2, \dots, c_1 + \dots + c_{k-1}\}$. On notera alors $C(S) = C$.

Si on se donne un sous-ensemble signé $[S, m]$ de $\{1, \dots, n-1\}$ où $S = \{c_1, c_1 + c_2, \dots, c_1 + \dots + c_{k-1}\}$, on note $C = (c_1, \dots, c_k)$ la composition de n associée. Pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$ et tout $j \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, on note $v_{i,j}$ le nombre d'éléments de $\{c_1 + \dots + c_{i-1} + 1, \dots, c_1 + \dots + c_i\}$ qui sont envoyés sur j par m (si $i = 1$, on convient que $c_1 + \dots + c_{i-1} = 0$). Soit v la matrice ainsi construite et *comp* la fonction qui à $[S, m]$ associe (C, v) par ce procédé. On voit facilement que *comp* est une surjection sur l'ensemble des compositions signées de n . De plus, la condition (2.2.1) nous donne, pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$:

$$m(c_1 + \dots + c_{i-1} + 1) \leq_p m(c_1 + \dots + c_{i-1} + 2) \leq_p \dots \leq_p m(c_1 + \dots + c_i).$$

Il suffit donc de savoir, pour tout $j \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, le nombre d'éléments $v_{i,j}$ de $\{c_1 + \dots + c_{i-1} + 1, \dots, c_1 + \dots + c_i\}$ qui sont envoyés sur j par m , pour connaître m sur cet intervalle. Ceci montre que *comp* est une bijection. \square

On note *ens* l'inverse de *comp*. Dans la suite on définira des objets indexés par des ensembles signés, on considèrera que ces ensembles sont indexés par des compositions signées *via* les bijections *comp* et *ens*.

Exemple Si $p = 3$ et $(C, v) = \left((4, 2, 1, 3), \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right)$, on a

$$\text{ens}(C, v) = \left[\{4, 6, 7\}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right].$$

On définit pour toute composition signée (C, v) , la *fonction quasi-symétrique monômiale*

$$(2.2.2) \quad M_{(C,v)} = \sum_{\substack{t_1 < \dots < t_k \\ t_i \in X}} (t_1, 1)^{v_{1,1}} (t_1, 2)^{v_{1,2}} \dots (t_1, p)^{v_{1,p}} (t_2, 1)^{v_{2,1}} \dots (t_k, p)^{v_{k,p}} \in \mathbf{Z}[[A]],$$

où X est totalement ordonné par $<$ et A est la réunion des $X \times \{j\}$, ($j \in G$).

On définit, sur l'ensemble des sous-ensembles signés de $\{1, \dots, n-1\}$, l'ordre \leq par:

$$[S, m] \leq [S', m'] \Leftrightarrow \begin{cases} S \subseteq S', \\ m = m'. \end{cases}$$

On définit un ordre correspondant sur les compositions signées de n par:

$$(C, u) \leq (D, v) \Leftrightarrow \text{ens}(C, u) \leq \text{ens}(D, v).$$

On peut décrire cet ordre directement sur les compositions signées ; en effet pour passer d'une composition signée (C, v) à une plus grande on transforme une part c_i de C en deux parts non nulles c'_i et c''_i . La fonction de signe ne doit pas changer, la $i^{\text{ème}}$ ligne de v est donc séparée en deux lignes. La première est composée des premiers $v_{i,j}$ jusqu'à ce qu'on atteigne c'_i , puis de 0 ; la seconde est composée de droite à gauche, des $v_{i,j}$ jusqu'à atteindre c''_i , puis de 0 (on peut éventuellement séparer l'un des $v_{i,j}$ en deux). On itère ce procédé pour obtenir toutes les compositions signées plus grandes que (C, v) .

Exemple Si on prend $p = 3$ et $n = 10$, alors

$$(D, u) = \left((1, 3, 2, 1, 3), \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right) \text{ et } (D', u') = \left((2, 2, 2, 1, 3), \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

sont des compositions signées plus grandes que

$$(C, v) = \left((4, 2, 1, 3), \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Pour tout ensemble signé $[S, m]$, définissons $F_{[S, m]}$ par

$$(2.2.3) \quad F_{[S, m]} = \sum (a_1, m(1)) \dots (a_n, m(n)),$$

où la somme est sur les $(a_1, \dots, a_n) \in X^n$ tels que $a_i \leq a_{i+1}$ et $a_i < a_{i+1}$ si $i \in S$: on rappelle que X est totalement ordonné par $<$.

On a alors le lemme suivant, qui étend un résultat de (Gessel, 1984).

Lemme 2.2 *Pour tout ensemble signé $[S, m]$, on a $F_{[S, m]} = \sum_{[S, m] \leq [S', m']} M_{[S', m']}$.*

Preuve Pour chaque monôme $(a_1, m(1)) \dots (a_n, m(n))$ apparaissant dans $F_{[S, m]}$ on associe S' l'ensemble qui vérifie

$$i \in S' \Leftrightarrow a_i < a_{i+1}.$$

Alors, d'après (2.2.3), S' contient S . De plus, pour tout ensemble S' contenant S on peut associer un monôme apparaissant dans $F_{[S, m]}$, car l'alphabet X est infini. De plus, la somme de tous les monômes apparaissant dans $F_{[S, m]}$ associés à S' est $M_{[S', m]}$. \square

En outre, la définition des fonctions quasi-symétriques monômiales et le fait que v détermine la composition signée (C, v) montrent que les $M_{(C, v)}$ sont linéairement indépendantes. On en déduit alors la proposition suivante par triangularité.

Proposition 2.3 *Les fonctions $F_{(C, v)}$ sont linéairement indépendantes.* \square

On peut définir, pour toute permutation signée σ , un *ensemble de descentes signé* $ds(\sigma) = [S(\sigma), m(\sigma)]$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} i \in S(\sigma) &\Leftrightarrow \sigma(i) >_r \sigma(i+1) \\ m(\sigma)(i) &= \text{sign}(\sigma(i)). \end{aligned}$$

Le couple $[S(\sigma), m(\sigma)]$ est bien un ensemble signé ; en effet comme les $\sigma(i)$ sont deux à deux distincts, $i \notin S(\sigma)$ est équivalent à $\sigma(i) <_r \sigma(i+1)$ ce qui implique $\text{sign}(\sigma(i)) \leq_p \text{sign}(\sigma(i+1))$, soit $m(\sigma)(i) \leq_p m(\sigma)(i+1)$. Par l'intermédiaire de la bijection $comp$, on définit la *composition de descentes signée* $CS(\sigma)$ de σ comme $CS(\sigma) = comp(ds(\sigma))$.

Un ensemble signé $[S, m]$ (*resp.* une composition signée (C, v)) sera appelé un *ensemble de descentes signé* (*resp.* une *composition de descentes signée*) s'il existe une permutation signée σ telle que $ds(\sigma) = [S, m]$ (*resp.* $CS(\sigma) = (C, v)$).

Exemple Si on prend $p = 4$ et si $n = 8$, alors

$$ds((2, 4, 1, 3, 1, 1, 2, 3, 45317826)) = \left[\{2, 4, \}, \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right) \right]$$

et

$$CS((2, 4, 1, 3, 1, 1, 2, 3, 45317826)) = \left((2, 2, 4), \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \right).$$

Soit \leq_l l'ordre lexicographique sur $A = \bigcup_{i \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}} X \times \{i\}$. Si $X = \{a < b < \dots\}$ on a donc :

$$A = \{(a, 1) <_l (a, 2) <_l \dots <_l (a, p) <_l (b, 1) <_l (b, 2) <_l \dots\}.$$

On notera aussi \leq_r l'ordre lexicographique inverse sur A . Cette notation est la même que celle de l'ordre que l'on a donné sur $\{1, \dots, n\} \times \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ mais il ne devrait pas en résulter d'ambiguïté, de plus on peut supposer que X contient $\{1, \dots, n\}$ et convenir que \leq_r sur $\{1, \dots, n\} \times \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ est la restriction de l'ordre sur A .

Si $w = x_1 \dots x_n$ est un mot de A^* , alors son *standardisé* $sts(w)$ est l'unique élément σ de G_n tel que

$$(2.2.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\sigma(i)| < |\sigma(j)| \Leftrightarrow (x_i <_l x_j \text{ ou } (x_i = x_j \text{ et } i < j)) \\ \text{et} \\ sign(\sigma(i)) = sign(x_i). \end{array} \right.$$

On définit aussi le *costandardisé* de w $csts(w)$ par

$$(2.2.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\sigma(i)| < |\sigma(j)| \Leftrightarrow (x_i <_l x_j \text{ ou } (x_i = x_j \text{ et } i < j)) \\ \text{et} \\ sign(\sigma(i)) = -sign(x_i). \end{array} \right.$$

On remarque que l'on a pour tout mot $w \in A^*$ $csts(w)((i, 0)) = (j, -k)$ si $sts(w)(i, 0) = (j, k)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Exemple Si $p = 3$ et $w = (d, 3)(c, 1)(a, 2)(b, 3)(b, 1)(a, 3)(d, 1)(a, 3)$ on a alors

$$sts(w) = (8, 3)(6, 1)(1, 2)(5, 3)(4, 1)(2, 3)(7, 1)(3, 3)$$

$$csts(w) = (8, 3)(6, 2)(1, 1)(5, 3)(4, 2)(2, 3)(7, 2)(3, 3).$$

On appelle *évaluation*, et on note $ev(w)$, de $w = x_1 \dots x_n$ le monôme $x_1 \dots x_n$ de $\mathbf{Z}[A]$ où les variables x_i commutent. Le lemme suivant établit une correspondance entre les $F_{(C,v)}$ et des évaluations de mots qui sera essentielle dans la preuve du théorème 2.11.

Lemme 2.4 *Pour tout $\sigma \in G_n$ on a*

$$F_{ds(\sigma^{-1})} = \sum_{csts(w)=\sigma} ev(w).$$

Preuve Dans le but de simplifier les notations, nous utiliserons $[S, m]$ pour $ds(\sigma^{-1})$ et, pour toute permutation signée τ , nous écrirons $\tau(k)$ à la place de $\tau((k, 0))$.

On remarquera d'abord que, par définition de \leq_r ,

$$k \notin S \Leftrightarrow \sigma^{-1}(k) <_r \sigma^{-1}(k+1)$$

$$(2.2.6) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} |\sigma^{-1}(k)| < |\sigma^{-1}(k+1)| \text{ et } sign\sigma^{-1}(k) \leq_p sign\sigma^{-1}(k+1) \\ \text{ou} \\ sign\sigma^{-1}(k) <_p sign\sigma^{-1}(k+1) \end{cases}$$

$$(2.2.7) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} (k \text{ apparaît à gauche de } k+1 \text{ dans } |\sigma(1)| \dots |\sigma(n)| \text{ et} \\ sign\sigma^{-1}(k) \leq_p sign\sigma^{-1}(k+1)) \\ \text{ou} \\ sign\sigma^{-1}(k) <_p sign\sigma^{-1}(k+1). \end{cases}$$

Maintenant, d'après l'équation (2.2.3) on a

$$F_{[S,m]} = \sum t_1 \dots t_n$$

où la sommation s'effectue sur les t_1, \dots, t_n dans X tels que $|t_i| \leq |t_{i+1}|$, $|t_i| < |t_{i+1}|$ si $i \in S$, et $sign(t_i) = m(i) = sign(\sigma^{-1}(i))$. Si on pose $\alpha(i) = |\sigma^{-1}(i)|$ et $x_i = t_{|\sigma(i)|}$, on obtient $t_i = x_{|\sigma^{-1}(i)|} = x_{\alpha(i)}$ et $F_{[S,m]} = \sum ev(x_1 \dots x_n)$ avec les conditions suivantes sur les x_i :

$$(2.2.8) \quad \begin{cases} |x_{\alpha(i)}| \leq |x_{\alpha(i+1)}| ; \\ |x_{\alpha(i)}| < |x_{\alpha(i+1)}| \text{ si } \sigma^{-1}(i+1) <_r \sigma^{-1}(i) ; \\ sign(x_{\alpha(i)}) = sign(\sigma^{-1}(i)). \end{cases}$$

Pour montrer le lemme 2.4, il suffit de montrer que les équations (2.2.8) et (2.2.5) sont équivalentes. Tout d'abord la dernière condition de (2.2.8) est

équivalente à la dernière condition de (2.2.5) ; en effet la proposition 1.6 donne :

$$\begin{aligned} \text{sign}(x_{\alpha(i)}) &= \text{sign}(\sigma^{-1}(i)) = -\text{sign}(\sigma(|\sigma^{-1}(i)|)) \\ &= -\text{sign}(\sigma(\alpha(i))). \end{aligned}$$

Supposons que l'équation (2.2.8) soit vérifiée ; pour prouver que (2.2.5) l'est aussi, il nous faut montrer que $|\sigma(i)| < |\sigma(j)|$ implique $(x_i <_l x_j$ ou $(x_i = x_j$ et $i < j)$ (\diamond)), ceci suffit car ces deux conditions ordonnent totalement l'ensemble $\{1, \dots, n\}$.

Si $|\sigma(i)| < |\sigma(j)|$, alors la première condition de (2.2.8) nous donne

$$(2.2.9) \quad |x_i| = |x_{\alpha(|\sigma(i)|)}| \leq |x_{\alpha(|\sigma(i)|+1)}| \leq \dots \leq |x_{\alpha(|\sigma(j)|)}| = |x_j|.$$

Si on a $|x_i| < |x_j|$, alors $x_i <_l x_j$ et (\diamond) est vérifiée.

Si $|x_i| = |x_j| = a$, alors pour tout $k \in \{|\sigma(i)|, \dots, |\sigma(j)|\}$, on a $|x_{\alpha(k)}| = a$. On obtient donc, pour tout $k \in \{|\sigma(i)|, \dots, |\sigma(j)|-1\}$, $|x_{\alpha(k)}| = |x_{\alpha(k+1)}|$. La seconde équation de (2.2.8) montre alors que $S \cap \{|\sigma(i)|, |\sigma(i)|+1, \dots, |\sigma(j)|-1\} = \emptyset$. On utilise la remarque (2.2.6) pour $k \in \{|\sigma(i)|, \dots, |\sigma(j)|-1\}$, qui donne

$$(2.2.10) \quad \text{sign}(\sigma^{-1}(k)) \leq_p \text{sign}(\sigma^{-1}(k+1)).$$

On a alors les trois sous-cas suivants quand $|x_i| = |x_j|$:

- Si $\text{sign}(x_i) <_p \text{sign}(x_j)$, alors $x_i <_l x_j$ et (\diamond) est vérifiée.
- Si $\text{sign}(x_i) >_p \text{sign}(x_j)$ alors, grâce à la troisième condition de (2.2.8), on a $\text{sign}(\sigma^{-1}(i)) >_p \text{sign}(\sigma^{-1}(j))$, et il existe $k \in \{|\sigma(i)|, \dots, |\sigma(j)|-1\}$ pour lequel on a $\text{sign}(\sigma^{-1}(k)) >_p \text{sign}(\sigma^{-1}(k+1))$, ce qui d'après (2.2.10), est impossible.
- Si $\text{sign}(x_i) = \text{sign}(x_j) = s$, alors quel que soit k dans $\{|\sigma(i)|, \dots, |\sigma(j)|-1\}$, on a $\text{sign}(\sigma^{-1}(k)) = s = \text{sign}(\sigma^{-1}(k+1))$. Sinon il existerait, de la même façon que dans le sous-cas précédent, un k pour lequel (2.2.10) serait contredite. Mais, dans ce cas, en vertu de (2.2.7), k apparaîtrait à gauche de $k+1$ dans $|\sigma(1)| \dots |\sigma(n)|$, donc $|\sigma(i)|$ y apparaîtrait à gauche de $|\sigma(j)|$. On a donc $i < j$ et (\diamond) est vérifiée.

Ce qui montre que (2.2.8) implique (2.2.5).

Réciproquement (2.2.5) implique :

$$|\sigma(i)| < |\sigma(j)| \Leftrightarrow (x_i <_l x_j \text{ ou } (x_i = x_j \text{ et } i < j)).$$

Puisque l'on a $|\sigma|\sigma^{-1}(i)| = i < i+1 = |\sigma|\sigma^{-1}(i+1)|$ et $\alpha(i) = |\sigma^{-1}(i)|$, on a

$$x_{\alpha(i)} <_l x_{\alpha(i+1)} \text{ ou } (x_{\alpha(i)} = x_{\alpha(i+1)} \text{ et } \alpha(i) < \alpha(i+1)) \quad (*).$$

D'après la définition de $<_l$ la première partie de (*) est équivalente à

$$|x_{\alpha(i)}| < |x_{\alpha(i+1)}| \text{ ou } \begin{cases} |x_{\alpha(i)}| = |x_{\alpha(i+1)}| \text{ et} \\ \text{sign}x_{\alpha(i)} <_p \text{sign}x_{\alpha(i+1)}. \end{cases}$$

La deuxième partie de (*) est équivalente à

$$|x_{\alpha(i)}| = |x_{\alpha(i+1)}| \text{ et } \text{sign}x_{\alpha(i)} = \text{sign}x_{\alpha(i+1)} \text{ et } \alpha(i) < \alpha(i+1).$$

L'équivalence des dernières conditions dans (2.2.5) et (2.2.8) nous donne $\text{sign}x_{\alpha(i)} = \text{sign}\sigma^{-1}(i)$, l'équation (*) est donc équivalente à

$$\begin{aligned} & |x_{\alpha(i)}| < |x_{\alpha(i+1)}| \\ \text{ou } & (|x_{\alpha(i)}| = |x_{\alpha(i+1)}| \text{ et } \text{sign}\sigma^{-1}(i) <_p \text{sign}\sigma^{-1}(i+1)) \\ \text{ou } & ((|x_{\alpha(i)}| = |x_{\alpha(i+1)}| \text{ et } \text{sign}x_{\alpha(i)} = \text{sign}x_{\alpha(i+1)} \text{ et } \alpha(i) < \alpha(i+1))), \end{aligned}$$

qui est équivalente à :

$$|x_{\alpha(i)}| < |x_{\alpha(i+1)}| \text{ ou } \begin{cases} |x_{\alpha(i)}| = |x_{\alpha(i+1)}| \\ \text{et} \\ \text{sign}\sigma^{-1}(i) <_p \text{sign}\sigma^{-1}(i+1) \\ \text{ou} \\ \begin{cases} \text{sign}\sigma^{-1}(i) = \text{sign}\sigma^{-1}(i+1) \\ \text{et} \\ \alpha(i) < \alpha(i+1) \end{cases} \end{cases}$$

Ce qui, d'après la définition de l'ordre \leq_r et le fait que $\alpha(i) = |\sigma^{-1}(i)|$, est équivalent à

$$|x_{\alpha(i)}| < |x_{\alpha(i+1)}| \text{ ou } \begin{cases} |x_{\alpha(i)}| = |x_{\alpha(i+1)}| \\ \text{et} \\ \sigma^{-1}(i) <_r \sigma^{-1}(i+1) \end{cases}$$

dont on déduit (2.2.8). □

2.3 Séries génératrices quasi-symétriques et fonctions symétriques

A partir des premiers résultats de la section précédente nous étudions les connexions entre les fonctions quasi-symétriques, les fonctions symétriques et les différents ordres définis sur A . Le lemme suivant énonce une propriété du standardisé d'un mot.

Lemme 2.5 Si σ est le standardisé de $w = x_1 \dots x_n$, alors, pour tout couple $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, on a

$$\sigma(i) <_r \sigma(j) \Leftrightarrow x_i <_r x_j \text{ ou } (x_i = x_j \text{ et } i < j).$$

Remarque Le standardisé σ de w est défini (voir éq. 2.2.4) à partir de l'ordre \leq_l sur A . Ce lemme, qui n'est pas une caractérisation, permet une fois que l'on connaît σ de passer à l'ordre \leq_r sur A .

Exemple Si $p = 3$ et $w = (d, 3)(c, 1)(a, 2)(b, 3)(b, 1)(a, 3)(d, 1)(a, 3)$ on a

$$sts(w) = (8, 3)(6, 1)(1, 2)(5, 3)(4, 1)(2, 3)(7, 1)(3, 3)$$

et les deux ordres totaux sur $\{1, \dots, 8\}$ induits par $x_i <_r x_j$ ou $(x_i = x_j \text{ et } i < j)$ sur w et par $\sigma(i) <_r \sigma(j)$ sur $\sigma(1) \dots \sigma(8)$ donnent tous les deux :

$$82471536.$$

Preuve On a, par définition de $<_r$,

$$x_i <_r x_j \Leftrightarrow sign(x_i) <_p sign(x_j) \text{ ou } (sign(x_i) = sign(x_j) \text{ et } |x_i| < |x_j|).$$

Si $sign(x_i) <_p sign(x_j)$, par définition de σ , on a $sign(\sigma(i)) <_p sign(\sigma(j))$ et $\sigma(i) <_r \sigma(j)$.

Si $sign(x_i) = sign(x_j)$ et $|x_i| < |x_j|$ alors x_i est inférieur à x_j dans l'ordre lexicographique $<_l$ et, d'après l'équation (2.2.4), $|\sigma(i)| < |\sigma(j)|$. Comme $sign(\sigma(i))$ et $sign(\sigma(j))$ sont égaux, on a bien $\sigma(i) <_r \sigma(j)$.

Si $x_i = x_j$ et $i < j$, on a $sign(\sigma(i)) = sign(x_i) = sign(x_j) = sign(\sigma(j))$ et d'après (2.2.4) on a aussi $|\sigma(i)| < |\sigma(j)|$, ce qui donne $\sigma(i) <_r \sigma(j)$. ceci montre \Leftarrow .

Réciproquement, si $\sigma(i) <_r \sigma(j)$, on a

$$sign(\sigma(i)) <_p sign(\sigma(j)) \text{ ou } (sign(\sigma(i)) = sign(\sigma(j)) \text{ et } |\sigma(i)| < |\sigma(j)|).$$

Dans ce cas, si $sign(\sigma(i)) <_p sign(\sigma(j))$ alors $sign(x_i) <_p sign(x_j)$ et $x_i <_r x_j$.

Si $sign(\sigma(i)) = sign(\sigma(j))$ et $|\sigma(i)| < |\sigma(j)|$ alors, d'après (2.2.4), on a $x_i <_l x_j$ ou $(x_i = x_j \text{ et } i < j)$; mais $sign(x_i) = sign(x_j)$ donc $x_i <_l x_j$ implique $|x_i| < |x_j|$. Ceci montre que $x_i <_r x_j$. \square

On définit, pour chaque composition signée (C, v) , la série

$$(2.3.11) \quad S_{(C,v)} = \sum_{CS(sts(w))=(C,v)} ev(w).$$

On dit qu'une composition signée est compatible avec un partage signé λ , et on note $\lambda = \lambda(C, v)$, si pour tout $i \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, $\lambda(i)$ est un réarrangement de $v_{1,i}, v_{2,i}, \dots, v_{k,i}$ (on oublie les zéros).

et

$$bh(C, v) = \begin{array}{c} \square\square||\square\square \\ \square|\square\square|\square\square \\ |\square\square\square|. \end{array}$$

A chaque p -tableau T , on associe un mot de A^* , $m(T)$ en lisant de gauche à droite la première ligne, puis la seconde et ainsi de suite.

Exemple Si T est égal à $(a, 2) (d, 3)$

$$\begin{array}{c} (c, 1) (c, 3) (d, 3) \\ (b, 1) (a, 2) (a, 2) \end{array}$$

alors $m(T) = (a, 2)(d, 3)(c, 1)(c, 3)(d, 3)(b, 1)(a, 2)(a, 2)$.

Le lemme 2.5 nous permet alors de démontrer le résultat suivant qui donne des liens entre les p -rubans et p -bandes horizontales et les standardisés de certains mots.

Lemme 2.6 *Pour tout mot w de A^* , on a $CS(sts(w)) = (C, v)$*

(resp. $CS(sts(w)) \leq (C, v)$) si et seulement s'il existe un p -tableau T de forme $r(C, v)$ (resp. $bh(C, v)$) tel que $w = m(T)$.

Preuve

On écrit $w = w_1 \dots w_n$. Si $CS(sts(w)) = (C, v)$ alors, d'après le lemme 2.5, on a $w_{i+1} <_r w_i$ si et seulement si $sts(w)(i+1) <_r sts(w)(i)$ car $i+1$ est supérieur à i ; ceci est équivalent, d'après la définition du standardisé, à $i \in \{c_1, c_1 + c_2, \dots, c_1 + \dots + c_{k-1}\}$. Donc, en remplissant $r(C, v)$ avec les lettres $w_1 \dots w_{c_1}$ de gauche à droite dans la première ligne, puis les lettres $w_{c_1+1} \dots w_{c_1+c_2}$ dans la seconde et ainsi de suite. On crée ainsi un p -tableau semi-standard vérifiant les conditions de croissance sur les lignes et les colonnes. La condition de signe pour $sts(w)$ nous donne $sign(sts(w)(i)) = sign(w_i)$; de plus le fait que $CS(sts(w)) = (C, v)$ nous assure que la $i^{ème}$ ligne sera remplie, de gauche à droite, par $v_{i,1}$ lettres de signe 1 puis par $v_{i,2}$ lettres de signe 2 et ainsi de suite. On obtient donc un p -tableau T de forme $r(C, v)$ tel que $w = m(T)$.

Réciproquement, soit $w = m(T)$, où T est un p -tableau de forme $r(C, v)$. Si σ est le standardisé de w , alors, en vertu du lemme 2.5, $\sigma(i) <_r \sigma(i+1)$ si et seulement si $w_i \leq_r w_{i+1}$. On en déduit que $\sigma(i) <_r \sigma(i+1)$ est équivalent à $i \notin \{c_1, c_1 + c_2, \dots, c_1 + \dots + c_{k-1}\}$, donc que $CS(sts(w)) = (C, v)$.

De la même façon, si $CS(sts(w)) \leq (C, v)$ alors, d'après le lemme 2.5, $w_i >_r w_{i+1}$ implique $i \in \{c_1, c_1 + c_2, \dots, c_1 + \dots + c_{k-1}\}$. En remplissant, de la même manière $bh(C, v)$, on trouve un tableau T de forme $bh(C, v)$ tel que $w = m(T)$.

Réciproquement, si $w = m(T)$ où T est de forme $bh(C, v)$ alors, le lemme 2.5 dit que $\sigma(i) <_r \sigma(i+1)$ est équivalent au fait que $w_i \leq_r w_{i+1}$. Donc, si i n'est pas dans $\{c_1, \dots, c_1 + \dots + c_{k-1}\}$, alors $\sigma(i) <_r \sigma(i+1)$ ce qui implique que $CS(sts(w)) \leq (C, v)$. \square

On déduit immédiatement de ce résultat que la série

$$S_{(C,v)} = \sum_{CS(sts(w))=(C,v)} ev(w)$$

est aussi égale à

$$S_{(C,v)} = \sum ev(m(T)),$$

où la somme est sur tous les p -tableaux T de forme $r(C, v)$.

Remarque Dans le cas où $p = 1$, la composition signée (C, v) est déterminée par la composition C et dans ce cas on pose $S_{(C,v)} = S_C(X)$. La fonction symétrique $S_C(X)$ est alors la fonction de Schur gauche associée au ruban $r(C, v)$. On définit de la même façon $S_K(X) = S_{[K,m]}$ pour tout $K \subseteq \{1, \dots, n-1\}$.

Si on note $BH(C, v)$ la somme des évaluations des mots associés à tous les p -tableaux semi-standards de forme $bh(C, v)$ on a

$$BH(C, v) = \prod_{i=1}^k BH(c_i, (v_{i,1}, \dots, v_{i,p})),$$

car le remplissage des k lignes se fait indépendamment.

En outre, si x est dans le $i^{\text{ème}}$ bloc et y dans le $i+1^{\text{ème}}$ d'une ligne donnée, alors $x <_r y$ est toujours vérifié et les choix pour x et y sont indépendants. On a donc

$$\begin{aligned} BH(C, v) &= \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^p BH(v_{i,j}, (0, \dots, v_{i,j}, \dots, 0)) \\ &= \prod_{j=1}^p \prod_{i=1}^k h_{v_{i,j}}(X^i) \\ &= h_{(C,v)}. \end{aligned}$$

Le résultat suivant est alors une conséquence immédiate du lemme 2.6.

Lemme 2.7 *Si (C, v) est une composition signée de n , alors*

$$h_{(C,v)} = \sum_{(D,u) \leq (C,v)} S_{(D,u)}. \quad \square$$

On a aussi le lemme suivant, qui étend un résultat de (Gessel, 1984).

Lemme 2.8 *Pour tout partage signé λ , on a*

$$m_\lambda = \sum_{\lambda(C,v)=\lambda} M_{(C,v)}.$$

Preuve Dans la théorie classique des fonctions quasi-symétriques, on a pour tout partage $\mu : m_\mu = \sum M_C = \sum_{t_1 < \dots < t_k} t_1^{c_1} \dots t_k^{c_k}$, où la somme est sur toutes

les compositions $C = (c_1, \dots, c_k)$ telles que μ est un réarrangement de c_1, \dots, c_k , voir (Gessel, 1984). Nous écrivons alors $\mu = \lambda(C)$.

On a donc, si $v^j = (v'_{1,j}, \dots, v'_{k,j})$

$$\begin{aligned} m_\lambda &= \prod_{j=1}^p m_{\lambda(j)}(A^j) = \prod_{j=1}^p \sum_{\lambda(v^j)=\lambda(j)} M_{v^j}(X^j) \\ &= \prod_{j=1}^p \sum_{\lambda(v'_{1,j}, \dots, v'_{k(j),j})=\lambda(j)} \sum_{t_1^j < \dots < t_{k(j)}^j} (t_1^j, j)^{v'_{1,j}} \dots (t_{k(j)}^j, j)^{v'_{k(j),j}} \\ &= \sum_{\substack{\lambda \in \mathcal{P}^G \\ \lambda(v'_{1,j}, \dots, v'_{k(j),j})=\lambda(j)}} \sum_{t_1^j < \dots < t_{k(j)}^j} \prod_{j \in G} (t_1^j, j)^{v'_{1,j}} \dots (t_{k(j)}^j, j)^{v'_{k(j),j}}. \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda(C,v)=\lambda} M_{(C,v)} &= \sum_{\substack{\lambda(C,v)=\lambda \\ k=l(C)}} \sum_{t_1 < \dots < t_k} (t_1, 1)^{v_{1,1}} (t_1, 2)^{v_{1,2}} \dots (t_k, p)^{v_{k,p}} \\ &= \sum_{\substack{\lambda(C,v)=\lambda \\ k=l(C)}} \sum_{t_1 < \dots < t_k} \prod_{j=1}^p (t_1, j)^{v_{1,j}} \dots (t_k, j)^{v_{k,j}}. \end{aligned}$$

Or, dans chacun des k -uplets $(v_{1,j}, \dots, v_{k,j})$ peuvent apparaître des 0. Soit $(v'_{1,j}, \dots, v'_{k(j),j})$ le vecteur d'entiers obtenu en supprimant les 0 et en conservant l'ordre des coefficients non-nuls de $(v_{1,j}, \dots, v_{k,j})$. On a alors $\lambda(v'_{1,j}, \dots, v'_{k(j),j}) = \lambda(j)$. Pour toute composition signée (C, v) on note $\gamma(C, v)$ le p -uplet v' des $(v'_{1,j}, \dots, v'_{k(j),j})$, ce qui donne

$$\sum_{\lambda(C,v)=\lambda} M_{(C,v)} = \sum_{\lambda(v'_{1,j}, \dots, v'_{k(j),j})=\lambda(j)} \sum_{k=l(C)} \sum_{t_1 < \dots < t_k} \prod_{j=1}^p (t_1, j)^{v_{1,j}} \dots (t_k, j)^{v_{k,j}}.$$

Pour tout v' on note $L_{v'} = \sum_{k=l(C)} \sum_{\gamma(C,v)=v'} \sum_{t_1 < \dots < t_k} \prod_{j=1}^p (t_1, j)^{v_{1,j}} \dots (t_k, j)^{v_{k,j}}$; on

a alors

$$L_{v'} = \sum_{k \geq 1} \sum_{t_1 < \dots < t_k} \sum_{\substack{\gamma(C,v)=v' \\ l(C)=k}} \prod_{j=1}^p (t_1, j)^{v_{1,j}} \dots (t_k, j)^{v_{k,j}}.$$

Pour chaque $j \in G$ on choisit les positions des $v_{i,j}$ non-nuls avec comme condition que l'union de ces positions doit couvrir $\{t_1, \dots, t_k\}$, par conséquent on a

$$L_{v'} = \sum_{k \geq 1} \sum_{t_1 < \dots < t_k} \sum_{\substack{\{t_1^j < \dots < t_{k(j)}^j\} \subseteq \{t_1 < \dots < t_k\} \\ \cup_{j \in G} \{t_1^j, \dots, t_{k(j)}^j\} = \{t_1, \dots, t_k\}}} \prod_{j=1}^p (t_1^j, j)^{v'_{1,j}} \dots (t_{k(j)}^j, j)^{v'_{k(j),j}}$$

$$= \sum_{\substack{t_1^j < \dots < t_{k(j)}^j \\ j \in G}} \prod_{j=1}^p (t_1^j, j)^{v'_{1,j}} \dots (t_{k(j)}^j, j)^{v'_{k(j),j}}.$$

D'où l'on tire

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda(C,v)=\lambda} M_{(C,v)} &= \sum_{\lambda(v'_{1,j}, \dots, v'_{k(j),j})=\lambda(j)} \sum_{\substack{t_1^j < \dots < t_{k(j)}^j \\ j \in G}} \prod_{j=1}^p (t_1^j, j)^{v'_{1,j}} \dots (t_{k(j)}^j, j)^{v'_{k(j),j}} \\ &= m_\lambda. \end{aligned} \quad \square$$

Exemple Si $p = 2$, $\lambda(1) = (1)$ et $\lambda(0) = (2, 1)$ alors on a

$$\begin{aligned} m_\lambda &= m_1(A^1) m_{2,1}(A^0) = \left(\sum_t \bar{t} \right) \left(\sum_{x < y} x^2 y + y^2 x \right) \\ &= \sum_{t < x < y} (\bar{t} x^2 y + \bar{t} x y^2) + \sum_{x < y} (\bar{x} x^2 y + \bar{x} x y^2) + \sum_{x < t < y} (x^2 \bar{t} y + x \bar{t} y^2) \\ &\quad + \sum_{x < y} (x^2 \bar{y} y + x \bar{y} y^2) + \sum_{x < y < t} (x^2 y \bar{t} + x y^2 \bar{t}) \\ &= M_{\begin{smallmatrix} 10 \\ 02 \\ 01 \end{smallmatrix}} + M_{\begin{smallmatrix} 10 \\ 01 \\ 02 \end{smallmatrix}} + M_{\begin{smallmatrix} 12 \\ 01 \\ 02 \end{smallmatrix}} + M_{\begin{smallmatrix} 11 \\ 02 \\ 01 \end{smallmatrix}} + M_{\begin{smallmatrix} 02 \\ 10 \\ 01 \end{smallmatrix}} + M_{\begin{smallmatrix} 01 \\ 10 \\ 02 \end{smallmatrix}} \\ &\quad + M_{\begin{smallmatrix} 02 \\ 11 \\ 12 \end{smallmatrix}} + M_{\begin{smallmatrix} 01 \\ 12 \\ 01 \end{smallmatrix}} + M_{\begin{smallmatrix} 02 \\ 01 \\ 10 \end{smallmatrix}} + M_{\begin{smallmatrix} 01 \\ 02 \\ 10 \end{smallmatrix}}. \end{aligned}$$

Pour tout Π inclus dans l'union disjointe des G_n on définit g la *série génératrice quasi-symétrique* de Π par

$$(2.3.12) \quad g = \sum_{\sigma \in \Pi} F_{CS(\sigma)}.$$

Le lemme 2.7 nous montre par triangularité que la série $S_{(C,v)}$ est une fonction symétrique en chacun des alphabets X^i , et on peut énoncer le résultat suivant, qui étend le théorème 3 de (Gessel, 1984).

Théorème 2.9 *Si $\Pi \subseteq \bigcup_{n \geq 0} G_n$ et si la série génératrice quasi-symétrique g de Π est symétrique en chaque alphabet X^i , alors le nombre d'éléments de Π ayant pour composition de descentes signée (C, v) est $\langle g, S_{(C,v)} \rangle$.*

Preuve On va d'abord montrer que si g est symétrique sur chaque alphabet X^i , on a

$$g = \sum_{(C,v)} \langle g, S_{(C,v)} \rangle F_{(C,v)}.$$

Puisque les bases $(h_\rho)_{\rho \in \mathcal{P}G}$ et $(m_\rho)_{\rho \in \mathcal{P}G}$ sont duales, on a :

$$\begin{aligned} g &= \sum_{\rho} \langle g, h_\rho \rangle m_\rho \\ &= \sum_{\rho} \langle g, h_\rho \rangle \sum_{\lambda(D,u)=\rho} M_{(D,u)} \quad \text{d'après le lemme 2.8} \\ &= \sum_{(D,u)} \langle g, h_{(D,u)} \rangle M_{(D,u)}, \end{aligned}$$

car $h_{(D,u)} = h_{\lambda(D,u)}$. On écrit maintenant $h_{(D,u)}$ en fonction des $S_{(C,v)}$ à l'aide du lemme 2.7, et on trouve :

$$\begin{aligned} g &= \sum_{(D,u)} \langle g, \sum_{(C,v) \leq (D,u)} S_{(C,v)} \rangle M_{(D,u)} \\ &= \sum_{(C,v) \leq (D,u)} \langle g, S_{(C,v)} \rangle M_{(D,u)} \\ &= \sum_{(C,v)} \langle g, S_{(C,v)} \rangle \sum_{(C,v) \leq (D,u)} M_{(D,u)} \\ &= \sum_{(C,v)} \langle g, S_{(C,v)} \rangle F_{(C,v)} \quad \text{par le lemme 2.2.} \end{aligned}$$

Si le nombre d'éléments de Π ayant pour composition de descentes signée est $\alpha_{(C,v)}$, alors par définition g est égale à $\sum_{(C,v)} \alpha_{(C,v)} F_{(C,v)}$. De plus la proposition 2.3 nous assure que les $F_{(C,v)}$ sont linéairement indépendants ; donc le fait que g soit aussi égale à $\sum_{(C,v)} \langle g, S_{(C,v)} \rangle F_{(C,v)}$ impose que

$$\alpha_{(C,v)} = \langle g, S_{(C,v)} \rangle . \quad \square$$

2.4 Dénombrement des éléments de G_n ayant un ensemble de descentes signé donné et dont l'inverse a un ensemble de descentes signé donné

On exprime ici les $S_{[s,m]}$ comme des séries génératrices quasi-symétriques. Ceci nous permet, à partir du théorème 2.9, de résoudre un problème d'énumération en termes de produits scalaires.

On dit que deux p -formes gauches γ et δ sont *équivalentes* si la somme des évaluations de tous les p -tableaux de forme γ est égale à la somme des évaluations de tous les p -tableaux de forme δ .

Exemple La p -forme gauche $\begin{array}{c} | \square | \square \\ \square || \square \square \end{array}$ est équivalente à $\begin{array}{c} | \square | \square \\ \square || \square \square \\ \square | \square \square | \end{array}$.

En effet, les deux dernières cases de la seconde ligne sont dans le troisième bloc ; les lettres que l'on peut y placer sont donc toujours strictement plus grandes

que celles des deux premières cases de la ligne du bas qui sont dans les deux premiers blocs.

On dit que deux cases d'une p -forme ρ sont dans la même composante connexe de ρ si on peut aller de l'une à l'autre en faisant des pas vers le haut, le bas, la droite ou la gauche.

Exemple Les cases a et b de $\begin{array}{c} | a | c \\ \square || b \square \\ \square | d \square | \end{array}$ sont dans la même composante connexe alors que c et d ne le sont pas.

Dans la section précédente, on a vu que pour toute composition signée (C, v) , $S_{(C,v)}$ est la somme des évaluations des tableaux de forme $r(C, v)$.

Les $r(C, v)$ ne contiennent pas de sous-formes $\begin{array}{c} \square \square \\ \square \square \end{array}$. Donc, si deux cases d'une même colonne sont dans des blocs différents on voit que les remplissages des lignes correspondantes sont indépendants. En effet les lettres que l'on peut mettre dans la ligne du bas ont toutes un signe plus petit que celles que l'on peut mettre dans la ligne du haut, elles sont donc strictement plus petites pour l'ordre $<_r$. Le ruban $r(C, v) = \dots \begin{array}{c} \square \square \\ \square \square \end{array} \dots$ est alors équivalent à $\dots \begin{array}{c} \square \square \\ \square \square \end{array} \dots$ (ici on ne dessine pas le reste du ruban ni les barres qui peuvent éventuellement séparer deux blocs).

De même, quand on passe d'un bloc à l'autre dans une ligne, mettons entre les cases i et $i + 1$, on ne peut avoir de case de $r(C, v)$ au dessous de i ni au dessus de $i + 1$. Les remplissages des cases i et $i + 1$ sont indépendants grâce au changement de bloc ; de même, le remplissage de la partie de la forme au dessus et à gauche de la case i est indépendant de celui de la partie qui est au dessous et à droite de la case $i + 1$. Ceci montre que $\dots i | i + 1 \dots$ est équivalent

à $\begin{array}{c} \dots i \\ i + 1 \dots \end{array}$.

Exemple Les p -formes $\begin{array}{c} \square \square || \square \square \\ \square | \square \square || \square \square \end{array}$ et $\begin{array}{c} \square \square || \\ || \square \square \\ \square | \square \square || \square \square \\ | \square \square || \\ | \square \square || \end{array}$ sont

équivalentes, car dans la première ligne on peut séparer les parties correspondant aux premier et troisième blocs. On peut aussi séparer les première et deuxième lignes car les éléments de ces lignes qui sont dans la même colonne ne sont pas dans des blocs de même signe.

Bien sur, quand on effectue l'une des deux opérations précédentes, on ne crée pas de sous-formes de type $\begin{array}{c} \square \square \\ \square \square \end{array}$, on peut donc refaire ces opérations sur les p -formes obtenues jusqu'à obtenir une p -forme ρ équivalente à $r(C, v)$ telle que dans chaque composante connexe les blocs non vides soient tous de même signe. La somme des évaluations des p -tableaux de forme ρ est alors un produit

de fonctions de Schur gauches.

La série $S_{(C,v)}$ est donc une combinaison linéaire à coefficients entiers positifs de produits de fonctions de Schur, voir (Macdonald, 1979). C'est donc l'image par la fonction caractéristique ch d'un caractère de G_n . Soit $\chi_{(C,v)}$ ce caractère, on utilisera aussi la notation $\chi_{[S,m]}$ si $[S,m] = ens(C,v)$.

Pour tout $\sigma \in G_n$ on définit la permutation signée $\tilde{\sigma}$ par

$$\tilde{\sigma}(i) = (|\sigma(i)|, -sign(\sigma(i))) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Soit $[\tilde{S}_m, \tilde{m}]$ le couple défini à partir de $[S, m]$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{m}(i) &= -m(i) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ \tilde{S}_m &= \{i | i \in S \text{ et } (m(i) = m(i+1) \text{ ou } m(i) = p)\} \\ &\quad \cup \{i | m(i) < m(i+1) \text{ et } m(i+1) \neq p\}. \end{aligned}$$

Le lemme suivant montre en particulier que si $[S, m]$ est un ensemble de descentes signé alors le couple $[\tilde{S}_m, \tilde{m}]$ est bien un ensemble de descentes signé.

Lemme 2.10 *Soit σ un élément de G_n . On a*

$$ds(\sigma) = [S, m] \Leftrightarrow ds(\tilde{\sigma}) = [\tilde{S}_m, \tilde{m}].$$

Remarque Ce lemme n'est pas vrai dans le cas où G n'est pas cyclique. Par exemple, si $G = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ les éléments $(0, 1)$ et $(1, 0)$ sont tous les deux différents de $(0, 0)$ et égaux à leurs opposés. Ce qui fait que si $(0, 1) <_p (1, 0)$, on a $-(0, 1) <_p -(1, 0)$ au lieu de ce que l'on veut dans ce cas, c'est-à-dire $-(1, 0) <_p -(0, 1)$.

Preuve On remarque d'abord que si $m(i) = sign(\sigma(i))$, alors

$$\begin{aligned} \tilde{m}(i) &= -m(i) \\ &= -sign(\sigma(i)) \\ &= sign(\tilde{\sigma}(i)). \end{aligned}$$

De plus,

$$(k, -j) <_r (k', -j') \Leftrightarrow \begin{cases} j = j' \text{ et } k < k' \\ \text{ou} \\ -j <_p -j'. \end{cases}$$

Mais

$$-j <_p -j' \Leftrightarrow (j <_p j' \text{ et } -j' = j' = p) \text{ ou } (j >_p j' \text{ et } j \neq p).$$

L'ensemble de descentes de $\tilde{\sigma}$ est l'ensemble des i qui vérifient

$$(|\sigma(i+1)|, -sign(\sigma(i+1))) <_r (|\sigma(i)|, -sign(\sigma(i))).$$

Mais, pour tout

i

, on a

$$(|\sigma(i)|, -\text{sign}(\sigma(i))) = (|\sigma(i)|, -m(i)).$$

L'ensemble de descentes de $\tilde{\sigma}$ est donc l'ensemble des éléments i de $\{1, \dots, n\}$ qui satisfont

$$\left\{ \begin{array}{l} m(i+1) = m(i) \text{ et } |\sigma(i+1)| < |\sigma(i)| \\ \text{ou} \\ m(i+1) <_p m(i) \text{ et } m(i) = p \\ \text{ou} \\ m(i) <_p m(i+1) \text{ et } m(i+1) \neq p. \end{array} \right.$$

Les deux premiers cas donnent $i \in S$ et $(m(i+1) = m(i) \text{ ou } m(i) = p)$. En effet, $i \in S$ et $m(i+1) = m(i)$ est la première condition et $i \in S$ et $m(i) = p$ correspond à la seconde plus le cas où $m(i+1) = p$ dans la première. L'ensemble de descentes de $\tilde{\sigma}$ est donc

$$\begin{aligned} \tilde{S}_m &= \{i \mid i \in S \text{ et } (m(i) = m(i+1) \text{ ou } m(i) = p)\} \\ &\quad \cup \{i \mid m(i) <_p m(i+1) \text{ et } m(i+1) \neq p\}. \square \end{aligned}$$

On peut maintenant énoncer le résultat principal de la section.

Théorème 2.11 *Le nombre d'éléments σ de G_n ayant pour ensemble de descentes signé $[S, m]$ tels que σ^{-1} ait pour ensemble de descentes signé $[T, f]$ est égal à*

$$\langle \chi_{[S, m]}, \chi_{[T, f]} \rangle.$$

On commence par démontrer le lemme suivant.

Lemme 2.12 *La série génératrice quasi-symétrique des permutations signées σ de G_n telles que $(\tilde{\sigma})^{-1}$ ait pour ensemble de descentes signé $[T, f]$ est égale à $S_{[T, f]}$.*

Preuve On remarque d'abord que d'après les définitions (2.2.4) et (2.2.5), on a pour tout $w \in A^*$

$$(2.4.13) \quad \text{sts}(w) = \sigma \Leftrightarrow \text{csts}(w) = \tilde{\sigma}.$$

De plus, les opérations $\sigma \mapsto \tilde{\sigma}$ et $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$ sont des involutions qui commutent, la notation $\tilde{\sigma}^{-1}$ est donc consistante et l'opération $\sigma \mapsto \tilde{\sigma}^{-1}$ est une involution.

D'après la définition de $S_{[T,f]}$ (voir (2.3.11)) on a

$$\begin{aligned}
S_{[T,f]} &= \sum_{ds(sts(w))=[T,f]} ev(w) \\
&= \sum_{ds(\sigma)=[T,f]} \sum_{sts(w)=\sigma} ev(w) \\
&= \sum_{ds(\sigma)=[T,f]} \sum_{csts(w)=\tilde{\sigma}} ev(w) && \text{par (2.4.13)} \\
&= \sum_{ds(\sigma)=[T,f]} F_{ds(\tilde{\sigma}^{-1})} && \text{par le lemme 2.4} \\
&= \sum_{ds(\tilde{\sigma}^{-1})=[T,f]} F_{ds(\sigma)}.
\end{aligned}$$

Ce qui démontre le lemme. \square

Preuve du théorème 2.11 Le lemme 2.12 nous donne

$$S_{[\tilde{T}_f, \tilde{f}]} = \sum_{ds(\tilde{\sigma}^{-1})=[\tilde{T}_f, \tilde{f}]} F_{ds(\sigma)}.$$

On utilise maintenant le lemme 2.10 pour passer de $\tilde{\sigma}^{-1}$ et $[\tilde{T}_f, \tilde{f}]$ à σ^{-1} et $[T, f]$.
Ce qui donne

$$S_{[\tilde{T}_f, \tilde{f}]} = \sum_{ds(\sigma^{-1})=[T,f]} F_{ds(\sigma)}.$$

La série $S_{[\tilde{T}_f, \tilde{f}]}$ est donc la série génératrice quasi-symétrique des permutations signées dont l'inverse a pour ensemble de descentes signé $[T, f]$. Les théorèmes 2.9 et 1.4 nous permettent de finir la preuve du théorème 2.11. \square

On déduit le résultat suivant des théorèmes 2.9 et 2.11.

Corollaire 2.13 *Le nombre d'éléments de G_n ayant pour ensemble de descentes signé $[S, m]$ est la dimension de la représentation $\chi_{[S,m]}$.*

Pour démontrer ce corollaire nous avons besoin d'un lemme technique dont nous nous resservirons par la suite. Pour tout $r \in \{1, \dots, p\}$ on définit $Y^r = \cup_{i \geq pr} X^i$; en particulier $Y^1 = \cup_{i \in G} X^i$.

Lemme 2.14 *Pour tout $S \subseteq \{1, \dots, n-1\}$ et $r \in \{1, \dots, p\}$ on a*

$$\sum h_{[S,m]} = h_{c_1}(Y^r) \prod_{i=2}^k h_{c_i}(Y^1)$$

où la somme se fait sur les fonctions de signes qui vérifient $m(1) \geq_p r$ et où $S = \{c_1, c_1 + c_2, \dots, c_1 + \dots + c_{k-1}\}$ et $c_1 + \dots + c_k = n$.

Preuve Pour un m donné $h_{[S,m]}(X)$ est la somme des évaluations des tableaux de la forme

$$\begin{array}{c}
 c_1 \\
 \square \dots \square \\
 \\
 c_2 \\
 \square \dots \square \\
 \\
 \dots \\
 \\
 c_k \\
 \square \dots \square.
 \end{array}$$

Si on fait la somme sur toutes les fonctions de signes qui vérifient $m(1) \geq_p r$, on remarque que dans la première ligne on trouve $h_{c_1}(Y^r)$, puisqu'il n'y apparaît que des lettres de Y^r . Dans les autres lignes on trouve les $h_{c_i}(Y^1)$. \square

Preuve du corollaire 2.13 Il suffit de montrer que la série quasi-symétrique de toutes les permutations signées de G_n est égale à $h_1(X)^n$. En effet, le théorème 2.9 affirme dans ce cas que le nombre d'éléments de G_n ayant pour ensemble de descentes signé $[S, m]$ est $\langle S_{[S,m]}, h_1(X)^n \rangle$; mais en vertu de la proposition 1.13, $h_1(X)^n$ est l'image par ch de la représentation régulière de G_n . Le produit scalaire $\langle S_{[S,m]}, h_1(X)^n \rangle$ est donc égal au produit scalaire de $\chi_{[S,m]}$ par celui de la représentation régulière; c'est donc la dimension de $\chi_{[S,m]}$.

Il reste à calculer $\sum_{\sigma \in G_n} F_{ds(\sigma)}$:

$$\begin{aligned}
 \sum_{\sigma \in G_n} F_{ds(\sigma)} &= \sum_{[S,m]} \sum_{ds(\tilde{\sigma}^{-1})=[S,m]} F_{ds(\sigma)} \\
 &= \sum_{[S,m]} S_{[S,m]} && \text{par le lemme 2.12} \\
 &= \sum_m \sum_{S \subseteq \{1, \dots, n-1\}} S_{[S,m]} \\
 &= \sum_m h_{[\{1, \dots, n-1\}, m]} && \text{par le lemme 2.7} \\
 &= h_1(X)^n && \text{par le lemme 2.14.} \square
 \end{aligned}$$

CHAPITRE 3

TYPE CYCLIQUE

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous faisons une étude succincte de l'algèbre de Lie libre sur A et de certains sous-espaces de $\mathbf{Q} \langle A \rangle$ associés. Nous y raffinons un résultat de (Gessel et Reutenauer, 1993) et nous y exprimons le nombre d'éléments de G_n dans une classe de conjugaison donnée ayant un ensemble de descentes signé fixé sous la forme d'un produit scalaire de deux caractères de G_n .

La preuve que nous donnons ici est essentiellement une précision de la preuve de Gessel et Reutenauer.

3.2 Éléments de Lie et type cyclique

On note $\mathbf{Q} \langle A \rangle$ la \mathbf{Q} -algèbre associative libre engendrée par les éléments de A . Les éléments de $\mathbf{Q} \langle A \rangle$ seront appelés polynômes. L'ensemble A^* des mots sur A est une base de l'espace vectoriel $\mathbf{Q} \langle A \rangle$. Si P et Q sont deux polynômes, leur *crochet de Lie* est

$$[P, Q] = PQ - QP.$$

L'algèbre de Lie libre sur A , $L(A)$, est le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathbf{Q} \langle A \rangle$ contenant A et stable sous le crochet de Lie. Les éléments de $L(A)$ sont appelés *polynômes de Lie*.

On rappelle que le signe d'un mot de A^* est la somme dans G des signes des lettres qui le constituent. On se souviendra aussi que le signe d'un polynôme finement homogène est le signe de chacun des mots qui y apparaissent.

Le *produit symétrique* (P_1, \dots, P_k) de k polynômes P_1, \dots, P_k est défini par

$$(P_1, \dots, P_k) = \frac{1}{k!} \sum_{s \in S_k} P_{s(1)} \dots P_{s(k)}.$$

On définit U_k le sous-espace de $\mathbf{Q} \langle A \rangle$ engendré par les produits symétriques (P_1, \dots, P_k) où les P_i sont des polynômes de Lie.

Pour tout partage signé λ on définit U_λ le sous-espace de $\mathbf{Q} \langle A \rangle$ linéairement engendré par les produits symétriques des P_i^j ($j \in G$, $1 \leq i \leq l(\lambda(j))$) où P_i^j est un polynôme de Lie finement homogène de signe j et de degré $\lambda(j)_i$.

Deux mots u et v de A^* sont *conjugués* s'il existe deux mots x et y tels que $u = xy$ et $v = yx$. Une *classe de conjugaison*, ou *circuit*, est une classe d'équivalence pour cette relation. Soit n un entier naturel strictement positif ; un *circuit primitif* de longueur n est une classe de conjugaison de mots de longueur n ayant exactement n éléments. Un *mot de Lyndon* est un élément d'un circuit primitif qui est plus petit (dans l'ordre alphabétique) que tous les autres mots de sa classe de conjugaison. Le *signe* d'un circuit est le signe commun de chacun des mots qui le constituent. Géométriquement, les circuits peuvent être vus comme des cycles dont les sommets sont les lettres.

Exemple La classe de conjugaison $\{abab, baba\}$ est un circuit qui n'est pas primitif. Par contre la classe $\{aabb, abba, bbaa, baab\}$ est un circuit primitif et $aabb$ est un mot de Lyndon.

$$b \rightarrow a \quad b \rightarrow a$$

Les cycles $\uparrow \quad \downarrow$ et $\uparrow \quad \downarrow$ représentent ces deux circuits.

$$a \leftarrow b \quad b \leftarrow a$$

La proposition suivante, qui étend le lemme 8.22 de (Reutenauer, 1993), est une conséquence du théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt.

Proposition 3.1 *i) L'algèbre $\mathbf{Q} \langle A \rangle$ est somme directe des espaces U_k , $k \geq 0$.*

ii) L'espace U_k est somme directe des espaces U_λ où λ varie dans l'ensemble des partages signés de longueur k .

Preuve *i)* Ce résultat classique découle du théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt ; le lecteur pourra en consulter une preuve dans (Reutenauer, 1993, p.58).

ii) Il est bien connu (voir (Reutenauer, 1993)) que l'on peut munir l'ensemble des mots de Lyndon d'un ordre total \prec de sorte que les conditions suivantes soient vérifiées :

- tout mot w de A^* peut s'écrire de façon unique sous la forme $w = l_1 \dots l_k$ où les l_i sont des mots de Lyndon tels que $l_1 \succeq l_2 \succeq \dots \succeq l_k$;
- il existe une base (P_l) de $L(A)$ indexée par les mots de Lyndon où P_l est finement homogène de mêmes degrés partiels que l en toutes les lettres de A .

On définit alors pour tout $w = l_1 \dots l_k$, $l_1 \succeq l_2 \succeq \dots \succeq l_k$:

$$Q_w = (P_{l_1}, \dots, P_{l_k}).$$

Par la première partie de 3.1 et par multilinéarité du produit symétrique, on déduit que les Q_w engendrent $\mathbf{Q} \langle A \rangle$.

Le polynôme Q_w est finement homogène de mêmes degrés partiels que w , donc pour tout $\alpha \in \mathcal{E}_A$ les Q_w tels que $w \in E_\alpha$ engendrent E_α . Mais E_α est de dimension finie et la famille des Q_w est une famille génératrice en bijection avec une base de E_α , c'est donc une base de E_α . Les Q_w sont donc linéairement indépendants, ils forment une base de $\mathbf{Q} \langle A \rangle$.

De la même façon on montre que les $Q_w = (P_{l_1}, \dots, P_{l_k})$ où $n_i(j)$ est le nombre de P_l de degré i et de signe j ($\lambda(j) = 1^{n_1(j)} 2^{n_2(j)} \dots$) forment une base de U_λ . \square

L'évaluation d'un circuit est l'évaluation d'un mot de la classe de conjugaison correspondante. De même l'évaluation d'un multi-ensemble de circuits est le produit (avec multiplicité) des évaluations des circuits de ce multi-ensemble. La série génératrice d'un ensemble de multi-ensembles de circuits est la somme des évaluations des multi-ensembles qui y apparaissent.

$$c \rightarrow a$$

Exemple L'évaluation de $\uparrow \quad \downarrow$ est $abbc$, celle de $\{a \overleftrightarrow{\leftarrow} b, a \overleftrightarrow{\leftarrow} b, c \overleftrightarrow{\leftarrow} c\}$

$$b \leftarrow b$$

$$b \rightarrow a$$

est $a^2 b^2 c^2$ et la série génératrice de $\{\{a \overleftrightarrow{\leftarrow} b\}, \{\uparrow \quad \downarrow\}, \{a \overleftrightarrow{\leftarrow} b, a \overleftrightarrow{\leftarrow} c\}\}$ est

$$a \leftarrow b$$

$$ab + a^2 b^2 + a^2 bc.$$

On peut maintenant énoncer le résultat suivant qui relie différentes séries associées à un partage signé.

Théorème 3.2 Si λ est le partage signé tel que pour tout $j \in G$ on ait $\lambda(j) = 1^{n_1(j)} 2^{n_2(j)} \dots$ alors les quatre séries suivantes sont égales :

- i) la série génératrice T_λ de U_λ ;
- ii) la série génératrice PN_λ des multi-ensembles de mots circulaires primitifs tels que, pour tout $i \in \mathbf{N}^+$ et tout $j \in G$, on ait $n_i(j)$ circuits de longueur i et de signe j ;
- iii) la fonction génératrice quasi-symétrique L_λ des permutations signées de type cyclique λ ;
- iv) la série caractéristique de la représentation de G_n sur la partie multilinéaire de U_λ .

On a besoin, pour démontrer ce résultat, du lemme technique suivant.

Lemme 3.3 Si λ est le type cyclique de σ , alors λ^- est celui de $\tilde{\sigma}$.

Preuve Soit $z = \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_k \\ x_{i_1} & \dots & x_{i_k} \end{pmatrix}$ un cycle de σ de signe $g = x_{i_1} + \dots + x_{i_k}$, on a alors $\sigma(i_j, 0) = (i_{j+1}, x_{i_j})$ et $\tilde{\sigma}(i_j, 0) = (i_{j+1}, -x_{i_j})$. On voit ainsi que $z' = \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_k \\ -x_{i_1} & \dots & -x_{i_k} \end{pmatrix}$ est un cycle de $\tilde{\sigma}$ de signe $-g$. A chaque cycle de σ de longueur k et de signe g on peut associer un cycle de $\tilde{\sigma}$ de longueur k et de signe $-g$. Le type cyclique de $\tilde{\sigma}$ est donc égal à λ^- . \square

Preuve du théorème 3.2

L'égalité de $i)$ et $iv)$ dépend du théorème 1.16 pourvu que l'on montre que U_λ est assez stable.

Soit (P_1, \dots, P_k) un élément de U_λ où chaque P_i est finement homogène, si on applique

l'endomorphisme d'algèbre qui change la lettre b en une combinaison linéaire de lettres de même signe, alors les P_i qui contiennent la lettre b vont être changés soit en le polynôme nul (et alors (P_1, \dots, P_k) est transformé en 0) soit en combinaisons linéaires de polynômes de Lie finement homogènes de même signe et de même degré. Par multi-linéarité du produit symétrique on déduit la stabilité de U_λ sous l'action de cet endomorphisme. L'espace U_λ est donc assez stable.

Pour montrer l'égalité de T_λ et de PN_λ on remarque d'abord que l'ensemble des Q_w , où $w = l_1 \dots l_k$, $l_1 \succeq l_2 \succeq \dots \succeq l_k$ et où il y a $n_i(j)$ mots de longueur i et de signe j parmi les l_r , forme une base finement homogène de U_λ .

La série T_λ est donc

$$(3.2.1) \quad T_\lambda = \sum ev(l_1 \dots l_k)$$

où la sommation s'effectue sur les l_r qui vérifient $l_1 \succeq l_2 \succeq \dots \succeq l_k$ et où il y a $n_i(j)$ mots de longueur i et de signe j parmi les l_r .

Pour exprimer la série PN_λ il suffit de classer, dans chaque multi-ensemble, les mots de Lyndon selon \prec , on trouve ainsi :

$$(3.2.2) \quad \begin{aligned} PN_\lambda &= \sum ev(l_1) \dots ev(l_k) \\ &= \sum ev(l_1 \dots l_k) \end{aligned}$$

où les sommes s'effectuent sur les l_r qui vérifient les mêmes conditions que dans les deux paragraphes précédents.

Les équations (3.2.1) et (3.2.2) montrent l'égalité

$$T_\lambda = PN_\lambda.$$

Pour démontrer l'égalité des séries $ii)$ et $iii)$ on utilise la fonction U définie initialement dans (Gessel et Reutenauer, 1993) (voir aussi (Dress et Siebeneicher, 1988)). Soit $w = x_1 \dots x_n$ un mot de A^* et $\sigma = (g_1, \dots, g_n, s)$ son standardisé

; s sera alors appelé la *permutation standard* de w . Soit $c = \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_k \\ g_{i_1}, \dots, g_{i_k} \end{pmatrix}$

un cycle de σ . On note alors $\nu_c(w)$ le circuit qui est la classe de conjugaison de $x_{i_1} \dots x_{i_k}$. En particulier $\nu_c(w)$ a même longueur et même signe que c . Soit $U(w)$ le multi-ensemble des circuits

$$U(w) = \{\nu_c(w) | c \text{ est un cycle de } \sigma\}.$$

On définit la *structure cyclique* d'un multi-ensemble V de circuits comme le partage qui pour tout i a autant de parts de longueur i que le multi-ensemble A de circuits de longueur i .

Le lemme 3.4 de (Gessel et Reutenauer, 1993) établit que U est une bijection, qui préserve l'évaluation, de l'ensemble des mots vers l'ensemble des multi-ensembles de circuits primitifs, telle que la structure cyclique de la permutation standard de w est la même que celle de $U(w)$.

Le fait que $\nu_c(w)$ ait le même signe que c montre que $U(w)$ a autant de cycles de signe j et de longueur k que le standardisé σ de w . Ceci montre que l'on peut exprimer la série génératrice des multi-ensembles de circuits primitifs, tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^+$ et tout $j \in G$ on ait $n_k(j)$ circuits de longueur k et de signe j , comme la somme des évaluations des mots dont le standardisé σ a pour type cyclique λ . On a donc :

$$PN_\lambda = \sum_{ct(\sigma)=\lambda} \sum_{sts(w)=\sigma} ev(w).$$

D'autre part, la définition de L_λ donne :

$$\begin{aligned} L_\lambda &= \sum_{ct(\sigma^{-1})=\lambda} F_{ds(\sigma^{-1})} \\ &= \sum_{ct(\sigma^{-1})=\lambda} \sum_{csts(w)=\sigma} ev(w) \quad \text{d'après le lemme 2.4.} \end{aligned}$$

L'équation (2.4.13) et la proposition 1.8 nous permettent alors d'écrire :

$$\begin{aligned} L_\lambda &= \sum_{ct(\sigma)=\lambda^-} \sum_{sts(w)=\tilde{\sigma}} ev(w) \\ &= \sum_{ct(\tilde{\sigma})=\lambda} \sum_{sts(w)=\tilde{\sigma}} ev(w) \quad \text{par le lemme 3.3} \\ &= PN_\lambda. \quad \square \end{aligned}$$

On note χ_λ le caractère de la représentation de G_n sur la partie multi-linéaire de U_λ . Le résultat suivant est alors une conséquence immédiate de théorème 2.9 et de l'égalité des séries *iii*) et *iv*) du théorème 3.2 ; il étend au cas des produits en couronne le théorème 2.1 de (Gessel et Reutenauer, 1993).

Corollaire 3.4 *Le nombre d'éléments de G_n ayant pour ensemble de descentes signé $[S, m]$ et pour type cyclique λ est égal à*

$$\langle \chi_{[S, m]}, \chi_\lambda \rangle. \quad \square$$

CHAPITRE 4

APPLICATIONS

4.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude de certaines séries génératrices symétriques qui, dans le cas du groupe symétrique, a déjà été développée par Désarménien, voir (Désarménien, 1983). Ces séries donnent des analogues symétriques de séries classiques.

Dans la seconde section, nous obtenons des séries qui généralisent les séries génératrices exponentielles des éléments alternants des groupes symétriques et hyperoctaédraux, voir (André, 1881 ; Arnold, 1992 ; Springer, 1970) et (Ehrenborg et Readdy, 1994) pour le cas des produits en couronne.

Dans la dernière section, nous démontrons une formule qui se spécialise à quelques unes des séries génératrices connues sur les nombres eulériens et leurs généralisations, voir (Bergeron et Favreau, 1992 ; Désarménien, 1983 ; Foata et Schützenberger, 1970 ; Stembridge, 1992b). Cette série semble aussi liée à des formules obtenues pour les permutations colorées dans (Désarménien et Foata, 1991) et (Foata et Zeilberger, 1991).

4.2 Fonctions symétriques d'Euler généralisées

Dans cette section, on étudie des analogues symétriques des fonctions trigonométriques usuelles et leurs liens avec certaines classes de permutations signées.

Il est bien connu que pour tout ensemble de variables X , la fonction

$$H_X(t) = \sum_{n \geq 0} h_n(X) t^n$$

est un analogue symétrique de l'exponentielle. En effet, $H_X(t)$ est égale à $\exp(\sum_{n \geq 1} \frac{p_n(X) t^n}{n})$ et si on spécialise $p_1(X)$ à 1 et $p_n(X)$ à 0 pour $n > 1$ on trouve $\exp(t)$.

On définit maintenant, en suivant (Désarménien, 1983), le *cosinus* et le *sinus symétriques sur X* par

$$(4.2.1) \quad \text{COS}_X(t) = \frac{H_X(it) + H_X(-it)}{2} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n h_{2n}(X) t^{2n}$$

$$(4.2.2) \quad \text{SIN}_X(t) = \frac{H_X(it) - H_X(-it)}{2i} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n h_{2n+1}(X) t^{2n+1}.$$

On peut alors énoncer le résultat suivant qui donne des équivalents symétriques des relations classiques sur les cosinus et sinus.

Lemme 4.1 *Soient X et Y deux alphabets disjoints. On a alors les relations suivantes :*

- i) $\text{COS}_X(t)^2 + \text{SIN}_X(t)^2 = H_X(it)H_X(-it)$
- ii) $\text{COS}_{X \cup Y}(t) = \text{COS}_X(t)\text{COS}_Y(t) - \text{SIN}_X(t)\text{SIN}_Y(t)$
- iii) $\text{SIN}_{X \cup Y}(t) = \text{COS}_X(t)\text{SIN}_Y(t) + \text{SIN}_X(t)\text{COS}_Y(t)$
- iv) $\text{COS}_X(t)H_Y(it)H_Y(-it) = \text{COS}_{X \cup Y}(t)\text{COS}_Y(t) + \text{SIN}_{X \cup Y}(t)\text{SIN}_Y(t)$
- v) $\text{SIN}_X(t)H_Y(it)H_Y(-it) = \text{SIN}_{X \cup Y}(t)\text{COS}_Y(t) - \text{COS}_{X \cup Y}(t)\text{SIN}_Y(t).$

Preuve i) En utilisant les définitions de $\text{SIN}_X(t)$ et $\text{COS}_X(t)$ on trouve :

$$\begin{aligned} \text{COS}_X(t)^2 + \text{SIN}_X(t)^2 &= \left(\frac{H_X(it) + H_X(-it)}{2} \right)^2 + \left(\frac{H_X(it) - H_X(-it)}{2i} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} \left(H_X(it)^2 + H_X(-it)^2 + 2H_X(it)H_X(-it) \right. \\ &\quad \left. - H_X(it)^2 - H_X(-it)^2 + 2H_X(it)H_X(-it) \right) \\ &= H_X(it)H_X(-it). \end{aligned}$$

ii) Par la définition de $\text{COS}_X(t)$, on trouve que $\text{COS}_X(t)\text{COS}_Y(t)$ est égal à

$$\frac{1}{4} (H_X(it)H_Y(it) + H_X(it)H_Y(-it) + H_X(-it)H_Y(it) + H_X(-it)H_Y(-it)),$$

d'autre part on a que $\text{SIN}_X(t)\text{SIN}_Y(t)$ est égal à

$$\frac{-1}{4} (H_X(it)H_Y(it) - H_X(it)H_Y(-it) - H_X(-it)H_Y(it) + H_X(-it)H_Y(-it)),$$

dont on déduit

$$\text{COS}_X(t)\text{COS}_Y(t) - \text{SIN}_X(t)\text{SIN}_Y(t) = \frac{1}{4} (2H_X(it)H_Y(it) + 2H_X(-it)H_Y(-it)).$$

Mais la définition de $H_X(t)$ donne :

$$\begin{aligned} H_X(t)H_Y(t) &= \sum_{n \geq 0} t^n \sum_{k=0}^n h_k(X)h_{n-k}(Y) \\ &= \sum_{n \geq 0} h_n(X \cup Y)t^n \\ &= H_{X \cup Y}(t). \end{aligned}$$

On obtient donc

$$COS_X(t)COS_Y(t) - SIN_X(t)SIN_Y(t) = COS_{X \cup Y}(t).$$

iii) La produit de $COS_X(t)$ par $SIN_Y(t)$ est égal à :

$$\frac{1}{4i}(H_X(it)H_Y(it) - H_X(it)H_Y(-it) + H_X(-it)H_Y(it) - H_X(-it)H_Y(-it)),$$

d'où

$$\begin{aligned} COS_X(t)SIN_Y(t) + COS_Y(t)SIN_X(t) &= \frac{1}{4i}(2H_{X \cup Y}(it) - 2H_{X \cup Y}(-it)) \\ &= SIN_{X \cup Y}(t). \end{aligned}$$

iv) On remplace $COS_{X \cup Y}(t)$ et $SIN_{X \cup Y}(t)$ par leurs expressions données dans ii) et dans iii) et l'on trouve :

$$\begin{aligned} COS_{X \cup Y}(t)COS_Y(t) + SIN_{X \cup Y}(t)SIN_Y(t) &= \\ &COS_Y(t)(COS_X(t)COS_Y(t) - SIN_X(t)SIN_Y(t)) \\ &+ SIN_Y(t)(COS_X(t)SIN_Y(t) + COS_Y(t)SIN_X(t)) \\ &= COS_X(t)(COS_Y(t)^2 + SIN_Y(t)^2) \\ &= COS_X(t)H_Y(it)H_Y(-it). \end{aligned}$$

v) On remplace de la même façon $COS_{X \cup Y}(t)$ et $SIN_{X \cup Y}(t)$ pour trouver :

$$\begin{aligned} SIN_{X \cup Y}(t)COS_Y(t) - COS_{X \cup Y}(t)SIN_Y(t) &= \\ &= COS_Y(t)(COS_X(t)SIN_Y(t) + COS_Y(t)SIN_X(t)) \\ &\quad - SIN_Y(t)(COS_X(t)COS_Y(t) - SIN_X(t)SIN_Y(t)) \\ &= SIN_X(t)(COS_Y(t)^2 + SIN_Y(t)^2) \\ &= SIN_X(t)H_Y(it)H_Y(-it) \quad \square \end{aligned}$$

On considère toujours que G est cyclique et qu'il est indexé par $\{1, \dots, p\}$ muni de l'ordre total $<_p$.

Une *permutation signée alternante* est un élément de G_n dont l'ensemble de descentes est $K_n = \{1, 3, \dots, 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\}$ (auquel cas on l'appellera *alternante descendante*) ou $K'_n = \{2, 4, \dots, 2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor\}$ (auquel cas on l'appellera *alternante montante*).

Soit $r \in \{1, \dots, p\}$; on note $\Gamma_r(t)$ et $\Delta_r(t)$ les séries

$$\Gamma_r(t) = \sum_{n \geq 1} t^n \sum_{m(1) \geq pr} S_{[K_n, m]},$$

$$\Delta_r(t) = \sum_{n \geq 1} t^n \sum_{m(1) \geq pr} S_{[K'_n, m]}.$$

Ces deux séries sont des analogues symétriques des séries exponentielles du nombre de permutations signées alternantes σ , descendantes et telles que $\text{sign}(\sigma(1)) \geq_p r$ pour $\Gamma_r(t)$, montantes et telles que $\text{sign}(\sigma(1)) \geq_p r$ pour $\Delta_r(t)$. En effet, d'après le corollaire 2.13, la dimension de la représentation associée à $S_{[K_n, m]}$ (resp. $S_{[K'_n, m]}$) est le nombre de permutations σ alternantes descendantes (resp. montantes) telles que $\text{sign}(\sigma) \geq_p r$.

On rappelle que pour tout $r \in \{1, \dots, p\}$, $Y^r = \bigcup_{i \geq pr} X^i$; on notera désormais $Y = Y^1 = \bigcup_{i \in G} X^i$. On définit de façon analogue $Z^r = \bigcup_{i < pr} X^i$.

Le théorème suivant exprime les séries $\Gamma_r(t)$ et $\Delta_r(t)$ en fonction de cosinus et de sinus symétrique, il donne un analogue symétrique de la proposition 7.1 de (Ehrenborg et Readdy, 1994). La proposition 4.2 de (Désarménien, 1983) énonce ce résultat dans le cas des groupes symétriques, c'est-à-dire quand $p = 1$.

Théorème 4.2 *Pour tout $r \in \{1, \dots, p\}$ on a*

$$i) \quad 1 + \Gamma_r(t) = \frac{SIN_{Y^r}(t) + COS_{Z^r}(t)H_{Y^r}(it)H_{Y^r}(-it)}{COS_Y(t)},$$

$$ii) \quad \Delta_r(t) = \frac{SIN_Y(t) - SIN_{Z^r}(t)H_{Y^r}(it)H_{Y^r}(-it) + 1 - COS_{Y^r}(t)}{COS_Y(t)}.$$

La démonstration de ce résultat est basée sur deux lemmes.

Lemme 4.3 *Pour tout ensemble signé $[S, m]$ on a*

$$S_{[S, m]} = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S \setminus T|} h_{[T, m]}.$$

Preuve D'après le lemme 2.7 on a

$$h_{[S, m]} = \sum_{T \subseteq S} S_{[T, m]}.$$

Si on note $\mu([S, m], [T, m])$ la fonction de Möbius de l'ensemble partiellement ordonné des ensembles signés, on trouve

$$S_{[S, m]} = \sum_{T \subseteq S} \mu([S, m], [T, m]) h_{[T, m]}.$$

Si $[T, m]$ est un ensemble signé il vérifie

$$i \notin T \Rightarrow m(i) \leq_p m(i+1) \quad \text{voir équation (2.2.1).}$$

Dans ce cas, si $[S, m]$ est un ensemble signé tel que $T \subseteq S$ alors $[T, m]$ est un ensemble signé. En effet, si $i \notin S$, alors $i \notin T$ et on a $m(i) \leq_p m(i+1)$.

Donc, pour tous T et S tels que $[T, m]$ et $[S, m]$ soient des ensembles signés avec $T \subseteq S$, l'intervalle $([T, m], [S, m])$ de l'ensemble partiellement ordonné des ensembles signés est isomorphe à l'intervalle (T, S) de l'ensemble partiellement ordonné des ensembles avec l'inclusion. Les fonctions de Möbius sont donc équivalentes sur ces intervalles et l'on a

$$\mu([S, m], [T, m]) = (-1)^{|S \setminus T|}. \quad \square$$

Soit $r \in \{1, \dots, p\}$ fixé, et κ un sous-ensemble de \mathbf{N}^+ . Pour tout $n \geq 1$, on note κ_n l'ensemble $\kappa \cap \{1, \dots, n-1\}$; en particulier $\kappa_1 = \emptyset$. On note $C_n = \sum_{m(1) \geq pr} S_{[\kappa_n, m]}$ où $[\kappa_n, m]$ est considéré comme un sous-ensemble signé de $\{1, \dots, n-1\}$; la somme $\sum_{n \geq 1} C_n t^n$ est alors une généralisation de $\Gamma_r(t)$ et de $\Delta_r(t)$. En vertu du corollaire 2.13, la dimension du caractère $\text{ch}^{-1}(C_n)$ est le nombre de permutations signées σ de G_n ayant pour ensemble de descentes κ_n et telles que $\text{sign}(\sigma(1)) \geq_p r$.

Le lemme suivant donne une récurrence générale sur les C_n .

Lemme 4.4 *Pour tout $n \geq 1$ on a*

$$C_n = (-1)^{|\kappa_n|} h_n(Y^r) + \sum_{k \in \kappa_n} (-1)^{|\kappa_n \setminus \kappa_{k+1}|} h_{n-k}(Y) C_k.$$

Preuve On a pour tout $n \geq 1$

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{m(1) \geq pr} S_{[\kappa_n, m]} \\ &= \sum_{m(1) \geq pr} \sum_{J \subseteq \kappa_n} (-1)^{|\kappa_n \setminus J|} h_{[J, m]} \quad \text{par le lemme 4.3,} \\ &= \sum_{J \subseteq \kappa_n} (-1)^{|\kappa_n \setminus J|} \sum_{m(1) \geq pr} h_{[J, m]}. \end{aligned}$$

Le lemme 2.14 nous permet alors de dire que

$$(4.2.3) \quad C_n = \sum_{J \subseteq \kappa_n} (-1)^{|\kappa_n \setminus J|} h_{c_1}(Y^r) h_{(c_2, \dots, c_l)}(Y),$$

où (c_1, \dots, c_l) est la composition associée à J .

On décompose C_n suivant le plus grand élément de J pour obtenir :

$$C_n = (-1)^{|\kappa_n|} h_n(Y^r) + \sum_{k \in \kappa_n} \sum_{\substack{J \subseteq \kappa_n \\ \max(J) = k}} (-1)^{|\kappa_n \setminus J|} h_{c_1}(Y^r) h_{(c_2, \dots, c_l)}(Y),$$

où le premier terme correspond à $J = \emptyset$.

Pour tout J d'élément maximal k on considère $J' = J \setminus \{k\}$. L'ensemble J' est alors inclus dans κ_k et on remarque que $C(J') = (c_1, \dots, c_{l-1})$ si J'

est considéré comme sous-ensemble de $\{1, \dots, k-1\}$. De plus, on a $|\kappa_n \setminus J| = |\kappa_{k+1} \setminus J| + |\kappa_n \setminus \kappa_{k+1}|$ et $c_l = n - k$. On trouve donc :

$$C_n = (-1)^{|\kappa_n|} h_n(Y^r) + \sum_{k \in \kappa_n} (-1)^{|\kappa_n \setminus \kappa_{k+1}|} h_{n-k}(Y) \sum_{J' \subseteq \kappa_k} (-1)^{|\kappa_k \setminus J'|} h_{c_1}(Y^r) h_{(c_2, \dots, c_{l-1})}(Y).$$

Mais, en vertu de l'équation (4.2.3), la dernière partie du membre de droite est égale à C_k . Ce qui donne :

$$C_n = (-1)^{|\kappa_n|} h_n(Y^r) + \sum_{k \in \kappa_n} (-1)^{|\kappa_n \setminus \kappa_{k+1}|} h_{n-k}(Y) C_k. \quad \square$$

Preuve du théorème 4.2

i) Dans ce cas κ est égal à $K = \{1, 3, 5, \dots\}$. Si $n = 2j$ ou $n = 2j + 1$ on a $K_n = \{1, 3, \dots, 2j - 1\}$ et on trouve

$$C_n = (-1)^{|K_n|} h_n(Y^r) + \sum_{k=0}^{j-1} (-1)^{|K_n \setminus K_{2k+2}|} h_{n-2k-1}(Y) C_{2k+1}.$$

Mais $K_{2k+2} = \{1, 3, \dots, 2k+1\}$ on a donc $|K_n \setminus K_{2k+2}| = j - k - 1$ et $|K_n| = j$. L'équation précédente devient alors :

$$(4.2.4) \quad C_n = (-1)^j h_n(Y^r) + \sum_{k=0}^{j-1} (-1)^{j-k-1} h_{n-2k-1}(Y) C_{2k+1},$$

avec $n = 2j + 1$ ou $n = 2j$.

Si $n = 2j + 1$ on trouve :

$$C_{2j+1} = (-1)^j h_{2j+1}(Y^r) - \sum_{k=0}^{j-1} (-1)^{j-k} h_{2(j-k)}(Y) C_{2k+1},$$

soit

$$\sum_{k=0}^j (-1)^{j-k} h_{2(j-k)}(Y) C_{2k+1} = (-1)^j h_{2j+1}(Y^r).$$

On multiplie cette relation par t^{2j+1} et on fait la somme sur tous les $j \geq 0$. Le membre de gauche devient alors le produit

$$\left(\sum_{k \geq 0} (-1)^k h_{2k}(Y) t^{2k} \right) \left(\sum_{k \geq 0} C_{2k+1} t^{2k+1} \right)$$

et le membre de droite devient

$$\sum_{j \geq 0} (-1)^j h_{2j+1}(Y^r) t^{2j+1} = SIN_{Y^r}(t).$$

On obtient alors

$$(4.2.5) \quad \sum_{k \geq 0} C_{2k+1} t^{2k+1} = \frac{SIN_{Y^r}(t)}{COS_Y(t)}.$$

Si $n = 2j$ l'équation (4.2.4) devient

$$C_{2j} = (-1)^j h_{2j}(Y^r) + \sum_{k=0}^{j-1} (-1)^{j-k-1} h_{2(j-k)-1}(Y) C_{2k+1}.$$

On multiplie cette relation par t^{2j} et on fait la somme sur les $j \geq 1$. On trouve alors

$$\sum_{j \geq 1} C_{2j} t^{2j} = \sum_{j \geq 1} (-1)^j h_{2j}(Y^r) t^{2j} + \sum_{j \geq 1} \sum_{k=0}^{j-1} (-1)^{j-1-k} h_{2(j-1-k)+1}(Y) C_{2k+1} t^{2j}.$$

On remplace j par $j-1$ dans le second terme du membre de droite et on remarque que $\sum_{j \geq 1} (-1)^j h_{2j}(Y^r) t^{2j}$ est égal à $COS_{Y^r}(t) - 1$. Cette relation devient donc :

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{j \geq 1} C_{2j} t^{2j} &= COS_{Y^r}(t) + \sum_{j \geq 0} \sum_{k=0}^j (-1)^{j-k} h_{2(j-k)+1}(Y) t^{2(j-k)+1} C_{2k+1} t^{2k+1} \\ &= COS_{Y^r}(t) + \left(\sum_{k \geq 0} (-1)^k h_{2k+1}(Y) t^{2k+1} \right) \left(\sum_{k \geq 0} C_{2k+1} t^{2k+1} \right) \\ &= COS_{Y^r}(t) + SIN_Y(t) \sum_{k \geq 0} C_{2k+1} t^{2k+1} \\ &= COS_{Y^r}(t) + SIN_Y(t) \frac{SIN_{Y^r}(t)}{COS_Y(t)} \quad \text{par (4.2.5)} \\ &= \frac{COS_{Y^r}(t) COS_Y(t) + SIN_Y(t) SIN_{Y^r}(t)}{COS_Y(t)} \\ &= \frac{COS_{Z^r}(t) H_{Y^r}(it) H_{Y^r}(-it)}{COS_Y(t)} \quad \text{par le lemme 4.1iv).} \end{aligned}$$

On fait la somme de cette dernière relation et de (4.2.5) pour trouver

$$1 + \Gamma_r(t) = 1 + \sum_{n \geq 1} C_n t^n = \frac{SIN_{Y^r}(t) + COS_{Z^r}(t) H_{Y^r}(it) H_{Y^r}(-it)}{COS_Y(t)},$$

ce qui achève la preuve de la première assertion du théorème 4.2.

ii) Dans ce cas κ est égal à $K' = \{2, 4, \dots\}$. Si $n = 2j + 1$ ou $n = 2j + 2$ on a $K_n = \{2, 4, \dots, 2j\}$ et le lemme 4.4 nous donne

$$C_n = (-1)^{|K-n|} h_n(Y^r) + \sum_{k=1}^j (-1)^{|K_n \setminus K_{2k+1}|} h_{n-2k}(Y) C_{2k}.$$

Mais on a $K_{2k+1} = \{2, 4, \dots, 2k\}$ donc $|K_n \setminus K_{2k+1}| = j - k$ et $|K_n| = j$. On trouve ainsi

$$(4.2.6) \quad C_n = (-1)^j h_n(Y^r) + \sum_{k=1}^j (-1)^{j-k} h_{n-2k}(Y) C_{2k}.$$

Si $n = 2j + 2$ on obtient

$$C_{2j+2} = (-1)^j h_{2j+2}(Y^r) + \sum_{k=1}^j (-1)^{j-k} h_{2(j-k+1)}(Y) C_{2k},$$

soit

$$\sum_{k=1}^{j+1} (-1)^{j-k+1} h_{2(j-k+1)}(Y) C_{2k} = (-1)^j h_{2j+2}(Y^r),$$

car si $k = j + 1$ on a $j - k + 1 = 0$ et $h_{2(j-k+1)}(Y) = 1$. On multiplie cette relation par t^{2j+2} et on effectue la somme sur $j \geq 0$:

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq 0} \sum_{k=1}^{j+1} (-1)^{j-k+1} h_{2(j-k+1)}(Y) t^{2(j-k+1)} C_{2k} t^{2k} &= - \sum_{j \geq 0} (-1)^{j+1} h_{2(j+1)}(Y^r) \\ \sum_{j \geq 1} \sum_{k=1}^j (-1)^{j-k} h_{2(j-k)}(Y) t^{2(j-k)} C_{2k} t^{2k} &= -(COS_{Y^r}(t) - 1) \end{aligned}$$

$$\left(\sum_{k \geq 0} (-1)^k h_{2k}(Y) t^{2k} \right) \left(\sum_{k \geq 1} C_{2k} t^{2k} \right) = 1 - COS_{Y^r}(t).$$

Le premier facteur du membre de gauche est $COS_Y(t)$, on trouve ainsi :

$$(4.2.7) \quad \sum_{k \geq 1} C_{2k} t^{2k} = \frac{1 - COS_{Y^r}(t)}{COS_Y(t)}.$$

Si $n = 2j + 1$ l'équation (4.2.6) devient

$$C_{2j+1} = (-1)^j h_{2j+1}(Y^r) + \sum_{k=1}^j (-1)^{j-k} h_{2(j-k)+1}(Y) C_{2k}.$$

On multiplie par t^{2j+1} et on somme sur les $j \geq 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq 1} C_{2j+1} t^{2j+1} &= \sum_{j \geq 1} (-1)^j h_{2j+1}(Y^r) t^{2j+1} \\ &+ \sum_{j \geq 1} \sum_{k=1}^j (-1)^{j-k} h_{2(j-k)+1}(Y) t^{2(j-k)+1} C_{2k} t^{2k} \\ &= SIN_{Y^r}(t) - h_1(Y^r) t + \left(\sum_{k \geq 0} (-1)^k h_{2k+1}(Y) t^{2k+1} \right) \left(\sum_{k \geq 1} C_{2k} t^{2k} \right) \end{aligned}$$

$$= \text{SIN}_{Y^r}(t) - h_1(Y^r)t + \text{SIN}_Y(t) \frac{1 - \text{COS}_{Y^r}(t)}{\text{COS}_Y(t)} \quad \text{par (4.2.7).}$$

Mais on sait que C_1 est égal à $h_1(Y^r)$, on a donc

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq 0} C_{2j+1} t^{2j+1} &= \text{SIN}_{Y^r}(t) + \text{SIN}_Y(t) \frac{1 - \text{COS}_{Y^r}(t)}{\text{COS}_Y(t)} \\ &= \frac{\text{SIN}_{Y^r}(t) \text{COS}_Y(t) + \text{SIN}_Y(t) (1 - \text{COS}_{Y^r}(t))}{\text{COS}_Y(t)} \\ &= \frac{\text{SIN}_Y(t) - \text{SIN}_{Z^r}(t) H_{Y^r}(it) H_{Y^r}(-it)}{\text{COS}_Y(t)}. \end{aligned}$$

Si on additionne cette dernière équation et (4.2.7) on trouve :

$$\sum_{n \geq 1} C_n t^n = \Delta_r(t) = \frac{\text{SIN}_Y(t) - \text{SIN}_{Z^r}(t) H_{Y^r}(it) H_{Y^r}(-it) + 1 - \text{COS}_{Y^r}(t)}{\text{COS}_Y(t)}. \quad \square$$

4.3 Généralisation des polynômes eulériens symétriques

Cette section est consacrée à l'étude d'une généralisation des polynômes eulériens et des fonctions symétriques associées. Nous y donnons la série génératrice (étendant un résultat de (Désarménien, 1983)) des $S_{[T,m]}$ selon le nombre d'éléments de T .

De la même façon que dans la section précédente on fixe $r \in \{1, \dots, p\}$. On note, pour tout $n \geq 1$,

$$C_n(u) = \sum_{\substack{T \subseteq \{1, \dots, n-1\} \\ m(1) \geq pr}} S_{[T,m]} u^{|T|}.$$

On remarquera que r n'apparaît pas dans la notation $C_n(u)$ pour ne pas trop l'alourdir.

Le théorème suivant étend alors la proposition 10.1 de (Désarménien, 1983) aux cas des produits en couronne (on pourra aussi consulter (Stembridge, 1992b)).

Théorème 4.5 *Soit r un élément de $\{1, \dots, p\}$ fixé, on a alors :*

$$C(u) = \sum_{n \geq 1} C_n(u) = \frac{H_{Y^r}(1-u) - 1}{1 - u H_Y(1-u)}.$$

A partir de ce théorème, on peut retrouver des résultats classiques sur les nombres eulériens, notamment la proposition 10.1 de (Désarménien, 1983) qui

donne une série génératrice symétrique analogue à la nôtre dans le cas des groupes symétriques. On retrouve aussi la série génératrice des éléments des groupes hyperoctaédraux comptés avec leur nombre de descentes, voir (Bergeron et Favreau, 1992). On notera aussi la similitude de cette relation dans le cas où $r = 1$ et de celles obtenues dans (Désarménien et Foata, 1991) et (Foata et Zeilberger, 1991).

Preuve La démonstration de ce résultat est essentiellement basée sur le lemme 4.4.

Soit $n \geq 1$ et $T \subseteq \{1, \dots, n-1\}$. Appliquons le lemme 4.4 au cas $\kappa = T$ et multiplions par $u^{|T|}$, on a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{m(1) \geq pr} S_{[T,m]} u^{|T|} &= (-u)^{|T|} h_n(Y^r) + \sum_{k \in T} (-u)^{|T \setminus T_{k+1}|} h_{n-k}(Y) C_k u^{|T_{k+1}|} \\ &= (-u)^{|T|} h_n(Y^r) + u \sum_{k \in T} (-u)^{|T \setminus T_{k+1}|} h_{n-k}(Y) C_k u^{|T_k|}, \end{aligned}$$

car $|T_{k+1}| = |T_k| + 1$.

On effectue maintenant la somme sur tous les $T \subseteq \{1, \dots, n-1\}$ pour obtenir

$$\begin{aligned} C_n(u) &= \sum_{\substack{T \subseteq \{1, \dots, n-1\} \\ m(1) \geq pr}} S_{[T,m]} u^{|T|} \\ &= \sum_{T \subseteq \{1, \dots, n-1\}} (-u)^{|T|} h_n(Y^r) + u \sum_{T \subseteq \{1, \dots, n-1\}} \sum_{k \in T} (-u)^{|T \setminus T_{k+1}|} h_{n-k}(Y) C_k u^{|T_k|} \\ &= (1-u)^{n-1} h_n(Y^r) + u \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{T \subseteq \{1, \dots, n-1\} \\ k \in T}} (-u)^{|T \setminus T_{k+1}|} h_{n-k}(Y) C_k u^{|T_k|} \\ &= (1-u)^{n-1} h_n(Y^r) \\ &\quad + u \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{T^1 \subseteq \{1, \dots, k-1\}} \sum_{T^2 \subseteq \{k+1, \dots, n-1\}} (-u)^{|T^2|} h_{n-k}(Y) C_k u^{|T^1|} \\ &= (1-u)^{n-1} h_n(Y^r) + u \sum_{k=1}^{n-1} h_{n-k}(Y) (1-u)^{n-1-k} C_k(u). \end{aligned}$$

On somme maintenant sur tous les $n \geq 1$ et l'on obtient :

$$\begin{aligned} C(u) &= \sum_{n \geq 1} C_n(u) \\ &= \sum_{n \geq 1} (1-u)^{n-1} h_n(Y^r) + u \sum_{n \geq 1} \sum_{k=1}^{n-1} h_{n-k}(Y) (1-u)^{n-1-k} C_k(u) \\ &= \frac{1}{1-u} (H((1-u)Y^r) - 1) + u \sum_{\substack{k \geq 1 \\ j=n-k \geq 1}} h_j(Y) (1-u)^{j-1} C_k(u) \end{aligned}$$

$$= \frac{(H_{Y^r}(1-u) - 1)}{1-u} + \frac{u}{1-u}(H_Y(1-u) - 1)C(u).$$

On multiplie les deux côtés de cette relation par $1-u$ et l'on remarque qu'il apparaît $-uC(u)$ à droite comme à gauche, on trouve ainsi

$$C(u) = H_{Y^r}(1-u) - 1 + uC(u)H_Y(1-u),$$

d'où l'on tire :

$$C(u) = \frac{H_{Y^r}(1-u) - 1}{1 - uH_Y(1-u)}.$$

□

CHAPITRE 5

CAS DES GROUPES HYPEROCTAHÉDRAUX

5.1 Introduction

Les groupes hyperoctaédraux sont les exemples de produits en couronne les plus étudiés ; en effet leur structure de groupes de Coxeter en fait des objets privilégiés de théorie des groupes. On notera ces groupes $B_n = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \wr S_n$ pour tout n .

Il existe dans le cas de ces groupes une notion d'ensemble de descentes qui n'est pas tout-à-fait celle que nous avons étudié dans ce travail. Cette notion a été définie dans (Solomon, 1968) et a ensuite été intensivement étudiée, notamment par les frères Bergeron ; le lecteur pourra consulter les notices bibliographiques les concernant.

Ce chapitre fait le lien entre ces deux notions et donne des résultats équivalents au théorème 2.11 et corollaire 3.4 pour les ensembles de descentes de Solomon et les représentations des groupes hyperoctaédraux associées, voir (Solomon, 1968).

5.2 Représentations de Solomon pour les groupes hyperoctaédraux

Soit n fixé ; on se donne l'ordre $<$ sur $\{1, \dots, n\} \times \{0, 1\} \cup \{(0, 0)\}$ de la façon suivante :

$$(n, 1) \leq (n-1, 1) \leq \dots \leq (1, 1) \leq (0, 0) \leq (1, 0) \leq \dots \leq (n, 0).$$

On plonge B_n dans $S_{\{1, \dots, n\} \times \{0, 1\} \cup \{(0, 0)\}}$ conformément à la définition de ρ (voir p. 11) ; c'est-à-dire qu'à (g_1, \dots, g_n, s) on associe :

$$\left(\begin{array}{cccccc} (n, 1), & \dots, & (1, 1), & (0, 0), & (1, 0), & \dots, & (n, 0) \\ (s(n), g_n + 1), & \dots, & (s(1), g_1 + 1), & (0, 0), & (s(1), g_1), & \dots, & (s(n), g_n) \end{array} \right).$$

L'ensemble de descentes de Solomon de σ est $Des(\sigma) = \{i | i \in \{0, \dots, n-1\} \text{ et } \sigma((i+1, 0)) \leq \sigma((i, 0))\}$ où σ est considéré comme un élément de $S_{\{1, \dots, n\} \times \{0, 1\}} \cup \{(0, 0)\}$. On remarquera que $1 \in Des(\sigma)$ si et seulement si $sign(\sigma((1, 0))) = 1$.

Comme groupe de Coxeter, B_n est engendré par le sous-ensemble $\{r_0, r_1, \dots, r_{n-1}\}$ de $S_{\{1, \dots, n\} \times \{0, 1\}} \cup \{(0, 0)\}$, où $r_0 = ((1, 0), (1, 1))$ et où $r_i = ((i, 0), (i+1, 0))((i, 1), (i+1, 1))$ pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$. On note I_n l'ensemble $\{0, \dots, n-1\}$; si $K \subseteq I_n$ on note W_K le sous-groupe de B_n engendré par les $r_k, k \in K$.

Remarque Dans (Solomon, 1968) les ensembles de descentes sont définis par rapport à un ensemble de générateurs de B_n : lorsque l'on prend $\{r_0, r_1, \dots, r_{n-1}\}$ on retrouve sa définition.

Soit ϵ le caractère multiplicatif de B_n tel que $\epsilon(r_i) = -1$ pour tout $i \in I_n$. Soit $K \subseteq I_n$; on définit les deux idempotents de $\mathbf{Q}[B_n]$ l'algèbre du groupe B_n :

$$(5.2.1) \quad \xi_K = \frac{1}{|W_K|} \sum_{w \in W_K} w,$$

$$(5.2.2) \quad \eta_K = \frac{1}{|W_K|} \sum_{w \in W_K} \epsilon(w)w.$$

Soit ψ_K (resp. ϕ_K) le caractère de la représentation de B_n sur l'idéal à gauche $\mathbf{Q}[B_n]\xi_{I_n \setminus K}\eta_K$ (resp. $\mathbf{Q}[B_n]\xi_{I_n \setminus K}$). On remarquera que nos notations correspondent aux $\psi_{\hat{K}}$ et aux $\phi_{\hat{K}}$ de (Solomon, 1968). On notera aussi que $\phi_K = \text{ind}_{W_{I_n \setminus K}}^{B_n} \text{triv}_{W_{I_n \setminus K}}$. On peut alors établir la proposition suivante dont on pourra trouver la démonstration dans (Solomon, 1968).

Proposition 5.1 *Si K est un sous-ensemble de I_n on a :*

i) pour tout $g \in B_n$, $\psi_K(g) = \epsilon(g)\psi_{I_n \setminus K}(g)$;

ii) le nombre d'éléments de B_n dont l'ensemble de descentes de Solomon est K est égal à la dimension de la représentation de B_n sur $\mathbf{Q}[B_n]\xi_{I_n \setminus K}\eta_K$, c'est-à-dire à $\psi_K(1_{B_n})$.

Dans toute la suite on notera X pour $X \times \{0\}$ et \bar{X} pour $X \times \{1\}$ et Y désignera $X \cup \bar{X}$. La fonction ch est alors un isomorphisme de l'anneau des caractères des B_n vers $\Lambda(X) \otimes \Lambda(\bar{X})$, voir théorème 1.4.

On va maintenant démontrer le résultat suivant qui exprime les ϕ_K et les ψ_K en fonction des $\chi_{[L, m]}$.

Proposition 5.2 Soient K et J deux sous ensembles de I_n ; on a

$$\phi_K = \begin{cases} \sum_{L \subseteq K \setminus \{0\}} \sum_{m: [n] \rightarrow \{0,1\}} \chi_{[L,m]} & \text{si } 0 \in K ; \\ \sum_{L \subseteq K} \sum_{\substack{m: [n] \rightarrow \{0,1\} \\ m(1) = 0}} \chi_{[L,m]} & \text{si } 0 \notin K. \end{cases}$$

$$\psi_J = \begin{cases} \sum_{\substack{m: [n] \rightarrow \{0,1\} \\ m(1) = 0}} \chi_{[J,m]} & \text{si } 0 \notin J ; \\ \sum_{\substack{m: [n] \rightarrow \{0,1\} \\ m(1) = 1}} \chi_{[J \setminus \{0\}, m]} & \text{si } 0 \in J. \end{cases}$$

La démonstration de ce résultat nécessite le lemme suivant.

Lemme 5.3 Pour tout $n \geq 1$ on a

$$ch(ind_{S_n}^{B_n} triv_{S_n}) = h_n(Y).$$

Preuve On notera, dans la suite, le type cyclique d'un élément σ de B_n à l'aide d'un couple (λ, μ) de partages tels que $\lambda = tc(\sigma)(0)$ et $\mu = tc(\sigma)(1)$.

Pour tout $g \in B_n$, $ind_{S_n}^{B_n} triv_{S_n}(g)$ est égal au nombre de façons de conjuguer g dans B_n pour obtenir un élément de S_n , divisé par $n!$.

On remarque d'abord que les éléments de S_n plongés dans B_n n'ont que des cycles de signe 0. Donc, si g a au moins un cycle de signe 1, on a $ind_{S_n}^{B_n} triv_{S_n}(g) = 0$

Si g n'a que des cycles de signe 0, il est alors conjugué à un élément h de S_n plongé dans B_n et $ind_{S_n}^{B_n} triv_{S_n}(g) = ind_{S_n}^{B_n} triv_{S_n}(h)$. Calculons le nombre de façons de conjuguer $h \in S_n$ dans B_n pour retrouver un élément de S_n . On suppose que $ct(h) = (\lambda, \emptyset)$.

Soit $c = (i_1, \dots, i_k)$ un cycle de h vu comme élément de S_n ; on peut conjuguer h (dans B_n) par la permutation signée $\delta_c : \begin{cases} i_j \mapsto -i_j & \text{pour } i_j \in c \\ a \mapsto a & \text{pour } a \notin c. \end{cases}$

On a alors $\delta_c h \delta_c^{-1} = h$, et pour chaque cycle de h on peut décider ou non de conjuguer par δ_c . Bien entendu, les δ_c commutent : cela donne $2^{l(\lambda)}$ façons de conjuguer h avec des éléments de B_n de la forme $(g_1, \dots, g_n, 1_{S_n})$. On va montrer que ce sont les seules possibilités qui amènent à des éléments de S_n quand $s = 1_{S_n}$.

Soit $\beta = (g_1, \dots, g_n, 1_{S_n})$; supposons que pour un cycle $c = (i_1, \dots, i_k)$ de h il existe j tel que $g_{i_j} = 0$ et $g_{i_{j+1}} = 1$ (ceci est équivalent au fait qu'il existe j tel que $g_{i_j} = 1$ et $g_{i_{j+1}} = 0$). Si on conjugue h par β on trouve alors, en vertu de (1.2.1),

$$\begin{aligned} \beta h \beta^{-1} &= (g_1, \dots, g_n, 1_{S_n})(0, \dots, 0, s)(g_1, \dots, g_n, 1_{S_n}) \\ &= (g_1, \dots, g_n, 1_{S_n})(g_1, \dots, g_n, s) \\ &= (g_{s(1)}g_1, \dots, g_{s(n)}g_n, s). \end{aligned}$$

On trouve donc en position i_j , $g_{s(i_j)}g_{i_j} = g_{i_{j+1}}g_{i_j} = 1$, ce qui montre que $\beta h \beta^{-1}$ n'est pas dans S_n .

Maintenant, comme les $(g_1, \dots, g_n, 1_{S_n})$ forment un système de représentants à droite de S_n dans B_n , on voit qu'il y a $2^{l(\lambda)}n!$ possibilités pour conjuguer h dans B_n et obtenir un élément de S_n . On a donc :

$$\text{ind}_{S_n}^{B_n} \text{triv}_{S_n}(g) = \begin{cases} 0 & \text{si } tc(g) \neq (\lambda, \emptyset) \\ 2^{l(\lambda)} & \text{si } tc(g) = (\lambda, \emptyset). \end{cases}$$

On trouve ainsi, d'après la proposition 1.9 et le lemme 1.10

$$\text{ch}(\text{ind}_{S_n}^{B_n} \text{triv}_{S_n}) = \sum_{\lambda \vdash n} \frac{1}{2^{l(\lambda)} z_\lambda} 2^{l(\lambda)} \prod_{i=1}^{l(\lambda)} (p_{\lambda_i}(X) + p_{\lambda_i}(\bar{X})).$$

Mais on a $p_{\lambda_i}(X) + p_{\lambda_i}(\bar{X}) = p_{\lambda_i}(Y)$, d'où

$$\begin{aligned} \text{ch}(\text{ind}_{S_n}^{B_n} \text{triv}_{S_n}) &= \sum_{\lambda \vdash n} z_\lambda^{-1} p_\lambda(Y) \\ &= h_n \text{ (voir (Macdonald, 1979, p. 17)). } \quad \square \end{aligned}$$

Preuve de la proposition 5.2 Si $0 \in K$ on a $W_{I_n \setminus K} = S_{c_1} \times S_{c_2} \times \dots \times S_{c_i}$ où $c_1 + \dots + c_k = n$ et où $K = \{0, c_1, c_1 + c_2, \dots, c_1 + \dots + c_{k-1}\}$.

Alors

$$\begin{aligned} \phi_K &= \text{ind}_{W_{I_n \setminus K}}^{B_n} \text{triv}_{W_{I_n \setminus K}} \\ &= \text{ind}_{S_{c_1} \times S_{c_2} \times \dots \times S_{c_i}}^{B_n} \text{triv}_{W_{I_n \setminus K}} \\ &= \text{ind}_{B_{c_1} \times B_{c_2} \times \dots \times B_{c_i}}^{B_n} \text{ind}_{S_{c_1} \times \dots \times S_{c_i}}^{B_{c_1} \times \dots \times B_{c_i}} \text{triv}_{W_{I_n \setminus K}}. \end{aligned}$$

Donc, d'après les règles de multiplication dans l'anneau des caractères des groupes hyperoctaédraux, on trouve :

$$\phi_K = \text{ind}_{S_{c_1}}^{B_{c_1}} \text{triv}_{S_{c_1}} \dots \text{ind}_{S_{c_k}}^{B_{c_k}} \text{triv}_{S_{c_k}},$$

dont on déduit, grâce au lemme 5.3 :

$$\text{ch}(\phi_K) = h_{c_1}(Y) \dots h_{c_k}(Y).$$

On a donc

$$\text{ch}(\phi_K) = \sum_{m(1) \geq 1} h_{[K \setminus \{0\}, m]},$$

d'après le lemme 2.14 où l'on prend $r = 1$ et où Y^1 est remplacé par Y . De plus, le lemme 2.7 nous donne :

$$\text{ch}(\phi_K) = \sum_{m(1) \geq 1} \sum_{L \subseteq K \setminus \{0\}} S_{[L, m]}.$$

Si $0 \notin K$ on a $W_{I_n \setminus K} = B_{c_1} \times S_{c_2} \times \dots \times S_{c_k}$ où $c_1 + \dots + c_k = n$ et où $K = \{c_1, c_1 + c_2, \dots, c_1 + \dots + c_{k-1}\}$. De la même façon on trouve

$$\phi_K = \text{ind}_{B_{c_1}}^{B_{c_1}} \text{triv}_{B_{c_1}} \cdot \text{ind}_{S_{c_2}}^{B_{c_2}} \text{triv}_{S_{c_2}} \cdot \dots \cdot \text{ind}_{S_{c_k}}^{B_{c_k}} \text{triv}_{S_{c_k}},$$

ce qui donne, grâce aux lemmes 1.12, 5.3 et à la proposition 1.9 :

$$\text{ch}(\phi_K) = h_{c_1}(X) h_{c_2}(Y) \dots h_{c_k}(Y).$$

Les lemmes 2.7 et 2.14 nous permettent alors de dire :

$$\begin{aligned} \text{ch}(\phi_K) &= \sum_{m(1) \geq 0} h_{[K, m]} \\ &= \sum_{m(1) \geq 0} \sum_{L \subseteq K} S_{[L, m]}, \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\phi_K = \sum_{m(1) \geq 0} \sum_{L \subseteq K} \chi_{[L, m]}.$$

On utilise maintenant la relation $\phi_J = \sum_{K \subseteq J} \psi_K$ donnée dans (Solomon, 1968, lemme 5). Par inversion de Möbius on obtient

$$\psi_J = \sum_{K \subseteq J} (-1)^{|J \setminus K|} \phi_K.$$

Si $0 \notin J$ on a :

$$\begin{aligned} \psi_J &= \sum_{K \subseteq J} (-1)^{|J \setminus K|} \sum_{L \subseteq K} \sum_{m(1) \geq 0} \chi_{[L, m]} \\ &= \sum_{L \subseteq K \subseteq J} (-1)^{|J \setminus K|} \sum_{m(1) \geq 0} \chi_{[L, m]} \\ &= \sum_{m(1) \geq 0} \chi_{[J, m]} \end{aligned}$$

Si $0 \in J$ on a :

$$\begin{aligned}
\psi_J &= \sum_{K \subseteq J \setminus \{0\}} (-1)^{|J \setminus K|} \sum_{L \subseteq K} \sum_{m(1) \geq 0} \chi_{[L, m]} + \sum_{K \subseteq J \setminus \{0\}} (-1)^{|J \setminus K| - 1} \sum_{L \subseteq K} \sum_{m(1) \geq 1} \chi_{[L, m]} \\
&= \sum_{K \subseteq J \setminus \{0\}} (-1)^{|J \setminus K|} \sum_{L \subseteq K} \sum_{m(1) = 1} \chi_{[L, m]} \\
&= \sum_{m(1) = 1} \chi_{[J \setminus \{0\}, m]}. \quad \square
\end{aligned}$$

On définit, pour tout alphabet A l'automorphisme isométrique ω de $\Lambda(A)$ par

$$\omega(s_\lambda(A)) = s_{\lambda'}(A),$$

où λ' désigne le partage conjugué de λ , voir (Macdonald, 1979, p.2). Soient ω_0 et ω_1 les automorphismes isométriques de $\Lambda(X) \otimes \Lambda(\bar{X})$ définis par

$$(5.2.3) \quad \omega_0(s_\lambda(X) \otimes s_\mu(\bar{X})) = \omega(s_\lambda(X)) \otimes s_\mu(\bar{X})$$

$$(5.2.4) \quad \omega_1(s_\lambda(X) \otimes s_\mu(\bar{X})) = s_\lambda(X) \otimes \omega(s_\mu(\bar{X})).$$

On notera ω'_0 et ω'_1 les automorphismes correspondants sur l'algèbre des caractères des groupes B_n .

Le résultat suivant se déduit alors du théorème 2.9.

Théorème 5.4 *Si Π est un sous-ensemble de B_n dont la série génératrice quasi-symétrique g est symétrique en chacun des alphabets X et \bar{X} , alors le nombre d'éléments de Π ayant pour ensemble de descentes de Solomon K est égal à $\langle g, \omega_1(ch(\psi_K)) \rangle$.*

Avant de démontrer ce résultat, on va faire quelques remarques et prouver un lemme intermédiaire.

Soit σ un élément de B_n ayant pour ensemble de descente de Solomon K et pour ensemble de descentes signé $[S, m]$. On a alors le lien suivant entre K et $[S, m]$:

$$\begin{aligned}
(5.2.5) \quad & \bullet i \in K \Leftrightarrow (i \in S \text{ et } m(i) = 0 \text{ ou } m(i+1) = 0) \text{ ou} \\
& (i \notin S \text{ et } m(i) = 1 \text{ et } m(i+1) = 1) \\
& \bullet 0 \in K \Leftrightarrow m(1) = 1.
\end{aligned}$$

En effet, on a $(n, 1) < (n-1, 1) < \dots < (1, 1) < (1, 0) < \dots < (n, 0)$, alors que l'ordre utilisé pour définir l'ensemble de descentes signé est $(1, 1) <_r (2, 1) <_r \dots <_r (n, 1) <_r (1, 0) <_r \dots <_r (n, 0)$. Il faut donc renverser l'ordre sur les éléments négatifs.

De plus, l'équivalence dans (5.2.5) montre que si σ a pour ensemble de descentes signé $[S, m]$, alors σ a pour ensemble de descentes de Solomon K . On note $Sig(K)$ l'ensemble des ensembles de descentes signés $[S, m]$ qui vérifient (5.2.5) pour K . On a alors le résultat suivant.

Lemme 5.5 *Pour tout $K \subseteq I_n$ on a*

$$\omega_1(ch(\psi_K)) = \sum_{[S,m] \in \text{Sig}(K)} S_{[S,m]}.$$

Preuve On va d'abord montrer que pour tout $K \subseteq I_n$ et toute fonction de signe m on a :

$$S_{[K,m]} = \omega_1(S_{[S,m]})$$

où $[S, m]$ et K vérifient (5.2.5). On note $\theta(m)$ la composition de n (c_1, \dots, c_k) où

$$\begin{aligned} m(1) &= \dots = m(c_1) \\ m(c_1 + 1) &= \dots = m(c_1 + c_2) = m(1) + 1 \\ m(c_1 + c_2 + 1) &= \dots = m(c_1 + c_2 + c_3) = m(1) \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \end{aligned}$$

Pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$ on note $S_i = S \cap \{c_1 + \dots + c_{i-1} + 1, \dots, c_1 + \dots + c_i - 1\}$ et $S'_i = \{x - c_1 + \dots + c_{i-1} \mid x \in S_i\} \subseteq \{1, \dots, c_i - 1\}$. On ne considère pas les valeurs des $c_1 + \dots + c_i$ car à chaque changement de signe on force l'appartenance ou non de $c_1 + \dots + c_i$ à S .

Dans la discussion suivant le théorème 2.9 on a vu que les remplissages des blocs de différents signes d'une p -forme sont indépendants, ainsi que ceux de composantes connexes différentes. La série $S_{[S,m]}$ est donc égale à un produit de $S_C(X)$ et de $S_C(\overline{X})$ (voir la remarque suivant la preuve du lemme 2.7 p. 44).

On suppose $0 \in K$, on a $m(1) = 1$ et alors

$$S_{[S,m]} = \prod_{i=1}^{[k/2]+1} S_{S'_{2i-1}}(\overline{X}) S_{S'_{2i}}(X).$$

Si S'_j n'est pas défini on convient que $S_{S'_j} = 1$.

Mais on sait que pour tout alphabet A , si l'on applique ω à S_K où $K \subseteq \{1, \dots, n-1\}$ on obtient $S_{\{1, \dots, n-1\} \setminus K}$, voir (Solomon, 1968, lemme 7). On a donc :

$$\omega_1(S_{[S,m]}) = \prod_{i=1}^{[k/2]+1} S_{I'_{c_{2i-1}} \setminus S'_{2i-1}}(\overline{X}) S_{S'_{2i}}(X).$$

D'autre part on a

$$S_{[K,m]} = \prod_{i=1}^{[k/2]+1} S_{K'_{2i-1}}(\overline{X}) S_{K'_{2i}}(X),$$

et l'équation (5.2.5) nous donne :

$$\begin{aligned} i \in K_{2i-1} &\Leftrightarrow i \notin S_{2i-1} && \text{donc } K'_{2i-1} = I'_{c_{2i-1}} \setminus S'_{2i-1} \\ i \in K_{2i} &\Leftrightarrow i \in S_{2i} && \text{donc } K'_{2i} = S'_{2i}, \end{aligned}$$

ce qui montre que

$$S_{[K,m]} = \omega_1(S_{[S,m]}).$$

De la même façon, si $0 \notin K$ on a $m(1) = 0$ et

$$S_{[S,m]} = \prod_{i=1}^{[k/2]+1} S_{S'_{2i-1}}(X) S_{S'_{2i}}(\bar{X}),$$

ce qui donne

$$\omega_1(S_{[S,m]}) = \prod_{i=1}^{[k/2]+1} S_{S'_{2i-1}}(X) S_{I'_{c_{2i}} \setminus S'_{2i}}(\bar{X}).$$

On a de même :

$$S_{[K,m]} = \prod_{i=1}^{[k/2]+1} S_{K'_{2i-1}}(X) S_{K'_{2i}}(\bar{X}),$$

et l'équation (5.2.5) nous donne cette fois ci :

$$\begin{aligned} i \in K_{2i} &\Leftrightarrow i \notin S_{2i} && \text{donc } K'_{2i} = I'_{c_{2i}} \setminus S'_{2i} \\ i \in K_{2i-1} &\Leftrightarrow i \in S_{2i-1} && \text{donc } K'_{2i-1} = S'_{2i-1}, \end{aligned}$$

d'où

$$S_{[K,m]} = \omega_1(S_{[S,m]}). \quad \square$$

Preuve du théorème 5.4 Le théorème 2.9 et l'équivalence dans (5.2.5) montrent que le nombre d'éléments de Π ayant pour ensemble de descentes de Solomon K est égal à

$$\langle g, \sum_{[S,m] \in \text{Sig}(K)} S_{[S,m]} \rangle .$$

Mais le lemme 5.5 nous dit que

$$\omega_1(\text{ch}(\psi_K)) = \sum_{[S,m] \in \text{Sig}(K)} S_{[S,m]},$$

le nombre d'éléments de Π ayant pour ensemble de descentes de Solomon K est donc

$$\langle g, \omega_1(\text{ch}(\psi_K)) \rangle . \quad \square$$

On peut alors prouver les deux corollaires suivants qui étendent au cas des groupes hyperoctaédraux respectivement le théorème 2.1 de (Gessel et Reutenauer, 1993) et le théorème 5 de (Gessel, 1984).

Corollaire 5.6 *Le nombre d'éléments de B_n de type cyclique (λ, μ) et d'ensemble de descentes de Solomon K est égal à*

$$\langle \psi_K, \omega'_1(\chi_{(\lambda, \mu)}) \rangle .$$

Preuve C'est une conséquence immédiate du fait que ω'_1 est une isométrie involutive de R et des théorèmes 3.2 et 5.4. \square

Corollaire 5.7 *Le nombre d'éléments de B_n ayant pour ensemble de descentes de Solomon K et dont l'inverse a pour ensemble de descentes de Solomon J est égal à*

$$\langle \psi_K, \psi_J \rangle .$$

Preuve Le lemme 2.12 assure que la série génératrice quasi-symétrique des éléments σ de B_n tels que $(\tilde{\sigma})^{-1}$ ait pour ensemble de descentes signé $[T, f]$ est $S_{[T, f]}$. Mais dans le cas particulier qui nous intéresse on a $G = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et $\tilde{\sigma} = \sigma$. La fonction $S_{[T, f]}$ est donc la série génératrice quasi-symétrique des éléments de B_n dont l'inverse a pour ensemble de descentes signé $[T, f]$. D'après l'équation (5.2.5) la série génératrice quasi-symétrique des éléments de B_n dont l'inverse a pour ensemble de descentes de Solomon K est donc :

$$\sum_{[S, m] \in \text{Sig}(K)} S_{[S, m]} .$$

Le théorème 5.4 et le lemme 5.5 achèvent la preuve du corollaire. \square

CHAPITRE 6

ALGÈBRES DE HOPF DE TABLEAUX

6.1 Résumé

Nous montrons que les deux structures duales d'algèbre de Hopf introduites dans (Malvenuto et Reutenauer, 1995) sur le \mathbf{Z} -module $\mathbf{Z}S$ de base l'ensemble S de toutes les permutations, sont libres, comme algèbres associatives. Par restriction aux classes plaxiques, nous obtenons deux structures duales d'algèbre de Hopf sur $\mathbf{Z}T$, le \mathbf{Z} -module de base l'ensemble T de tous les tableaux standards. L'une d'elles est libre, comme algèbre associative. Nous étudions plusieurs homomorphismes entre ces structures et les algèbres des descentes, des fonctions symétriques et quasi-symétriques; en particulier, l'évacuation est un anti-automorphisme pour ces structures, la fonction qui envoie une permutation sur son tableau gauche (dans l'algorithme de Robinson-Schensted) est un homomorphisme, et l'algèbre des fonctions symétriques est plongée dans $\mathbf{Z}T$. Nous décrivons tous ces produits et coproduits avec le jeu de taquin.

6.2 Introduction

La théorie des caractères du groupe symétrique, i.e des fonctions symétriques, s'est depuis longtemps nourrie de la combinatoire des tableaux de Young, comme l'algorithme de Robinson-Schensted, le jeu de taquin et l'évacuation. Dans cet article, nous définissons des structures algébriques sur les tableaux, autres que celle du monoïde plaxique, où ces constructions combinatoires induisent des produits, coproduits et homomorphismes.

Nous partons de deux structures d'algèbre de Hopf sur le \mathbf{Z} -module de base les permutations, à la fois duales et conjuguées l'une de l'autre, introduites naturellement dans (Malvenuto et Reutenauer, 1995) à partir de la dualité entre algèbre des descentes et fonctions quasi-symétriques (voir aussi (Gelfand et al.)); par restriction aux classes plaxiques (classes de Knuth), on obtient deux struc-

tures d'algèbre de Hopf sur le \mathbf{Z} -module $\mathbf{Z}T$ de base les tableaux de Young standards.

Nous montrons que $\mathbf{Z}S$ avec ces deux produits, et $\mathbf{Z}T$ avec l'un d'eux, est une algèbre associative libre. On obtient donc un exemple de bigèbre très fortement non commutative et non co-commutative. Nous étudions divers homomorphismes de ces structures : en particulier, l'évacuation est un anti-automorphisme, et la fonction qui à une permutation associe son tableau gauche (dans l'algorithme de Robinson-Schensted) est un homomorphisme. Finalement, nous décrivons tous ces produits et coproduits par jeu de taquin.

L'auteur remercie Alain Lascoux pour une discussion téléphonique éclairante qu'il a eu avec Christophe Reutenauer sur le mélange des classes plaxiques.

6.3 Algèbre de Hopf sur les permutations

Nous notons $\mathbf{Z}S$ le \mathbf{Z} -module libre engendré par $S = \bigcup_{n \geq 0} S_n$, la réunion disjointe des groupes symétriques; en particulier, $S_0 = \{\epsilon\}$, et les éléments de S_n sont notés comme des mots sur l'alphabet $\{1, 2, \dots, n\}$.

En (Malvenuto et Reutenauer, 1995) ont été introduites deux structures d'algèbre de Hopf sur $\mathbf{Z}S$. Nous rappelons comment. Pour $\alpha \in S_n, \beta \in S_p$, nous notons $\bar{\beta}$ le mot obtenu en rajoutant n à chaque lettre de β . Alors $\alpha * \beta = \alpha \sqcup \bar{\beta}$, le mélange (shuffle) des mots α et $\bar{\beta}$. Pour un mot u sur $\{1, 2, \dots\}$, sans répétition de lettres, $st(u)$ désigne la permutation standardisée de u , c'est-à-dire la permutation de longueur égale à la longueur de u obtenue en appliquant à u l'unique fonction injective croissante de l'ensemble des lettres de u sur $\{1, 2, \dots, |u|\}$. Alors

$$\delta(\alpha) = \sum_{\alpha=uv} st(u) \otimes st(v)$$

(uv désigne dans ce chapitre le concaténé des mots u et v).

Le produit $*'$ et le coproduit δ' sont définis de la manière suivante : $\alpha *' \beta = \sum uv$, où la somme est sur tous les mots u et v tels que $st(u) = \alpha, st(v) = \beta$ et que le mot concaténé uv est une permutation dans S_{n+p} . On note α_I le mot obtenu en effaçant dans α les lettres en dehors de $I \subseteq \{1, \dots, n\}$. Alors

$$\delta'(\alpha) = \sum_{i=0}^n \alpha_{\{1, \dots, i\}} \otimes \alpha_{\{i+1, \dots, n\}} \in \mathbf{Z}S \otimes \mathbf{Z}S.$$

Par exemple, $\delta'(3124) = \epsilon \otimes 3124 + 1 \otimes 213 + 12 \otimes 12 + 312 \otimes 1 + 3124 \otimes \epsilon$.

Le produit $*$ et le coproduit δ (resp. $*'$ et δ') font de $\mathbf{Z}S$ une algèbre de Hopf graduée. Ces deux algèbres de Hopf sont duales l'une de l'autre, pour le produit scalaire \langle, \rangle sur $\mathbf{Z}S$ pour lequel S est une base orthonormale. On a donc, pour tous x, y, z dans $\mathbf{Z}S$

$$(6.3.1) \quad \begin{aligned} \langle x * y, z \rangle &= \langle x \otimes y, \delta'(z) \rangle, \\ \langle x *' y, z \rangle &= \langle x \otimes y, \delta(z) \rangle. \end{aligned}$$

Par ailleurs, soit θ l'involution linéaire de \mathbf{ZS} qui envoie la permutation α sur son inverse. Alors les deux algèbres de Hopf sont conjuguées sous θ , i.e

$$(6.3.2) \quad \begin{aligned} \theta(x * y) &= \theta(x) *' \theta(y), \\ (\theta \otimes \theta) \circ \delta(x) &= \delta' \circ \theta(x). \end{aligned}$$

Pour ces résultats, voir (Malvenuto et Reutenauer, 1995) (où les symboles $*$, $*'$ et δ , δ' sont échangés).

Nous appellerons *permutation connexe* une permutation $\alpha \in S_n$, $n \neq 0$, qui ne préserve aucun sous-intervalle de la forme $\{1, \dots, i\}$, $i < n$; autrement dit, α n'est dans aucun sous-groupe de Young propre de S_n . Plus généralement, le *type de connexité* $\tau(\alpha)$ est le k -uplet (i_1, \dots, i_k) tel que le sous-groupe de Young minimum de S_n contenant α soit $S_{i_1} \dots S_{i_k}$. Les types de connexités sont ordonnés par l'ordre d'inclusion des sous-groupes de Young. Par analogie, le *type de connexité d'un mot* sera celui de son standardisé. Définissons un produit associatif \square sur S par : $\alpha \in S_n, \beta \in S_p, \alpha \square \beta = \alpha\beta \in S_{n+p}$. Il est clair que S avec \square est un monoïde librement engendré par les permutations connexes.

Théorème 6.1 *L'algèbre associative \mathbf{ZS} est librement engendré par les permutations connexes, pour chacun des produits $*$ et $*'$.*

Nous avons besoin du

Lemme 6.2 *Soient $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ des permutations connexes et $\alpha = \sigma_1 \square \dots \square \sigma_k$. Alors $\sigma_1 * \dots * \sigma_k = \alpha +$ des permutations de type de connexité plus grand que celui de α .*

Preuve Par définition du mélange, chaque permutation $\neq \alpha$ apparaissant dans le produit

$\sigma_1 * \dots * \sigma_k$ s'obtient à partir de α par une chaîne de transformations élémentaires du type $uijv \rightarrow ujiv$, $i < j$, où de plus la première transformation satisfait à : (*) $uijv = \beta \square \gamma$, $|\beta| = ui$ et $|\gamma| = |jv|$. Il suffit donc de montrer que $\tau(uijv) \leq \tau(ujiv)$, avec inégalité stricte si (*) est satisfaite.

Or ceci découle des deux remarques suivantes :

- (i) si $xijv$ est connexe et $i < j$, alors $xjiv$ l'est aussi.
- (ii) si xi et jv sont connexes, alors $xjiv$ est connexe. □

Preuve du théorème 6.1 En vertu du lemme 6.2, il suffit de démontrer ce résultat pour $*$, car l'inverse d'une permutation connexe est connexe. Or toute permutation α s'écrit de manière unique $\alpha = \sigma_1 \square \dots \square \sigma_k$, où les σ_i sont connexes. Alors $\sigma_1 * \dots * \sigma_k = \alpha +$ des permutations de types plus grand que α . On en déduit, par triangularité, que les $\sigma_1 * \dots * \sigma_k$ forment une base de \mathbf{ZS} , i.e que les permutations connexes engendrent librement \mathbf{ZS} . □

6.4 Algèbres de Hopf sur les tableaux de Young

Soit T l'ensemble des tableaux de Young standards (nous dirons tableau), et \mathbf{ZT} le \mathbf{Z} -module de base T . Nous allons munir \mathbf{ZT} de deux structures d'algèbre de

Hopf, duales entre elles, pour le produit scalaire \langle , \rangle qui fait de T une base orthonormale.

Soit $\alpha \leq$. ($tg(\alpha)$, $td(\alpha)$) la transformation de Robinson-Schensted, qui associe à chaque permutation une paire de tableaux de même forme. Rappelons que, si A est un alphabet totalement ordonné, la *congruence plaxique* (Lascoux et Schützenberger, 1981) sur le monoïde libre A^* est engendrée par les relations :

$bac \sim bca$, $acb \sim cab$, $baa \sim aba$, $bba \sim bab$, où $a < b < c$, $a, b, c \in A$. D'après le théorème de (Knuth, 1970), on a $tg(\alpha) = tg(\beta)$ si et seulement si $\alpha \sim \beta$. À chaque tableau t , nous pouvons associer sa classe plaxique $c(t)$, i.e l'ensemble des permutations α telles que $tg(\alpha) = t$; nous identifions $c(t)$ avec la somme de ses éléments dans \mathbf{ZS} ; notons C l'ensemble des éléments de \mathbf{ZS} ainsi obtenus et \mathbf{ZC} le sous-module de \mathbf{ZS} de base C .

Théorème 6.3 *Le sous-module \mathbf{ZC} de \mathbf{ZS} est une sous-algèbre de Hopf pour le produit $*$ et le coproduit δ .*

En vertu de l'isomorphisme linéaire évident $\mathbf{ZC} \simeq \mathbf{ZT}$ (à chaque tableau est associé sa classe plaxique), nous obtenons ainsi une première structure d'algèbre de Hopf sur \mathbf{ZT} , notée $*$ et δ .

Preuve D'après un théorème de Lascoux et Schützenberger voir (Lascoux et Schützenberger, 1981), le mélange de deux classes plaxiques sur des alphabets A et B satisfaisant à : $\forall a \in A, \forall b \in B, a < b$, est une somme de classes plaxiques. Ceci implique immédiatement, vu la définition du produit $*$, que \mathbf{ZC} est une sous-algèbre de \mathbf{ZS} .

Soit c une classe plaxique de permutations; si $uv \in c$, $u \sim u'$ et $v \sim v'$, alors $uv \sim u'v'$ et par suite $u'v' \in c$. Comme la somme $\sum_{uv \in c} u \otimes v$ est sans multiplicité, elle est une somme de $c_1 \otimes c_2$, où c_1, c_2 sont des classes plaxiques. Enfin, comme $u \mapsto st(u)$ consiste à renommer les lettres de u de manière croissante, $\delta(\sum_{\alpha \in c} \alpha) = \sum_{uv \in c} st(u) \otimes st(v)$ est dans $\mathbf{ZC} \otimes \mathbf{ZC}$. \square

Nous dirons qu'un tableau est *connexe* si dans sa classe plaxique toutes les permutations sont connexes. Plus généralement, le type de connexité d'un tableau t est l'unique k -uplet (i_1, \dots, i_k) tel que t soit la classe plaxique d'une permutation de ce type, et que (i_1, \dots, i_k) soit la composition la plus fine possible (i.e le sous-groupe de Young $S_{i_1} \dots S_{i_k}$ est le plus petit possible). Le fait que ce type soit bien défini découle de l'observation suivante : si α, β (resp. α', β') sont des mots multilinéaires sur les alphabets $\{1, \dots, p\}$, $\{p+1, \dots, p+q+r\}$, (resp. $\{1, \dots, p+q\}$, $\{p+q+1, \dots, p+q+r\}$) et si $\alpha\beta \sim \alpha'\beta'$, alors ces deux derniers mots sont encore plaxiquement équivalents à $\alpha\gamma\beta'$, où γ est multilinéaire sur l'alphabet $\{p+1, \dots, p+q\}$; d'après (Lascoux et Schützenberger, 1980 ; Lascoux et Schützenberger, 1981), la congruence plaxique est en effet compatible aux restrictions d'intervalles, donc par projection sur l'intervalle $\{1, \dots, p+q\}$, nous obtenons $\alpha' \sim \alpha\gamma$, où γ est la projection de β . Par conséquent, si $\alpha \sim \beta$ et si $\alpha \in H, \beta \in G$ (G, H sous-groupes de Young), il existe $\gamma \in H \cap G$ tel que $\alpha \sim \gamma \sim \beta$.

Théorème 6.4 *L'algèbre ZT est librement engendrée par les tableaux connexes.*

Soient $t = tg(\alpha)$, $t' = tg(\alpha')$. Définissons $t \square t' =$ le tableau gauche de $\alpha \square \alpha'$. D'après le théorème de Knuth, ceci définit un produit sur T , qui devient un monoïde librement engendré par les tableaux connexes. Le théorème est alors conséquence du lemme suivant.

Lemme 6.5 *Soient t_1, \dots, t_k des tableaux connexes et $t = t_1 \square \dots \square t_k$. Alors $t_1 * \dots * t_k = t$ plus des tableaux de type de connexité plus grand que celui de t .*

Preuve Nous notons c_1, \dots, c_k, c les classes plaxiques correspondantes. Alors c_i ne contient que des permutations connexes. Donc dans ZS ,

$$\begin{aligned} c_1 * \dots * c_k &= \sum_{\alpha_i \in c_i} \alpha_1 * \dots * \alpha_k \\ &= \sum_{\alpha_i \in c_i} \alpha_1 \square \dots \square \alpha_k + x, \end{aligned}$$

où x est d'après le lemme 2.2 une somme de permutations dont le type de connexité est plus grand (i.e la composition est moins fixe) que celui de $\alpha_1 \square \dots \square \alpha_k$. Ces derniers ont tous même type de connexité τ , et sont plaxiquement équivalents, dans la classe c . Donc $c_1 * \dots * c_k = c +$ des classes dont toutes les permutations ont un type plus grand que τ , ce qui démontre le lemme. \square

Nous décrivons maintenant l'autre structure d'algèbre de Hopf sur ZT . Nous la construisons comme quotient de $(ZS, *, \delta')$.

Théorème 6.6 *Le sous-module I de ZS engendré par les éléments $\alpha - \beta$, $\alpha, \beta \in S$, $\alpha \sim \beta$, est un idéal et un co-idéal de $(ZS, *, \delta')$. L'algèbre de Hopf quotient ZS/I est canoniquement en dualité avec ZC , dont la base des classes $(c)_{c \in C}$ admet la base duale $(\alpha_c \text{ mod. } I)_{c \in C}$, pour tout choix des α_c dans c .*

Preuve Visiblement, I est l'orthogonal dans ZS pour \langle, \rangle de ZC . C'est un fait général que l'orthogonal d'une sous-algèbre de Hopf est un idéal et un co-idéal de l'algèbre de Hopf duale. Du reste, on vérifiera sans peine ce fait ici, car $\alpha \sim \beta$ implique que :

- (i) $\alpha *' \gamma - \beta *' \gamma$ et $\gamma *' \alpha - \gamma *' \beta$ sont chacun somme de $u - v$, $u \sim v$, et :
- (ii) $\delta'(\alpha - \beta)$ est une somme de $(u - v) \otimes w$ et de $w \otimes (u - v)$, avec $u \sim v$.

La première condition exprime que I est un idéal, et la seconde que $\delta'(I) \subseteq I \otimes ZS + ZS \otimes I$, i.e I est un co-idéal.

Le reste du théorème en découle. \square

Comme on a l'isomorphisme de Z -modules $ZT \simeq ZS/I$ (à chaque tableau t est associé $\alpha \text{ mod. } I$, où α est choisi quelconque dans la classe plaxique de t), on obtient une structure d'algèbre de Hopf sur ZT , notée $*'$ et δ' .

Remarque ZT avec le produit $*'$ n'est ni commutative, ni une algèbre associative libre. On a en effet dans ZS : $312 *' 1 = 3124 + 4123 + 4132 + 4231$

et $1 *' 312 = 4312 + 3412 + 2413 + 1423$ et ces deux éléments ne sont pas égaux mod. I . De plus, on a $1 *' 21 = 132 + 231 + 321 \equiv 312 + 213 + 321 \pmod{I} = 21 *' 1$. Si \mathbf{ZS}/I était une algèbre associative libre, il faudrait d'après le théorème de Bergman (Cohn, 1985) que 1 et $21 \pmod{I}$ soient dans une sous-algèbre monogène de \mathbf{ZS}/I . Mais ceci n'est pas possible, parce que \mathbf{ZS}/I est gradué, que $1 *' 1 = 12 + 21$ et que $12 \not\equiv 21 \pmod{I}$.

6.5 Homomorphismes

Soit α dans S_n . Désignons par w_n l'élément $n \dots 21$ de S_n . Nous notons $\alpha \circ \beta$ le produit dans le groupe symétrique S_n .

Théorème 6.7 *L'application linéaire $\alpha \mapsto \alpha \circ w_n$ (resp. $\alpha \mapsto w_n \circ \alpha$), $\alpha \in S_n$, est un automorphisme pour $*$ et δ' (resp. $*'$ et δ) et un anti-automorphisme pour $*'$ et δ (resp. $*$ et δ'). En particulier, $\alpha \mapsto w_n \circ \alpha \circ w_n$ est un anti-automorphisme pour les deux structures d'algèbre de Hopf sur \mathbf{ZS} .*

On notera que $\alpha \circ w_n$ est (en mot) l'image miroir de α , alors que $w_n \circ \alpha$ est obtenu en remplaçant dans le mot α chaque i par $n + 1 - i$.

Preuve D'après (6.3.1) et (6.3.2), comme θ échange les deux applications et que chacune d'elles est sa propre adjointe pour $<, >$, il suffit de montrer que la première (soit φ) est un automorphisme pour $*$ et un anti-automorphisme pour δ .

On a $\varphi(\alpha * \beta) = \varphi(\alpha \sqcup \bar{\beta}) = \varphi(\alpha) \sqcup \varphi(\bar{\beta})$ (puisque l'image miroir est un automorphisme pour le mélange) $= \varphi(\alpha) \sqcup \varphi(\beta) = \varphi(\alpha) * \varphi(\beta)$. Soit τ l'application qui échange les facteurs dans $\mathbf{ZS} \otimes \mathbf{ZS}$. Alors $\tau \delta \varphi(\alpha) = \sum_{uv=\varphi\alpha} st(u) \otimes st(v) = \sum_{\alpha=xy} st(\varphi x) \otimes st(\varphi y) = \sum_{\alpha=xy} \varphi st(x) \otimes \varphi st(y) = (\varphi \otimes \varphi) \delta(\alpha)$, ce qui prouve que φ est un anti-automorphisme pour δ . \square

Nous allons voir que l'évacuation des tableaux, définie dans (Schützenberger, 1963), est un anti-automorphisme pour les structures d'algèbre de Hopf de \mathbf{ZT} . Rappelons par un exemple comment est définie la *promotion* d'un tableau sur $\{1, \dots, n\}$: on définit la *traî née*, et l'on fait glisser vers le bas les éléments dans la traî née, en remplaçant le dernier par $n + 1$; on obtient alors un tableau sur $\{2, \dots, n + 1\}$, qu'on standardise : voir Figure 4.1.

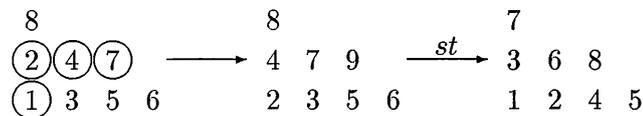


figure 4.1

La k -promotion d'un tableau t sur $\{1, \dots, n\}$, $k < n$, est l'opération qui consiste à appliquer la promotion à son sous-tableau sur $\{1, \dots, k\}$. L'évacuation de t est l'opération qui consiste à appliquer successivement la n -promotion, puis la $(n - 1)$ -promotion etc. . . , jusqu'à la 1-promotion. Notons $e\mathcal{V}(t)$ le tableau évacué de t , et $tr(t)$ le tableau transposé de t . Les deux opérations sont involutives.

Théorème 6.8 *L'automorphisme linéaire $t \mapsto tr(t)$ de ZT est un automorphisme pour $*$ et δ' et un anti-automorphisme pour $*'$ et δ . L'automorphisme linéaire $t \mapsto e\vartheta(t)$ de ZT est un anti-automorphisme pour ces deux structures d'algèbre de Hopf.*

Preuve Comme ZC est une sous-algèbre de Hopf de ZS , stable sous $\alpha \mapsto \alpha \circ w_n$ (puisque l'image miroir d'une classe plaxique est une classe plaxique), le théorème 4.1 montre que cette application induit un automorphisme pour $*$ et un anti-automorphisme pour δ . De plus, d'après un théorème de (Schensted, 1961), $tg(\alpha \circ w_n) = tr(tg(\alpha))$. On déduit l'assertion pour $*$ et δ . Celle pour $*'$ et δ en découle par dualité.

Démontrons la seconde pour $(ZT, *, \delta)$: le reste découlera par dualité. Il est facile de voir que $\alpha \mapsto w_n \circ \alpha \circ w_n$ transforme une classe plaxique en une classe plaxique (voir la remarque qui suit le Th. 4.1). Donc la restriction de cette application à ZC est un anti-automorphisme de cette algèbre de Hopf, d'après le Th. 4.1. Mais un théorème de Schützenberger (Schützenberger, 1963) affirme que

$tg(w_n \circ \alpha \circ w_n)$ est le tableau obtenu par évacuation du tableau $tg(\alpha)$. Le théorème en découle. \square

Notons $p(\alpha)$ la *composition de descentes* de α et $F_{p(\alpha)}$ la fonction quasi-symétrique associée, avec les notations de (Gessel, 1984); $QSym$ désigne l'algèbre de Hopf des fonctions quasi-symétriques, Λ l'algèbre de Hopf des fonctions symétriques, et Σ l'algèbre de Hopf des descentes.

L'application $\alpha \mapsto F_{p(\alpha)}$ est un homomorphisme surjectif d'algèbres de Hopf de $(ZS, *, \delta)$ dans $QSym$; l'application adjointe est l'injection canonique de Σ dans ZS : c'est un homomorphisme injectif d'algèbre de Hopf de Σ dans $(ZS, *', \delta')$. Pour ces résultats voir (Malvenuto et Reutenauer, 1995).

Théorème 6.9 (i) *L'application linéaire $(ZT, *, \delta) \rightarrow \Lambda$ qui envoie un tableau t de forme λ sur la fonction de Schur s_λ est un homomorphisme surjectif d'algèbres de Hopf.*

(ii) *L'application linéaire $\Lambda \rightarrow (ZT, *', \delta')$ qui envoie la fonction de Schur s_λ sur la somme des tableaux de forme λ est un homomorphisme injectif d'algèbres de Hopf.*

(iii) *L'application linéaire $(ZT, *, \delta) \rightarrow (ZS, *, \delta)$ qui envoie un tableau t sur $\sum_{tg(\alpha)=t} \alpha$ est un homomorphisme injectif d'algèbres de Hopf.*

(iv) *L'application linéaire $(ZS, *', \delta') \rightarrow (ZT, *', \delta')$ qui envoie une permutation α sur $tg(\alpha)$ est un homomorphisme surjectif d'algèbres de Hopf.*

Ces applications et quelques autres sont schématisées dans la figure suivante. Pour d'autres propriétés de la fonction $\Sigma \rightarrow \Lambda$, voir (Solomon, 1976 ; Gessel, 1984 ; Garsia et Reutenauer, 1989).

$$\begin{array}{ccccccc}
(\mathbf{ZS}, *, \delta) & \twoheadrightarrow & \mathcal{QSym} & & (\mathbf{ZS}, *', \delta') & \leftrightarrow & \Sigma \\
\uparrow & & \uparrow & & \downarrow & & \downarrow \\
(\mathbf{ZT}, *, \delta) & \twoheadrightarrow & \Lambda & & (\mathbf{ZT}, *', \delta') & \leftrightarrow & \Lambda
\end{array}$$

Preuve (i) Cette application est la restriction à \mathbf{ZC} (isomorphe à \mathbf{ZT} avec $*$ et δ) de l'application $\mathbf{ZS} \rightarrow \mathcal{QSym}$ décrite avant le théorème. Le fait que t est envoyé sur s_λ , i.e que $s_\lambda = \sum_{tg(\alpha)=t} F_{p(\alpha)}$ est démontré dans (Thomas, 1976).

(ii) Cette application est l'adjointe de la précédente.

(iii) et (iv) sont des reformulations de la définition des structures d'algèbres de Hopf de \mathbf{ZT} . \square

6.6 Description par jeu de taquin des produits et co-produits

Pour le jeu de taquin, voir (Sagan, 1991).

a. Le produit $*$ '

Soient t_1, t_2 deux tableaux sur $\{1, \dots, n\}$ et $\{1, \dots, p\}$. Alors $t_1 *' t_2$ est la somme de tous les tableaux t obtenus de la manière suivante : pour toute partition $\{1, \dots, n+p\} = I \cup J$, $|I| = n$, $|J| = p$, on note t'_1 (resp. t'_2) le tableau à entrées dans I (resp. J) qu'on obtient en appliquant à t_1 (resp. t_2) l'unique application injective croissante $\{1, \dots, n\} \rightarrow I$ (resp. $\{1, \dots, p\} \rightarrow J$). On place t'_1 au-dessus et à gauche de t'_2 de manière à obtenir un tableau gauche. Puis on applique le jeu de taquin à ce tableau gauche, et le tableau normal obtenu est t .

On sait en effet, d'après Schützenberger, que l'unique tableau normal ainsi obtenu est $tg(uv)$, si $tg(u) = t'_1$, et $tg(v) = t'_2$. Ceci montre que la règle précédente ne fait que traduire le produit dans \mathbf{ZS}/I . Voir Figure 5.1.

b. Le coproduit δ'

Soit t un tableau sur $\{1, \dots, n\}$. Alors $\delta'(t)$ est la somme de tous les $t_1 \otimes t_2$ obtenus de la manière suivante : pour tout $i = 0, \dots, n$, t_1 est le sous-tableau de t des entrées dans $\{1, \dots, i\}$ et t_2 s'obtient en redressant par jeu de taquin le tableau gauche sur $\{i+1, \dots, n\}$ et en standardisant le tableau normal obtenu.

On sait en effet que la congruence plaxique est compatible aux restrictions d'intervalles. De plus, il en est ainsi du jeu de taquin : par suite, le redressé du sous-tableau de $tg(\alpha)$ correspondant à un sous-intervalle I de $\{1, \dots, n\}$ est $tg(\alpha')$, où $\alpha' = \alpha_I$. La règle ci-dessus ne fait donc que traduire la définition de δ' dans \mathbf{ZT}/I . Voir Figure 5.2.

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{cccccc}
 12 & & 13 & & 14 & & 23 & & 24 & & 34 \\
 & & 34 & + & 24 & + & 23 & + & 14 & + & 13 & + & 12
 \end{array} \\
 = & \begin{array}{cccccc}
 1 & & 13 & & 14 & & 23 & & 24 & & 34 \\
 & & 234 & + & 24 & + & 23 & + & 14 & + & 13 & + & 12
 \end{array} \\
 = & \begin{array}{cccccc}
 1234 & + & 3 & & 4 & & 2 & & 24 & & 34 \\
 & & 124 & + & 123 & + & 134 & + & 13 & + & 12
 \end{array}
 \end{aligned}$$

le produit $12 *' 12$

Figure 5.1

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{cccccc}
 34 & \otimes \varepsilon + & 34 & \otimes 5 + & 3 & \otimes 4 & + 12 \otimes & 34 & + 1 \otimes & 34 & + \varepsilon \otimes & 34 \\
 125 & & 12 & & 12 & 5 & 5 & 5 & 25 & 125
 \end{array} \\
 = & \begin{array}{cccccc}
 34 & \otimes \varepsilon + & 34 & \otimes 1 + & 3 & \otimes 12 & + 12 \otimes & 123 & + 1 \otimes & 2 & + \varepsilon \otimes & 34 \\
 125 & & 12 & & 12 & & 134 & & 125
 \end{array}
 \end{aligned}$$

le coproduit δ'

Figure 5.2

c. Le produit *

Le produit $t_1 * t_2$ est égal à la somme de tous les tableaux t obtenus de la manière suivante : si $|t_1| = n$, on augmente chaque entrée de t_2 de n , et on note $\overline{t_2}$ le tableau obtenu; soit λ la forme de t_1 . On déforme t_2 par jeu de taquin, de toutes les manières possibles, jusqu'à obtenir un tableau gauche t'_2 de forme extérieure λ ; on recolle alors t'_2 sur t_1 , pour obtenir t .

La validité de cette règle se déduit par dualité de celle pour δ' . Elle est aussi implicite dans (Lascoux et Schützenberger, 1980) et nous a été expliquée par A. Lascoux. Voir Figure 5.3.

d. Le coproduit δ

On déforme t de toutes les manières possibles par jeu de taquin, de façon à obtenir un tableau gauche formé de deux sous-tableaux t_1 et t_2 , avec t_1 en-haut et à gauche de t_2 ; $\delta(t)$ est alors la somme de tous les $st(t_1) \otimes st(t_2)$.

On obtient cette règle par dualité à partir de celle pour $*'$. Voir Figure 5.4.

$$\begin{array}{cccc}
 3 & & 4 & 4 \\
 * 123 = & 3 & + & 34 & + & 35 & + & 3 \\
 12 & 12456 & 1256 & 126 & 1256
 \end{array}$$

Le produit *

Figure 5.3

$$\delta \left(\begin{array}{c} 34 \\ 125 \end{array} \right) = \begin{array}{c} 34 \\ 125 \end{array} \otimes \epsilon + \begin{array}{c} 34 \\ 12 \end{array} \otimes 1 + \begin{array}{c} 2 \\ 134 \end{array} \otimes 1 + \begin{array}{c} 2 \\ 13 \end{array} \otimes 12 + \begin{array}{c} 2 \\ 13 \end{array} \otimes \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} + 123 \otimes 12 + \\ \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \otimes \begin{array}{c} 2 \\ 13 \end{array} + 12 \otimes \begin{array}{c} 3 \\ 12 \end{array} + 12 \otimes 123 + 1 \otimes \begin{array}{c} 34 \\ 12 \end{array} + 1 \otimes \begin{array}{c} 3 \\ 124 \end{array} + \epsilon \otimes \begin{array}{c} 34 \\ 125 \end{array}$$

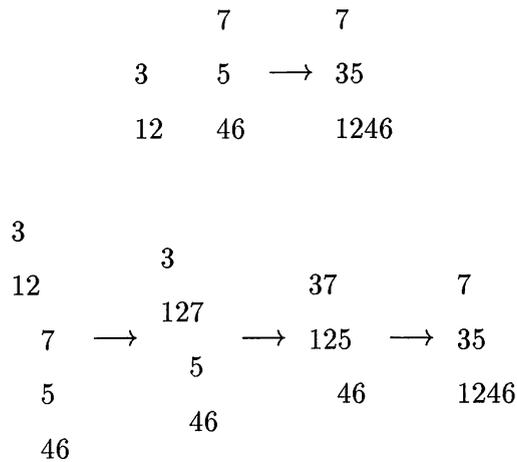
Le coproduit $\delta \left(\begin{array}{c} 34 \\ 125 \end{array} \right)$

Figure 5.4

e. Le produit \square

Le tableau $t \square t'$ s'obtient en remplaçant d'abord chaque i dans t' par $i + |t|$, puis en faisant glisser horizontalement vers la gauche les lignes du tableau t' obtenu, de manière à obtenir un tableau.

On vérifie en effet, que si on place t en haut et à gauche de $\overline{t'}$, on peut simuler l'opération ci-dessus par jeu de taquin. Donc, si t, t' correspondent à α, α' , le tableau obtenu correspond à $\alpha \square \alpha'$. Voir Figure 5.5.



Le produit $\begin{array}{c} 3 \\ 12 \end{array} \square \begin{array}{c} 4 \\ 2 \\ 13 \end{array}$

Figure 5.5

6.7 Applications

Théorème 6.10 *Soit t un tableau de forme λ sur $\{1, \dots, k\}$. Le nombre de permutations dans S_n ayant t comme sous-tableau de leur tableau gauche est $n!/k!f_\lambda$ si $n \geq k$.*

Ici, f_λ désigne le nombre de tableaux de forme λ .

Preuve Nous travaillons dans l'algèbre complétée de $(\mathbf{Z}S, *)$, par rapport à sa graduation. Elle contient le complété de $\mathbf{Z}C \simeq \mathbf{Z}T$. Soit T la somme de tous les tableaux, T' la somme de tous les tableaux ayant t comme sous-tableau. La description du produit $*$ en 5.c montre qu'on a

$T' = t * T$; il faut remarquer que ce produit est sans multiplicités, car si t'' apparaît dans $t * t'$, on retrouve t'' par projection de t' sur un intervalle et jeu de taquin. Si nous écrivons l'équation précédente dans $\mathbf{Z}S$, nous obtenons $S' = c * S$, où S est la somme de toutes les permutations, c la somme des permutations dont le tableau gauche est t et S' la somme des permutations dont le tableau gauche contient t .

Appliquons à cette dernière équation l'homomorphisme qui envoie une permutation de poids n sur $x^n/n!$. Nous obtenons $\sum_n a_n x^n/n! = (f_\lambda x^k/k!)1/(1-x)$, où a_n est le nombre cherché. Par suite, $a_n = f_\lambda n!/k!$, si $n > k$. \square

Le fait que S et T soient des monoïdes libres implique que leurs séries génératrices

$\sum_{n \geq 0} n!x^n$ et $g = \sum_{n \geq 0} b_n x^n$ ($b_n =$ nombre de tableaux, ou involutions) sont de la forme $(1 - \sum_{n \geq 1} a_n x^n)^{-1}$, où les a_n sont des entiers naturels. Dans le deuxième cas, a_n est le nombre de tableaux connexes, ou d'involutions connexes. Par ailleurs, si les nombres α_n et c_n sont définis par $\prod_{n \geq 1} (1/(1-x^n))^{\alpha_n} = g$ et $\sum_{n \geq 0} c_n x^n = xg'/g$, alors ces nombres sont aussi des entiers naturels, pour la même raison. Le calcul expérimental montre que $c_n = a_{n+2}$, ce qui se traduit par l'équation différentielle satisfaite par la série génératrice *ordinaire* g des involutions

$$g(1 - x - x^2) = 1 + x^3 g'.$$

Celle-ci se démontre en utilisant la formule de récurrence bien connue $b_n = b_{n-1} + (n-1)b_{n-2}$, donnant le nombre d'involutions. Nous donnons en Figure 6.1 la table des nombres a_n, b_n, c_n, α_n dans le cas des tableaux.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b_n (tableaux)	1	2	4	10	26	76	232	764	2620	9496
a_n (tableaux connexes)	1	1	1	3	7	23	71	255	911	3535
c_n	1	3	7	23	71	255	911	3535	13903	57663
α_n	1	1	2	5	14	41	130	439	1544	5759

RÉFÉRENCES

- André, Désiré. 1881. « Sur les permutations alternées ». *Journal de mathématiques pures et appliquées*, vol. 7, p. 161-184.
- Arnold, Vladimir I. 1992. « Springer numbers and morsification spaces ». *Journal of algebraic geometry*, vol. 1, no 2, p. 197-214.
- Bergeron, François, et Nantel Bergeron. 1992a. « A decomposition of the descent algebra of the hyperoctahedral group I ». *Journal of algebra*, vol. 148, p. 86-97.
- . 1992b. « Orthogonal idempotents in the descent algebra of B_n and applications ». *Journal of Pure and Applied Algebra*, vol. 79, p. 109-129.
- Bergeron, François, Nantel Bergeron et Adriano M. Garsia. 1988. « Idempotents for the free Lie algebra and q -enumeration ». In *invariant theory and tableaux* ed D. Stanton, p.166-190. IMA Volumes in Mathematics and its Applications, V. 19. Springer, Berlin.
- Bergeron, François, Nantel Bergeron, R.B. Howlett et D.E. Taylor. 1992. « A decomposition of the descent algebra of a finite Coxeter group ». *Journal of Algebraic Combinatorics*, vol. 1, p. 23-44.
- Bergeron, François, et Luc Favreau 1992. « Fourier Transform Over Semisimple Algebras and Harmonic Analysis for Probabilistic Algorithms ». Communication in Actes du 4eme Colloque Séries formelles et combinatoire algébrique, Montréal 1992. (P. Leroux et C. Reutenauer éditeurs). Publications du LACIM, vol. 11.
- Bergeron, Nantel. 1991. « An hyperoctahedral analogue of the free Lie algebra ». *Journal of Combinatorial Theory*, vol. 58, p. 256-278.
- . 1992. « A decomposition of the descent algebra of the hyperoctahedral group II ». *Journal of algebra*, vol. 148, p. 98-122.
- . 1995. « Des représentations de groupes induites par les algèbres de

- descentes». Communication au Séminaire de combinatoire de l'UQAM, Montréal 1995.
- Boerner H. 1963. *Representations of groups*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
- Cohn P. M. 1985. *Free rings and their relations*. Academic Press.
- Désarménien, Jacques. 1983. « Fonctions symétriques associées à des suites classiques de nombres ». *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, vol. 16, p. 271-304.
- Désarménien, Jacques, et Dominique Foata. 1991. « Statistiques d'ordre sur les permutations colorées ». *Discrete Mathematics*, vol 87, no 2, p. 133-148.
- . 1992. « The signed Eulerian numbers ». *Discrete Mathematics*, vol. 99, p. 49-58.
- Désarménien, Jacques et Michelle Wachs. 1988. « Descentes sur les dérangements et mots circulaires ». In *Actes du 19^{ème} Séminaire Lotharingien*, p. 13-21, 361/S20, IRMA, Strasbourg.
- Dress A.W. et C. Siebeneicher. 1988. « Ein Lemma über Perlenketten ». *20^{ème} Séminaire Lotharingien de Combinatoire*. Publication de l'Institut de Recherche en Mathématiques Avancées. 372/S-20, Strasbourg. p. 47-55.
- Ehrenborg, Richard, et Margaret Readdy. 1994 « Sheffer posets and r -signed permutations ». *preprint*.
- Foata, Dominique, et Marcel-Paul Schützenberger. 1970. *Théorie Géométrique des Polynômes Eulériens*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 138.
- . 1978. « Major index and inversion number of permutations ». *Mathematische Nachrichten*, vol. 83, p. 143-159.
- Foata, Dominique, et Doron Zeilberger. 1991. « Multibasic Eulerian Polynomials ». *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 328, no 2, p. 843-862.
- Foulkes H. O. 1976. « Enumeration of permutations with prescribed up-down and inversion sequences ». *Discrete Mathematics*, vol. 15, p. 235-252.
- Garsia, Adriano M., et Christophe Reutenauer. 1989. « A decomposition of the Solomon descent algebra ». *Advances Mathematics*, vol. 77, 189-262.
- Gelfand, I. M., Daniel Krob, Alain Lascoux, Bernard Leclerc, V.S. Retakh et Jean-Yves Thibon. « Noncommutative symmetric functions ». *manuscrit*.
- Gessel, Ira. 1984. « Multipartite P-partitions and inner product of skew Schur functions ». *Contemporary Mathematics*, vol. 34, p. 289-301.

- Gessel, Ira, et Christophe Reutenauer. 1993. «Counting permutations with given cycle structure and descent set». *Journal of combinatorial theory*, vol. A-64, no 2, p. 189-215.
- Geissinger, Ladnor. 1977. «Hopf algebras of symmetric functions and class functions». in *Combinatoire et représentation du groupe symétrique*, Lecture notes in Math., Springer-Verlag, vol. 579, p. 168-181.
- Geissinger, Ladnor et D. Kinch. 1978. «Representations of the hyperoctahedral groups». *Journal of algebra*, vol. 53, p. 1-20.
- Joyal, André. 1981. «Une théorie combinatoire des séries formelles». *Advances in Mathematics*, vol. 42, p. 1-82.
- Kerber, Adalbert. 1968. «Zur Darstellungstheorie von Kranzprodukten». *Canadian Journal of mathematics*, vol. 20, p. 665-672.
- . 1969. «Zur Darstellungstheorie von Symmetrien symmetrischer Gruppen». *Mitt. math. Sem. Univ. Giessen*, vol. 80, p. 1-27.
- . 1971. *Representations of Permutation Groups I*. Springer Lecture Notes in Mathematics, vol. 240. Springer-Verlag, Berlin.
- Kerber, Adalbert et K.-J. Thürlings. 1983. «Symmetrieklassen von funktionen und ihre Abzählungstheorie ». Univ. Bayreuth, Bayreuth.
- Knuth, Donald E. 1970. «Permutation, matrices, and generalized Young tableaux». *Pacific Journal of Mathematics*, vol. 34, p. 709-727.
- Lascoux, Alain et Marcel-Paul Schützenberger. «The plactic monoid». *manuscrit disponible chez A. Lascoux*.
- . 1981. «Le monoïde plaxique». in *Noncommutative structures in algebra and geometric combinatorics*, A. de Luca (ed), CNR, Roma. p. 129-156.
- Littlewood, D. E., A. R. Richardson. 1934. «Groups characters and algebra». *Phil. Trans.*, vol. A 233, p. 99-141.
- Littlewood, D. E. 1950. *The theory of group characters*. 2^{ème} éd., Oxford University Press.
- . 1961. «On certain symmetric functions ». *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. 43, p. 485-498.
- Lothaire, M. 1983. *Combinatorics on words*. Encyclopedia of Mathematics, Vol. 17. Addison-Wesley, Reading, MA.
- Macdonald, Ian G. 1979. *Symmetric functions and Hall ploynomial*. Oxford University Press.

- . 1980. Polynomial functors and wreath products. *Journal of pure and applied algebra*, **18**,173-204.
- MacMahon, Percy A. 1915-1916. *Combinatory Analysis*, Cambridge; réédition Chelsea, New-York, 1960.
- Malvenuto, Claudia et Christophe Reutenauer. 1995. «Duality between the Solomon descent algebra and quasi-symmetric functions». à paraître dans *Journal of Algebra*..
- Mantaci, Roberto et Christophe Reutenauer. 1992. «A Generalisation of Solomon's Algebra for Hyperoctahedral Groups and other wreath Products». *Rapports internes du LITP*, no 92.28.
- Reiner, Victor. 1993. «Signed permutations statistics and cycle type». *European Journal of Combinatorics*, vol. 14, p. 569-579.
- Reutenauer, Christophe 1986. «Theorem of Poincaré-Birkhoff-Witt, logarithm and representations of the symmetric group whose order are the Stirling numbers». Communication in *Combinatoire Énumérative*, Actes, Montréal, 1985, (ed G. Labelle et P.Leroux.) Lecture notes in mathematics, Springer, Berlin, vol. 1234, p. 216-284.
- . 1993. *Free Lie algebras*. Oxford science publications.
- Sagan, Bruce E. 1991. *The symmetric group: representations, combinatorial algorithms and symmetric functions*. Wardsworth & Brooks/Cole.
- Schensted C. «Longest increasing subsequences». *Canadian Journal of Mathematics* vol. 13, p. 179-191.
- Schützenberger, Marcel-Paul. 1963. «Quelques remarques sur une construction de Schensted». *Math. Scand.*, vol. 12, p. 117-128.
- Serre, Jean-Pierre. 1978. *Représentations linéaires des groupes finis*. 3^e éd. corr. Paris : Hermann.
- . 1988. *Cours d'arithmétique*. 3^e éd. Paris : Presses universitaires de France.
- Solomon, Louis. 1968. «A decomposition of the group algebra of a finite Coxeter group». *Journal of algebra*, vol. 9, p. 220-239.
- . 1976. «A Mackey formula in the group ring of a Coxeter group». *Journal of algebra*, vol. 41, p. 255-268.
- Specht W. 1932. «Eine Verallgemeinerung der symmetrischen Gruppe». *Schriften Berlin*, vol. 1, p. 1-32.

- Springer T. A. 1971. «Remarks on a combinatorial problem». *Nieuw Archief voor Wiskunde 1*, vol. 19, p. 30-36.
- Stanley, Richard P. 1972. «Ordered Structures and Partitions». *Memoirs of the American Mathematical Society*, vol. 119.
- Stembridge, John. 1992a. «The projective representations of the hyperoctahedral group». *Journal of Algebra*, vol. 145, p. 396-453.
- . 1992b. «Eulerian Numbers, Tableaux, and the Betti Numbers of a toric Variety». *Discrete Mathematics*, vol. 99, p. 307-320.
- Strehl, Volker. 1981. «Symmetric Eulerian distributions for involutions». In *Actes du 2^{ème} Séminaire Lotharingien de Combinatoire, Première session*, p. 12, 140/S2, IRMA, Strasbourg.
- Thomas, G. P. 1976. «Frames, Young tableaux and Baxter sequences». *Advances Mathematics*, vol. 26, p. 275-289.
- Wachs, Michelle. 1991. «The major index polynomial for conjugacy classes of permutations». *Discrete Mathematics*, vol. 91, p. 283-293.
- Weyl, Hermann. 1946. *The classical groups, their invariant and representations*. Princeton University Press.
- Zelevinski, Andrey V. 1981. *Representations of finite classical groups*. Springer Lecture Notes in Mathematics, vol. 869. Springer-Verlag, Berlin.

INDEX

- Action
 - à gauche, 20
 - par positions, 21
- Algèbre de Lie libre, 53
- Circuit, 54
 - primitif, 54
- Classe de conjugaison
 - de mots, 54
- Composition de descentes d'une permutation, 84
- Composition de descentes signée, 37
 - d'une permutation signée, 36
- Composition signée, 34
- Cosinus symétrique, 59
- Costandardisé
 - d'un mot, 37
- Crochet de Lie, 53
- Cycle d'une permutation signée, 12
- Degré partiel
 - d'un mot en une lettre, 19
 - d'un élément de $E_n \otimes V^{\otimes n}$, 26
- Dual, 10
- Ensemble de descentes de Solomon, 70
- Ensemble de descentes signé, 37
 - d'une permutation signée, 36
- Espace
 - partie multilinéaire, 22
- Espace assez stable, 22
- Évacuation d'un
- Evaluation
 - d'un circuit, 55
 - d'un mot, 38
 - d'un multi-ensemble de circuits, 55
- Finement homogène
 - élément de $E_n \otimes V^{\otimes n}$, 26
- Fonction
 - caractéristique, 8
 - homogène, 13
 - monomiale, 13
- Fonction quasi-symétrique monômiale, 35
- Longueur
 - d'un cycle, 12
 - d'un partage signé, 15
- Mot de Lyndon, 54
- Mots conjugués, 54
 - p -bande horizontale, 42
 - p -forme gauche, 42
 - p -formes gauches équivalentes, 47
 - p -ruban, 42
 - p -tableau semi-standard, 42
 - partages signés, 12
- Partie multilinéaire d'un espace, 22
- Permutation connexe, 80
- Permutation signée alternante
 - descendante, 60
 - montante, 60
- Permutation standard, 56
- Polynôme
 - de Lie, 53
 - finement homogène, 19
 - homogène, 19
- Produit
 - en couronne, 5
 - symétrique, 53
- Promotion d'un tableau, 83
- Signe
 - d'un élément de $\{1, \dots, n\} \times G$, 11
 - d'un circuit, 54
 - d'un cycle, 12
 - d'un polynôme finement homogène, 20
 - d'un élément de A , 19

- Sinus symétrique, 59
- Sous-ensemble signé, 34
- Standardisé, 37
- Structure cyclique, 57
- Série génératrice, 20
 - d'un ensemble de multi-ensembles de circuits, 55
 - des fonctions homogènes, 16
- Série génératrice quasi-symétrique, 46

- Tableau connexe, 81
- Traî née, 83
- Type cyclique d'une permutation signée, 12
- Type de connexité, 80
 - d'un mot, 80

- Valeur absolue
 - d'un élément de $\{1, \dots, n\} \times G$, 11
 - d'un élément de A , 19
 - de σ , 11