

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

UNE GÉNÉRALISATION DES SÉRIES INDICATRICES  
D'ESPÈCES DE STRUCTURES

THÈSE  
PRÉSENTÉE  
COMME EXIGENCE PARTIELLE  
DU DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES

PAR  
KATHLEEN PINEAU

NOVEMBRE 1995

## Remerciements

Je tiens d'abord à remercier mon directeur Gilbert Labelle, pour son encouragement, sa patience, sa fébrilité mathématique, sa sagesse et surtout, pour son humanité. Je remercie mon co-directeur Jacques Labelle, pour m'avoir donné envie de faire un doctorat et de m'avoir, une fois en sécurité dans les bras mathématiques de Gilbert, laissé prendre mon envol. Sans eux, je n'aurais pas survécu à une telle entreprise.

Merci à Adalbert Kerber pour avoir accepté de faire partie du jury de cette thèse et pour l'accueil chaleureux qu'il m'a réservé à Bayreuth en mai 1992. Merci aussi à Pierre Leroux pour le regard attentif et intéressé qu'il a toujours posé sur mon travail.

Je voudrais remercier toutes celles et ceux qui, par leur support technique ou moral, ont contribué à l'élaboration de cette thèse. En particulier, Robert, pour son épaule compatissante, sa patience, son humour et sa tendresse. Aussi, les membres de ma famille qui ont su équilibrer leur *tu travailles ? quand est-ce que tu finis ?* au fil des années. Mes amis, Chantal, dont l'oreille attentive ne s'est jamais fatiguée, Gilles et Ginette, dont l'attitude tend à remettre les soubresauts de la vie en perspective et Hugo, l'homme qui change le sujet plus vite que son ombre. Louise, dont l'humour et la gentillesse débordent. Normand, qui, le premier à m'avoir parlé d'intégrales et de la magie des mathématiques, m'a donné [3] au début des années 80. Micheline, pour avoir fait germer *la petite voix*. Hélène, qui a toujours trouvé les mots justes lorsque la *déprime* se montrait le bout du nez. Sylvie, Irene, Anne-Marie, Claire-Andrée, etc.

Merci à Anne, Claudia, Guy et Yves, qui ont depuis longtemps terminé *la leur* et avec qui j'ai vécu les années *folles* de la scolarité du doctorat. Merci aussi à mes amis d'Europe, Isabelle, Volker, Jiang et Jae-ho, pour avoir rendu mon séjour à Strasbourg si agréable.

Finalement, je tiens à souligner ma reconnaissance au CRSNG et au FCAR pour leur support financier ainsi qu'à la direction de l'École de technologie supérieure, plus particulièrement M. Sinh LeQuoc (directeur de l'enseignement et de la recherche), pour m'avoir accordé le dégrèvement qui m'a permis de terminer ce travail.

Je dédie cette thèse à mes parents, Françoise et Georges.

# Table des matières

Liste des tableaux . . . . .	v
Liste des figures . . . . .	vi
Notations . . . . .	vii
Résumé . . . . .	ix
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 La série indicatrice des <math>\Phi</math>-symétries d'une espèce pondérée</b>	<b>6</b>
1.1 Les espèces pondérées sommables . . . . .	7
1.2 Les actions de groupes et les espèces de structures . . . . .	10
1.3 Les sous-espèces et les espèces associées . . . . .	15
1.4 Les séries génératrices . . . . .	24
1.5 La série indicatrice des $\Phi$ -symétries . . . . .	30
<b>2 Les <math>\Phi</math>-polynômes indicateurs des espèces moléculaires</b>	<b>36</b>
2.1 Les classes bilatérales dans la décomposition moléculaire d'une espèce .	37
2.2 Les séries génératrices obtenues par la spécialisation des variables dans les $\Phi$ -séries indicatrices . . . . .	46
2.3 La série indicatrice et la $q$ -série d'asymétrie de l'espèce des ensembles orientés . . . . .	48
2.4 L'utilisation de l'inversion de Möbius dans le calcul des $\Phi$ -séries . . . . .	59
2.5 Quelques identités où intervient la fonction de Möbius . . . . .	71

<b>3</b>	<b>Les conditions préservant les opérations</b>	<b>78</b>
3.1	Les opérations de produit, de dérivée et de pointage . . . . .	79
3.2	L'opération de substitution . . . . .	85
3.3	Les espèces primitives et g-primitives . . . . .	98
<b>4</b>	<b>Une exploration des <math>\Phi</math>-séries indicatrices : formules explicites</b>	<b>111</b>
4.1	Les ensembles . . . . .	111
4.2	Les cycles orientés . . . . .	119
4.3	Les permutations, les permutations paires et les permutations impaires .	126
4.4	Les arbres, les arborescences et les endofonctions . . . . .	139
4.5	L'espèce pondératrice des composantes connexes . . . . .	147
	<b>Conclusion</b>	<b>155</b>
	<b>A Polynômes indicateurs d'asymétrie</b>	<b>160</b>
	<b>B Burnside et l'énumération des <math>K</math>-symétries</b>	<b>164</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>164</b>

# Liste des tableaux

2.1	La décomposition de $P_4(X_{t_1} + X_{t_2} + \dots)$ . . . . .	44
2.2	Les $\Phi$ -polynômes de $M \in \mathcal{M}_n$ , $n \leq 4$ . . . . .	45
2.3	Les polynômes indicateurs d'asymétrie de $E_n^\pm$ , $n \leq 8$ . . . . .	54
2.4	Les $q$ -coefficients d'asymétrie de $E_n^\pm$ , $n \leq 10$ . . . . .	58
2.5	Les éléments de calculs pour $\Gamma_{E_4^\pm}(x_1, x_2, \dots)$ . . . . .	64
2.6	Les éléments de calculs pour $Z_{E_4^\pm}(x_1, x_2, \dots)$ . . . . .	67
3.1	Les $\Phi$ -polynômes de $M'$ pour $M \in \mathcal{M}_n$ , $n \leq 4$ . . . . .	83
3.2	$\frac{\partial}{\partial x_1} \Phi_M$ pour $M \in \mathcal{M}_n$ , $n \leq 4$ . . . . .	84
3.3	La décomposition de $\frac{X^2 C_3}{\mathbb{Z}_2}(X_{t_1} + X_{t_2} + \dots)$ . . . . .	103
A.1	Les polynômes indicateurs d'asymétrie pour $M \in \mathcal{M}_5$ . . . . .	161
A.2	Les polynômes indicateurs d'asymétrie pour $A \in \mathcal{A}_6$ (1) . . . . .	162
A.3	Les polynômes indicateurs d'asymétrie pour $A \in \mathcal{A}_6$ (2) . . . . .	163
B.1	$N_M(x_1, x_2, x_3, x_4)$ pour $N \in \mathcal{M}_4$ (1) . . . . .	165
B.2	$N_M(x_1, x_2, x_3, x_4)$ pour $N \in \mathcal{M}_4$ (2) . . . . .	166
B.3	$N_M(x_1, x_2, x_3, x_4)$ pour $N \in \mathcal{M}_4$ (3) . . . . .	167
B.4	$N_M(x_1, x_2, x_3, x_4)$ pour $N \in \mathcal{M}_4$ (4) . . . . .	168

# Liste des figures

2.1	Le treillis des sous-groupes de $\mathfrak{A}_4$ . . . . .	65
2.2	Une $P_4$ -structure sur $\llbracket 4 \rrbracket$ . . . . .	66
2.3	Le treillis des sous-groupes de $\mathfrak{D}_4$ . . . . .	66
2.4	Une $E_2 \circ X^2$ -structure sur $\llbracket 4 \rrbracket$ . . . . .	67

## Notations

$\mathbb{N}$	$\{0, 1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{N}^*$	$\{1, 2, 3, \dots\}$
$\llbracket n \rrbracket$	$\{1, 2, 3, \dots, n\}$
$ W $	le cardinal de l'ensemble $W$
$U \subseteq W$	$U$ est un sous-ensemble de $W$
$[\mu] \alpha$	le coefficient de $\mu$ dans la série $\alpha$
$c_{n_1, n_2, \dots} [\mu] \alpha$	le coefficient de $\frac{\mu}{c_{n_1, n_2, \dots}}$ dans la série $\alpha$
$s \in W/R$	$s$ parcourt un système de représentants de la relation d'équivalence $R$ sur $W$
$\uplus$	la réunion disjointe
$\mathfrak{S}_n$	le groupe symétrique
$\mathfrak{A}_n$	le groupe alterné
$\mathfrak{D}_n$	le groupe diédral
$\mathbb{Z}_n$	le groupe cyclique
$\overline{H}^G$	la classe de conjugaison de $H$ dans le groupe $G$
$\overline{H}$	la classe de conjugaison de $H$ dans le groupe symétrique
$H^\sigma$	$\sigma H \sigma^{-1}$
$H \equiv_G K$	$H$ est conjugué à $K$ dans $G$
$H \equiv K$	$H$ est conjugué à $K$ dans le groupe symétrique
$H \approx K$	$H$ est conjugué à un groupe isomorphe à $K$
$H \leq G$	$H$ est un sous-groupe de $G$
$sg(H)$	l'ensemble des sous-groupes de $H$
$cc(\mathfrak{S}_n)$	l'ensemble des classes de conjugaison de sous-groupes de $\mathfrak{S}_n$
$conj(H)$	l'ensemble des classes de conjugaison d'éléments de $H$
$C_H[h]$	le commutateur de $h$ dans $H$
$\langle a \rangle$	le groupe engendré par $a$
$\text{stab}(s)$	l'ensemble des automorphismes de $s$
$\text{aut}(\sigma)$	$1^{\sigma_1} \sigma_1! 2^{\sigma_2} \sigma_2! \dots$
$\text{sgn}(\sigma)$	le signe de $\sigma$

$O(s)$	l'orbite de $s$
$O(F[U])$	l'ensemble des types de $F$ -structures sur $U$
$s_1 \sim_F s_2$	les $F$ -structures $s_1$ et $s_2$ sont de même type
$\hat{\Phi}$	$\biguplus_{K \in \Phi} \bar{K}$
$T_\lambda(H, K)$	$ \{\tau \in \mathfrak{S}_\lambda \setminus \mathfrak{S}_n / H \mid \tau H \tau^{-1} \cap \mathfrak{S}_\lambda \equiv K\} $
$T_\lambda^\Phi(H)$	$ \{\tau \in \mathfrak{S}_\lambda \setminus \mathfrak{S}_n / H \mid \tau H \tau^{-1} \cap \mathfrak{S}_\lambda \in \hat{\Phi}\} $
$\text{mol}(\Phi)$	$\{M = X^n / H \mid H \in \Phi \cap \text{sg}(\mathfrak{S}_n), n \geq 0\}$
$\chi(P)$	la valeur de vérité d'un énoncé $P$
$\mathbb{B}$	la catégorie des ensembles finis et bijections
$\mathbb{E}_{\mathbb{A}}$	la catégorie des ensembles $\mathbb{A}$ -pondérés sommables
$\mathbb{N}[[\mathcal{A}]]$	le demi-anneau des espèces sous les opérations de somme et de produit
$\mathcal{M}$	l'ensemble des espèces moléculaires
$\mathcal{M}_n$	l'ensemble des espèces moléculaires concentrées sur le cardinal $n$
$\mathcal{A}$	l'ensemble des espèces atomiques
$\mathcal{A}_n$	l'ensemble des espèces atomiques concentrées sur le cardinal $n$
$\mathcal{P}$	l'ensemble des espèces primitives
$E$	l'espèce des ensembles
$E_{\text{pair}}$	l'espèce des ensembles de cardinal pair
$E^\pm$	l'espèce des ensembles orientés
$P$	l'espèce des polygones
$P^{\text{bic}}$	l'espèce des polygones bicolores
$C$	l'espèce des cycles orientés
$C_{\text{pair}}$	l'espèce des cycles orientés de longueur paire
$C_{\text{imp}}$	l'espèce des cycles orientés de longueur impaire
$L$	l'espèce des ordres linéaires
$D$	l'espèce des dérangements
$S$	l'espèce des permutations
ALT	l'espèce des permutations paires
NALT	l'espèce des permutations impaires
A	l'espèce des arborescences
Ar	l'espèce des arbres
End	l'espèce des endofonctions
$\Lambda^{(\alpha)}$	l'espèce pondératrice des composantes connexes



## Résumé

Le but de ce travail est de présenter un contexte de la combinatoire algébrique généralisant les notions de série indicatrice des cycles,  $Z_F = Z_F(x_1, x_2, \dots)$ , au sens de A. Joyal [18] et de série indicatrice d'asymétrie,  $\Gamma_F = \Gamma_F(x_1, x_2, \dots)$ , au sens de G. Labelle [24, 25, 26], d'une espèce de structures  $F$ .

Dans le cadre de la théorie des espèces de structures, nous définissons à partir d'un ensemble  $\Phi$  de groupes, non conjugués deux à deux, choisis parmi les sous-groupes des groupes symétriques  $\mathfrak{S}_n$ ,  $n \geq 0$ , la série indicatrice des  $\Phi$ -symétries (ou  $\Phi$ -série) d'une espèce de structures quelconque  $F$ . Il s'agit d'une série formelle,  $\Phi_F = \Phi_F(x_1, x_2, \dots)$ , qui traite de l'énumération des types de structures (pondérées) dont le stabilisateur d'un représentant est conjugué à un groupe appartenant à  $\Phi$ .

Nous nous intéressons particulièrement au comportement de la  $\Phi$ -série face aux opérations combinatoires usuelles. Plus précisément, nous dégageons des conditions qui, imposées à l'ensemble  $\Phi$ , font en sorte que la transformation  $F \mapsto \Phi_F$  préserve les opérations combinatoires de somme, de produit, de dérivation, de pointage et de substitution. Notons que ces conditions sont systématiquement satisfaites par les ensembles représentés par  $Z$  et par  $\Gamma$ , uniformisant ainsi les démonstrations des propriétés des séries  $Z_F(x_1, x_2, \dots)$  et  $\Gamma_F(x_1, x_2, \dots)$ . Nous présentons, en plus de  $Z$  et de  $\Gamma$ , des exemples d'ensembles  $\Phi$  tels que la  $\Phi$ -série possède des propriétés analogues à celles des séries indicatrices des cycles et d'asymétrie.

La version pondérée du lemme de Burnside due à Stockmeyer [51], qui utilise l'inversion de Möbius dans des treillis de sous-groupes, est interprétée dans le contexte des  $\Phi$ -séries et ceci permet d'obtenir certaines identités faisant intervenir les valeurs de la fonction de Möbius dans des treillis de sous-groupes.

Enfin, la théorie générale est appliquée au calcul de formules explicites nouvelles pour les  $\Phi$ -séries,  $\Phi_F(x_1, x_2, \dots)$ , d'espèces  $F$  particulières. Ces  $\Phi$ -séries généralisent les résultats correspondants pour les séries  $Z_F$  et  $\Gamma_F$  dispersés dans la littérature récente [10, 12, 18], [22] à [28], [30] et [33].

## Introduction

Le cadre catégorique pour l'étude des structures est dû à Ehresmann [14]. Ce sont par contre les espèces de structures telles que présentées par Joyal dans [18], qui ont permis d'établir leur rôle fondamental pour la combinatoire énumérative. Il en résulte une algèbre combinatoire constituant un relèvement au niveau structurel des opérations usuelles sur les séries génératrices exponentielles, génératrices des types et indicatrices des cycles.

La série indicatrice des cycles est une généralisation, à des familles d'actions, des polynômes indicateurs de cycles de la théorie de Pólya-Redfield. Rappelons que les problèmes en combinatoire qui concernent l'énumération des types de structures sont, en général, résolus à l'aide de cette théorie [17, 41, 42]. La démonstration du théorème fondamental de Pólya-Redfield repose sur celui de Cauchy-Frobenius, plutôt connu sous le nom de Burnside, où l'inventaire des orbites de l'action d'un groupe, sur un ensemble donné, est obtenu en ne considérant que les éléments fixés par l'action.

En revanche, la notion d'énumération *selon les types de symétries* est attribuable à Burnside [7]. Basé sur la *marque* (*mark*, voir [7, 21]) d'un groupe sur un ensemble, le lemme de Burnside est un raffinement du théorème de Cauchy-Frobenius qui permet d'énumérer les orbites de l'action d'un groupe sur un ensemble donné selon les classes de conjugaison de ses sous-groupes. Notons que, basé sur la théorie de Pólya-Redfield et à la lumière de l'inversion de Möbius dans des treillis de sous-groupes (telle que présentée par Rota dans [44, 45]), Stockmeyer [51] a obtenu un équivalent pondéré du résultat de Burnside. Ainsi, le problème du dénombrement des structures selon leurs types de symétries est maintenant résolu dans le cadre de la théorie des actions de groupes en utilisant l'inversion de Möbius et la théorie des fonctions symétriques.

Dans le but d'effectuer le dénombrement des structures asymétriques, c.-à-d. : ne possédant que la symétrie triviale, G. Labelle a introduit [26] la série indicatrice d'asymétrie d'une espèce de structures. De la même façon qu'on considère la série indicatrice

des cycles d'une espèce comme une généralisation des polynômes indicateurs de cycles utilisés par Pólya, la série indicatrice d'asymétrie de G. Labelle peut être interprétée comme une généralisation, à des familles d'actions, d'un cas particulier des résultats de Burnside où les structures considérées n'ont aucune symétrie. En basant sa définition de la série indicatrice d'asymétrie d'une espèce  $F$  sur la notion de partie plate  $\overline{F}$  de  $F$ , G. Labelle a montré que la série indicatrice d'asymétrie  $\Gamma_F(x_1, x_2, \dots)$  possède des propriétés analogues à la série indicatrice des cycles  $Z_F(x_1, x_2, \dots)$ . À la lumière de ces propriétés, il a obtenu des résultats qui auraient été beaucoup plus difficiles à obtenir par les méthodes classiques.

Le but de ce travail est de présenter, dans le cadre de la théorie des espèces de structures, une généralisation à des familles d'actions de la notion d'énumération selon les types de symétries. À partir d'un ensemble  $\Phi$  de groupes, non conjugués deux à deux, choisis parmi les sous-groupes des groupes symétriques  $\mathfrak{S}_n$ ,  $n \geq 0$ , nous définissons la série indicatrice des  $\Phi$ -symétries (ou  $\Phi$ -série) d'une espèce pondérée  $F = F_w$ . Il s'agit d'une série formelle,  $\Phi_F = \Phi_F(x_1, x_2, \dots)$ , qui généralise simultanément les notions de série indicatrice des cycles,  $Z_F = Z_F(x_1, x_2, \dots)$ , au sens de A. Joyal [18] et de série indicatrice d'asymétrie,  $\Gamma_F = \Gamma_F(x_1, x_2, \dots)$ , au sens de G. Labelle [24, 25, 26]. Nous nous intéressons particulièrement au comportement de la  $\Phi$ -série face aux opérations combinatoires usuelles.

Le premier chapitre est consacré à la définition de la  $\Phi$ -série d'une espèce pondérée. Dans le contexte des espèces pondérées sommables, nous présentons les notions de base de la théorie des actions de groupes pour définir l'espèce  $\widetilde{F}^\Phi$ ,  $\Phi$ -associée à une espèce pondérée  $F = F_w$ . Celle-ci généralise la notion d'espèce associée  $\widetilde{F}$  de Joyal et, par un choix judicieux de l'ensemble  $\Phi$ , elle s'identifie à la partie plate  $\overline{F}$  de  $F$ . On démontre que l'énumération des types de  $\Phi$ -symétries des  $F$ -structures peut se faire par le biais de la série génératrice exponentielle de l'espèce  $\widetilde{F}^\Phi$ . Basé sur la notion d'espèce  $\Phi$ -associée nous définissons la série indicatrice des  $\Phi$ -symétries (ou  $\Phi$ -série),  $\Phi_F(x_1, x_2, \dots)$ , d'une espèce pondérée  $F = F_w$ . La transformation  $F \mapsto \Phi_F$  préserve l'opération combinatoire de somme et la série génératrice des types de  $\Phi$ -symétries est

obtenue par la spécialisation des variables dans la  $\Phi$ -série.

Puisque la transformation  $F \mapsto \Phi_F$  préserve la somme, les propriétés de la  $\Phi$ -série d'une espèce pondérée se déduisent, par linéarité, des propriétés de la  $\Phi$ -série d'une espèce moléculaire non pondérée générique. Nous nous concentrons donc, au deuxième chapitre, sur les  $\Phi$ -polynômes des espèces moléculaires. Nous dégageons des conditions, qui imposées à  $\Phi$ , font en sorte que la série génératrice d'une espèce pondérée est obtenue par la spécialisation des variables dans sa  $\Phi$ -série. Les  $\Phi$ -polynômes que nous obtenons sont décrits à l'aide de classes bilatérales et ceci permet de donner explicitement les  $\Phi$ -polynômes des espèces moléculaires concentrées sur un cardinal inférieur ou égal à 4. De plus, nous donnons à l'appendice A les polynômes indicateurs d'asymétrie des espèces, respectivement moléculaires et atomiques, concentrées sur 5 et 6 points ; contribuant ainsi aux tables existantes [5].

Dans le contexte des structures asymétriques, la série  $\Gamma_F(x_1, x_2, \dots)$  possède des propriétés analogues à celles de la série indicatrice des cycles  $Z_F(x_1, x_2, \dots)$  mais est, en général, beaucoup plus difficile à calculer explicitement ; très peu de formes closes pour  $\Gamma_F$  sont connues. Notre approche nous permet, entre autre, d'obtenir une forme close pour la série indicatrice d'asymétrie  $\Gamma_{E^\pm}$  de l'espèce  $E^\pm$ , des ensembles orientés. Nous avons aussi obtenu la  $q$ -série associée à  $\Gamma_{E^\pm}$  (au sens de Décoste [12, 13]).

À la fin du chapitre 2, nous établissons le rapport entre l'approche classique et la théorie des espèces. En fait, la version du lemme de Burnside due à Stockmeyer [51] qui utilise l'inversion de Möbius dans des treillis de sous-groupes, fournit une méthode alternative au calcul des  $\Phi$ -polynômes des espèces moléculaires. Nous obtenons, par le biais des deux approches, des identités faisant intervenir les valeurs de la fonction de Möbius dans des treillis de sous-groupes. En particulier, grâce à nos résultats concernant l'espèce des ensembles orientés, nous obtenons des identités entre la valeur de la fonction de Möbius dans le treillis des sous-groupes du groupe alterné, analogues aux identités classiques concernant le groupe symétrique. De plus, nous examinons, dans le contexte des  $\Phi$ -séries, le résultat des substitutions simultanées  $\Delta : x_k := \frac{(1-q)^k}{1-q^k} x^k$ ,  $k \geq 1$ , introduites par Décoste [12] pour le  $q$ -dénombrement des structures.

Nous nous intéressons, au troisième chapitre, au comportement de la  $\Phi$ -série face à certaines opérations combinatoires. En employant les techniques d'inversion de Möbius, il est difficile de déterminer efficacement les propriétés de nos  $\Phi$ -séries en rapport aux opérations combinatoires usuelles. Nous préférons l'approche par les classes bilatérales et dégageons des conditions qui, imposées à  $\Phi$ , font en sorte que la transformation  $F \mapsto \Phi_F$  préserve les opérations de produit, de dérivation, de pointage et de substitution. Notons que ces conditions sont systématiquement satisfaites par les ensembles de groupes représentés par  $Z$  et par  $\Gamma$ , uniformisant ainsi les démonstrations des propriétés des séries  $Z_F(x_1, x_2, \dots)$  et  $\Gamma_F(x_1, x_2, \dots)$ . Nous présentons ensuite des exemples d'ensembles  $\Phi$ , en plus de  $Z$  et de  $\Gamma$ , tels que les séries  $\Phi_F(x_1, x_2, \dots)$  possèdent des propriétés analogues à celles des séries  $Z_F(x_1, x_2, \dots)$  et  $\Gamma_F(x_1, x_2, \dots)$ . Nous proposons, en fait, une façon de les générer en considérant les espèces dites primitives généralisées, analogues aux espèces primitives [6] de Bouchard et de Ouellette.

Au dernier chapitre, la théorie générale est appliquée au calcul de formules explicites pour les  $\Phi$ -séries  $\Phi_F(x_1, x_2, \dots)$  d'espèces  $F$  particulières :  $E$  (les ensembles),  $C$  (les cycles orientés),  $S$  (les permutations),  $ALT$  (les permutations paires),  $NALT$  (les permutations impaires),  $A$  (les arborescences),  $End$  (les endofonctions),  $Ar$  (les arbres) et  $\Lambda^{(\alpha)}$  (l'espèce pondératrice des composantes connexes). Ces  $\Phi$ -séries généralisent les résultats correspondants pour les séries  $Z_F$  et  $\Gamma_F$  dispersés dans la littérature récente [10, 12, 18], [22] à [28], [30] et [33].

Nous recourons à la numérotation pseudo-décimale pour les subdivisions des chapitres. Ainsi, les définitions, les lemmes, les propositions, les remarques, etc, d'une même section sont numérotés les uns à la suite des autres. Par exemple, à la section 2 du chapitre 3 on trouve les items :

**Lemme 3.2.3** Soit  $\Phi \subseteq \{K \subseteq cc(\mathfrak{S}_n) \mid n \geq 0\}$  ...

**Définition 3.2.4** Pour deux ensembles finis  $U$  et  $V$  tels que ...

**Remarque 3.2.5** Si  $M = X^n/H$ ,  $H \leq \mathfrak{S}_n$ ,  $n \geq 0$ , et ...

Par contre, la numérotation d'une formule indique d'abord le chapitre dans lequel elle se

situé et ensuite son ordre par rapport aux autres formules de ce chapitre. Par exemple, la formule (2.5) est la 5ème formule du 2ème chapitre. Il en est de même pour la numérotation des tableaux et des figures.

Nous utilisons un carré noir ■ pour indiquer la fin d'une démonstration, un carré blanc □ pour la fin d'une remarque, un losange ◇ pour la fin d'un exemple et un triangle △ pour indiquer qu'un résultat est donné sans démonstration.

Notons que, comme cas particuliers de la série indicatrice des  $\Phi$ -symétries des espèces ALT et NALT, nous obtenons  $Z_{\text{ALT}}$ ,  $\Gamma_{\text{ALT}}$ ,  $Z_{\text{NALT}}$  et  $\Gamma_{\text{NALT}}$  que nous avons présentés dans [30] mais que nous avons depuis, généralisés. Une partie du contenu des deux dernières sections du chapitre 2 est le fruit d'une collaboration avec Gilbert et Jacques Labelle et est parue dans [27]. La section concernant la série indicatrice d'asymétrie de l'espèce des ensembles orientés et la  $q$ -série qui lui est associée a été écrite en collaboration avec Gilbert Labelle et est parue dans [30]. Les résultats des chapitres 3 et 4 ont été présentés [31] au 7ème Colloque international des *Séries Formelles et Combinatoire Algébrique*, Marne-la-Vallée, et feront l'objet de publications futures.

# Chapitre 1

## La série indicatrice des $\Phi$ -symétries d'une espèce pondérée

*Never underestimate a theorem that counts something*

— John B. Fraleigh, [16]

À partir d'un ensemble  $\Phi$  de groupes, non conjugués deux à deux, choisis parmi les sous-groupes des groupes symétriques  $\mathfrak{S}_n$ ,  $n \geq 0$ , on définit la série indicatrice des  $\Phi$ -symétries d'une espèce de structures quelconque  $F$ . Il s'agit d'une série formelle,  $\Phi_F = \Phi_F(x_1, x_2, \dots)$ , qui généralise simultanément les notions de série indicatrice des cycles,  $Z_F = Z_F(x_1, x_2, \dots)$ , au sens de A. Joyal [18, 41, 42] et de série indicatrice d'asymétrie,  $\Gamma_F = \Gamma_F(x_1, x_2, \dots)$ , au sens de G. Labelle [24, 25, 26].

Nous nous plongeons d'abord dans l'univers des espèces pondérées sommables où les opérations de base (de somme, de produit, de produit cartésien, de dérivation, de pointage, de substitution, etc.) se font comme dans celui des espèces pondérées. À toute espèce pondérée  $F = F_w$  correspond une famille d'actions. Nous présentons donc, à la

section 1.2, les notions usuelles de la théorie des actions de groupes et leur utilisation dans le contexte de la théorie des espèces. Nous nous intéressons, en particulier, à la correspondance [33, 34] entre l'ensemble des espèces moléculaires concentrées sur le cardinal  $n$ ,  $n \geq 0$ , et l'ensemble des classes de conjugaison de sous-groupes de  $\mathfrak{S}_n$ .

Dans [18], Joyal introduit l'espèce  $\widetilde{F}$ , dite associée à une espèce  $F$ , qui sert à l'énumération des types de  $F$ -structures. Dans le même ordre d'idées, nous présentons à la section 1.3, l'espèce  $\widetilde{F}^\Phi$ ,  $\Phi$ -associée à une espèce pondérée  $F = F_w$ . Celle-ci généralise la notion d'espèce associée  $\widetilde{F}$  de Joyal et, par un choix judicieux de l'ensemble  $\Phi$ , s'identifie à la sous-espèce  $\overline{F}$  de  $F$ , définie par G. Labelle [25] dans le but de donner une définition uniforme pour les séries indicatrices  $Z_F$  et  $\Gamma_F$ . Il est bien connu [5, 12, 18] que, pour deux espèces pondérées  $F_w$  et  $G_v$ ,  $(F_w + G_v)^\sim = \widetilde{F}_w + \widetilde{G}_v$  et que  $(F_w \cdot G_v)^\sim = \widetilde{F}_w \cdot \widetilde{G}_v$  mais que  $(F_w \circ G_v)^\sim \neq \widetilde{F}_w \circ \widetilde{G}_v$ . De même [25],  $\overline{(F_w + G_v)} = \overline{F}_w + \overline{G}_v$  et  $\overline{F_w \cdot G_v} = \overline{F}_w \cdot \overline{G}_v$  mais,  $\overline{F_w \circ G_v} \neq \overline{F}_w \circ \overline{G}_v$ . En général  $(F_w + G_v)^{\sim\Phi} = \widetilde{F}_w^\Phi + \widetilde{G}_v^\Phi$  mais,  $(F_w \cdot G_v)^{\sim\Phi} \neq \widetilde{F}_w^\Phi \cdot \widetilde{G}_v^\Phi$ . Nous nous interrogeons alors sur les conditions à imposer à  $\Phi$  afin que, quelles que soient les espèces  $F_w$  et  $G_v$ , on ait  $(F_w \cdot G_v)^{\sim\Phi} = \widetilde{F}_w^\Phi \cdot \widetilde{G}_v^\Phi$ .

Joyal [18] a montré que la série génératrice des types de  $F$ -structures est égale à la série génératrice exponentielle de l'espèce associée  $\widetilde{F}$ . De même, à la section 1.4, on constate que l'énumération des types de  $\Phi$ -symétries des  $F$ -structures peut se faire par le biais de la série génératrice exponentielle de l'espèce  $\widetilde{F}^\Phi$ .

Basé sur la notion d'espèce  $\Phi$ -associée, nous terminons le chapitre par la définition de la série indicatrice des  $\Phi$ -symétries,  $\Phi_F(x_1, x_2, \dots)$ , d'une espèce pondérée  $F = F_w$ . La transformation  $F \mapsto \Phi_F$  préserve l'opération combinatoire de somme et la série génératrice des types de  $\Phi$ -symétries est obtenue par la spécialisation des variables dans la  $\Phi$ -série  $\Phi_F(x_1, x_2, \dots)$ .

## 1.1 Les espèces pondérées sommables

Soient  $\mathbb{K}$  un corps contenant  $\mathbb{Q}$  et  $t_1, t_2, \dots$  une famille dénombrable d'indéterminées distinctes. Nous considérons l'anneau des séries formelles  $\mathbb{A} = \mathbb{K}[[t_1, t_2, \dots]]$ . Pour une série formelle  $\alpha \in \mathbb{A}$ , désignons par  $[\mu]\alpha$  le coefficient de  $\mu$  dans la série  $\alpha$ ; en particulier,



$[t_1^{n_1} t_2^{n_2} \cdots] \alpha$  est le coefficient de  $t_1^{n_1} t_2^{n_2} \cdots$  dans  $\alpha$  et en général,  $c_{n_1, n_2, \dots} [t_1^{n_1} t_2^{n_2} \cdots] \alpha$  est le coefficient de  $\frac{t_1^{n_1} t_2^{n_2} \cdots}{c_{n_1, n_2, \dots}}$  dans  $\alpha$ .

Un ensemble  $\mathbb{A}$ -pondéré est un couple  $(W, w)$  tel que  $W$  est un ensemble et  $w : W \rightarrow \mathbb{A}$  est une fonction qui associe à chaque élément  $s \in W$  un poids dans l'anneau  $\mathbb{A}$ .

**Définition 1.1.1.** *Un ensemble  $\mathbb{A}$ -pondéré  $(W, w)$  est sommable lorsque pour tout monôme  $\mu$  on a  $[\mu]w(s) = 0$  sauf pour un ensemble fini  $W_\mu \subseteq W$ . On appelle l'inventaire (ou poids total) d'un ensemble pondéré sommable  $(W, w)$  la série formelle, notée*

$$|W|_w = \sum_{s \in W} w(s) \in \mathbb{A},$$

dont le coefficient d'un monôme quelconque  $\mu = t_1^{n_1} t_2^{n_2} t_3^{n_3} \cdots$  est donné par

$$[\mu]|W|_w = \sum_{s \in W} [\mu]w(s) = \sum_{s \in W_\mu} [\mu]w(s).$$

**Définition 1.1.2.** *Une espèce  $\mathbb{A}$ -pondérée sommable est un foncteur  $F_w : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{A}}$  de la catégorie des ensembles finis et bijections vers la catégorie des ensembles  $\mathbb{A}$ -pondérés sommables.*

Pour ne pas alourdir la terminologie, nous désignerons simplement par espèces pondérées les espèces  $\mathbb{A}$ -pondérées sommables. Une espèce pondérée  $(F, w)$ , notée  $F_w$ , est donc une règle qui associe à tout ensemble fini  $U$  :

1. Un ensemble  $\mathbb{A}$ -pondéré sommable  $(F[U], w_U)$  dont les éléments de  $F[U]$  sont appelés des *structures* d'espèce  $F$  (ou encore, des  $F$ -structures) sur  $U$  et  $w_U : F[U] \rightarrow \mathbb{A}$  est une fonction de *poids* (ou *valuation*) qui attribue un poids à chacune des  $F$ -structures.
2. Pour tout couple  $(U, V)$  d'ensembles finis et toute bijection  $f : U \xrightarrow{\sim} V$ , la règle  $F_w$  associe à  $f$  une fonction  $F[f] : F[U] \xrightarrow{\sim} F[V]$ , appelée le morphisme de transport ou simplement le *transport*, le long de  $f$  qui :
  - (a) préserve les poids, c.-à-d. : si  $s \in F[U]$  et  $t = F[f](s) \in F[V]$  alors  $w(s) = w(t)$ ,

- (b) effectue un transport fonctoriel, c.-à-d. : pour tout triplet  $(U, V, W)$  d'ensembles finis et tout couple de bijections,  $f : U \xrightarrow{\sim} V$  et  $g : V \xrightarrow{\sim} W$ , on a  $F[g] \circ F[f] = F[g \circ f]$ ,
- (c) préserve les identités, c.-à-d. : pour tout ensemble fini  $U$  on a pour l'identité  $1_U : U \xrightarrow{\sim} U$  que  $F[1_U] = 1_{F[U]}$ .

Notons qu'une espèce pondérée  $F = F_w$  peut être vue comme une classe de structures, munies de poids, qui est fermée sous les isomorphismes préservant les poids.

### Exemples 1.1.3.

- Soit  $W$  un ensemble quelconque. Si  $\forall s \in W, w(s) = 1$  alors  $(W, w)$  est sommable si et seulement si  $W$  est un ensemble fini. Lorsque la valuation de chacun des éléments d'un ensemble  $W$  est 1,  $|W|_1 = |W|$  correspond à la notion usuelle de cardinal d'un ensemble.
- Si  $W = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}^*$  et  $w(i) = t_i$  alors  $(W, w)$  est sommable et  $|W|_w = \sum_{i \in \mathbb{N}^*} t_i$ .
- Soit  $X_{t_i}$  l'espèce des singletons de poids  $t_i, i \geq 1$ . L'espèce pondérée  $X_{t_1} + X_{t_2} + X_{t_3} + \dots$  est définie par

$$\forall U \in \mathbb{B}, (X_{t_1} + X_{t_2} + X_{t_3} + \dots)[U] = \begin{cases} \{(i, u) \mid i \in \mathbb{N}^*, u \in U\} & \text{si } |U| = 1 \\ \emptyset & \text{si } |U| \neq 1 \end{cases}$$

où  $w((i, u)) = t_i$ . On a  $|(X_{t_1} + X_{t_2} + X_{t_3} + \dots)[U]|_w = \sum_{i \in \mathbb{N}^*} t_i$  lorsque  $|U| = 1$ .

- Si  $W$  est l'ensemble des arbres construits un ensemble fini  $U$  donné et  $w(s) = t_1^{n_1(s)} t_2^{n_2(s)} \dots$  où  $n_i(s), i \geq 1$ , désigne le nombre de sommets de degré  $i$  dans l'arbre  $s$ , alors

$$|W|_w = \sum_{\substack{n_1, n_2, \dots \geq 0 \\ n_1 + n_2 + \dots < \infty}} a_{n_1, n_2, \dots} t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots$$

où  $a_{n_1, n_2, \dots}$  est le nombre d'arbres de  $W$  ayant  $n_i$  sommets de degré  $i, i \geq 1$ . En faisant varier l'ensemble  $U$ , on obtient ainsi l'espèce  $\text{Ar}_w$  des arbres pondérés selon la distribution des degrés des sommets.  $\diamond$

Pour plus de détails concernant les propriétés des ensembles pondérés sommables, voir [39]. Notons que les opérations de base (de somme, de produit, de produit cartésien,

de dérivation, de pointage, de substitution, etc.) dans le contexte des espèces pondérées sommables se font comme dans celui des espèces pondérées et qu'on en trouve un exposé complet dans Bergeron, Labelle et Leroux [5].

Deux espèces  $\mathbb{A}$ -pondérées  $F_w$  et  $G_v$  sont isomorphes et on note  $F_w \simeq G_v$ , s'il existe un isomorphisme naturel  $\gamma$  entre les foncteurs  $F_w$  et  $G_v$ . Plus précisément, un isomorphisme naturel  $\gamma$  est la donnée d'une famille de bijections  $\gamma_U : F[U] \rightarrow G[U]$  préservant les poids, c.-à-d. :  $v(\gamma_U(s)) = w(s)$ , qui satisfait la condition de naturalité suivante : pour toute bijection  $\sigma : U \xrightarrow{\sim} V$  entre ensembles finis, le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} F[U] & \xrightarrow{\gamma_U} & G[U] \\ F[\sigma] \downarrow & & \downarrow G[\sigma] \\ F[V] & \xrightarrow{\gamma_V} & G[V] \end{array}$$

Deux espèces pondérées isomorphes possèdent essentiellement les mêmes propriétés combinatoires. Nous considérons donc les isomorphismes d'espèces comme des égalités combinatoires et écrivons  $F_w = G_v$  plutôt que  $F_w \simeq G_v$ .

## 1.2 Les actions de groupes et les espèces de structures

Considérons une espèce pondérée  $F = F_w$  quelconque. Pour tout ensemble fini  $U$ , le groupe des permutations de  $U$ , noté  $\mathfrak{S}_U$ , agit par transport de structures sur l'ensemble  $F[U]$  des  $F$ -structures sur  $U$  :

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_U \times F[U] &\longrightarrow F[U] \\ (\sigma, s) &\longmapsto \sigma.s = F[\sigma](s). \end{aligned} \tag{1.1}$$

En général, la structure  $\sigma.s$  est obtenue de la structure  $s$  en remplaçant chaque élément  $u$  de son ensemble sous-jacent  $U$ , par l'élément correspondant  $\sigma(u)$  (ce transport est dit *usuel*). La préservation des poids et la functorialité du transport nous assurent que (1.1) est bien une action de groupe sur un ensemble pondéré au sens de la théorie des groupes.

**Remarque 1.2.1.** À toute espèce pondérée  $F = F_w$  correspond une famille d'actions : pour toute bijection  $\beta : U \xrightarrow{\sim} V$  entre ensembles finis, les actions  $\gamma_1 : \mathfrak{S}_U \times F[U] \rightarrow F[U]$

et  $\gamma_2 : \mathfrak{S}_V \times F[V] \rightarrow F[V]$  induites par le transport de structures sont équivalentes et le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_U \times F[U] & \xrightarrow{\gamma_1} & F[U] \\ (\phi, F[\beta]) \downarrow & & \downarrow F[\beta] \\ \mathfrak{S}_V \times F[V] & \xrightarrow{\gamma_2} & F[V] \end{array}$$

où  $\phi : \mathfrak{S}_U \xrightarrow{\sim} \mathfrak{S}_V$  est l'isomorphisme défini par  $\phi(\sigma) = \beta\sigma\beta^{-1}$ ,  $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_U$ . Lorsque  $U$  parcourt la classe des ensembles finis, la famille d'actions (1.1) peut être représentée de façon canonique par la famille d'actions particulières  $(\gamma_{F_n})_{n \geq 0}$

$$\begin{array}{ccc} \gamma_{F_n} : \mathfrak{S}_n \times F[[n]] & \longrightarrow & F[[n]] \\ (\sigma, s) & \longmapsto & \sigma.s = F[\sigma](s), \end{array}$$

où  $[[n]] = \{1, 2, \dots, n\}$  et  $\mathfrak{S}_n := \mathfrak{S}_{[[n]]}$ ,  $n \geq 0$ . □

Associées à l'action (1.1) sont les notions usuelles de la théorie des groupes :

- d'*orbite* d'un élément  $s \in F[U]$ ,  $O(s) := \{\sigma.s = F[\sigma](s) \mid \sigma \in \mathfrak{S}_U\}$  et l'*ensemble des orbites* de l'action  $O(F[U]) := \{O(s) \mid s \in F[U]\}$ ;
- de *stabilisateur* d'un élément  $s \in F[U]$ ,  $\text{stab}(s) = H_s := \{\sigma \in \mathfrak{S}_U \mid \sigma.s = s\}$ ;
- d'*ensemble d'éléments fixés* par  $\sigma \in \mathfrak{S}_U$ ,  $\text{Fix}F[\sigma] := \{s \mid \sigma.s = s\}$ .

Les types de  $F$ -structures sur un ensemble fini  $U$  correspondent aux orbites de l'action (1.1) et deux structures  $s_1, s_2 \in F[U]$  sont de même type ( $s_1 \sim_F s_2$  ou  $s_1 \sim_{\mathfrak{S}_U} s_2$ ) si elles ont la même orbite. Puisque le transport préserve les poids, toutes les structures d'un même type ont le même poids et on peut définir sans ambiguïté le *poids d'un type* comme le poids d'un de ses représentants, c.-à-d. :  $w(O(s)) = w(s)$ . L'ensemble  $O(F[U])$  des types de  $F$ -structures sur  $U$  forme donc, lui aussi, un ensemble pondéré et est souvent noté  $O(F[U]) = F[U]/\mathfrak{S}_U$ . Lorsque  $s$  parcourt un système de représentants des orbites, nous conviendrons d'écrire  $s \in O(F[U])$  et

$$F[U] = \bigsqcup_{s \in O(F[U])} O(s).$$

Le stabilisateur d'un élément  $\sigma.s \in F[U]$  est obtenu du stabilisateur de  $s$  par conjugaison,  $H_{\sigma.s} = \sigma H_s \sigma^{-1} = H_s^\sigma$ . La classe de conjugaison d'un sous-groupe  $H$

de  $\mathfrak{S}_U$  est désignée par  $\overline{H} = \{\sigma H \sigma^{-1} = H^\sigma \mid \sigma \in \mathfrak{S}_U\}$  et  $H \equiv K$  signifie que  $H$  et  $K$  sont des sous-groupes conjugués dans  $\mathfrak{S}_U$ .

Notons simplement par  $H \leq \mathfrak{S}_U$  le stabilisateur d'une  $F$ -structure  $s$  fixée vivant sur  $U$ . Il est bien connu que l'application

$$\begin{aligned} O(s) &\longrightarrow \mathfrak{S}_U/H \\ \sigma.s &\longmapsto \sigma H \end{aligned} \tag{1.2}$$

est une bijection entre l'orbite  $O(s)$  de  $s$  et l'ensemble  $\mathfrak{S}_U/H$  des classes latérales gauches de  $H$  dans  $\mathfrak{S}_U$ ; d'où l'égalité  $|O(s)| = |\mathfrak{S}_U/H|$ . L'inventaire des types de  $F$ -structures, par le lemme de Cauchy-Frobenius, surtout connu sous le nom de Burnside, est donnée par

$$|O(F[U])|_w = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} |\text{Fix} F[\sigma]|_w = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sum_{\substack{s \in F[U] \\ \sigma.s=s}} w(s).$$

**Définition 1.2.2.** Une espèce  $M \neq 0$  est dite moléculaire lorsqu'elle est indécomposable sous la somme d'espèces, c.-à-d. :  $M = P + Q \implies P = 0$  ou  $Q = 0$ . Une espèce moléculaire  $A \neq 1$  est dite atomique lorsqu'elle est indécomposable sous le produit d'espèces, c.-à-d. :  $A = P \cdot Q \implies P = 1$  ou  $Q = 1$ .

Désignons par  $\mathcal{M}$  (respectivement par  $\mathcal{A}$ ) l'ensemble de toutes les espèces moléculaires (resp. atomiques), non pondérées et à isomorphisme naturel près,

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \{1, X, X^2, E_2, X^3, X \cdot E_2, E_3, C_3, \dots\} \\ \mathcal{A} &= \{X, E_2, E_3, C_3, E_4, E_4^\pm, E_2 \circ E_2, \dots\}, \end{aligned}$$

et par  $\mathcal{M}_n \subseteq \mathcal{M}$  (respectivement par  $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}$ ) l'ensemble des espèces moléculaires (resp. atomiques) concentrées sur le cardinal  $n$ , c.-à-d. : le sous-ensemble de  $\mathcal{M}$  (resp. de  $\mathcal{A}$ ) formé des espèces dont les structures n'existent que sur des ensembles ayant  $n$  éléments.

Dire qu'une espèce  $M$  est moléculaire signifie que  $M$  est concentrée sur un seul cardinal et que, pour tout ensemble fini  $U$ , l'action (1.1) est transitive, c.-à-d. : l'action

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_U \times M[U] &\longrightarrow M[U] \\ (\sigma, s) &\longmapsto M[\sigma](s) \end{aligned}$$

n'a qu'une seule orbite et  $M$  ne possède qu'un seul type de structures. Puisqu'il n'y a qu'une seule orbite, toutes les structures d'une espèce moléculaire sont de même poids. Nous désignons donc par  $M_a$  une espèce moléculaire dont les structures sont de poids  $a \in \mathbb{A}$ .

La décomposition moléculaire d'une espèce pondérée  $F = F_w$  correspond à la décomposition de l'action (1.1) en une réunion disjointe d'actions transitives (toujours à isomorphisme d'actions près). De plus, toute espèce pondérée  $F = F_w$  [54, 55] possède une décomposition moléculaire et une décomposition atomique uniques, à isomorphisme et à l'ordre des facteurs près,

$$F = \sum_{\substack{M \in \mathcal{M} \\ a \in \mathbb{A}}} f_{M_a} M_a = \sum_{\substack{M \in \mathcal{M} \\ a \in \mathbb{A}}} f_{M_a} \left( \prod_{A \in \mathcal{A}} A^{n_A(M)} \right)_a$$

où  $f_{M_a}, n_A(M) \in \mathbb{N}$  et  $\sum_{A \in \mathcal{A}} n_A(M) < \infty$ . Cette dernière est la décomposition la plus raffinée que l'on puisse associer à une espèce  $F$  relativement aux opérations de somme et de produit. Le demi-anneau  $Esp$  formé des espèces sous les opérations de somme et de produit est isomorphe à  $\mathbb{N}[[\mathcal{A}]]$  et les monômes de  $\mathbb{N}[[\mathcal{A}]]$  correspondent aux espèces moléculaires. Pour tout ensemble fini  $U$  de cardinal  $n$ ,  $F_w[U]$  est sommable et son poids total est

$$|F[U]|_w = \sum_{\substack{M \in \mathcal{M}_n \\ a \in \mathbb{A}}} f_{M_a} a |M[U]|.$$

**Remarque 1.2.3.** Lorsque l'espèce  $F$  considérée est moléculaire et  $s \in F[U]$  est fixée, l'application (1.2) est une bijection entre l'ensemble des  $F$ -structures sur  $U$  et l'ensemble des classes latérales gauches de  $H = \text{stab}(s)$  dans  $\mathfrak{S}_U$ . Toute  $F$ -structure sur  $U$  s'identifie donc à  $\tau H$  où  $\tau \in \mathfrak{S}_U$  et  $H = \text{stab}(s)$ ; ceci quelle que soit la structure  $s \in F[U]$  donnée à priori.  $\square$

**Remarque 1.2.4.** Il existe une bijection [33, 34] entre l'ensemble  $\mathcal{M}_n$  des espèces moléculaires concentrées sur le cardinal  $n$  et l'ensemble  $cc(\mathfrak{S}_n)$  des classes de conjugaison de sous-groupes de  $\mathfrak{S}_n$ . Celle-ci permet d'écrire toute espèce moléculaire  $M \in \mathcal{M}_n$  comme le quotient  $X^n/H$  où  $H$  est un représentant de la classe de conjugaison dans  $\mathfrak{S}_n$ , du stabilisateur d'une  $M$ -structure sur  $[[n]]$ . Plus précisément, l'espèce  $X^n/H$  est

définie, pour tout ensemble fini  $U$  de cardinal  $n$ , comme  $(X^n/H)[U] = X^n[U]/H$  avec le transport de structures usuel. Une  $X^n/H$ -structure sur  $U$  est simplement une orbite de l'action de  $H$  sur l'ensemble  $X^n[U]$ ,

$$\begin{aligned} H \times X^n[U] &\longrightarrow X^n[U] \\ (\sigma, (u_1, u_2, \dots, u_n)) &\longmapsto (u_{\sigma^{-1}(1)}, u_{\sigma^{-1}(2)}, \dots, u_{\sigma^{-1}(n)}) \end{aligned}$$

qui permute les éléments des ordres totaux.  $\square$

**Exemples 1.2.5.** Tout sous-groupe de  $\mathfrak{S}_n$  agit de façon naturelle sur l'ensemble  $X^n[[n]]$  en permutant les facteurs. On peut donc représenter les espèces moléculaires concentrées sur le cardinal  $n$  des ensembles  $E_n$ , des ensembles orientés  $E_n^\pm$ , des polygones  $P_n$ , des cycles orientés  $C_n$  et des ordres linéaires  $L_n$  par les quotients suivants :

espèces	groupes	quotients
$E_n$ : ensembles	$\mathfrak{S}_n$ : symétrique	$X^n/\mathfrak{S}_n$
$E_n^\pm$ : ensembles orientés	$\mathfrak{A}_n$ : alterné	$X^n/\mathfrak{A}_n$
$P_n$ : polygones	$\mathfrak{D}_n$ : diédral	$X^n/\mathfrak{D}_n$
$C_n$ : cycles orientés	$\mathbb{Z}_n$ : cyclique	$X^n/\mathbb{Z}_n$
$L_n$ : ordres linéaires	$\{id_n\}$ : trivial	$X^n$

où le groupe indiqué est conjugué au stabilisateur d'une structure sur  $[n]$  de l'espèce moléculaire considérée.  $\diamond$

Selon le contexte, nous utiliserons l'une ou l'autre des expressions

$$F_w = \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{M \in \mathcal{M}_n \\ a \in \mathbb{A}}} f_{M_a} M_a = \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{H \in cc(\mathfrak{S}_n) \\ a \in \mathbb{A}}} f_{H_a} (X^n/H)_a$$

pour désigner la décomposition moléculaire d'une espèce  $\mathbb{A}$ -pondérée  $F_w$ . Conformément aux notations introduites plus haut,  $H \in cc(\mathfrak{S}_n)$  signifie que  $H$  parcourt un système de représentants des classes de conjugaison de sous-groupes de  $\mathfrak{S}_n$ .

### 1.3 Les sous-espèces et les espèces associées

**Définition 1.3.1.** Soient  $F = F_w$  et  $G = G_v$  deux espèces pondérées. On dit que  $G$  est une sous-espèce de  $F$  si  $\forall U \in \mathbb{B}$ ,  $G[U] \subseteq F[U]$ , la pondération sur  $G[U]$  est induite de celle de  $F[U]$  et l'injection canonique  $i_U : G[U] \hookrightarrow F[U]$  est naturelle.

La définition 1.3.1 permet de construire de nouvelles espèces en recueillant les  $F$ -structures ayant des propriétés particulières. Les morphismes de transport sont définis par restriction et le poids d'une structure de la sous-espèce  $G$  est simplement son poids comme  $F$ -structure. L'action de  $\mathfrak{S}_U$  sur  $G[U]$  est alors une sous-action de  $\mathfrak{S}_U$  sur  $F[U]$ .

**Remarque 1.3.2.** Lorsqu'on s'intéresse aux espèces à isomorphisme près, on peut définir [23] une sous-espèce  $G$  de  $F$  en précisant seulement que pour tout  $U \in \mathbb{B}$ , il existe une injection naturelle  $j_U : G[U] \hookrightarrow F[U]$ . L'ensemble  $G[U]$  ne sera pas nécessairement un sous-ensemble de  $F[U]$  mais  $G$  sera plutôt isomorphe à une sous-espèce de  $F$ . Ceci se traduit sur les décompositions moléculaires  $F = \sum_{\substack{M \in \mathcal{M} \\ a \in \mathbb{A}}} f_{M_a} M_a$  et  $G = \sum_{\substack{M \in \mathcal{M} \\ a \in \mathbb{A}}} g_{M_a} M_a$  par le fait que  $g_{M_a} \leq f_{M_a}$ ,  $\forall M \in \mathcal{M}$  et  $a \in \mathbb{A}$ .  $\square$

Soient  $F = F_w$  une espèce pondérée et  $n \in \mathbb{N}$ . Dans l'optique de la définition 1.3.1, nous pouvons toujours extraire de  $F$  une sous-espèce  $F_n \subseteq F$  en recueillant les  $F$ -structures dont l'ensemble sous-jacent est de cardinal  $n$ .

**Définition 1.3.3.** Soit  $F = F_w$  une espèce pondérée. La sous-espèce  $F_n$  de  $F$  est définie par

$$\forall U \in \mathbb{B}, \quad F_n[U] = \begin{cases} F[U] & \text{si } |U| = n \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si  $F_n = F$ ,  $F$  est dite concentrée sur le cardinal  $n$ , ou encore, on dit qu'elle vit sur le cardinal  $n$ .

Puisque toute  $F$ -structure est une  $F_n$ -structure pour un unique  $n \in \mathbb{N}$ ,  $F$  possède la décomposition canonique

$$F = F_0 + F_1 + F_2 + F_3 + \cdots = \sum_{n \geq 0} F_n. \quad (1.3)$$



L'ensemble des symétries d'une  $F$ -structure  $s$  donnée est codé par son groupe d'automorphismes. Gilbert Labelle introduit dans [25], la notion de partie plate d'une espèce qui sert lors de l'énumération des structures n'ayant aucune symétrie non triviale.

**Définition 1.3.4.** *Soit  $U$  un ensemble fini. Une  $F$ -structure  $s$  sur  $U$  est dite asymétrique lorsque son stabilisateur (c.-à-d. : son groupe d'automorphismes) sous l'action (1.1) est trivial, c'est-à-dire,  $\text{stab}(s) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_U \mid \sigma.s = s\} = \{id_U\}$ .*

**Définition 1.3.5.** *La partie plate d'une espèce pondérée  $F = F_w$  est la sous-espèce  $\overline{F} \subseteq F$  donnée par,  $\forall U \in \mathbb{B}$ ,  $\overline{F}[U] = \{s \in F[U] \mid s \text{ asymétrique}\}$ . Une espèce est dite plate lorsqu'elle coïncide avec sa partie plate, c.-à-d. : lorsque  $F = \overline{F}$ .*

Parallèlement à (1.3), la décomposition canonique de  $\overline{F}$  est donnée par

$$\overline{F} = \overline{F}_0 + \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 + \cdots = \sum_{n \geq 0} \overline{F}_n.$$

**Exemples 1.3.6.** L'espèce  $L$  des ordres linéaires est plate. Par contre, les espèces  $E$ ,  $E^\pm$ ,  $P$  et  $C$  ne le sont pas. En effet, pour tout  $n \geq 0$ , l'espèce  $L_n$  est isomorphe à l'espèce  $X^n$  et  $\overline{X}^n = \overline{X}^n = X^n$ ,  $n \geq 0$ , car tout ordre linéaire sur  $n$  points est asymétrique. Puisque  $X^n$  pour  $n \geq 0$  sont les seules espèces moléculaires plates, l'espèce  $\overline{F}$  est obtenue de l'espèce  $F$  en prenant les termes de sa décomposition moléculaire qui sont de la forme  $kX^n$  où  $k, n \in \mathbb{N}$ . On a donc

$$\begin{aligned} E &= \sum_{n \geq 0} E_n = \sum_{n \geq 0} X^n / \mathfrak{S}_n, & \overline{E} &= 1 + X, \\ E^\pm &= \sum_{n \geq 0} E_n^\pm = \sum_{n \geq 0} X^n / \mathfrak{A}_n, & \overline{E}^\pm &= 1 + X, \\ P &= \sum_{n \geq 1} P_n = \sum_{n \geq 1} X^n / \mathfrak{D}_n, & \overline{P} &= X, \\ C &= \sum_{n \geq 1} C_n = \sum_{n \geq 1} X^n / \mathbb{Z}_n, & \overline{C} &= X, \\ L &= \sum_{n \geq 0} L_n = \sum_{n \geq 0} X^n, & \overline{L} &= \sum_{n \geq 0} \overline{L}_n = \sum_{n \geq 0} L_n = L. \end{aligned}$$

La décomposition canonique et la décomposition moléculaire de chacune des espèces  $E$ ,  $E^\pm$ ,  $P$ ,  $C$  et  $L$  sont identiques. Ceci n'est pas toujours le cas. L'espèce des arborescences  $A$  (voir [25]) a la décomposition canonique  $A = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \cdots$  où, par exemple,  $A_4 = 2X^4 + X^2E_2 + XE_3$ .  $\diamond$

Dans [18], Joyal présente l'espèce  $\widetilde{F}$  dite associée à l'espèce  $F$  qui sert lors de l'énumération des types de  $F$ -structures.

**Définition 1.3.7.** Soit  $F_w$  une espèce pondérée. On définit l'espèce pondérée  $\widetilde{F}_w$ , dite associée à  $F_w$ , par  $\forall U \in \mathbb{B}$ ,  $\widetilde{F}_w[U] = \{(s, \sigma) \mid s \in F_w[U], \sigma \in \mathfrak{S}_U, \sigma.s = s\}$ ,  $\forall (s, \sigma) \in \widetilde{F}_w[U]$ ,  $w((s, \sigma)) = w(s)$  et  $\forall \beta : U \xrightarrow{\sim} V$ ,  $\widetilde{F}_w[\beta](s, \sigma) = (\beta.s, \beta\sigma\beta^{-1})$ .

Dans le même ordre d'idée, nous allons d'abord définir, pour tout sous-groupe  $K$  de  $\mathfrak{S}_n$ , une espèce  $\widetilde{F}_w^K$ , dite  $K$ -associée à  $F_w$ , en ne considérant que les structures dont le stabilisateur est conjugué, à isomorphisme près, à  $K$ . Par la suite, nous allons étendre cette définition à tout ensemble  $\Phi$  de groupes non conjugués deux à deux. Pour l'instant, nous avons besoin des notations suivantes.

**Notations 1.3.8.** Pour  $K \leq \mathfrak{S}_n$  et  $\beta : \llbracket n \rrbracket \xrightarrow{\sim} U$  une bijection arbitraire, on pose

$$K^\beta := \beta K \beta^{-1} = \{\beta \sigma \beta^{-1} \mid \sigma \in K\} \leq \mathfrak{S}_U.$$

Pour  $H \leq \mathfrak{S}_U$ , on écrit  $H \approx K$  lorsque  $H$  est conjugué dans  $\mathfrak{S}_U$  à  $K^\beta$ , pour une bijection  $\beta : \llbracket n \rrbracket \xrightarrow{\sim} U$ .

**Définition 1.3.9.** Soient  $K \leq \mathfrak{S}_n$  et  $F_w$  une espèce pondérée. On définit l'espèce  $\widetilde{F}_w^K$ , dite  $K$ -associée à  $F_w$ , par

$$\forall U \in \mathbb{B}, \quad \widetilde{F}_w^K[U] = \begin{cases} \{(s, \sigma) \mid s \in F_w[U], \sigma \in \text{stab}(s) \approx K\} & \text{si } |U| = n \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le transport est défini par restriction et le poids de toute  $\widetilde{F}_w^K$ -structure  $(s, \sigma)$  est son poids  $w(s)$  comme  $F_w$ -structure.

**Remarque 1.3.10.** Considérons deux bijections arbitraires

$$\beta_1 : \llbracket n \rrbracket \xrightarrow{\sim} U \text{ et } \beta_2 : \llbracket n \rrbracket \xrightarrow{\sim} U$$

et la permutation  $\delta$  de  $U$  formée par  $\delta = \beta_2 \beta_1^{-1}$ . On a,  $\forall \beta_1 \sigma \beta_1^{-1} \in K^{\beta_1}$ ,

$$\delta \beta_1 \sigma \beta_1^{-1} \delta^{-1} = (\beta_2 \beta_1^{-1}) \beta_1 \sigma \beta_1^{-1} (\beta_2 \beta_1^{-1})^{-1} = \beta_2 \sigma \beta_2^{-1}.$$

Ainsi,  $K^{\beta_1} \equiv_{\mathfrak{S}_U} K^{\beta_2}$  et  $\widetilde{F}_w^K[U]$  ne dépend pas du choix de la bijection  $\beta$ .  $\square$

**Remarque 1.3.11.** Dans le cas où  $U = \llbracket n \rrbracket$ , on a, pour toute espèce pondérée  $F_w$  et tout  $K \leq \mathfrak{S}_n$ ,

$$\widetilde{F}_w^K \llbracket \llbracket n \rrbracket \rrbracket = \{(s, \sigma) \mid s \in F \llbracket \llbracket n \rrbracket \rrbracket, \sigma \in \text{stab}(s) \equiv K\}.$$

Le stabilisateur des  $F_w$ -structures considérées dans l'ensemble  $\widetilde{F}_w^K \llbracket \llbracket n \rrbracket \rrbracket$  est donc conjugué au sous-groupe  $K$ .  $\square$

**Remarque 1.3.12.** Soit  $F = F_w = \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{H \in \text{cc}(\mathfrak{S}_n) \\ a \in \mathbb{A}}} f_{H_a} (X^n/H)_a$  la décomposition moléculaire d'une espèce pondérée. Pour un groupe  $K \leq \mathfrak{S}_k$  fixé,

$$\widetilde{F}_w^K = \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{H \in \text{cc}(\mathfrak{S}_n) \\ a \in \mathbb{A}}} f_{H_a} (X^n/H)_a^{\sim K} = \sum_{a \in \mathbb{A}} f_{K_a} (X^k/K)_a^{\sim}.$$

Plus particulièrement, pour  $M = X^n/H$ ,  $H \leq \mathfrak{S}_n$ , une espèce moléculaire et pour  $K \leq \mathfrak{S}_n$ , un groupe fixé, on a :

$$\widetilde{M}^K = \begin{cases} \widetilde{M} & \text{si } H \equiv K \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$\square$

**Proposition 1.3.13.** Soit  $H \leq \mathfrak{S}_n$ . La décomposition moléculaire de l'espèce associée  $(X^n/H)^{\sim}$  est donnée par

$$(X^n/H)^{\sim} = \sum_{h \in \text{conj}(H)} X^n/C_H[h]$$

où  $\text{conj}(H)$  désigne l'ensemble des classes de conjugaison d'éléments de  $H$  et  $C_H[h]$ , le commutateur de  $h$  dans  $H$ .

*Démonstration.* Nous devons partager l'action

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_n \times (X^n/H)^{\sim} \llbracket \llbracket n \rrbracket \rrbracket &\longrightarrow (X^n/H)^{\sim} \llbracket \llbracket n \rrbracket \rrbracket \\ (\beta, (\tau H, \sigma)) &\longmapsto \beta \cdot (\tau H, \sigma) = (\beta \tau H, \beta \sigma \beta^{-1}) \end{aligned}$$

en orbites disjointes. Examinons d'abord l'action  $\beta \cdot (\tau H, \sigma)$  d'un élément  $\beta \in \mathfrak{S}_n$  sur une  $(X^n/H)^{\sim}$ -structure  $(\tau H, \sigma)$  où  $\tau \in \mathfrak{S}_n$  et  $\sigma \in \text{stab}(\tau H) = \tau H \tau^{-1}$ . Toute structure  $(\tau H, \sigma)$  est transportable, par  $\beta = \tau^{-1}$ , sur un élément de la forme  $(H, h)$  où  $h \in H$ . En effet, on a  $\tau^{-1} \cdot (\tau H, \sigma) = (\tau^{-1} \tau H, \tau^{-1} \sigma \tau)$  où  $\tau^{-1} \sigma \tau \in \tau^{-1} (\tau H \tau^{-1}) \tau = H$ .

Il faut maintenant déterminer sous quelles conditions deux éléments  $(H, h)$  et  $(H, h')$ ,  $h, h' \in H$ , sont dans une même orbite. On a

$$(H, h) \sim_{(X^n/H)\sim} (H, h')$$

si et seulement s'il existe  $\tau \in \mathfrak{S}_n$  tel que  $\tau H = H$  et  $\tau h \tau^{-1} = h'$ . Ceci signifie que  $h$  est conjugué à  $h'$  dans  $H$ . L'orbite d'un élément  $(H, h)$  est donc  $\{(H, h') \mid h' \equiv_H h\}$  et on peut paramétrer les orbites par un système de représentants des classes de conjugaison d'éléments de  $H$  que nous désignons par  $h \in \text{conj}(H)$ .

Pour un représentant  $h \in \text{conj}(H)$ , cherchons le stabilisateur de la structure  $(H, h)$ . On a  $\tau \in \text{stab}((H, h)) \Leftrightarrow \tau.(H, h) = (\tau H, \tau h \tau^{-1}) = (H, h) \Leftrightarrow \tau H = H$  et  $\tau h \tau^{-1} = h \Leftrightarrow \tau \in H$  et  $\tau h = h \tau \Leftrightarrow \tau \in C_H[h] = \{h' \mid h h' = h' h, h' \in H\}$ . ■

**Définition 1.3.14.** Soient  $F = F_w$  une espèce pondérée et  $\Phi \subseteq \{K \in \text{cc}(\mathfrak{S}_n) \mid n \geq 0\}$ , un ensemble de groupes non conjugués deux à deux. On définit l'espèce  $\widetilde{F}_w^\Phi$ ,  $\Phi$ -associée à  $F_w$ , par

$$\forall U \in \mathbb{B}, \quad \widetilde{F}_w^\Phi[U] = \bigsqcup_{K \in \Phi} \widetilde{F}_w^K[U].$$

Le transport est défini par restriction et le poids d'une  $\widetilde{F}_w^\Phi$ -structure est son poids comme  $F_w$ -structure.

Il est bien connu [5, 12, 18] que, pour deux espèces pondérées  $F_w$  et  $G_v$ ,  $(F_w + G_v)^\sim = \widetilde{F}_w + \widetilde{G}_v$  et que  $(F_w \cdot G_v)^\sim = \widetilde{F}_w \cdot \widetilde{G}_v$  mais que  $(F_w \circ G_v)^\sim \neq \widetilde{F}_w \circ \widetilde{G}_v$ . De même [25, 26],  $\overline{(F_w + G_v)} = \overline{F_w} + \overline{G_v}$  et  $\overline{F_w \cdot G_v} = \overline{F_w} \cdot \overline{G_v}$  mais,  $\overline{F_w \circ G_v} \neq \overline{F_w} \circ \overline{G_v}$ . Qu'en est-il pour les espèces  $\widetilde{F}_w^\Phi$  ?

**Proposition 1.3.15.** Pour toutes espèces pondérées  $F = F_w$  et  $G = G_v$ ,

$$(F_w + G_v)^{\sim\Phi} = \widetilde{F}_w^\Phi + \widetilde{G}_v^\Phi.$$

*Démonstration.* Il suffit de se rappeler que les structures d'une somme d'espèces sont obtenues par la réunion disjointe des structures de chacune des espèces de la somme et le résultat suit. ■

**Remarque 1.3.16.** Soit  $F = F_w$  une espèce pondérée. Lorsque  $K$  est le sous-groupe trivial de  $\mathfrak{S}_n$ , c.-à-d. :  $K = \{id_n\}$ , l'espèce  $\widetilde{F}_w^K = \widetilde{F}_w^{\{id_n\}}$  s'identifie canoniquement à la partie plate de  $F_n$ . En effet,  $\forall U \in \mathbb{B}$  tel que  $|U| = n$ ,

$$\begin{aligned}\widetilde{F}_n^{\{id_n\}}[U] &= \{(s, \sigma) \mid s \in F_n[U], \sigma \in \text{stab}(s) \approx \{id_n\}\} \\ &= \{(s, id_U) \mid s \in \overline{F}_n[U]\} \simeq \{s \mid s \in \overline{F}_n[U]\}.\end{aligned}$$

Ainsi, si  $\Phi = \{\{id_n\} \mid n \geq 0\}$  alors

$$\widetilde{F}^\Phi = \sum_{n \geq 0} \widetilde{F}_n^{\{id_n\}} = \sum_{n \geq 0} \overline{F}_n = \overline{F}.$$

De plus, si  $\Phi = \{K \subseteq cc(\mathfrak{S}_n) \mid n \geq 0\}$  alors  $\widetilde{F}^\Phi = \widetilde{F}$ .  $\square$

En général,  $(F_w \cdot G_v)^{\sim\Phi} \neq \widetilde{F}_w^\Phi \cdot \widetilde{G}_v^\Phi$ . Ceci nous amène à nous interroger sur les conditions à imposer à  $\Phi$  afin que, quelles que soient les espèces  $F_w$  et  $G_v$ , on ait  $(F_w \cdot G_v)^{\sim\Phi} = \widetilde{F}_w^\Phi \cdot \widetilde{G}_v^\Phi$ .

**Remarque 1.3.17.** Rappelons que le produit de deux espèces moléculaires est aussi moléculaire [54, 55]. Pour deux groupes  $H_1 \leq \mathfrak{S}_n$  et  $H_2 \leq \mathfrak{S}_m$ ,

$$\frac{X^n}{H_1} \cdot \frac{X^m}{H_2} = \frac{X^{n+m}}{H_1 \star H_2},$$

où le produit externe  $H_1 \star H_2$  est le sous-groupe de  $\mathfrak{S}_{n+m}$ , isomorphe au produit direct  $H_1 \times H_2$ , défini par

$$H_1 \star H_2 = \{h_1 \star h_2 \mid h_1 \in H_1, h_2 \in H_2\},$$

où les éléments  $h_1 \star h_2$  de  $H_1 \star H_2$  sont définis par

$$(h_1 \star h_2)(i) = \begin{cases} h_1(i) & \text{si } 1 \leq i \leq n \\ n + h_2(i - n) & \text{si } n + 1 \leq i \leq n + m. \end{cases}$$

Plus généralement, pour  $H_1 \leq \mathfrak{S}_{U_1}$  et  $H_2 \leq \mathfrak{S}_{U_2}$ , tels que  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ , le groupe  $H_1 \star H_2$  est le sous-groupe de  $\mathfrak{S}_{U_1 \uplus U_2}$ , isomorphe à  $H_1 \times H_2$ , défini par

$$H_1 \star H_2 = \{h_1 \star h_2 \mid h_1 \in H_1, h_2 \in H_2\},$$

où les éléments  $h_1 \star h_2$  de  $H_1 \star H_2$  sont définis par

$$(h_1 \star h_2)(u) = \begin{cases} h_1(u) & \text{si } u \in U_1 \\ h_2(u) & \text{si } u \in U_2. \end{cases}$$

□

**Critère de réductibilité de Yeh [54]** Soit  $M = X^n/H$ ,  $H \leq \mathfrak{S}_n$ ,  $n \geq 2$ , une espèce moléculaire. S'il existe un ensemble  $U \subseteq \llbracket n \rrbracket$ ,  $\emptyset \neq U \neq \llbracket n \rrbracket$ , tel que les conditions

- $\sigma \in H \Rightarrow \forall u \in U, \sigma(u) \in U$  et  $\forall u \in \llbracket n \rrbracket - U, \sigma(u) \in \llbracket n \rrbracket - U$
- $\sigma \in H \Rightarrow \sigma|_U \star id_{\llbracket n \rrbracket - U} \in H$ .

sont satisfaites, alors  $M$  est réductible sous le produit, c.-à-d. :  $M$  n'est pas atomique.

Afin de simplifier la description des propriétés de l'espèce  $\Phi$ -associée,  $\widetilde{F}_w^\Phi$ , introduisons la terminologie suivante.

**Définition 1.3.18.** Soit  $\Phi \subseteq \{K \in cc(\mathfrak{S}_n) | n \geq 0\}$ , un ensemble de groupes non conjugués deux à deux. Le saturé de  $\Phi$  sous la conjugaison, noté  $\hat{\Phi}$ , est défini par

$$\hat{\Phi} = \bigsqcup_{K \in \Phi} \overline{K}$$

où  $\overline{K}$  désigne la classe de conjugaison du sous-groupe  $K$  dans le groupe symétrique. De plus, on dit que  $\hat{\Phi}$  est fortement stable sous le produit externe de groupes,  $\star$ , si  $\{id_0\} \in \hat{\Phi}$  et si

$$\forall K_1, \forall K_2 : K_1 \star K_2 \in \hat{\Phi} \iff K_1 \in \hat{\Phi} \text{ et } K_2 \in \hat{\Phi}.$$

**Proposition 1.3.19.** Soit  $\Phi \subseteq \{K \in cc(\mathfrak{S}_n) | n \geq 0\}$ , un ensemble de groupes non conjugués deux à deux. Pour toutes espèces pondérées  $F = F_w$  et  $G = G_v$ ,

$$(F \cdot G)^{\sim \Phi} = \widetilde{F}^\Phi \cdot \widetilde{G}^\Phi$$

si et seulement si  $\hat{\Phi}$  est fortement stable sous le produit externe de groupes.

*Démonstration.* Il suffit de se restreindre aux cas où  $F = X^n/H_1$ ,  $H_1 \leq \mathfrak{S}_n$ , et  $G = X^m/H_2$ ,  $H_2 \leq \mathfrak{S}_m$ , sont des espèces moléculaires non pondérées ; le résultat suivra par linéarité.

Désignons par  $\chi(P)$  la valeur de vérité d'un énoncé  $P$ . À la suite des remarques 1.3.12 et 1.3.17, on a :

$$\begin{aligned} \left( \frac{X^n}{H_1} \cdot \frac{X^m}{H_2} \right)^{\sim\Phi} &= \left( \frac{X^{n+m}}{H_1 \star H_2} \right)^{\sim\Phi} \\ &= \chi(H_1 \star H_2 \in \hat{\Phi}) \left( \frac{X^{n+m}}{H_1 \star H_2} \right)^{\sim} \\ &= \chi(H_1 \star H_2 \in \hat{\Phi}) \left( \frac{X^n}{H_1} \right)^{\sim} \cdot \left( \frac{X^m}{H_2} \right)^{\sim} \end{aligned}$$

et

$$\left( \frac{X^n}{H_1} \right)^{\sim\Phi} \cdot \left( \frac{X^m}{H_2} \right)^{\sim\Phi} = \chi(H_1 \in \hat{\Phi}) \chi(H_2 \in \hat{\Phi}) \left( \frac{X^n}{H_1} \right)^{\sim} \cdot \left( \frac{X^m}{H_2} \right)^{\sim}.$$

On a donc l'égalité pour tout  $H_1 \leq \mathfrak{S}_n$  et pour tout  $H_2 \leq \mathfrak{S}_m$ ,

$$\left( \frac{X^n}{H_1} \cdot \frac{X^m}{H_2} \right)^{\sim\Phi} = \left( \frac{X^n}{H_1} \right)^{\sim\Phi} \cdot \left( \frac{X^m}{H_2} \right)^{\sim\Phi}$$

si et seulement si

$$\chi(H_1 \star H_2 \in \hat{\Phi}) = \chi(H_1 \in \hat{\Phi}) \chi(H_2 \in \hat{\Phi})$$

et le résultat suit. ■

Les classes de conjugaison de sous-groupes de  $\mathfrak{S}_n$  s'identifient naturellement aux espèces moléculaires concentrées sur le cardinal  $n$ .

**Définition 1.3.20.** Soit  $\Phi \subseteq \{K \in \text{cc}(\mathfrak{S}_n) \mid n \geq 0\}$ , un ensemble de groupes non conjugués deux à deux. On définit l'ensemble  $\text{mol}(\Phi)$  par

$$\text{mol}(\Phi) = \bigsqcup_{n \geq 0} \{M = X^n/H \mid H \in \Phi \cap \text{sg}(\mathfrak{S}_n)\} \subseteq \mathcal{M}$$

où  $\text{sg}(\mathfrak{S}_n)$  désigne l'ensemble des sous-groupes de  $\mathfrak{S}_n$ .

**Proposition 1.3.21.** Soit  $\Phi \subseteq \{K \in \text{cc}(\mathfrak{S}_n) \mid n \geq 0\}$ , un ensemble de groupes non conjugués deux à deux. L'ensemble  $\text{mol}(\Phi)$  est un monoïde commutatif libre, sous le produit d'espèces, engendré par un ensemble d'espèces atomiques si et seulement si  $\hat{\Phi}$  est fortement stable sous le produit externe de groupes.

*Démonstration.* Clairement,  $\forall H_1 \leq \mathfrak{S}_n$  et  $\forall H_2 \leq \mathfrak{S}_m$ ,

$$\chi(H_1 \star H_2 \in \hat{\Phi}) = \chi(H_1 \in \hat{\Phi})\chi(H_2 \in \hat{\Phi})$$

si et seulement si

$$\frac{X^{n+m}}{H_1 \star H_2} \in \text{mol}(\Phi) \iff X^n/H_1 \in \text{mol}(\Phi) \text{ et } X^m/H_2 \in \text{mol}(\Phi). \quad (1.4)$$

Supposons que  $\text{mol}(\Phi)$  soit engendré par un ensemble  $A_1, A_2, A_3, \dots$  d'espèces atomiques alors (1.4) est satisfaite puisque les éléments de  $\text{mol}(\Phi)$  sont de la forme  $A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} A_3^{\alpha_3} \dots$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{N}, i \geq 1$ . Ainsi  $X^{n+m}/H_1 \star H_2 = A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} A_3^{\alpha_3} \dots \in \text{mol}(\Phi)$  si et seulement si  $\exists \beta_i \in \mathbb{N}$  et  $\exists \gamma_i \in \mathbb{N}$  tels que  $\beta_i + \gamma_i = \alpha_i$  et  $X^n/H_1 = A_1^{\beta_1} A_2^{\beta_2} A_3^{\beta_3} \dots \in \text{mol}(\Phi)$  et  $X^m/H_2 = A_1^{\gamma_1} A_2^{\gamma_2} A_3^{\gamma_3} \dots \in \text{mol}(\Phi)$ .

Inversement, si (1.4) est satisfaite alors  $\text{mol}(\Phi)$  est certainement un monoïde commutatif sous l'opération,  $\cdot$ , produit d'espèces. Soit  $\mathcal{A} \cap \text{mol}(\Phi)$ , l'ensemble des espèces atomiques de  $\text{mol}(\Phi)$ . Il est facile de voir, par l'absurde, que  $\text{mol}(\Phi)$  doit être librement engendré par  $\mathcal{A} \cap \text{mol}(\Phi)$ . ■

**Exemples 1.3.22.** La proposition 1.3.21 permet de construire des ensembles de groupes fortement stables sous le produit externe en utilisant des espèces atomiques.

1. Si  $\mathcal{A} \cap \text{mol}(\Phi) = \{X\}$  alors  $\text{mol}(\Phi) = \{1, X, X^2, X^3, \dots\}$ . Ainsi,  $\hat{\Phi}$  correspond à l'ensemble des sous-groupes triviaux et pour toutes espèces pondérées  $F_w$  et  $G_v$ ,  $\overline{F_w \cdot G_v} = \overline{F_w} \cdot \overline{G_v}$ .
2. Si  $\mathcal{A} \cap \text{mol}(\Phi) = \mathcal{A}$  alors  $\text{mol}(\Phi) = \mathcal{M}$  et  $\hat{\Phi}$  correspond à l'ensemble de tous les groupes. Pour toutes espèces pondérées  $F_w$  et  $G_v$ ,  $(F_w \cdot G_v)^\sim = \widetilde{F_w} \cdot \widetilde{G_v}$ .
3. Si  $\mathcal{A} \cap \text{mol}(\Phi) = \{C_i \mid i \geq 1\}$  alors  $\text{mol}(\Phi) = \{C_1^{\alpha_1} C_2^{\alpha_2} C_3^{\alpha_3} \dots \mid \alpha_i \in \mathbb{N}\}$ . Ainsi  $\hat{\Phi}$  correspond à tous les produits externes de groupes cycliques et, pour toutes espèces pondérées  $F_w$  et  $G_v$ ,  $(F_w \cdot G_v)^{\sim\Phi} = \widetilde{F_w}^\Phi \cdot \widetilde{G_v}^\Phi$ . ◇

**Remarque 1.3.23.** Une composition  $\nu$  de l'entier  $n$ ,  $n \geq 0$ , est une suite  $\nu = (n_1, n_2, \dots)$  de nombres naturels  $n_i \in \mathbb{N}$  tels que  $\sum_{i \geq 1} n_i = n$ . Une  $\nu$ -décomposition de l'ensemble  $\llbracket n \rrbracket$  est une suite  $(U_1, U_2, \dots)$  de sous-ensembles disjoints de  $\llbracket n \rrbracket$  telle que

$$|U_i| = n_i, i \in \mathbb{N}^* \text{ et } \llbracket n \rrbracket = \bigsqcup_{i \geq 1} U_i.$$



Le produit externe des groupes symétriques, appelé sous-groupe de Young,

$$\mathfrak{S}_{U_1, U_2, \dots} := \mathfrak{S}_{U_1} \star \mathfrak{S}_{U_2} \star \dots := \{\pi \in \mathfrak{S}_n \mid \forall i : \pi(U_i) = U_i\}$$

est isomorphe au produit direct  $\mathfrak{S}_{n_1} \times \mathfrak{S}_{n_2} \times \dots$  où  $\mathfrak{S}_0 := \{id_0\}$ . On peut toujours associer à une composition  $\nu$  de  $n$ , la décomposition canonique obtenue en posant

$$U_i := \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} n_j + 1, \dots, \sum_{j=1}^i n_j \right\}, i \geq 1.$$

Le sous-groupe  $\mathfrak{S}_{U_1, U_2, \dots} = \mathfrak{S}_{[[n_1], [n_1+n_2], \dots]}$  ainsi obtenu permute les  $n_1$  premiers éléments de  $[[n]]$  entre eux, les  $n_2$  suivants entre eux et ainsi de suite. Il s'identifie donc canoniquement au groupe

$$\mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots} := \mathfrak{S}_{n_1} \star \mathfrak{S}_{n_2} \star \dots = \mathfrak{S}_{[[n_1]]} \star \mathfrak{S}_{[[n_2]]} \star \dots$$

où les éléments de  $\mathfrak{S}_{[[n_1]]} \star \mathfrak{S}_{[[n_2]]} \star \dots$  sont définis par

$$(h_1 \star h_2 \star h_3 \star \dots)(i) = \begin{cases} h_1(i) & \text{si } 1 \leq i \leq n_1 \\ n_1 + h_2(i - n_1) & \text{si } n_1 + 1 \leq i \leq n_1 + n_2 \\ n_1 + n_2 + h_3(i - n_1 - n_2) & \text{si } n_1 + n_2 + 1 \leq i \leq n_1 + n_2 + n_3 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

l'analogie de ce qui est fait à la remarque 1.3.17 pour le produit externe de deux groupes.

Notons que tous les sous-groupes de Young  $\mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots} \leq \mathfrak{S}_n$  provenant d'une composition  $(n_1, n_2, \dots)$  de  $n$  dont le partage sous-jacent est  $\lambda$  sont conjugués dans  $\mathfrak{S}_n$ . □

**Exemple 1.3.24.** Parallèlement aux exemples 1.3.22, si  $\mathcal{A} \cap \text{mol}(\Phi) = \{E_i \mid i \geq 1\}$  alors  $\text{mol}(\Phi) = \{E_1^{\alpha_1} E_2^{\alpha_2} \dots \mid \alpha_i \in \mathbb{N}\}$ . Ainsi,  $\hat{\Phi}$  correspond aux sous-groupes de Young et, pour toutes espèces pondérées  $F_w$  et  $G_v$ ,  $(F_w \cdot G_v)^{\sim \Phi} = \widetilde{F}_w^{\Phi} \cdot \widetilde{G}_v^{\Phi}$ . ◇

## 1.4 Les séries génératrices

À toute espèce pondérée  $F_w = F_w(X) = F(X)$  à une sorte de point  $X$ , on associe généralement [5] les trois séries  $F_w(x)$ ,  $\widetilde{F}_w(x)$  et  $\overline{F}_w(x)$  suivantes.

**Définition 1.4.1.** *La série génératrice (exponentielle), la série génératrice des types et la série génératrice des types d'asymétrie d'une espèce pondérée  $F_w$ , sont les séries, en une indéterminée  $x$ , définies respectivement par*

$$\begin{aligned} F_w(x) &= \sum_{n \geq 0} f_{n,w} \frac{x^n}{n!} & \text{où} & \quad f_{n,w} = \sum_{s \in F[[n]]} w(s) \\ \widetilde{F}_w(x) &= \sum_{n \geq 0} \widetilde{f}_{n,w} x^n & \text{où} & \quad \widetilde{f}_{n,w} = \sum_{s \in O(F[[n]])} w(s) \\ \overline{F}_w(x) &= \sum_{n \geq 0} \overline{f}_{n,w} x^n & \text{où} & \quad \overline{f}_{n,w} = \sum_{\substack{s \in O(F[[n]]) \\ \text{stab}(s) = \{id_n\}}} w(s), \end{aligned}$$

où  $s \in O(F[[n]])$  signifie que  $s$  parcourt un système de représentants des types de  $F_w$ -structures.

La série génératrice  $F_w(x)$  est de type exponentiel, c.-à-d. : elle contient des factorielles en dénominateur, tandis que  $\widetilde{F}_w(x)$  et  $\overline{F}_w(x)$  sont des séries génératrices ordinaires. En général,  $\widetilde{F}_w(x)$  et  $\overline{F}_w(x)$  sont plus difficiles à calculer que  $F_w(x)$ . Joyal [18] (Décoste [12] dans le cas pondéré) montre que  $\widetilde{F}_w(x)$  est égale à la série génératrice exponentielle de l'espèce associée  $\widetilde{F}_w$ . Ceci fournit une interprétation alternative pour les coefficients  $\widetilde{f}_{n,w}$ . Nous généralisons ce phénomène comme suit.

**Définition 1.4.2.** *Soient  $K \leq \mathfrak{S}_n$  et  $F_w$  une espèce pondérée. La série génératrice ordinaire des types de  $K$ -symétries de l'espèce  $F_w$  est le monôme, en une indéterminée  $x$ , défini par*

$$\widetilde{F}_w^K(x) = \widetilde{f}_{n,w}^K x^n \quad \text{où} \quad \widetilde{f}_{n,w}^K = \sum_{\substack{s \in O(F[[n]]) \\ \text{stab}(s) \equiv K}} w(s).$$

**Proposition 1.4.3.** *Le coefficient  $\widetilde{f}_{n,w}^K$  du monôme  $\widetilde{F}_w^K(x)$  est donné par*

$$\widetilde{f}_{n,w}^K = \frac{1}{n!} | \widetilde{F}_w^K[[n]] |_w.$$

*Démonstration.* La démonstration est basée sur le fait que, pour  $s \in F[[n]]$  et  $\text{stab}(s) \equiv$

$K \leq \mathfrak{S}_n$ ,  $|O(s)| = n!/|K|$  d'où

$$\begin{aligned}
\widetilde{f_{n,w}}^K &= \sum_{\substack{s \in O(F[[n]]) \\ \text{stab}(s) \cong K}} w(s) = \sum_{\substack{s \in F[[n]] \\ \text{stab}(s) \cong K}} \frac{w(s)}{|O(s)|} = \sum_{\substack{s \in F[[n]] \\ \text{stab}(s) \cong K}} w(s) \frac{|K|}{n!} \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\substack{s \in F[[n]] \\ \text{stab}(s) \cong K}} |K| w(s) = \frac{1}{n!} \sum_{\substack{s \in F[[n]] \\ \text{stab}(s) \cong K}} \sum_{\sigma \in \text{stab}(s)} w(s) \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{(s,\sigma) \in \widetilde{F}^K[[n]]} w(s) = \frac{1}{n!} |\widetilde{F}^K[[n]]|_w.
\end{aligned}$$

■

La proposition 1.4.3 nous assure que la définition 1.4.2 est cohérente avec celle de la série génératrice exponentielle de l'espèce  $\widetilde{F}^K$ .

**Définition 1.4.4.** Soit  $\Phi \subseteq \{K \in \text{cc}(\mathfrak{S}_n) \mid n \geq 0\}$ , un ensemble de groupes non conjugués deux à deux. La série génératrice ordinaire des types de  $\Phi$ -symétries d'une espèce pondérée  $F = F_w$ , en une indéterminée  $x$ , est définie par

$$\widetilde{F}_w^\Phi(x) = \sum_{n \geq 0} \widetilde{f_{n,w}}^\Phi x^n \quad \text{où} \quad \widetilde{f_{n,w}}^\Phi = \sum_{K \in \Phi} \widetilde{f_{n,w}}^K.$$

**Proposition 1.4.5.** Soient  $\Phi \subseteq \{K \in \text{cc}(\mathfrak{S}_n) \mid n \geq 0\}$ , un ensemble de groupes non conjugués deux à deux, et  $F_w$  une espèce pondérée. On a :

$$\widetilde{F}_w^\Phi(x) = \sum_{n \geq 0} |\widetilde{F}^\Phi[[n]]|_w \frac{x^n}{n!}.$$

*Démonstration.* De la proposition 1.4.3, on a :

$$\widetilde{F}_w^\Phi(x) = \sum_{n \geq 0} \widetilde{f_{n,w}}^\Phi x^n = \sum_{n \geq 0} \sum_{K \in \Phi} \widetilde{f_{n,w}}^K x^n = \sum_{n \geq 0} \sum_{K \in \Phi} |\widetilde{F}^K[[n]]|_w \frac{x^n}{n!}.$$

L'ensemble  $\widetilde{F}^\Phi[[n]]$  est formé par la réunion disjointe des structures de  $\widetilde{F}^K[[n]]$  pour  $K \in \Phi$ , ainsi

$$|\widetilde{F}^\Phi[[n]]|_w = \sum_{K \in \Phi} |\widetilde{F}^K[[n]]|_w$$

et le résultat suit. ■

La série génératrice ordinaire des types de  $\Phi$ -symétries d'une espèce pondérée  $F = F_w$  est donc obtenue par le calcul de la série génératrice exponentielle de l'espèce  $\Phi$ -associée  $\widetilde{F}_w^\Phi$ .

**Proposition 1.4.6.** Soient  $F_w$  une espèce pondérée,  $Z = \{K \in \text{cc}(\mathfrak{S}_n) \mid n \geq 0\}$  et  $\Gamma = \{\{id_n\} \leq \mathfrak{S}_n \mid n \geq 0\}$ . On a  $\widetilde{F}_w^Z(x) = \widetilde{F}_w(x)$  et  $\widetilde{F}_w^\Gamma(x) = \overline{F}_w(x)$ .

*Démonstration.* D'une part,  $\widetilde{F}_w^Z(x) = \sum_{n \geq 0} \widetilde{f}_{n,w}^Z x^n$  où

$$\begin{aligned} \widetilde{f}_{n,w}^Z &= \sum_{K \in Z} \widetilde{f}_{n,w}^K = \sum_{K \in \text{cc}(\mathfrak{S}_n)} \widetilde{f}_{n,w}^K = \sum_{K \in \text{cc}(\mathfrak{S}_n)} \sum_{\substack{s \in O(F[[n]]) \\ \text{stab}(s) \cong K}} w(s) \\ &= \sum_{\substack{s \in O(F[[n]]) \\ \text{stab}(s) \leq \mathfrak{S}_n}} w(s) = \sum_{s \in O(F[[n]])} w(s) = \widetilde{f}_{n,w}. \end{aligned}$$

D'autre part,  $\widetilde{F}_w^\Gamma(x) = \sum_{n \geq 0} \widetilde{f}_{n,w}^\Gamma x^n$  où

$$\widetilde{f}_{n,w}^\Gamma = \sum_{K \in \Gamma} \widetilde{f}_{n,w}^K = \widetilde{f}_{n,w}^{\{id_n\}} = \sum_{\substack{s \in O(F[[n]]) \\ \text{stab}(s) = \{id_n\}}} w(s) = \overline{f}_{n,w}.$$

■

**Corollaire 1.4.7.** On a :

$$\widetilde{F}_w(x) = \sum_{n \geq 0} \widetilde{f}_{n,w} x^n = \sum_{n \geq 0} |\widetilde{F}[[n]]|_w \frac{x^n}{n!}$$

et

$$\overline{F}_w(x) = \sum_{n \geq 0} \overline{f}_{n,w} x^n = \sum_{n \geq 0} |\overline{F}[[n]]|_w \frac{x^n}{n!}.$$

△

Ainsi, lorsqu'il n'y a pas de restriction sur le stabilisateur des représentants de structures dénombrées, on obtient naturellement la série ordinaire des types de structures. De plus, en ne considérant que les structures dont le stabilisateur est le sous-groupe trivial, on obtient la série ordinaire des types d'asymétrie.

**Lemme 1.4.8.** Soit  $M_a = (X^n/H)_a$ ,  $H \leq \mathfrak{S}_n$ , une espèce moléculaire concentrée sur le cardinal  $n$  dont chaque structure est de poids  $a \in \mathbb{A}$ . On a  $M_a(x) = a x^n / |H|$  et, pour  $\Phi \subseteq \{K \in \text{cc}(\mathfrak{S}_n) \mid n \geq 0\}$ , un ensemble de groupes non conjugués deux à deux,  $\widetilde{M}_a^\Phi(x) = \chi(H \in \hat{\Phi}) a x^n$ .

*Démonstration.* Puisque  $M$  est moléculaire, il n'y a qu'un seul type de  $M$ -structures sur  $\llbracket n \rrbracket$ . De plus, chaque structure et chaque type de structures sont de poids  $a \in \mathbb{A}$ . Le nombre de  $M$ -structures sur  $\llbracket n \rrbracket$  est égal au nombre de classes latérales gauches de  $H$  dans  $\mathfrak{S}_n$ , c.-à-d. :  $|M[\llbracket n \rrbracket]| = n!/|H|$ . Ainsi,

$$f_n = \sum_{s \in M[\llbracket n \rrbracket]} a = a |M[\llbracket n \rrbracket]| = a \frac{n!}{|H|} \quad \text{et} \quad M_a(x) = a \frac{n!}{|H|} \frac{x^n}{n!} = a \frac{x^n}{|H|}.$$

Toutes les  $M$ -structures sur  $\llbracket n \rrbracket$  ont un stabilisateur conjugué à  $H$  dans  $\mathfrak{S}_n$ , ainsi,

$$\widetilde{f}_n^\Phi = \sum_{\substack{s \in O(M[\llbracket n \rrbracket]) \\ \text{stab}(s) \in \hat{\Phi}}} a = a \chi(H \in \hat{\Phi}) \quad \text{et} \quad \widetilde{M}_a^\Phi(x) = \chi(H \in \hat{\Phi}) a x^n.$$

■

Pour toutes espèces pondérées  $F = F_w$  et  $G = G_v$ ,  $(F + G)(x) = F(x) + G(x)$  et  $(F \cdot G)(x) = F(x) \cdot G(x)$ . En particulier, pour  $\Phi$  un ensemble de groupes non conjugués deux à deux,  $(F + G)^{\sim\Phi}(x) = (\widetilde{F}^\Phi + \widetilde{G}^\Phi)(x) = \widetilde{F}^\Phi(x) + \widetilde{G}^\Phi(x)$  et  $(\widetilde{F}^\Phi \cdot \widetilde{G}^\Phi)(x) = \widetilde{F}^\Phi(x) \cdot \widetilde{G}^\Phi(x)$ . On a cependant  $(F \cdot G)^{\sim\Phi}(x) \neq \widetilde{F}^\Phi(x) \cdot \widetilde{G}^\Phi(x)$ , en général.

**Proposition 1.4.9.** *Soit  $\Phi$  un ensemble de groupes non conjugués deux à deux. Pour toutes espèces pondérées  $F = F_w$  et  $G = G_v$ ,  $(F \cdot G)^{\sim\Phi}(x) = \widetilde{F}^\Phi(x) \cdot \widetilde{G}^\Phi(x)$  si et seulement si  $\hat{\Phi}$  est fortement stable sous le produit externe de groupes.*

*Démonstration.* La condition sur  $\hat{\Phi}$  est clairement suffisante par la proposition 1.3.19. Soit  $M = X^n/H_1$ ,  $H_1 \leq \mathfrak{S}_n$ , et  $N = X^m/H_2$ ,  $H_2 \leq \mathfrak{S}_m$ , deux espèces moléculaires, du lemme 1.4.8, on a :

$$\widetilde{M}^\Phi(x) = \begin{cases} x^n & \text{si } H_1 \in \hat{\Phi} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

d'où

$$(M \cdot N)^{\sim\Phi}(x) = \begin{cases} x^{n+m} & \text{si } H_1 \star H_2 \in \hat{\Phi} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\widetilde{M}^\Phi(x) \widetilde{N}^\Phi(x) = \begin{cases} x^{n+m} & \text{si } H_1 \in \hat{\Phi} \text{ et } H_2 \in \hat{\Phi} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ce qui entraîne la nécessité de la condition sur  $\hat{\Phi}$  et, par linéarité, le résultat suit. ■

**Exemple 1.4.10.** On considère  $S$  l'espèce des permutations et  $D$  celle des dérangements, c.-à-d. : l'espèce des permutations sans point fixe. Celles-ci sont reliées par l'égalité combinatoire  $S = E \cdot D$  où  $E$  désigne l'espèce des ensembles. On a les égalités

$$S = E \circ C = \prod_{i \geq 1} \left( \sum_{n \geq 0} E_n(C_i) \right).$$

Lorsque  $\hat{\Phi}$  est un ensemble de groupes tel que la transformation  $F \mapsto \tilde{F}^\Phi$  préserve l'opération de produit, nous pouvons écrire

$$\tilde{S}^\Phi(x) = \prod_{i \geq 1} \left( \sum_{n \geq 0} (E_n(C_i))^{\sim\Phi}(x) \right).$$

Rappelons que  $E_0 = 1$ ,  $E_1(C_i) = C_i$ ,  $i \geq 1$ , et  $E_2 = C_2$ . Ainsi, voir les exemples 1.3.22, si  $\text{mol}(\Phi) = \{C_1^{\alpha_1} C_2^{\alpha_2} \cdots \mid \alpha_i \in \mathbb{N}\}$  alors

$$\tilde{E}^\Phi(x) = \sum_{n \geq 0} \tilde{E}_n^\Phi(x) = 1 + x + x^2.$$

De plus, puisque pour  $n \geq 3$ ,  $(E_n(C_i))^{\sim\Phi}(x) = 0$  et pour  $i \geq 2$ ,  $(E_2(C_i))^{\sim\Phi}(x) = 0$ ,

$$\tilde{S}^\Phi(x) = \prod_{i \geq 1} \left( 1 + \tilde{C}_i^\Phi(x) + (E_2(C_i))^{\sim\Phi}(x) \right) = (1 + x + x^2) \prod_{i \geq 2} (1 + x^i).$$

On en conclut

$$\tilde{D}^\Phi(x) = \frac{\tilde{S}^\Phi(x)}{\tilde{E}^\Phi(x)} = \prod_{i \geq 2} (1 + x^i).$$

Si  $\text{mol}(\Phi) = \{E_1^{\alpha_1} E_2^{\alpha_2} \cdots \mid \alpha_i \in \mathbb{N}\}$ , voir l'exemple 1.3.24, alors

$$\tilde{E}^\Phi(x) = \sum_{n \geq 0} \tilde{E}_n^\Phi(x) = \sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Puisque, pour  $n \geq 1$  et  $i \geq 3$ ,  $(E_n(C_i))^{\sim\Phi}(x) = 0$ , on a

$$\tilde{S}^\Phi(x) = \left( \sum_{n \geq 0} \tilde{E}_n^\Phi(x) \right) \left( \sum_{n \geq 0} (E_n(C_2))^{\sim\Phi}(x) \right) = \frac{1}{1-x} (1 + x^2)$$

et

$$\tilde{D}^\Phi(x) = \frac{\tilde{S}^\Phi(x)}{\tilde{E}^\Phi(x)} = 1 + x^2.$$

◇

## 1.5 La série indicatrice des $\Phi$ -symétries

La notion de série indicatrice d'asymétrie  $\Gamma_F(x_1, x_2, \dots)$  d'une espèce de structures  $F$  à été introduite dans [25] comme outil de dénombrement des  $F$ -structures asymétriques. La série  $\Gamma_F(x_1, x_2, \dots)$  possède des propriétés analogues à celles de la série indicatrice des cycles  $Z_F(x_1, x_2, \dots)$ . Une définition uniforme pour ces deux séries est présentée dans [26].

On introduit d'abord l'espèce pondérée  $X_t = X_{t_1} + X_{t_2} + \dots$  dont les structures sont des singletons de sorte  $X$  et de poids  $t_i, i \geq 1$ . On considère ensuite l'espèce auxiliaire  $F_{w,t} = F_w(X_t) = F_w(X_{t_1} + X_{t_2} + \dots)$  où une  $F_{w,t}$ -structure est une  $F_w$ -structure dont chaque élément de l'ensemble sous-jacent est muni d'un poids choisi arbitrairement dans l'ensemble  $\{t_i \mid i \geq 1\}$ ; en fait,  $F_{w,t} = F_w \times E(X_t) = F_w \times E(X_{t_1} + X_{t_2} + \dots)$  où  $E$  désigne l'espèce des ensembles et  $\times$ , le produit cartésien d'espèces (superposition). Le poids d'une  $F_{w,t}$ -structure est le poids de la  $F$ -structure multiplié par le produit des poids des éléments de l'ensemble sous-jacent.

Ceci permet de définir simultanément les séries indicatrices des cycles  $Z_F$  ([26], voir aussi [12] p. 29) et d'asymétrie  $\Gamma_F$  d'une espèce quelconque  $F$  comme les expressions des fonctions symétriques en variables  $t_i, i \geq 1$ , de  $\widetilde{F_{w,t}}(x)|_{x:=1}$  et de  $\overline{F_{w,t}}(x)|_{x:=1}$  dans la base algébrique des sommes de puissances  $x_i := p_i(t_1, t_2, \dots) = t_1^i + t_2^i + \dots, i \geq 1$ .

Plus précisément, les types de  $F_{w,t}$ -structures sur un ensemble fini  $U$  sont les orbites de l'action

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_U \times F_{w,t}[U] &\longrightarrow F_{w,t}[U] \\ (\sigma, s) &\longmapsto \sigma.s = F_{w,t}[\sigma](s) \end{aligned} \tag{1.5}$$

du groupe des permutations de  $U$ ,  $\mathfrak{S}_U$ , sur l'ensemble  $F_{w,t}[U]$  des  $F_{w,t}$ -structures sur  $U$ , voir la section 1.2. Les types d'asymétrie sont les orbites de l'action (1.5) dont les éléments sont asymétriques. Les séries génératrices des types et des types d'asymétrie des  $F_{w,t}$ -structures prennent alors les formes

$$\widetilde{F_{w,t}}(x) = \sum_{n \geq 0} \widetilde{f_{n,w}}(t_1, t_2, \dots) x^n \quad \text{et} \quad \overline{F_{w,t}}(x) = \sum_{n \geq 0} \overline{f_{n,w}}(t_1, t_2, \dots) x^n$$

où les coefficients  $\widetilde{f_{n,w}}(t_1, t_2, \dots)$  et  $\overline{f_{n,w}}(t_1, t_2, \dots)$  sont des fonctions symétriques en

variables  $t_i$ ,  $i \geq 1$ , de degré  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Posant  $x = 1$ , les séries indicatrices des cycles  $Z_{F_w}(x_1, x_2, \dots)$  et d'asymétrie  $\Gamma_{F_w}(x_1, x_2, \dots)$  sont caractérisées par

$$Z_{F_w}(x_1, x_2, \dots)|_{x_i := \sum_{k \geq 1} t_k^i} = \widetilde{F_{w,t}}(1) = \sum_{s \in \widetilde{F_{w,t}}} w(s) t_1^{n_1(s)} t_2^{n_2(s)} \dots \quad (1.6)$$

$$\Gamma_{F_w}(x_1, x_2, \dots)|_{x_i := \sum_{k \geq 1} t_k^i} = \overline{F_{w,t}}(1) = \sum_{s \in \overline{F_{w,t}}} w(s) t_1^{n_1(s)} t_2^{n_2(s)} \dots \quad (1.7)$$

où  $s \in \widetilde{F_{w,t}}$  et  $s \in \overline{F_{w,t}}$  signifient que  $s$  parcourt respectivement un système de représentants des types et des types d'asymétrie de  $F_{w,t}$ -structures et,  $n_i(s)$ , désigne le nombre d'occurrences du poids  $t_i$  dans le représentant  $s$ , pour tout  $i \geq 1$ .

**Exemples 1.5.1.** Soit  $x_k = \sum_{i \geq 1} t_i^k$ ,  $k \geq 1$ . Considérons  $E$  l'espèce des ensembles (ici chaque ensemble est de poids 1). Deux  $E_t$ -structures  $s_1$  et  $s_2$  sont de même type lorsqu'elles vivent sur des ensembles de même cardinal et qu'elles ont le même nombre d'occurrences du poids  $t_i$  pour chaque  $i \geq 1$ . Les types de  $E_t$ -structures se classent donc selon le cardinal de l'ensemble sous-jacent et ensuite par la distribution des poids. Par conséquent,

$$\begin{aligned} Z_E(x_1, x_2, \dots) &= \sum_{s \in \widetilde{E_t}} t_1^{n_1(s)} t_2^{n_2(s)} \dots = \sum_{n \geq 0} \sum_{s \in (\widetilde{E_t})_n} t_1^{n_1(s)} t_2^{n_2(s)} \dots \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{n_1 + n_2 + \dots = n} t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots = \prod_{i \geq 1} \frac{1}{1 - t_i} \\ &= \prod_{i \geq 1} \exp \left\{ \sum_{n \geq 1} \frac{t_i^n}{n} \right\} = \exp \left\{ \sum_{i \geq 1} \sum_{n \geq 1} \frac{t_i^n}{n} \right\} \\ &= \exp \left\{ \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{i \geq 1} t_i^n \right\} = \exp \left\{ \sum_{n \geq 1} \frac{x_n}{n} \right\} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_n^{\sigma_n} \end{aligned}$$

où  $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$  désigne le type cyclique de la permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ .

Toute  $E$ -structure sur un ensemble de cardinal supérieur ou égal à 2 possède au moins un automorphisme non trivial. Une  $E_t$ -structure ayant plus d'une occurrence du



pois  $t_i$ , quel que soit  $i \geq 1$ , n'est pas asymétrique et

$$\begin{aligned}
\Gamma_E(x_1, x_2, \dots) &= \sum_{s \in \overline{E}_t} t_1^{n_1(s)} t_2^{n_2(s)} \dots \\
&= \sum_{0 \leq n_1, n_2, \dots \leq 1} t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots = \prod_{i \geq 1} (1 + t_i) \\
&= \prod_{i \geq 1} \exp \left\{ \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} t_i^n}{n} \right\} = \exp \left\{ \sum_{i \geq 1} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} t_i^n}{n} \right\} \\
&= \exp \left\{ \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{i \geq 1} t_i^n \right\} = \exp \left\{ \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{x_n}{n} \right\} \\
&= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma) x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_n^{\sigma_n}
\end{aligned}$$

où  $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{n - \sum \sigma_i} = (-1)^{\sum \sigma_{2i}}$ . ◇

Comme la série des types d'asymétrie fait appel aux structures dont le stabilisateur est trivial et que la série des types n'impose aucune restriction au stabilisateur d'une structure, il est naturel de chercher à définir une série indicatrice pour tout ensemble de groupes d'automorphismes donné.

**Définition 1.5.2.** Soient  $\Phi \subseteq \{K \in \text{cc}(\mathfrak{S}_n) \mid n \geq 0\}$ , un ensemble de groupes non conjugués deux à deux et  $F_w$ , une espèce pondérée. La série indicatrice des  $\Phi$ -symétries, ou  $\Phi$ -série indicatrice (ou simplement  $\Phi$ -série), de l'espèce  $F_w$  est caractérisée par les équations

$$\Phi_{F_w}(x_1, x_2, \dots) = \widetilde{F_{w,t}}^\Phi(x)|_{x:=1} = \sum_{s \in \widetilde{F_{w,t}}^\Phi} w(s) t_1^{n_1(s)} t_2^{n_2(s)} \dots$$

où  $n_i(s)$ ,  $i \geq 1$ , désigne le nombre d'occurrences du poids  $t_i$  dans  $s$  et  $s \in \widetilde{F_{w,t}}^\Phi$  signifie que  $s$  parcourt un système de représentants des types de  $F_{w,t}$ -structure dont le stabilisateur est conjugué à un groupe de  $\Phi$ . La série  $\Phi_{F_w}$  est l'expression de la fonction symétrique  $\widetilde{F_{w,t}}^\Phi(x)|_{x:=1}$  en variables  $t_i$  dans la base algébrique des sommes de puissances,  $x_i := p_i(t_1, t_2, t_3, \dots) = t_1^i + t_2^i + t_3^i + \dots$ ,  $i \geq 1$ .

La définition 1.5.2 est inspirée des expressions pour les séries indicatrices (1.6) et (1.7) en terme de  $\widetilde{F}_{w,t}$  où les restrictions sont imposées selon le contexte, c'est-à-dire :

$$Z_{F_w}(x_1, x_2, \dots) \Big|_{x_i := \sum_{k \geq 1} t_k^i} = \sum_{s \in \widetilde{F}_{w,t}^Z} w(s) t_1^{n_1(s)} t_2^{n_2(s)} \dots$$

et

$$\Gamma_{F_w}(x_1, x_2, \dots) \Big|_{x_i := \sum_{k \geq 1} t_k^i} = \sum_{s \in \widetilde{F}_{w,t}^\Gamma} w(s) t_1^{n_1(s)} t_2^{n_2(s)} \dots$$

où  $Z = \{K \subseteq cc(\mathfrak{S}_n) \mid n \geq 0\}$  et  $\Gamma = \{\{id_n\} \mid n \geq 0\}$ . La série indicatrice des  $Z$ -symétries de l'espèce  $F_w$  correspond à sa série indicatrice des cycles [18] et la série indicatrice des  $\Gamma$ -symétries correspond à sa série indicatrice d'asymétrie [25, 26].

Il est bien connu [5] que les trois séries génératrices  $F_w(x)$ ,  $\widetilde{F}_w(x)$  et  $\overline{F}_w(x)$  s'obtiennent des séries indicatrices  $Z_{F_w}(x_1, x_2, \dots)$  et  $\Gamma_{F_w}(x_1, x_2, \dots)$  par les spécialisations des variables  $x_1, x_2, \dots$ ,

$$\begin{aligned} F_w(x) &= Z_{F_w}(x, 0, 0, \dots), & F_w(x) &= \Gamma_{F_w}(x, 0, 0, \dots), \\ \widetilde{F}_w(x) &= Z_{F_w}(x, x^2, x^3, \dots), & \overline{F}_w(x) &= \Gamma_{F_w}(x, x^2, x^3, \dots), \end{aligned}$$

et que les transformations  $F_w \mapsto Z_{F_w}$  et  $F_w \mapsto \Gamma_{F_w}$  préservent les opérations combinatoires usuelles de somme, de produit, de substitution et de dérivation :

$$\begin{aligned} Z_{F_w+G_v} &= Z_{F_w} + Z_{G_v}, & \Gamma_{F_w+G_v} &= \Gamma_{F_w} + \Gamma_{G_v}, \\ Z_{F_w \cdot G_v} &= Z_{F_w} \cdot Z_{G_v}, & \Gamma_{F_w \cdot G_v} &= \Gamma_{F_w} \cdot \Gamma_{G_v}, \\ Z_{F_w \circ G_v} &= Z_{F_w} \circ Z_{G_v}, & \Gamma_{F_w \circ G_v} &= \Gamma_{F_w} \circ \Gamma_{G_v}, \\ Z_{F'_w} &= \frac{\partial}{\partial x_1} Z_{F_w}, & \Gamma_{F'_w} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \Gamma_{F_w}, \end{aligned}$$

où  $\circ$  désigne la substitution pléthystique.

La transformation  $F_w \mapsto \Phi_{F_w}$  préserve l'opération de somme. De plus, tout comme pour les séries des types et des types d'asymétrie, la série des types de  $\Phi$ -symétries d'une espèce pondérée  $F = F_w$  est obtenue de sa  $\Phi$ -série.

**Proposition 1.5.3.** *Soit  $\Phi \subseteq \{K \subseteq cc(\mathfrak{S}_n) \mid n \geq 0\}$ , un ensemble de groupes non conjugués deux à deux. Pour toutes espèces pondérées  $F = F_w$  et  $G = G_v$ ,*

$$\Phi_{F+G}(x_1, x_2, \dots) = \Phi_F(x_1, x_2, \dots) + \Phi_G(x_1, x_2, \dots).$$

*Démonstration.* De la proposition 1.3.15 on a :

$$\begin{aligned} ((F + G)(X_{t_1} + X_{t_2} + \cdots))^{\sim\Phi} &= (F(X_{t_1} + X_{t_2} + \cdots) + G(X_{t_1} + X_{t_2} + \cdots))^{\sim\Phi} \\ &= (F(X_{t_1} + X_{t_2} + \cdots))^{\sim\Phi} + (G(X_{t_1} + X_{t_2} + \cdots))^{\sim\Phi}. \end{aligned}$$

Le résultat est obtenu en posant  $x = 1$  dans leur série génératrice. ■

**Corollaire 1.5.4.** *Pour toutes espèces pondérées  $F = F_w$  et  $G = G_v$ ,*

$$\begin{aligned} Z_{F+G}(x_1, x_2, \cdots) &= Z_F(x_1, x_2, \cdots) + Z_G(x_1, x_2, \cdots), \\ \Gamma_{F+G}(x_1, x_2, \cdots) &= \Gamma_F(x_1, x_2, \cdots) + \Gamma_G(x_1, x_2, \cdots). \end{aligned}$$

△

**Proposition 1.5.5.** *Soit  $\Phi \subseteq \{K \in \text{cc}(\mathfrak{S}_n) \mid n \geq 0\}$ , un ensemble de groupes non conjugués deux à deux. Pour toute espèce pondérée  $F = F_w$ ,*

$$\Phi_F(x, x^2, x^3, \cdots) = \widetilde{F}^\Phi(x) := \sum_{n \geq 0} \widetilde{f}_{n,w}^\Phi x^n$$

où  $\widetilde{f}_{n,w}^\Phi$  désigne le poids total des types de  $F_w$ -structures sur  $\llbracket n \rrbracket$  dont le stabilisateur est conjugué à un groupe de  $\Phi$ .

*Démonstration.* Il suffit de considérer le cas où  $F$  est une espèce moléculaire non pondérée et le résultat suivra par linéarité. Soit  $M = X^n/H$ ,  $H \leq \mathfrak{S}_n$ , une espèce moléculaire. Par définition,

$$\Phi_M(x_1 x, x_2 x^2, \cdots) = (M(X_{t_1} + X_{t_2} + \cdots))^{\sim\Phi}(x) \tag{1.8}$$

où  $x_i := \sum_{k \geq 1} t_k^i$ . Posant  $t_1 = 1$  et  $t_i = 0 \forall i \neq 1$  dans (1.8), on obtient

$$\begin{aligned} \Phi_M(t_1 x, t_1^2 x^2, t_1^3 x^3, \cdots) \Big|_{t_1:=1} &= \Phi_M(x, x^2, x^3, \cdots) \\ &= M(X_{t_1})^{\sim\Phi}(x) \Big|_{t_1:=1} = \widetilde{M}^\Phi(x) \end{aligned}$$

et le résultat suit. ■

**Corollaire 1.5.6.** *Pour toute espèce pondérée  $F = F_w$ ,*

$$Z_F(x, x^2, x^3, \dots) = \tilde{F}(x) \quad \text{et} \quad \Gamma_F(x, x^2, x^3, \dots) = \bar{F}(x).$$

△

En ce qui concerne la série génératrice exponentielle  $F(x)$  pour les  $F$ -structures étiquetées, on a cependant

$$\Phi_F(x, 0, 0, \dots) \neq F(x), \tag{1.9}$$

en général, bien que  $Z_F(x, 0, 0, \dots) = F(x) = \Gamma_F(x, 0, 0, \dots)$ . En effet, prenant  $\Phi = \{\mathfrak{S}_n \mid n \geq 0\}$  et  $F = E$  on obtient, après calculs,

$$\Phi_E(x_1, x_2, x_3, \dots) = 1 + x_1 + x_2 + x_3 + \dots.$$

D'où  $\Phi_E(x, 0, 0, \dots) = 1 + x \neq e^x = E(x)$ . Nous dégageons, à la section 2.2, une condition sur  $\Phi$  qui fait en sorte que (1.9) devienne une égalité pour toute espèce pondérée  $F = F_w$ .

## Chapitre 2

# Les $\Phi$ -polynômes indicateurs des espèces moléculaires

Puisque la transformation  $F \mapsto \Phi_F$  préserve la somme, les propriétés de la  $\Phi$ -série d'une espèce pondérée

$$F_w = \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{M \in \mathcal{M}_n \\ a \in \mathbb{A}}} f_{M_a} M_a$$

se déduisent, par linéarité, des propriétés de la  $\Phi$ -série d'une espèce moléculaire non pondérée générique. En effet,

$$\begin{aligned} \Phi_{F_w}(x_1, x_2, \dots) &= \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{M \in \mathcal{M}_n \\ a \in \mathbb{A}}} f_{M_a} \Phi_{M_a}(x_1, x_2, \dots) \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{M \in \mathcal{M}_n \\ a \in \mathbb{A}}} f_{M_a} a \Phi_M(x_1, x_2, \dots). \end{aligned}$$

Les  $\Phi$ -séries d'espèces moléculaires sont en fait, par la relation  $x_k = \sum_{i \geq 1} t_i^k$ , des polynômes en variables  $x_k$ ,  $k \geq 1$ , et des séries en variables  $t_i$ ,  $i \geq 1$ .

Nous nous concentrons, pour commencer, sur la décomposition moléculaire de l'espèce  $M(X_{t_1} + X_{t_2} + \dots)$  où  $M$  est elle-même moléculaire. Cette décomposition est décrite à l'aide de classes bilatérales et nous permet de donner explicitement les  $\Phi$ -séries des espèces moléculaires concentrées sur un cardinal inférieur ou égal à 4 pour tout ensemble générique  $\Phi$  de groupes non conjugués deux à deux. De plus, nous obtenons

à l'aide du langage de calcul symbolique Maple [8], les séries indicatrices d'asymétrie des espèces moléculaires et des espèces atomiques concentrées respectivement sur 5 et 6 points (voir l'appendice A). Celles-ci sont nouvelles et prolongent les tables existantes.

À la section suivante, nous dégagons des conditions nécessaires et suffisantes à imposer à l'ensemble  $\Phi$ , pour que la série génératrice  $F(x)$  de l'espèce pondérée  $F = F_w$  soit obtenue par la spécialisation des variables,  $(x_1, x_2, x_3, \dots) := (x, 0, 0, \dots)$ , dans sa  $\Phi$ -série.

Très peu de formes closes pour  $\Gamma_F$  sont connues. À la section 2.3, nous obtenons une forme close pour la série indicatrice d'asymétrie  $\Gamma_{E^\pm}$  de l'espèce  $E^\pm$  des ensembles orientés; illustrant ainsi l'utilité de la décomposition moléculaire présentée à la section 2.1 lorsque les classes bilatérales sont simples à traiter. Nous donnons aussi la  $q$ -série, au sens de Décoste [12, 13], correspondant à  $\Gamma_{E^\pm}(x_1, x_2, \dots)$ .

Aux sections subséquentes, nous nous intéressons à une version pondérée du lemme de Burnside due à Stockmeyer [51]. Celle-ci utilise l'inversion de Möbius dans des treillis de sous-groupes telle que présentée par Rota dans [44]. Elle fournit une méthode alternative pour l'énumération des  $K$ -symétries d'une espèce pondérée  $M(X_{t_1} + X_{t_2} + \dots)$  où  $M$  est moléculaire et  $K \leq \mathfrak{S}_n$ . Nous obtenons finalement quelques identités reliant la série des types de  $K$ -symétries de l'espèce  $M(X_{t_1} + X_{t_2} + \dots)$ , aux valeurs de la fonction de Möbius sur des treillis de sous-groupes et nous examinons, dans le cadre des  $\Phi$ -séries, le résultat des substitutions simultanées  $\Delta : x_k := \frac{(1-q)^k}{1-q^k} x^k$ ,  $k \geq 1$ , introduites par Décoste [12] pour le  $q$ -dénombrement des structures d'une espèce.

## 2.1 Les classes bilatérales dans la décomposition moléculaire d'une espèce

De façon générale, le calcul de la série indicatrice des  $\Phi$ -symétries est difficile si on ne se sert que de la définition 1.5.2. Nous utiliserons un outil important de calcul, présenté et démontré dans [25], faisant appel aux espèces multisortes. Ce dernier nous permet d'obtenir la décomposition moléculaire de l'espèce à une sorte  $M(X_{t_1} + X_{t_2} + \dots)$  où

$M$  est elle-même moléculaire.

Rappelons qu'une espèce multisorte pondérée  $F = F_w = F(T_1, T_2, \dots)$  est définie sur des ensembles formés d'un nombre fini ou infini de sortes de points  $T_1, T_2, \dots$ . Plus précisément, les  $F$ -structures vivent sur des multiensembles finis de la forme  $U = (U_1, U_2, \dots)$  où les éléments de  $U_i$  sont dits de sorte  $T_i$ ,  $i \geq 1$ . Il est souvent utile de représenter le multiensemble  $U = (U_1, U_2, \dots)$  par la réunion disjointe  $U = \uplus_{i \geq 1} U_i$ . Les espèces multisortes pondérées se distinguent des espèces pondérées à une sorte par le fait que les transports s'effectuent le long de bijections qui préservent la sorte des points, c.-à-d. : les morphismes de transport  $F[\sigma] : F[U] \rightarrow F[V]$  sont effectués le long de bijections  $\sigma : U \rightarrow V$  de la forme  $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \dots$  où  $\sigma_i : U_i \xrightarrow{\sim} V_i$ ,  $i \geq 1$ ,  $U = \uplus_{i \geq 1} U_i$  et  $V = \uplus_{i \geq 1} V_i$ . Le transport des structures dans le contexte des espèces multisortes pondérées doit donc non seulement préserver le poids global des structures mais aussi en préserver les sortes.

**Proposition 2.1.1** (G. Labelle [25]). *Soit  $M = M(X) = X^n/H$ ,  $H \leq \mathfrak{S}_n$ , une espèce moléculaire et soient  $T_1, T_2, \dots$  une infinité de sortes de singletons. La décomposition moléculaire de l'espèce multisorte  $M(T_1 + T_2 + \dots)$  est donnée par*

$$M(T_1 + T_2 + \dots) = \sum_{n_1+n_2+\dots=n} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots} \setminus \mathfrak{S}_n/H} \frac{T_1^{n_1} T_2^{n_2} \dots}{(\tau H \tau^{-1}) \cap \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots}}$$

où  $\mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots} := \mathfrak{S}_{n_1} \star \mathfrak{S}_{n_2} \star \dots \leq \mathfrak{S}_n$ ,  $K \setminus G/H = \{KgH | g \in G\}$  désigne l'ensemble des classes bilatérales de  $G$  selon  $(K, H)$  et  $\tau \in K \setminus G/H$  signifie que  $\tau$  parcourt un système de représentants de  $K \setminus G/H$ .

*Démonstration.* Considérons la composition  $n = n_1 + n_2 + \dots$  et l'ensemble formé par la réunion disjointe :

$$U = \llbracket n \rrbracket = \{1, 2, \dots, n_1\} \uplus \dots \uplus \{n_k + \dots + n_1 + 1, \dots, n_{k+1} + \dots + n_1\} \uplus \dots$$

Soit  $M(T_1 + T_2 + \dots)|_{n_1, n_2, \dots}$  l'espèce de toutes les  $M(T_1 + T_2 + \dots)$ -structures vivant sur l'ensemble  $U$  ci-dessus. Nous voulons partager l'action

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots} \times M[U] &\longrightarrow M[U] \\ (\sigma, s) &\longmapsto \sigma.s = M[\sigma](s) \end{aligned} \tag{2.1}$$

en orbites disjointes. Puisque  $M = X^n/H$  est moléculaire et que toute  $M$ -structure  $s$  s'identifie à une classe latérale gauche de  $H$  dans  $\mathfrak{S}_n$ , c.-à-d. :  $s = \tau H \in M[U]$  où  $\tau \in \mathfrak{S}_n$ , le stabilisateur de  $s$  dans  $\mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots}$  est donné par

$$\begin{aligned} \text{stab}_{\mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots}}(\tau H) &= \text{stab}_{\mathfrak{S}_n}(\tau H) \cap \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots} \\ &= (\tau H \tau^{-1}) \cap \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots} \end{aligned}$$

Ainsi,  $s = \tau H$  vue comme une  $M(T_1 + T_2 + \dots)|_{n_1, n_2, \dots}$ -structure appartient à l'espèce moléculaire multisorte

$$\frac{T_1^{n_1} T_2^{n_2} \dots}{\text{stab}_{\mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots}}(\tau H)} = \frac{T_1^{n_1} T_2^{n_2} \dots}{(\tau H \tau^{-1}) \cap \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots}}$$

et l'orbite de  $s = \tau H$  sous l'action (2.1) est donnée par la classe bilatérale

$$\mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots} \cdot (\tau H) = \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots} \tau H.$$

La conclusion est obtenue du fait que les classes bilatérales forment toujours une partition du groupe ambiant. ■

**Proposition 2.1.2.** *Soit  $M = M(X) = X^n/H$ ,  $H \leq \mathfrak{S}_n$ , une espèce moléculaire. La décomposition moléculaire de l'espèce à une sorte  $M(X_{t_1} + X_{t_2} + \dots)$ , où  $X_{t_i}$  désigne l'espèce des singletons de poids  $t_i$ ,  $i \geq 1$ , est donnée par*

$$M(X_{t_1} + X_{t_2} + \dots) = \sum_{n_1 + n_2 + \dots = n} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots} \setminus \mathfrak{S}_n/H} \left( \frac{X^n}{(\tau H \tau^{-1}) \cap \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots}} \right)_{t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots}.$$

*Démonstration.* Puisque la substitution d'espèces à une sorte dans une espèce multisorte donne lieu à une espèce à une seule sorte, voir [5, 54],

$$\begin{aligned} M(X_{t_1} + X_{t_2} + \dots) &= M(T_1 + T_2 + \dots)|_{T_i = X_{t_i}, i \geq 1} \\ &= \sum_{\substack{n_1 + n_2 + \dots = n \\ \tau \in \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots} \setminus \mathfrak{S}_n/H}} \frac{T_1^{n_1} T_2^{n_2} \dots}{(\tau H \tau^{-1}) \cap \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots}} \Big|_{T_i = X_{t_i}, i \geq 1} \\ &= \sum_{\substack{n_1 + n_2 + \dots = n \\ \tau \in \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots} \setminus \mathfrak{S}_n/H}} \frac{X_{t_1}^{n_1} X_{t_2}^{n_2} \dots}{(\tau H \tau^{-1}) \cap \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots}}. \end{aligned}$$

Il suffit maintenant de constater que le poids total d'une  $\frac{X_{t_1}^{n_1} X_{t_2}^{n_2} \dots}{(\tau H \tau^{-1}) \cap \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots}}$ -structure est  $t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots$  et le résultat suit. ■



**Proposition 2.1.3.** *Soit  $M = M(X) = X^n/H$ ,  $H \leq \mathfrak{S}_n$ , une espèce moléculaire, on a*

$$M(X_{t_1} + X_{t_2} + \cdots) = \sum_{\lambda \vdash n} \sum_{(n_1, n_2, \dots)^+ = \lambda} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_\lambda \backslash \mathfrak{S}_n/H} \left( \frac{X^n}{(\tau H \tau^{-1}) \cap \mathfrak{S}_\lambda} \right)_{t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots}$$

où  $(n_1, n_2, \dots)^+$  désigne le partage formé des entiers non nuls de la suite  $(n_1, n_2, \dots)$ .

*Démonstration.* Rappelons que tous les sous-groupes de Young  $\mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots} \leq \mathfrak{S}_n$  provenant d'une composition  $n_1 + n_2 + \cdots = n$  dont le partage sous-jacent est  $\lambda$  sont conjugués dans  $\mathfrak{S}_n$ , c.-à-d. :  $\exists \omega \in \mathfrak{S}_n$  tel que  $\omega \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots} \omega^{-1} = \mathfrak{S}_\lambda$ . De plus,

$$\tau \in \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots} \sigma H \in \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots} \backslash \mathfrak{S}_n/H \iff \omega \tau \in \mathfrak{S}_\lambda \omega \sigma H \in \mathfrak{S}_\lambda \backslash \mathfrak{S}_n/H.$$

En effet,  $\tau \in \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots} \sigma H$  si et seulement si  $\exists \beta \in \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots}$  et  $h \in H$  tels que  $\tau = \beta \sigma h$ . Or,  $\omega \tau = \omega \beta \sigma h = \omega \beta \omega^{-1} \omega \sigma h = \theta (\omega \sigma) h$  où  $\theta = \omega \beta \omega^{-1} \in \mathfrak{S}_\lambda$  si et seulement si  $\omega \tau \in \mathfrak{S}_\lambda \omega \sigma H$ . De plus, puisque

$$\begin{aligned} \omega ((\tau H \tau^{-1}) \cap \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots}) \omega^{-1} &= (\omega \tau H \tau^{-1} \omega^{-1}) \cap (\omega \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots} \omega^{-1}) \\ &= ((\omega \tau) H (\omega \tau)^{-1}) \cap \mathfrak{S}_\lambda, \end{aligned}$$

$(\tau H \tau^{-1}) \cap \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots}$  est conjugué à  $(\omega \tau) H (\omega \tau)^{-1} \cap \mathfrak{S}_\lambda$  et, par le regroupement des termes du résultat énoncé à la proposition 2.1.2 selon les partages sous-jacents des compositions de  $n$ , le résultat suit. ■

**Définition 2.1.4.** *Soient  $H$  et  $K$ , deux sous-groupes de  $\mathfrak{S}_n$  et  $\lambda$  un partage de  $n$ . On définit les nombres  $T_\lambda(H, K)$  par*

$$T_\lambda(H, K) := |\{\tau \in \mathfrak{S}_\lambda \backslash \mathfrak{S}_n/H \mid (\tau H \tau^{-1}) \cap \mathfrak{S}_\lambda \equiv K\}|.$$

De plus, pour  $\Phi \subseteq \{K \in cc(\mathfrak{S}_n) \mid n \geq 0\}$ , un ensemble de groupes non conjugués deux à deux, on définit les nombres  $T_\lambda^\Phi(H)$  par

$$T_\lambda^\Phi(H) := \sum_{K \in \Phi} T_\lambda(H, K) = |\{\tau \in \mathfrak{S}_\lambda \backslash \mathfrak{S}_n/H \mid (\tau H \tau^{-1}) \cap \mathfrak{S}_\lambda \in \hat{\Phi}\}|$$

où  $\hat{\Phi}$  désigne le saturé de  $\Phi$  sous la conjugaison.

Pour  $M = X^n/H$ ,  $H \leq \mathfrak{S}_n$ , une espèce moléculaire et  $\lambda$  un partage de  $n$ ,  $T_\lambda(H, K)$  (respectivement  $T_\lambda^\Phi(H)$ ) désigne le nombre de types de  $M(X_{t_1} + X_{t_2} + \dots)$ -structures dont la distribution sous-jacente des poids est  $\lambda$ , c.-à-d. :  $(n_1, n_2, \dots)^+ = \lambda$ , et dont le stabilisateur est conjugué à  $K \leq \mathfrak{S}_n$  (resp. à un groupe appartenant à  $\Phi$ ).

**Remarque 2.1.5.** Soit  $M = X^n/H$ ,  $H \leq \mathfrak{S}_n$ , une espèce moléculaire. Toute  $M$ -structure sur  $\llbracket n \rrbracket$  a un stabilisateur conjugué à  $H$  dans  $\mathfrak{S}_n$ . Lorsqu'on colore les  $M$ -structures, c.-à-d. : chaque élément de l'ensemble sous-jacent est muni d'un poids dans l'ensemble  $\{t_i \mid i \geq 1\}$ , et qu'on ne considère que celles dont le stabilisateur est conjugué à un groupe  $K$  donné, nous aurons  $T_\lambda(H, K) \neq 0$  seulement si  $K$  est conjugué à un sous-groupe de  $H$ , c.-à-d. : seulement si  $\overline{K} \cap \text{sg}(H) \neq \emptyset$ .  $\square$

**Proposition 2.1.6.** Soient  $M = M(X) = X^n/H$ ,  $H \leq \mathfrak{S}_n$ , une espèce moléculaire et  $K$  un sous-groupe de  $\mathfrak{S}_n$ . On a :

$$M(X_{t_1} + X_{t_2} + \dots)^{\sim K} = \sum_{\lambda \vdash n} \sum_{(n_1, n_2, \dots)^+ = \lambda} T_\lambda(H, K) \left( \frac{X^n}{K} \right)_{t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots}^{\sim}.$$

*Démonstration.* De la proposition 2.1.3, on a :

$$\begin{aligned} M(X_{t_1} + X_{t_2} + \dots)^{\sim K} &= \sum_{\lambda \vdash n} \sum_{(n_1, n_2, \dots)^+ = \lambda} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_\lambda \backslash \mathfrak{S}_n/H} \left( \frac{X^n}{(\tau H \tau^{-1}) \cap \mathfrak{S}_\lambda} \right)_{t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots}^{\sim K} \\ &= \sum_{\lambda \vdash n} \sum_{(n_1, n_2, \dots)^+ = \lambda} \sum_{\substack{\tau \in \mathfrak{S}_\lambda \backslash \mathfrak{S}_n/H \\ (\tau H \tau^{-1}) \cap \mathfrak{S}_\lambda \cong K}} \left( \frac{X^n}{K} \right)_{t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots}^{\sim} \\ &= \sum_{\lambda \vdash n} \sum_{(n_1, n_2, \dots)^+ = \lambda} T_\lambda(H, K) \left( \frac{X^n}{K} \right)_{t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots}^{\sim}. \end{aligned}$$

■

La fonction symétrique *monomiale* associée à un partage  $\lambda$  de  $n$  est définie par

$$\text{mon}_\lambda(t_1, t_2, \dots) = \sum_{(n_1, n_2, \dots)^+ = \lambda} t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots.$$

En particulier, voir [40],

$$\begin{aligned} \text{mon}_{(n)}(t_1, t_2, \dots) &= \sum_{i \geq 1} t_i^n, \\ \text{mon}_{(1^n)}(t_1, t_2, \dots) &= \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_n} t_{i_1} t_{i_2} \dots t_{i_n} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \text{mon}_{(n)}(t_1, t_2, \dots) &= \prod_{i \geq 1} \frac{1}{1 - t_i} = Z_E(x_1, x_2, \dots) \Big|_{x_k := \sum_{i \geq 1} t_i^k}, \\ \sum_{n \geq 0} \text{mon}_{(1^n)}(t_1, t_2, \dots) &= \prod_{i \geq 1} (1 + t_i) = \Gamma_E(x_1, x_2, \dots) \Big|_{x_k := \sum_{i \geq 1} t_i^k}. \end{aligned}$$

**Proposition 2.1.7.** *Soit  $M = X^n/H$ ,  $H \leq \mathfrak{S}_n$ , une espèce moléculaire. La série indicatrice des  $\Phi$ -symétries de l'espèce  $M$  est donnée par*

$$\Phi_M(x_1, x_2, \dots) = \sum_{\lambda \vdash n} T_\lambda^\Phi(H) \text{mon}_\lambda(t_1, t_2, \dots) \quad (2.2)$$

où  $x_k = \sum_{i \geq 1} t_i^k$ ,  $k \geq 1$ .

*Démonstration.* De la proposition 2.1.6, on a successivement

$$\begin{aligned} \Phi_M(x_1, x_2, \dots) &= (M(X_{t_1} + X_{t_2} + \dots))^{\sim \Phi} (1) \\ &= \sum_{K \in \Phi} (M(X_{t_1} + X_{t_2} + \dots))^{\sim K} (1) \\ &= \sum_{K \in \Phi} \sum_{\lambda \vdash n} \sum_{(n_1, n_2, \dots)^+ = \lambda} T_\lambda(H, K) \left( \frac{X^n}{K} \right)_{t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots}^{\sim} \quad (1) \\ &= \sum_{\lambda \vdash n} \left( \sum_{K \in \Phi} T_\lambda(H, K) \right) \sum_{(n_1, n_2, \dots)^+ = \lambda} t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots \\ &= \sum_{\lambda \vdash n} T_\lambda^\Phi(H) \text{mon}_\lambda(t_1, t_2, \dots). \end{aligned}$$

■

**Exemple 2.1.8.** Afin d'illustrer l'emploi de l'expression (2.2), nous calculons la  $\Phi$ -série de l'espèce des polygones sur 4 points,  $P_4$ . Notons que ce calcul a été effectué en partie à l'aide de la librairie SF [49] disponible sur Maple [8]. Puisque le stabilisateur de toute  $P_4$ -structure sur  $\llbracket 4 \rrbracket$  est conjugué au groupe diédral  $\mathfrak{D}_4$ ,

$$\Phi_{P_4}(x_1, x_2, \dots) = \sum_{\lambda \vdash 4} T_\lambda^\Phi(\mathfrak{D}_4) \text{mon}_\lambda(t_1, t_2, \dots) \quad (2.3)$$

où, voir [40, 49], pour  $x_k = \sum_{i \geq 1} t_i^k$ ,  $k \geq 1$ ,

$\lambda \vdash 4$	$\text{mon}_\lambda(t_1, t_2, \dots)$
(4)	$x_4$
(3, 1)	$x_1x_3 - x_4$
(2, 2)	$\frac{1}{2}(x_2^2 - x_4)$
(2, 1, 1)	$\frac{1}{2}x_1^2x_2 - x_1x_3 - \frac{1}{2}x_2^2 + x_4$
(1, 1, 1, 1)	$\frac{1}{24}x_1^4 - \frac{1}{4}x_1^2x_2 + \frac{1}{3}x_1x_3 + \frac{1}{8}x_2^2 - \frac{1}{4}x_4.$

Pour chacun des partages de 4, nous décomposons le nombre de représentants  $\tau$  des classes bilatérales  $\mathfrak{S}_\lambda \setminus \mathfrak{S}_4 / \mathfrak{D}_4$  (voir le tableau 2.1) selon les classes de conjugaison des groupes  $(\tau \mathfrak{D}_4 \tau^{-1}) \cap \mathfrak{S}_\lambda$ . Nous en déduisons les nombres  $T_\lambda^\Phi(\mathfrak{D}_4)$  de l'expression (2.3) en terme de  $\Phi$  et obtenons

$$\begin{aligned}
\Phi_{P_4} &= \chi(\mathfrak{D}_4 \in \hat{\Phi}) \text{mon}_4 + \chi(\mathfrak{S}_{2,1,1} \in \hat{\Phi}) \text{mon}_{3,1} \\
&\quad + \left( \chi(\mathfrak{S}_2 \wr \mathfrak{S}_{1,1} \in \hat{\Phi}) + \chi(\mathfrak{S}_{2,2} \in \hat{\Phi}) \right) \text{mon}_{2,2} \\
&\quad + \left( \chi(\mathfrak{S}_{1,1,1,1} \in \hat{\Phi}) + \chi(\mathfrak{S}_{2,1,1} \in \hat{\Phi}) \right) \text{mon}_{2,1,1} + 3\chi(\mathfrak{S}_{1,1,1,1} \in \hat{\Phi}) \text{mon}_{1,1,1,1} \\
&= \chi(\mathfrak{D}_4 \in \hat{\Phi}) \text{mon}_4 + \chi(\mathfrak{S}_{2,2} \in \hat{\Phi}) \text{mon}_{2,2} + \chi(\mathfrak{S}_{2,1,1} \in \hat{\Phi}) (\text{mon}_{3,1} + \text{mon}_{2,1,1}) \\
&\quad + \chi(\mathfrak{S}_2 \wr \mathfrak{S}_{1,1} \in \hat{\Phi}) \text{mon}_{2,2} + \chi(\mathfrak{S}_{1,1,1,1} \in \hat{\Phi}) (\text{mon}_{2,1,1} + 3\text{mon}_{1,1,1,1}) \\
&= \chi(\mathfrak{D}_4 \in \hat{\Phi}) x_4 + \chi(\mathfrak{S}_{2,2} \in \hat{\Phi}) \left( \frac{x_2^2}{2} - \frac{x_4}{2} \right) + \chi(\mathfrak{S}_{2,1,1} \in \hat{\Phi}) \left( \frac{x_1^2 x_2}{2} - \frac{x_2^2}{2} \right) \\
&\quad + \chi(\mathfrak{S}_2 \wr \mathfrak{S}_{1,1} \in \hat{\Phi}) \left( \frac{x_2^2}{2} - \frac{x_4}{2} \right) + \chi(\mathfrak{S}_{1,1,1,1} \in \hat{\Phi}) \left( \frac{x_1^4}{8} - \frac{x_1^2 x_2}{4} - \frac{x_2^2}{8} + \frac{x_4}{4} \right).
\end{aligned}$$

Dans cette expression,  $H \wr K$  désigne le produit en couronne de deux groupes  $H$  et  $K$  (voir la définition 3.2.4).  $\diamond$

Par des calculs analogues à celui effectué à l'exemple 2.1.8, nous avons obtenu la  $\Phi$ -série de chacune des espèces moléculaires concentrées sur un cardinal inférieur ou égal à 4, voir le tableau 2.2. Les notations pour ces espèces moléculaires sont tirées de [33].

**Corollaire 2.1.9.** *Pour toute espèce moléculaire  $M = X^n/H$ ,  $H \leq \mathfrak{S}_n$ , on a :*

$$Z_M(x_1, x_2, \dots) = \sum_{\lambda \vdash n} |\mathfrak{S}_\lambda \setminus \mathfrak{S}_n / H| \text{mon}_\lambda(t_1, t_2, \dots)$$

Tableau 2.1 – La décomposition de  $P_4(X_{t_1} + X_{t_2} + \dots)$ 

$\lambda$	$ \mathfrak{S}_\lambda \backslash \mathfrak{S}_4 / \mathfrak{D}_4 $	$\overline{(\tau \mathfrak{D}_4 \tau^{-1}) \cap \mathfrak{S}_\lambda}$	$T_\lambda^\Phi(\mathfrak{D}_4)$	$T_\lambda^Z(\mathfrak{D}_4)$	$T_\lambda^\Gamma(\mathfrak{D}_4)$
(4)	1	$\overline{\mathfrak{D}_4}$	$\chi(\mathfrak{D}_4 \in \hat{\Phi})$	1	0
(3, 1)	1	$\overline{\mathfrak{S}_{2,1,1}}$	$\chi(\mathfrak{S}_{2,1,1} \in \hat{\Phi})$	1	0
(2, 2)	1	$\overline{\mathfrak{S}_2 \wr \mathfrak{S}_{1,1}}$	$\chi(\mathfrak{S}_2 \wr \mathfrak{S}_{1,1} \in \hat{\Phi}) +$	2	0
	1	$\overline{\mathfrak{S}_{2,2}}$	$\chi(\mathfrak{S}_{2,2} \in \hat{\Phi})$		
(2, 1, 1)	1	$\overline{\mathfrak{S}_{1,1,1,1}}$	$\chi(\mathfrak{S}_{1,1,1,1} \in \hat{\Phi}) +$	2	1
	1	$\overline{\mathfrak{S}_{2,1,1}}$	$\chi(\mathfrak{S}_{2,1,1} \in \hat{\Phi})$		
(1, 1, 1, 1)	3	$\overline{\mathfrak{S}_{1,1,1,1}}$	$3\chi(\mathfrak{S}_{1,1,1,1} \in \hat{\Phi})$	3	3

et

$$\Gamma_M(x_1, x_2, \dots) = \sum_{\lambda \vdash n} T_\lambda(H, \{id_n\}) \text{mon}_\lambda(t_1, t_2, \dots).$$

*Démonstration.* Il suffit de constater que

$$T_\lambda^Z(H) = \left| \{ \tau \in \mathfrak{S}_\lambda \backslash \mathfrak{S}_n / H \mid (\tau H \tau^{-1}) \cap \mathfrak{S}_\lambda \in \hat{Z} \} \right| = |\mathfrak{S}_\lambda \backslash \mathfrak{S}_n / H|$$

et que

$$T_\lambda^\Gamma(H) = \left| \{ \tau \in \mathfrak{S}_\lambda \backslash \mathfrak{S}_n / H \mid (\tau H \tau^{-1}) \cap \mathfrak{S}_\lambda \in \hat{\Gamma} \} \right| = T_\lambda(H, \{id_n\})$$

et le résultat suit. ■

A l'aide de Maple [8] et de la librairie SF [49], nous avons calculé la série indicatrice d'asymétrie de chacune des espèces moléculaires concentrées sur le cardinal 5 et pour chacune des espèces atomiques concentrées sur le cardinal 6 (voir l'appendice A).

Tableau 2.2 – Les  $\Phi$ -polynômes de  $M \in \mathcal{M}_n$ ,  $n \leq 4$ 

$M$	$\Phi_M(x_1, x_2, \dots)$
1	$\chi(\mathfrak{S}_0 \in \hat{\Phi})$
$X$	$\chi(\mathfrak{S}_1 \in \hat{\Phi})x_1$
$E_2$	$\chi(\mathfrak{S}_2 \in \hat{\Phi})x_2 + \chi(\mathfrak{S}_{1,1} \in \hat{\Phi})\left(\frac{x_1^2}{2} - \frac{x_2}{2}\right)$
$X^2$	$\chi(\mathfrak{S}_{1,1} \in \hat{\Phi})x_1^2$
$E_3$	$\chi(\mathfrak{S}_3 \in \hat{\Phi})x_3 + \chi(\mathfrak{S}_{2,1} \in \hat{\Phi})(x_1x_2 - x_3) + \chi(\mathfrak{S}_{1,1,1} \in \hat{\Phi})\left(\frac{x_1^3}{6} - \frac{x_1x_2}{2} + \frac{x_3}{3}\right)$
$C_3$	$\chi(\mathbb{Z}_3 \in \hat{\Phi})x_3 + \chi(\mathfrak{S}_{1,1,1} \in \hat{\Phi})\left(\frac{x_1^3}{3} - \frac{x_3}{3}\right)$
$XE_2$	$\chi(\mathfrak{S}_{2,1} \in \hat{\Phi})x_1x_2 + \chi(\mathfrak{S}_{1,1,1} \in \hat{\Phi})\left(\frac{x_1^3}{2} - \frac{x_1x_2}{2}\right)$
$X^3$	$\chi(\mathfrak{S}_{1,1,1} \in \hat{\Phi})x_1^3$
$E_4$	$\chi(\mathfrak{S}_4 \in \hat{\Phi})x_4 + \chi(\mathfrak{S}_{3,1} \in \hat{\Phi})(x_1x_3 - x_4) + \chi(\mathfrak{S}_{2,2} \in \hat{\Phi})\left(\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_4}{2}\right) + \chi(\mathfrak{S}_{2,1,1} \in \hat{\Phi})\left(\frac{x_1^2x_2}{2} - x_1x_3 - \frac{x_2^2}{2} + x_4\right) + \chi(\mathfrak{S}_{1,1,1,1} \in \hat{\Phi})\left(\frac{x_1^4}{24} - \frac{x_1^2x_2}{4} + \frac{x_1x_3}{3} + \frac{x_2^2}{8} - \frac{x_4}{4}\right)$
$E_4^\pm$	$\chi(\mathfrak{A}_4 \in \hat{\Phi})x_4 + \chi(\mathbb{Z}_3 \star \mathfrak{S}_1 \in \hat{\Phi})(x_1x_3 - x_4) + \chi(\mathfrak{S}_2 \wr \mathfrak{S}_{1,1} \in \hat{\Phi})\left(\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_4}{2}\right) + \chi(\mathfrak{S}_{1,1,1,1} \in \hat{\Phi})\left(\frac{x_1^4}{12} - \frac{x_1x_3}{3} - \frac{x_2^2}{4} + \frac{x_4}{2}\right)$
$P_4$	$\chi(\mathfrak{D}_4 \in \hat{\Phi})x_4 + \chi(\mathfrak{S}_{2,2} \in \hat{\Phi})\left(\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_4}{2}\right) + \chi(\mathfrak{S}_{2,1,1} \in \hat{\Phi})\left(\frac{x_1^2x_2}{2} - \frac{x_2^2}{2}\right) + \chi(\mathfrak{S}_2 \wr \mathfrak{S}_{1,1} \in \hat{\Phi})\left(\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_4}{2}\right) + \chi(\mathfrak{S}_{1,1,1,1} \in \hat{\Phi})\left(\frac{x_1^4}{8} - \frac{x_1^2x_2}{4} - \frac{x_2^2}{8} + \frac{x_4}{4}\right)$
$XE_3$	$\chi(\mathfrak{S}_{3,1} \in \hat{\Phi})x_1x_3 + \chi(\mathfrak{S}_{2,1,1} \in \hat{\Phi})(x_1^2x_2 - x_1x_3) + \chi(\mathfrak{S}_{1,1,1,1} \in \hat{\Phi})\left(\frac{x_1^4}{6} - \frac{x_1^2x_2}{2} + \frac{x_1x_3}{3}\right)$
$E_2^2$	$\chi(\mathfrak{S}_{2,2} \in \hat{\Phi})x_2^2 + \chi(\mathfrak{S}_{2,1,1} \in \hat{\Phi})(x_1^2x_2 - x_2^2) + \chi(\mathfrak{S}_{1,1,1,1} \in \hat{\Phi})\left(\frac{x_1^4}{4} - \frac{x_1^2x_2}{2} + \frac{x_2^2}{4}\right)$
$P_4^{\text{bic}}$	$\chi(\mathfrak{D}_4^{\text{bic}} \in \hat{\Phi})x_4 + \chi(\mathfrak{S}_2 \wr \mathfrak{S}_{1,1} \in \hat{\Phi})\left(\frac{3x_2^2}{2} - \frac{3x_4}{2}\right) + \chi(\mathfrak{S}_{1,1,1,1} \in \hat{\Phi})\left(\frac{x_1^4}{4} - \frac{3x_2^2}{4} + \frac{x_4}{2}\right)$
$C_4$	$\chi(\mathbb{Z}_4 \in \hat{\Phi})x_4 + \chi(\mathfrak{S}_2 \wr \mathfrak{S}_{1,1} \in \hat{\Phi})\left(\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_4}{2}\right) + \chi(\mathfrak{S}_{1,1,1,1} \in \hat{\Phi})\left(\frac{x_1^4}{4} - \frac{x_2^2}{4}\right)$
$XC_3$	$\chi(\mathbb{Z}_3 \star \mathfrak{S}_1 \in \hat{\Phi})x_1x_3 + \chi(\mathfrak{S}_{1,1,1,1} \in \hat{\Phi})\left(\frac{x_1^4}{3} - \frac{x_1x_3}{3}\right)$
$X^2E_2$	$\chi(\mathfrak{S}_{2,1,1} \in \hat{\Phi})x_1^2x_2 + \chi(\mathfrak{S}_{1,1,1,1} \in \hat{\Phi})\left(\frac{x_1^4}{2} - \frac{x_1^2x_2}{2}\right)$
$E_2 \circ X^2$	$\chi(\mathfrak{S}_2 \wr \mathfrak{S}_{1,1} \in \hat{\Phi})x_2^2 + \chi(\mathfrak{S}_{1,1,1,1} \in \hat{\Phi})\left(\frac{x_1^4}{2} - \frac{x_2^2}{2}\right)$
$X^4$	$\chi(\mathfrak{S}_{1,1,1,1} \in \hat{\Phi})x_1^4$

## 2.2 Les séries génératrices obtenues par la spécialisation des variables dans les $\Phi$ -séries indicatrices

En général, pour toute espèce pondérée  $F = F_w$  et tout ensemble  $\Phi$  de groupes non conjugués deux à deux,  $\Phi_F(x, 0, 0, \dots) \neq F(x)$  comme nous l'avons vu à la fin du chapitre 1. Afin de trouver les conditions à imposer à l'ensemble  $\Phi$  pour que, quelle que soit l'espèce pondérée  $F = F_w$ , on ait  $\Phi_F(x, 0, 0, \dots) = F(x)$ , nous abordons rapidement la notion de changement de base dans l'espace des fonctions symétriques. L'idée est d'obtenir une expression explicite pour la  $\Phi$ -série en terme des sommes de puissances  $x_i := p_i(t_1, t_2, \dots) = \sum_{k \geq 1} t_k^i$ ,  $i \geq 1$ , pour ensuite poser  $(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x, 0, 0, \dots)$ .

Soient  $\{u_\lambda\}_{\lambda \vdash n}$  et  $\{v_\lambda\}_{\lambda \vdash n}$ , deux bases totalement ordonnées de l'espace des fonctions symétriques de degré  $n$ . La matrice de passage de la base  $\{u_\lambda\}_{\lambda \vdash n}$  à la base  $\{v_\lambda\}_{\lambda \vdash n}$ , notée  $M(u, v)$ , est la matrice  $(M_{\lambda\mu})$  des coefficients de la famille d'équations

$$u_\lambda = \sum_{\mu \vdash n} M_{\lambda\mu} v_\mu, \quad \lambda \vdash n.$$

On s'intéresse particulièrement à la matrice de passage de la base des fonctions symétriques monomiales  $\{\text{mon}_\lambda\}_{\lambda \vdash n}$  à celle des sommes de puissances  $\{p_\lambda\}_{\lambda \vdash n}$ .

Notons qu'il existe plusieurs interprétations combinatoires pour les matrices de passage d'une base à l'autre. Stembridge [50] nous a communiqué l'interprétation combinatoire suivante pour la matrice de passage de la base des sommes de puissances  $\{p_\lambda\}_{\lambda \vdash n}$  à la base des fonctions symétriques homogènes  $\{h_\lambda\}_{\lambda \vdash n}$  :

*Soit  $\lambda$  un partage de  $n$ ,  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\ell(\lambda)})$ , et  $L_\lambda$  (respectivement  $G_\lambda$ ) un graphe sur  $n$  sommets formé de  $\ell(\lambda)$  chemins (respectivement cycles) disjoints de longueurs  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\ell(\lambda)}$ . On a*

$$p_\lambda = \sum_{\mu \vdash n} (-1)^{\ell(\lambda) + \ell(\mu)} A_{\lambda\mu} h_\mu \tag{2.4}$$

où  $A_{\lambda\mu}$  désigne le nombre de sous-graphes de  $G_\lambda$  isomorphes à  $L_\mu$ .

Nous nous intéressons donc à une dualisation de (2.4) qui permet de passer des fonctions symétriques monomiales aux sommes de puissances. Il est bien connu [40] que

si  $\{u'_\lambda\}_{\lambda \vdash n}$  et  $\{v'_\lambda\}_{\lambda \vdash n}$  sont des bases duales de  $\{u_\lambda\}_{\lambda \vdash n}$  et de  $\{v_\lambda\}_{\lambda \vdash n}$  respectivement, la matrice de passage  $M(u', v')$  entre les bases duales est obtenue de  $M(u, v)$  par la transposition  $M(u', v') = M(v, u)^T$ . Puisque

$$\langle \text{mon}_\lambda, h_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu} \text{ et que } \langle p_\lambda, \frac{p_\mu}{\text{aut}(\mu)} \rangle = \delta_{\lambda\mu},$$

où  $\delta_{\lambda\mu} = \chi(\lambda = \mu)$ , on a  $M(\text{mon}, \frac{p}{\text{aut}}) = M(h', p') = M(p, h)^T$  et ainsi,

$$\text{mon}_\lambda = \sum_{\mu \vdash n} (-1)^{\ell(\lambda) + \ell(\mu)} A_{\mu\lambda} \frac{p_\mu}{\text{aut}(\mu)}. \quad (2.5)$$

Par linéarité, (2.5) donne lieu à l'expression explicite suivante pour la  $\Phi$ -série d'une espèce moléculaire en terme des sommes de puissances.

**Proposition 2.2.1.** *Soient  $\Phi \subseteq \{K \subseteq \text{cc}(\mathfrak{S}_n) \mid n \geq 0\}$ , un ensemble de groupes non conjugués deux à deux et  $M = X^n/H$ ,  $H \leq \mathfrak{S}_n$ , une espèce moléculaire. On a*

$$\Phi_M(x_1, x_2, \dots) = \sum_{\mu \vdash n} \left( \sum_{\lambda \vdash n} (-1)^{\ell(\lambda) + \ell(\mu)} A_{\mu\lambda} T_\lambda^\Phi(H) \right) \frac{p_\mu}{\text{aut}(\mu)} \quad (2.6)$$

où  $p_\mu = p_{\mu_1} p_{\mu_2} \dots = x_{\mu_1} x_{\mu_2} \dots$ . △

**Proposition 2.2.2.** *Soit  $\Phi \subseteq \{K \subseteq \text{cc}(\mathfrak{S}_n) \mid n \geq 0\}$ , un ensemble de groupes non conjugués deux à deux. Pour une espèce pondérée  $F_w$ , on a*

$$\Phi_{F_w}(x, 0, 0, \dots) = F_w(x) := \sum_{n \geq 0} f_{n,w} \frac{x^n}{n!}$$

où  $f_{n,w}$  désigne le poids total des  $F_w$ -structures sur  $\llbracket n \rrbracket$ , si et seulement si

$$\{\{id_n\} \mid n \geq 0, F_n \neq 0\} \subseteq \Phi.$$

*Démonstration.* Soit  $M = X^n/H$ ,  $H \leq \mathfrak{S}_n$ , une espèce moléculaire. On a :

$$\Phi_M(x, 0, 0, \dots) := \Phi_M(x_1, x_2, x_3, \dots) \Big|_{\substack{x_1 := x \\ x_2 = x_3 = \dots = 0}}$$

où  $\Phi_M$  est donnée par (2.6). En posant  $(x_1, x_2, x_3, \dots) := (x, 0, 0, \dots)$ , on obtient

$$p_\mu \Big|_{\substack{x_1 := x \\ x_2 = x_3 = \dots = 0}} = x^n \chi(\mu = (1^n))$$



et on vérifie facilement que  $A_{(1^n)\lambda} = \chi(\lambda = (1^n))$ . Ainsi  $A_{(1^n)(1^n)}$  fournit le seul coefficient non nul de  $\Phi_M(x, 0, 0, \dots)$  et

$$\Phi_M(x, 0, 0, \dots) = T_{(1^n)}^\Phi(H) \frac{x^n}{n!}$$

où

$$\begin{aligned} T_{(1^n)}^\Phi(H) &= \left| \{ \tau \in \mathfrak{S}_{(1^n)} \setminus \mathfrak{S}_n / H \mid (\tau H \tau^{-1}) \cap \mathfrak{S}_{(1^n)} \in \hat{\Phi} \} \right| \\ &= \left| \{ \tau \in \mathfrak{S}_n / H \mid \{id_n\} \in \Phi \} \right| = \frac{n!}{|H|} \chi(\{id_n\} \in \Phi). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\Phi_M(x, 0, 0, \dots) = \chi(\{id_n\} \in \Phi) M(x)$$

et, par linéarité, le résultat suit. ■

**Corollaire 2.2.3.** *Soit  $\Phi \subseteq \{K \in cc(\mathfrak{S}_n) \mid n \geq 0\}$ , un ensemble de groupes non conjugués deux à deux. Pour toute espèce pondérée  $F = F_w$ ,*

$$\Phi_F(x, 0, 0, \dots) = F(x)$$

*si et seulement si  $\Gamma \subseteq \Phi$ .* △

**Corollaire 2.2.4.** *Pour toute espèce pondérée  $F = F_w$ ,*

$$Z_F(x, 0, 0, \dots) = F(x) = \Gamma_F(x, 0, 0, \dots).$$

△

## 2.3 La série indicatrice et la $q$ -série d'asymétrie de l'espèce des ensembles orientés

Très peu de formes closes pour  $\Gamma_F$  sont connues, voir par exemple [5, 24, 25, 26]. Dans cette section, nous obtenons une forme close pour la série indicatrice d'asymétrie  $\Gamma_{E^\pm}(x_1, x_2, \dots)$  de l'espèce  $E^\pm$ , des ensembles orientés; illustrant ainsi l'utilité de la décomposition moléculaire présentée à la proposition 2.1.2 lorsque les classes bilatérales

$\mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots} \setminus \mathfrak{S}_n / H$  sont simples à traiter. Nous terminons la section par le calcul de la  $q$ -série d'asymétrie de  $E^\pm$  (au sens de Décoste [12, 13]) obtenue par les substitutions simultanées  $x_k := \frac{(1-q)^k}{1-q^k} x^k$ ,  $k \geq 1$ , dans la série  $\Gamma_{E^\pm}(x_1, x_2, \dots)$ .

Un ensemble orienté est un ordre total à une permutation paire près. Une structure d'ensemble orienté peut aussi être interprétée comme une base orientée d'un espace vectoriel de dimension finie ou comme une disposition des éléments d'un ensemble aux sommets d'un simplexe orienté, ou encore, comme un ensemble de positions réalisables au jeu de taquin [56]. Plus précisément, nous donnons la définition suivante.

**Définition 2.3.1.** *Soit  $U$ , un ensemble fini de cardinal  $n$ . Une structure d'ensemble orienté sur  $U$  est une orbite de l'action naturelle  $\mathfrak{A}_n \times X^n[U] \rightarrow X^n[U]$  du groupe alterné  $\mathfrak{A}_n \leq \mathfrak{S}_n$  sur l'ensemble  $X^n[U]$  des  $n!$  façons d'ordonner totalement les éléments de  $U$ .*

L'espèce des ensembles orientés concentrée sur le cardinal  $n$  s'écrit comme le quotient  $E_n^\pm = X^n / \mathfrak{A}_n$  et, sommant sur  $n$ , l'espèce des ensembles orientés s'écrit comme la somme  $E^\pm = \sum_{n \geq 0} X^n / \mathfrak{A}_n$ . Il n'y a qu'une structure d'ensemble orienté sur un ensemble de cardinal 0 ou 1 et exactement deux structures sur tout ensemble de cardinal supérieur à 1. La décomposition moléculaire de l'espèce  $E^\pm$  est

$$\begin{aligned} E^\pm &= E_0^\pm + E_1^\pm + E_2^\pm + \dots + E_n^\pm + \dots \\ &= 1 + X + X^2 + C_3 + E_4^\pm + \dots + E_n^\pm + \dots \end{aligned}$$

où 1 désigne l'espèce de l'ensemble vide,  $X$  l'espèce des singletons et  $C_3$  l'espèce des cycles de longueur 3.

**Proposition 2.3.2.** *Soit  $E_n^\pm$ , l'espèce des ensembles orientés concentrée sur le cardinal  $n \geq 2$ . La décomposition moléculaire de l'espèce  $E_n^\pm(X_{t_1} + X_{t_2} + \dots)$  est donnée par*

$$E_n^\pm(X_{t_1} + X_{t_2} + \dots) = 2 \sum_{\substack{n_1+n_2+\dots=n \\ \forall i: n_i \leq 1}} (X^n)_{t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots} + \sum_{\substack{n_1+n_2+\dots=n \\ \exists i: n_i \geq 2}} \left( \frac{X^n}{\mathfrak{A}_n \cap \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots}} \right)_{t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots}.$$

*Démonstration.* De la proposition 2.1.2, on a :

$$E_n^\pm(X_{t_1} + X_{t_2} + \dots) = \sum_{\substack{n_1+n_2+\dots=n \\ \tau \in \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots} \setminus \mathfrak{S}_n / \mathfrak{A}_n}} \left( \frac{X^n}{(\tau \mathfrak{A}_n \tau^{-1}) \cap \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots}} \right)_{t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots}.$$

Pour  $n \geq 2$ , l'ensemble des classes bilatérales

$$\mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots} \backslash \mathfrak{S}_n / \mathfrak{A}_n = \{\mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots} \tau \mathfrak{A}_n \mid \tau \in \mathfrak{S}_n\} = \{\mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots} \mathfrak{A}_n, \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots} (12) \mathfrak{A}_n\}$$

contient au plus deux éléments. Distinguons deux situations selon que  $\forall i : n_i \leq 1$  ou que  $\exists i : n_i \geq 2$  :

1. Si  $\forall i : n_i \leq 1$ , alors  $\mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots} = \{id_n\}$  et  $\mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots} \backslash \mathfrak{S}_n / \mathfrak{A}_n = \{\mathfrak{A}_n, (12) \mathfrak{A}_n\}$ . Ainsi, quel que soit le représentant  $\tau \in \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots} \backslash \mathfrak{S}_n / \mathfrak{A}_n$ , on a :

$$(\tau \mathfrak{A}_n \tau^{-1}) \cap \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots} = \{id_n\}.$$

2. Si  $\exists i : n_i \geq 2$ , alors  $\mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots} \backslash \mathfrak{S}_n / \mathfrak{A}_n = \{\mathfrak{S}_n\}$ . Quel que soit le représentant  $\tau \in \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots} \backslash \mathfrak{S}_n / \mathfrak{A}_n$ , on a :  $\tau \mathfrak{A}_n \tau^{-1} = \mathfrak{A}_n$  et

$$(\tau \mathfrak{A}_n \tau^{-1}) \cap \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots} = \mathfrak{A}_n \cap \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots}.$$

Puisqu'il y a deux éléments dans l'ensemble  $\mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots} \backslash \mathfrak{S}_n / \mathfrak{A}_n$  dans la première situation et un seul dans la seconde, on a pour  $n \geq 2$ ,

$$E_n^\pm(X_{t_1} + X_{t_2} + \dots) = 2 \sum_{\substack{n_1 + n_2 + \dots = n \\ \forall i : n_i \leq 1}} (X^n)_{t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots} + \sum_{\substack{n_1 + n_2 + \dots = n \\ \exists i : n_i \geq 2}} \left( \frac{X^n}{\mathfrak{A}_n \cap \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots}} \right)_{t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots}.$$

■

Le prochain résultat décrit explicitement la série  $Z_{E^\pm}$  et est bien connu en théorie des espèces de structures [5, 12] et en théorie de Pólya [41, 42]. Nous en donnons une démonstration, basée sur la décomposition moléculaire de la proposition 2.3.2, qui a l'avantage de préparer au calcul, plus complexe, de la série  $\Gamma_{E^\pm}$ .

**Proposition 2.3.3.** *La série indicatrice des cycles de l'espèce des ensembles orientés est donnée par les formules équivalentes*

$$\begin{aligned} Z_{E^\pm}(x_1, x_2, \dots) &= \exp \left\{ \sum_{n \geq 1} \frac{x_n}{n} \right\} + \exp \left\{ \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{x_n}{n} \right\} - 1 - x_1 \\ &= Z_E(x_1, x_2, \dots) + Z_E(x_1, -x_2, x_3, -x_4, \dots) - 1 - x_1 \\ &= 1 + x_1 + \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (1 + \text{sgn}(\sigma)) x_1^{\sigma_1} \dots x_n^{\sigma_n} \end{aligned}$$

où  $\sigma_i$ ,  $i \geq 1$ , désigne le nombre de cycles de longueur  $i$  dans la permutation  $\sigma$ .

*Démonstration.* Rappelons que  $Z_F(x_1, x_2, \dots) = \tilde{F}_t(x)|_{x:=1}$  exprimée dans la base des sommes de puissances  $x_k := \sum_{i \geq 1} t_i^k$ . En sommant sur  $n$  le résultat énoncé à la proposition 2.3.2, on obtient successivement

$$\begin{aligned}
Z_{E^\pm} &= E^\pm(X_{t_1} + X_{t_2} + \dots)^\sim(1) \\
&= 1 + (t_1 + t_2 + \dots) + 2 \sum_{\substack{n_1+n_2+\dots=n \geq 2 \\ \forall i: n_i \leq 1}} t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots + \sum_{\substack{n_1+n_2+\dots=n \geq 2 \\ \exists i: n_i \geq 2}} t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots \\
&= -1 - (t_1 + t_2 + \dots) + \sum_{\substack{n_1+n_2+\dots=n \geq 0 \\ \forall i: n_i \leq 1}} t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots + \sum_{n_1+n_2+\dots=n \geq 0} t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots \\
&= -1 - (t_1 + t_2 + \dots) + \prod_{i \geq 1} (1 + t_i) + \prod_{i \geq 1} \frac{1}{(1 - t_i)} \\
&= -1 - x_1 + \exp \left\{ \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{x_n}{n} \right\} + \exp \left\{ \sum_{n \geq 1} \frac{x_n}{n} \right\} \\
&= -1 - x_1 + Z_E(x_1, -x_2, x_3, -x_4, \dots) + Z_E(x_1, x_2, \dots) \\
&= 1 + x_1 + \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (\text{sgn}(\sigma) + 1) x_1^{\sigma_1} \dots x_n^{\sigma_n}.
\end{aligned}$$

■

La série  $Z_{E^\pm}(x_1, x_2, \dots)$  correspond à la somme sur  $n, n \geq 0$ , des polynômes indicateurs des cycles du groupe alterné  $\mathfrak{A}_n$  agissant naturellement sur  $\llbracket n \rrbracket$ , voir [40]. Notons, de plus, que cette dernière expression découle de la définition, voir [5], de la série  $Z_F$  en terme du nombre de  $F$ -structures fixées par une permutation  $\sigma$ . En effet, pour  $n \geq 2$ , si une permutation  $\sigma$  est paire, elle laisse les deux  $E^\pm$ -structures sur  $\llbracket n \rrbracket$  fixes et, si elle est impaire, elle n'en laisse aucune fixe.

**Proposition 2.3.4.** *La série indicatrice d'asymétrie de l'espèce des ensembles orientés est donnée par les formules équivalentes*

$$\begin{aligned}
\Gamma_{E^\pm}(x_1, x_2, \dots) &= (2 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + \dots) \exp \left\{ \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{x_n}{n} \right\} - 1 - x_1 \\
&= (2 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + \dots) \Gamma_E(x_1, x_2, \dots) - 1 - x_1 \\
&= 1 + x_1 + \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (2 + \sigma_1 - n) \text{sgn}(\sigma) x_1^{\sigma_1} \dots x_n^{\sigma_n}
\end{aligned}$$

où  $\sigma_i, i \geq 1$ , désigne le nombre de cycles de longueur  $i$  dans la permutation  $\sigma$ .

*Démonstration.* Pour simplifier l'écriture de la démonstration qui suit, nous utilisons la notation multiplicative pour les partages, c.-à-d. :  $\omega = (1^{\omega_1} 2^{\omega_2} \dots n^{\omega_n}) \vdash n$  signifie que  $\omega$  a  $\omega_i$  parts de longueur  $i$ ,  $i \in \llbracket n \rrbracket$ . Notons d'abord que pour  $n_1, n_2, \dots \in \mathbb{N}$  tels que  $n_1 + n_2 + \dots = n \geq 2$ ,

$$\mathfrak{A}_n \cap \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots} = \{id_n\} \iff \begin{cases} \forall i : n_i \leq 1 \\ \text{ou} \\ \exists ! j : n_j = 2 \text{ et } \forall i \neq j : n_i \leq 1. \end{cases} \quad (2.7)$$

Rappelons que  $\Gamma_F(x_1, x_2, \dots) = \overline{F_t(x)}|_{x:=1}$  exprimée dans la base des sommes de puissances. On s'intéresse uniquement aux termes de la décomposition moléculaire où  $(\tau \mathfrak{A}_n \tau^{-1}) \cap \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots} = \{id_n\}$ . En tenant compte de (2.7), on obtient successivement

$$\begin{aligned} \Gamma_{E^\pm} &= \overline{E^\pm(X_{t_1} + X_{t_2} + \dots)}(1) \\ &= 1 + (t_1 + t_2 + \dots) + 2 \sum_{\substack{n_1+n_2+\dots=n \geq 2 \\ \forall i: n_i \leq 1}} t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots + \sum_{\substack{n_1+n_2+\dots=n \geq 2 \\ \exists ! j: n_j = 2 \\ \forall i \neq j: n_i \leq 1}} t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots \\ &= -1 - (t_1 + t_2 + \dots) + 2 \sum_{\substack{n_1+n_2+\dots=n \geq 0 \\ \forall i: n_i \leq 1}} t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots + \sum_{\substack{j \geq 1 \\ \forall i \neq j: n_i \leq 1}} t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots t_j^2 \dots \\ &= -1 - (t_1 + t_2 + \dots) + 2 \prod_{i \geq 1} (1 + t_i) + \sum_{j \geq 1} t_j^2 \prod_{\substack{i \neq j \\ i \geq 1}} (1 + t_i) \\ &= -1 - (t_1 + t_2 + \dots) + \prod_{i \geq 1} (1 + t_i) \left( 2 + \sum_{j \geq 1} \frac{t_j^2}{1 + t_j} \right) \\ &= -1 - x_1 + \exp \left\{ \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{x_n}{n} \right\} \left( 2 + \sum_{k \geq 2} (-1)^k x_k \right) \\ &= -1 - x_1 + \Gamma_E(x_1, x_2, \dots) \left( 2 + \sum_{k \geq 2} (-1)^k x_k \right) \\ &= -1 - x_1 + \sum_{n \geq 0} \sum_{\sigma \vdash n} \text{sgn}(\sigma) \frac{x_1^{\sigma_1} \dots x_n^{\sigma_n}}{\text{aut}(\sigma)} \left( 2 + \sum_{k \geq 2} (-1)^k x_k \right). \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
& \sum_{k \geq 2} \sum_{\sigma \vdash n} (-1)^k \operatorname{sgn}(\sigma) \frac{x_1^{\sigma_1} \cdots x_k^{\sigma_k+1} \cdots x_n^{\sigma_n}}{\operatorname{aut}(\sigma)} \\
&= \sum_{k \geq 2} \sum_{\sigma \vdash n} (-1)^k (-1)^{\sum_{i=1}^n (i-1)\sigma_i} \frac{x_1^{\sigma_1} \cdots x_k^{\sigma_k+1} \cdots x_n^{\sigma_n}}{1^{\sigma_1} \sigma_1! \cdots k^{\sigma_k} \sigma_k! \cdots n^{\sigma_n} \sigma_n!} \\
&= \sum_{k \geq 2} \sum_{\substack{\tau \vdash n+k \\ \tau_k \geq 1}} (-1)^{\sum_{i=1}^n (i-1)\tau_i+1} k \tau_k \frac{x_1^{\tau_1} \cdots x_k^{\tau_k} \cdots x_n^{\tau_n}}{\operatorname{aut}(\tau)} \\
&= \sum_{k \geq 2} \sum_{\substack{\tau \vdash n+k \\ \tau_k \geq 1}} -\operatorname{sgn}(\tau) k \tau_k \frac{x_1^{\tau_1} \cdots x_n^{\tau_n}}{\operatorname{aut}(\tau)} \\
&= \sum_{k \geq 2} \sum_{\sigma \vdash n} -k \sigma_k \operatorname{sgn}(\sigma) \frac{x_1^{\sigma_1} \cdots x_n^{\sigma_n}}{\operatorname{aut}(\sigma)}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{E^\pm}(x_1, x_2, \dots) &= -1 - x_1 + \sum_{n \geq 0} \sum_{\sigma \vdash n} \left( 2 + \sum_{k \geq 2} -k \sigma_k \right) \operatorname{sgn}(\sigma) \frac{x_1^{\sigma_1} \cdots x_n^{\sigma_n}}{\operatorname{aut}(\sigma)} \\
&= -1 - x_1 + \sum_{n \geq 0} \sum_{\sigma \vdash n} (2 + \sigma_1 - n) \operatorname{sgn}(\sigma) \frac{x_1^{\sigma_1} \cdots x_n^{\sigma_n}}{\operatorname{aut}(\sigma)} \\
&= 1 + x_1 + \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (2 + \sigma_1 - n) \operatorname{sgn}(\sigma) x_1^{\sigma_1} \cdots x_n^{\sigma_n}.
\end{aligned}$$

■

À l'aide du langage de calcul symbolique Maple [8], nous avons calculé les premiers polynômes indicateurs d'asymétrie de  $E_n^\pm$ , voir le tableau 2.3.

L'analyse (2.7) permet de déduire que pour  $n \geq 2$  et  $\lambda \vdash n$  on a :

$$T_\lambda(\mathfrak{A}_n, \{id_n\}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda = (1^{n-2}2) \\ 2 & \text{si } \lambda = (1^n) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a donc, en particulier, les égalités

$$\begin{aligned}
\Gamma_{E_n^\pm}(x_1, x_2, \dots) &= \operatorname{mon}_{(2,1,1,\dots,1)}(t_1, t_2, \dots) + 2 \operatorname{mon}_{(1,1,1,\dots,1)}(t_1, t_2, \dots) \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (2 + \sigma_1 - n) \operatorname{sgn}(\sigma) x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \cdots x_n^{\sigma_n}
\end{aligned}$$

Tableau 2.3 – Les polynômes indicateurs d'asymétrie de  $E_n^\pm$ ,  $n \leq 8$ 

$n$	$\Gamma_{E_n^\pm}(x_1, x_2, \dots)$
0	1
1	$x_1$
2	$x_1^2$
3	$\frac{2}{3!} (x_1^3 - x_3)$
4	$\frac{2}{4!} (x_1^4 - 4x_1x_3 - 3x_2^2 + 6x_4)$
5	$\frac{2}{5!} (x_1^5 - 10x_1^2x_3 - 15x_1x_2^2 + 30x_1x_4 + 30x_2x_3 - 36x_5)$
6	$\frac{2}{6!} (x_1^6 - 20x_1^3x_3 - 45x_1^2x_2^2 + 90x_1^2x_4 + 180x_1x_2x_3 - 216x_1x_5 + 30x_2^3 - 180x_2x_4 - 80x_3^2 + 240x_6)$
7	$\frac{2}{7!} (x_1^7 - 35x_1^4x_3 - 105x_1^3x_2^2 + 210x_1^3x_4 + 630x_1^2x_2x_3 - 756x_1^2x_5 + 210x_1x_2^3 - 1260x_1x_2x_4 - 560x_1x_3^2 + 1680x_1x_6 - 525x_2^2x_3 + 1260x_2x_5 + 1050x_3x_4 - 1800x_7)$
8	$\frac{2}{8!} (x_1^8 - 56x_1^5x_3 - 210x_1^4x_2^2 + 420x_1^4x_4 + 1680x_1^3x_2x_3 - 2016x_1^3x_5 + 840x_1^2x_2^3 - 5040x_1^2x_2x_4 - 2240x_1^2x_3^2 + 6720x_1^2x_6 - 4200x_1x_2^2x_3 + 10080x_1x_2x_5 + 8400x_1x_3x_4 - 14400x_1x_7 - 315x_2^4 + 3780x_2^2x_4 + 3360x_2x_3^2 - 10080x_2x_6 - 8064x_3x_5 - 3780x_4^2 + 15120x_8)$

où, pour  $k \geq 1$ ,  $x_k = \sum_{i \geq 1} t_i^k$ .

Dans [12] Décoste présente les substitutions simultanées  $\Delta : x_k := \frac{(1-q)^k}{1-q^k} x^k$ ,  $k \geq 1$ , dans la série indicatrice des cycles d'une espèce  $F$ , qui donnent un  $q$ -analogue naturel de la série génératrice de cette espèce. En effectuant ces substitutions dans les séries indicatrices des cycles et d'asymétrie de l'espèce des ensembles elle retrouve les deux  $q$ -analogues classiques de la fonction exponentielle [12, 13],

$$Z_E(x_1, x_2, \dots)|_{\Delta} := E(x; q) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{[n]!_q} \quad (2.8)$$

$$\Gamma_E(x_1, x_2, \dots)|_{\Delta} := E \langle x; q \rangle = \sum_{n \geq 0} q^{\binom{n}{2}} \frac{x^n}{[n]!_q} \quad (2.9)$$

où  $[n]!_q = \frac{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)}{(1-q)^n}$ . Décoste a aussi démontré que

$$Z_{E^{\pm}}(x_1, x_2, \dots)|_{\Delta} = E^{\pm}(x; q) = \sum_{n \geq 0} e_n^{\pm}(q) \frac{x^n}{[n]!_q}$$

où

$$e_n^{\pm}(q) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, 1 \\ 1 + q^{\binom{n}{2}} & \text{si } n \geq 2. \end{cases} \quad (2.10)$$

L'analogie de ce dernier résultat s'énonce comme suit dans le contexte asymétrique.

**Proposition 2.3.5.** *La  $q$ -série d'asymétrie de l'espèce  $E^{\pm}$  des ensembles orientés est donnée par*

$$\Gamma_{E^{\pm}}(x_1, x_2, \dots)|_{\Delta} := E^{\pm} \langle x; q \rangle = \sum_{n \geq 0} e_n^{\pm} \langle q \rangle \frac{x^n}{[n]!_q}$$

où,

$$e_n^{\pm} \langle q \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, 1 \\ q^{\binom{n-1}{2}} + q^{\binom{n-1}{2}+1} + \dots + q^{\binom{n}{2}-1} - (n-3)q^{\binom{n}{2}} & \text{si } n \geq 2. \end{cases} \quad (2.11)$$

*Démonstration.* Effectuant les substitutions  $\Delta : x_k := \frac{(1-q)^k}{1-q^k} x^k$ ,  $k \geq 1$ , dans la première expression de  $\Gamma_{E^{\pm}}(x_1, x_2, \dots)$  de la proposition 2.3.4 et se servant de l'égalité



(2.9) on obtient

$$\begin{aligned}
& \Gamma_{E^\pm}(x_1, x_2, \dots)|_\Delta \\
&= -1 - x + \left( 2 + \sum_{i \geq 2} (-1)^i \frac{(1-q)^i}{1-q^i} x^i \right) \sum_{j \geq 0} q^{\binom{j}{2}} \frac{x^j}{[j]!_q} \\
&= 1 + x + \sum_{n \geq 2} \left( 2q^{\binom{n}{2}} + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} (1-q)^k \frac{[n][n-1] \cdots [n-k]}{[k+1]} q^{\binom{n-k-1}{2}} \right) \frac{x^n}{[n]!_q}
\end{aligned}$$

où  $[n] = \frac{1-q^n}{1-q}$ . Il suffit maintenant de démontrer l'égalité

$$\begin{aligned}
2q^{\binom{n}{2}} + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} (1-q)^k \frac{[n][n-1] \cdots [n-k]}{[k+1]} q^{\binom{n-k-1}{2}} \\
= q^{\binom{n-1}{2}} + q^{\binom{n-1}{2}+1} + \cdots + q^{\binom{n}{2}-1} - (n-3)q^{\binom{n}{2}},
\end{aligned}$$

pour  $n \geq 2$ . En fait, nous démontrons l'égalité équivalente, obtenue par de simples manipulations algébriques,

$$nq^{\binom{n}{2}} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (1-q)^k \frac{[n][n-1] \cdots [n-k]}{[k+1]} q^{\binom{n-k-1}{2}}. \quad (2.12)$$

Notons d'abord que

$$\frac{[n]}{[k+1]} = 1 + q^{k+1} \frac{[n-k-1]}{[k+1]}, \quad 0 \leq k \leq n-1. \quad (2.13)$$

Par ailleurs, l'égalité

$$q^{\binom{n}{2}} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (1-q)^k [n-1][n-2] \cdots [n-k] q^{\binom{n-k-1}{2}}, \quad (2.14)$$

se démontre facilement par induction sur  $n$ ,  $n \geq 2$ .

En employant l'astuce (2.13), l'égalité (2.14) et ensuite un argument d'induction sur

$n$ , on obtient successivement

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (1-q)^k \frac{[n][n-1] \cdots [n-k]}{[k+1]} q^{\binom{n-k-1}{2}} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (1-q)^k [n-1][n-2] \cdots [n-k] q^{\binom{n-k-1}{2}} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k (1-q)^k \frac{[n-1][n-2] \cdots [n-k-1]}{[k+1]} q^{\binom{n-k-1}{2} + k + 1} \\
&= q^{\binom{n}{2}} + q^{n-1} \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k (1-q)^k \frac{[n-1][n-2] \cdots [n-k-1]}{[k+1]} q^{\binom{n-k-2}{2}} \\
&= q^{\binom{n}{2}} + q^{n-1} (n-1) q^{\binom{n-1}{2}} = n q^{\binom{n}{2}}.
\end{aligned}$$

■

Notons que c'est en utilisant le langage de calcul symbolique Maple [8] que nous avons d'abord conjecturé la forme explicite des  $e_n^\pm < q >$  que nous venons d'établir. On trouvera au tableau 2.4 les polynômes  $e_n^\pm < q >$  pour  $n \leq 10$ .

L'égalité

$$n q^{\binom{n}{2}} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (1-q)^k \frac{[n][n-1] \cdots [n-k]}{[k+1]} q^{\binom{n-k-1}{2}}$$

peut aussi être obtenue [57] de l'identité bien connue, voir [1] p. 225,

$$\prod_{i=0}^{n-1} (x - zq^i) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \prod_{j=0}^{k-1} (y - zq^j) \prod_{h=0}^{n-k-1} (x - yq^h),$$

où  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n]!_q}{[n-k]!_q [k]!_q}$ . On pose  $z = 0$  et  $y = 1$ ,

$$x^n = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (x-1)(x-q) \cdots (x - q^{n-k-1}).$$

On dérive des deux côtés par rapport à  $x$  et on pose  $x = 1$ ,

$$n = \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (1-q)(1-q^2) \cdots (1 - q^{n-k-1}).$$

Ensuite, par les changements de variables  $k := n - k - 1$  et  $q := q^{-1}$ ,

$$n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1}) \cdots (1-q^{n-k})}{1 - q^{k+1}} q^{-\frac{(2n-k)(k+1)}{2} + k + 1},$$

et une multiplication par  $q^{\binom{n}{2}}$ , on obtient finalement

$$\begin{aligned} nq^{\binom{n}{2}} &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1}) \cdots (1-q^{n-k})}{1-q^{k+1}} q^{\binom{n-k-1}{2}} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (1-q)^k \frac{[n][n-1] \cdots [n-k]}{[k+1]} q^{\binom{n-k-1}{2}}. \end{aligned}$$

Tableau 2.4 – Les  $q$ -coefficients d'asymétrie de  $E_n^\pm$ ,  $n \leq 10$

$n$	$e_n^\pm \langle q \rangle$
0	1
1	1
2	$1 + q$
3	$q + q^2$
4	$q^3 + q^4 + q^5 - q^6$
5	$q^6 + q^7 + q^8 + q^9 - 2q^{10}$
6	$q^{10} + q^{11} + q^{12} + q^{13} + q^{14} - 3q^{15}$
7	$q^{15} + q^{16} + q^{17} + q^{18} + q^{19} + q^{20} - 4q^{21}$
8	$q^{21} + q^{22} + q^{23} + q^{24} + q^{25} + q^{26} + q^{27} - 5q^{28}$
9	$q^{28} + q^{29} + q^{30} + q^{31} + q^{32} + q^{33} + q^{34} + q^{35} - 6q^{36}$
10	$q^{36} + q^{37} + q^{38} + q^{39} + q^{40} + q^{41} + q^{42} + q^{43} + q^{44} - 7q^{45}$

## 2.4 L'utilisation de l'inversion de Möbius dans le calcul des $\Phi$ -séries

Nous adaptons, aux contexte des espèces de structures, ce que Kerber [20] appelle le lemme fondamental dû à Stockmeyer [51]. Étant donnée une espèce moléculaire  $M = X^n/H$ ,  $H \leq \mathfrak{S}_n$ , et un sous-groupe  $K$  de  $\mathfrak{S}_n$ , ceci permet d'obtenir une expression pour la série

$$(M(X_{t_1} + X_{t_2} + X_{t_3} + \dots))^{\sim K} \quad (1)$$

en terme de la fonction de Möbius du treillis des sous-groupes de  $H$ .

Rappelons qu'une structure de l'espèce pondérée  $M_t := M(X_t) = M(X_{t_1} + X_{t_2} + \dots)$  sur  $\llbracket n \rrbracket$  est un couple  $(m, f)$  où  $m \in M[\llbracket n \rrbracket]$  et  $f : \llbracket n \rrbracket \rightarrow \mathbb{N}^*$  est une fonction qui permet d'associer à chacun des sommets  $i$  de  $m$  un poids  $t_{f(i)}$ ,

$$M_t[\llbracket n \rrbracket] = \{(m, f) \mid m \in M[\llbracket n \rrbracket], f : \llbracket n \rrbracket \rightarrow \mathbb{N}^*\}.$$

Fixons  $m \in M[\llbracket n \rrbracket]$  telle que  $\text{stab}(m) = H$  et formons l'ensemble

$$\Omega = \Omega_m = \{(m, f) \mid f : \llbracket n \rrbracket \rightarrow \mathbb{N}^*\}.$$

Considérons l'action de  $H$  sur  $\Omega$ ,

$$\begin{aligned} H \times \Omega &\longrightarrow \Omega \\ (h, s) &\longmapsto h.s, \end{aligned} \quad (2.15)$$

où  $h.s$  est obtenue de  $s = (m, f)$  en remplaçant chaque sommet  $i$  de  $m$  par l'élément correspondant  $h(i)$ . Puisque  $H = \text{stab}(m) \leq \mathfrak{S}_n$ , on vérifie facilement que l'action du groupe  $H$  sur  $\Omega$  se résume à

$$\begin{aligned} H \times \Omega &\longrightarrow \Omega \\ (h, (m, f) = s) &\longmapsto h.s = h.(m, f) = (m, f \circ h^{-1}), \end{aligned}$$

et que cette action préserve les poids. Puisque les types de  $M_t$ -structures s'identifient aux orbites de l'action (2.15), on oublie simplement la nature des sommets de l'ensemble sous-jacent, on peut écrire

$$\sum_{s \in \widetilde{M}_t[\llbracket n \rrbracket]} t_1^{n_1(s)} t_2^{n_2(s)} \dots = \sum_{s \in \widetilde{\Omega}} t_1^{n_1(s)} t_2^{n_2(s)} \dots \quad (2.16)$$

où  $s \in \tilde{\Omega}$  signifie que  $s$  parcourt un système de représentants des orbites de l'action (2.15) et, pour  $i \geq 1$ ,  $n_i(s)$  désigne le nombre d'occurrences du poids  $t_i$  dans  $s$ .

Dans [20], Kerber donne une démonstration simple du résultat de Stockmeyer [51]. Ce qui suit est une adaptation de cette dernière au contexte des espèces de structures.

**Lemme 2.4.1.** *Soient  $M = X^n/H$ ,  $H \leq \mathfrak{S}_n$ , une espèce moléculaire et  $\mu$  la fonction de Möbius sur le treillis des sous-groupes de  $H$ . Pour un sous-groupe  $Q$  de  $H$ , soit  $\overline{Q}^H$  sa classe de conjugaison dans  $H$ . On a*

$$\sum_{\substack{s \in \tilde{M}_t[[n]] \\ \text{stab}(s) \in \overline{Q}^H}} t_1^{n_1(s)} t_2^{n_2(s)} \dots = \frac{|Q| |\overline{Q}^H|}{|H|} \sum_{Q \leq V \leq H} \mu(Q, V) \sum_{\substack{s \in \Omega \\ V \leq \text{stab}(s)}} t_1^{n_1(s)} t_2^{n_2(s)} \dots \quad (2.17)$$

où  $\Omega = \{(m, f) \mid f : [[n]] \rightarrow \mathbb{N}^*\}$ ,  $m \in M[[n]]$  étant une  $M$ -structure fixée telle que  $\text{stab}(m) = H$ , et, pour  $i \geq 1$ ,  $n_i(s)$  désigne le nombre d'occurrences du poids  $t_i$  dans la structure  $s$ .

*Démonstration.* Posons  $w(s) = t_1^{n_1(s)} t_2^{n_2(s)} \dots$  et considérons la somme des poids de toutes les  $M_t$ -structures contenues dans  $\Omega$  dont le stabilisateur contient le groupe  $Q$ . En regroupant les termes de la somme selon le stabilisateur des structures, on a :

$$\sum_{\substack{s \in \Omega \\ Q \leq \text{stab}(s)}} w(s) = \sum_{Q \leq V \leq H} \sum_{\substack{s \in \Omega \\ \text{stab}(s) = V}} w(s). \quad (2.18)$$

Rappelons que pour deux groupes  $V_1$  et  $V_2$  conjugués dans  $H$ , il existe  $h \in H$  tel que  $V_1 = h^{-1}V_2h$ . De plus, si  $\text{stab}(s) = V_1$  alors  $\text{stab}(h.s) = hV_1h^{-1} = V_2$ . Puisque les éléments d'un même type (d'une même orbite) ont le même poids,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{s \in \Omega \\ \text{stab}(s) = V_1}} w(s) &= \sum_{\substack{s \in \Omega \\ \text{stab}(s) = V_1}} w(h.s) = \sum_{\substack{s \in \Omega \\ \text{stab}(s) = h^{-1}V_2h}} w(h.s) \\ &= \sum_{\substack{s \in \Omega \\ \text{stab}(h.s) = V_2}} w(h.s) = \sum_{\substack{s \in \Omega \\ \text{stab}(s) = V_2}} w(s), \end{aligned}$$

on peut regrouper les termes de l'expression (2.18) selon les classes de conjugaison de sous-groupes de  $H$  pour obtenir

$$\sum_{Q \leq V \leq H} \sum_{\substack{s \in \Omega \\ \text{stab}(s) = V}} w(s) = \sum_{Q \leq V \leq H} \frac{1}{|\overline{V}^H|} \sum_{\substack{s \in \Omega \\ \text{stab}(s) \in \overline{V}^H}} w(s).$$

Puisque le poids d'un type est le poids d'un de ses représentants, on peut effectuer un regroupement supplémentaire selon les types de  $M_t$ -structures contenues dans  $\Omega$ . Rappelant que le nombre de types (d'orbites) est donné par  $|H|/|\text{stab}(s)|$  on obtient finalement

$$\sum_{\substack{s \in \Omega \\ Q \leq \text{stab}(s)}} w(s) = \sum_{Q \leq V \leq H} \frac{|H|}{|\overline{V}^H| |V|} \sum_{\substack{s \in \tilde{\Omega} \\ \text{stab}(s) \in \overline{V}^H}} w(s)$$

et, par l'égalité (2.16) et l'inversion de Möbius, le résultat suit.  $\blacksquare$

**Proposition 2.4.2.** *Soient  $M = X^n/H$ ,  $H \leq \mathfrak{S}_n$ , une espèce moléculaire et  $K \leq \mathfrak{S}_n$  un groupe fixé. On a*

$$\widetilde{M}_t^K(x) \Big|_{x:=1} = \frac{1}{|H|} \sum_{Q \in \overline{K} \cap \text{sg}(H)} |Q| \sum_{Q \leq V \leq H} \mu(Q, V) \sum_{\substack{s \in \Omega \\ V \leq \text{stab}(s)}} t_1^{n_1(s)} t_2^{n_2(s)} t_3^{n_3(s)} \dots$$

où  $\overline{K}$  est la classe de conjugaison de  $K$  dans  $\mathfrak{S}_n$ ,  $\text{sg}(H)$  est l'ensemble des sous-groupes de  $H$ ,  $\mu(Q, V)$  est la valeur de la fonction de Möbius de l'intervalle  $[Q, V]$  dans le treillis des sous-groupes de  $H$  et  $\Omega = \{(m, f) \mid f : [n] \rightarrow \mathbb{N}^*\}$ ,  $m \in M[[n]]$  étant une  $M$ -structure fixée telle que  $\text{stab}(m) = H$ .

*Démonstration.* On s'intéresse à la somme des poids de tous les types de  $M_t$ -structures dont le stabilisateur est conjugué à  $K$  dans  $\mathfrak{S}_n$ , c.-à-d. :

$$\widetilde{M}_t^K(x) \Big|_{x:=1} = \sum_{\substack{s \in \overline{M}_t[[n]] \\ \text{stab}(s) \in \overline{K}}} t_1^{n_1(s)} t_2^{n_2(s)} t_3^{n_3(s)} \dots$$

Notons que celle-ci sera non nulle seulement si  $\overline{K} \cap \text{sg}(H) \neq \emptyset$ . De plus, l'ensemble  $\overline{K} \cap \text{sg}(H)$  se partitionne en  $k$  classes de conjugaison dans  $H$  :

$$\overline{K} \cap \text{sg}(H) = \biguplus_{i=1}^k \overline{Q}_i^H.$$

Ainsi,

$$\sum_{\substack{s \in \overline{M}_t[[n]] \\ \text{stab}(s) \in \overline{K}}} t_1^{n_1(s)} t_2^{n_2(s)} t_3^{n_3(s)} \dots = \sum_{Q \in \overline{K} \cap \text{sg}(H)} \frac{1}{|\overline{Q}^H|} \sum_{\substack{s \in \overline{M}_t[[n]] \\ \text{stab}(s) \in \overline{Q}^H}} t_1^{n_1(s)} t_2^{n_2(s)} \dots$$

Par (2.17), le résultat suit.  $\blacksquare$

**Proposition 2.4.3.** Soient  $M = X^n/H$ ,  $H \leq \mathfrak{S}_n$ , une espèce moléculaire et  $K \leq \mathfrak{S}_n$  un groupe fixé. On a

$$\widetilde{M}_t^K(x) \Big|_{x:=1} = \frac{1}{|H|} \sum_{Q \in \overline{K} \cap \text{sg}(H)} |Q| \sum_{Q \leq V \leq H} \mu(Q, V) x_1^{V_1} x_2^{V_2} x_3^{V_3} \dots \quad (2.19)$$

où, pour  $i \geq 1$ ,  $x_i = \sum_{k \geq 1} t_k^i$  et  $V_i$  désigne le nombre d'orbites à  $i$  éléments de l'action naturelle de  $V$  sur  $\llbracket n \rrbracket$ .

*Démonstration.* En vertu de la proposition précédente, il suffit de démontrer que

$$x_1^{V_1} x_2^{V_2} x_3^{V_3} \dots = \sum_{\substack{s \in \Omega \\ V \leq \text{stab}(s)}} t_1^{n_1(s)} t_2^{n_2(s)} t_3^{n_3(s)} \dots$$

Puisque  $V \leq \text{stab}(s) = \{h \in H \mid h.s = s\}$ , chaque orbite de l'action de  $V$  sur  $\llbracket n \rrbracket$  ne contient que des sommets de même poids d'où,

$$\sum_{\substack{s \in \Omega \\ V \leq \text{stab}(s)}} t_1^{n_1(s)} t_2^{n_2(s)} t_3^{n_3(s)} \dots = \left( \sum_{k \geq 1} t_k \right)^{V_1} \left( \sum_{k \geq 1} t_k^2 \right)^{V_2} \left( \sum_{k \geq 1} t_k^3 \right)^{V_3} \dots = x_1^{V_1} x_2^{V_2} x_3^{V_3} \dots$$

■

**Remarque 2.4.4.** Lorsque  $M = X^n/H$ ,  $H \leq \mathfrak{S}_n$ , est une espèce moléculaire et  $K \leq \mathfrak{S}_n$  est un groupe fixé, la série  $\widetilde{M}_t^K(x) \Big|_{x:=1}$  exprimée dans la base des sommes de puissances est en fait la  $\Phi$ -série indicatrice de l'espèce  $M$  où  $\hat{\Phi}$  est l'ensemble ne contenant que les groupes conjugués, dans  $\mathfrak{S}_n$ , au groupe  $K$ . □

Il est bien connu que la série indicatrice des cycles d'une espèce moléculaire  $M = X^n/H$ ,  $H \leq \mathfrak{S}_n$ , est donnée par

$$Z_M(x_1, x_2, x_3, \dots) = \frac{1}{|H|} \sum_{\sigma \in H} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} \dots \quad (2.20)$$

où  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots)$  désigne le type cyclique de la permutation  $\sigma$ . L'analogie s'énonce comme suit dans le contexte asymétrique.

**Proposition 2.4.5.** La série indicatrice d'asymétrie d'une espèce moléculaire  $M = X^n/H$ ,  $H \leq \mathfrak{S}_n$ , est donnée par

$$\Gamma_M(x_1, x_2, x_3, \dots) = \frac{1}{|H|} \sum_{V \leq H} \mu(\{id_n\}, V) x_1^{V_1} x_2^{V_2} x_3^{V_3} \dots \quad (2.21)$$

où  $\mu$  désigne la valeur de la fonction de Möbius dans le treillis des sous-groupes de  $H$  et, pour  $i \geq 1$ ,  $V_i$  est le nombre d'orbites à  $i$  éléments de l'action naturelle de  $V$  sur  $\llbracket n \rrbracket$ .

*Démonstration.* Puisque  $\Gamma_M(x_1, x_2, \dots) = \widetilde{M}_t^{\{id_n\}}(x) \Big|_{x:=1}$  exprimée dans la base des sommes de puissances, en posant  $K = \{id_n\}$  dans (2.19), le résultat suit. ■

Rappelons que le polynôme (2.20) est en fait le polynôme indicateur de cycles de l'action du groupe  $H$  sur l'ensemble  $\llbracket n \rrbracket$  bien connu de la théorie de Pólya-Redfield. De même, (2.21) correspond à un cas particulier du résultat dû à Stockmeyer [51] concernant l'énumération d'orbites suivant les classes de conjugaison des stabilisateurs. De plus, l'expression (2.21) permet de démontrer facilement l'égalité  $\Gamma_F(x, 0, 0, \dots) = F(x)$  quelle que soit l'espèce pondérée  $F = F_w$ . En effet, pour  $M = X^n/H$ ,  $H \leq \mathfrak{S}_n$ , une espèce moléculaire, on a

$$\Gamma_M(x, 0, 0, \dots) = \frac{1}{|H|} \sum_{V \leq H} \mu(\{id_n\}, V) x^{V_1} 0^{V_2} 0^{V_3} \dots$$

d'où

$$\Gamma_M(x, 0, 0, \dots) = \frac{1}{|H|} x^n = M(x)$$

et, par linéarité,  $\Gamma_F(x, 0, 0, \dots) = F(x)$ . En fait, l'expression (2.19) permet de démontrer la proposition 2.2.2 donnant les conditions à imposer à  $\Phi$  pour que  $\Phi_F(x, 0, 0, \dots) = F(x)$ , quelle que soit l'espèce pondérée  $F = F_w$ .

**Exemple 2.4.6.** Afin d'illustrer l'emploi de l'expression (2.21) nous calculons la série indicatrice d'asymétrie de l'espèce moléculaire  $E_4^\pm$ . Celle-ci correspond au quotient  $E_4^\pm = X^4/\mathfrak{A}_4$  où  $\mathfrak{A}_4$  est le sous-groupe des permutations paires de  $\mathfrak{S}_4$ . Le treillis des sous-groupes de  $\mathfrak{A}_4$  est donné à la figure 2.1 où la valeur de la fonction de Möbius, pour chacun des éléments du treillis, est indiquée entre parenthèses. La notation utilisée à travers le texte pour les éléments de  $\mathfrak{S}_4$  est celle de [3] : sous forme de mots,  $id_4 = 1234$ ,  $\sigma_1 = 2341$ ,  $\sigma_2 = 3412$ ,  $\sigma_3 = 4123$ ,  $\sigma_5 = 4321$ ,  $\sigma_8 = 2143$ ,  $\tau_1 = 1342$ ,  $\tau_2 = 1423$ ,  $\tau_3 = 3241$ ,  $\tau_4 = 4213$ ,  $\tau_5 = 2431$ ,  $\tau_6 = 4132$ ,  $\tau_7 = 2314$ ,  $\tau_8 = 3124$ ,  $\alpha_2 = 3214$  et  $\alpha_5 = 1432$ .



Les éléments de calcul sont fournis au tableau 2.5, et

$$\begin{aligned}
\Gamma_{E_4^\pm}(x_1, x_2, x_3, \dots) &= \frac{1}{12} \sum_{V \leq \mathfrak{A}_4} \mu(\{id_4\}, V) x_1^{V_1} x_2^{V_2} x_3^{V_3} \dots \\
&= \frac{1}{12} \{x_1^4 - 3x_2^2 - 4x_1x_3 + 2x_4 + 4x_4\} \\
&= \frac{1}{12} \{x_1^4 - 4x_1x_3 - 3x_2^2 + 6x_4\} .
\end{aligned}$$

◇

Tableau 2.5 – Les éléments de calculs pour  $\Gamma_{E_4^\pm}(x_1, x_2, \dots)$

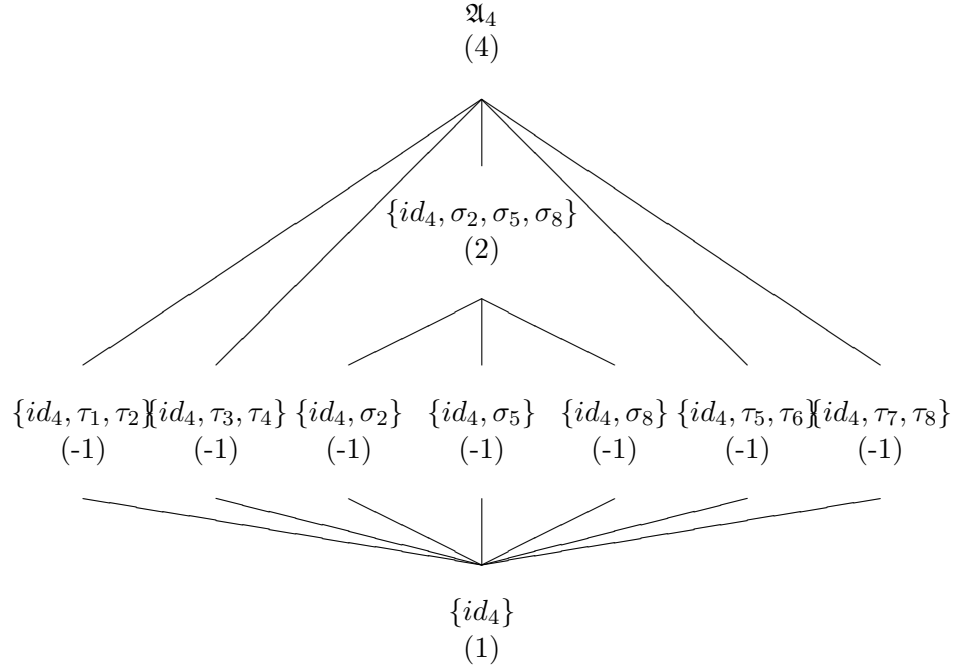
$V$	$\mu(\{id_4\}, V)$	$x_1^{V_1} x_2^{V_2} x_3^{V_3} \dots$
$\{id_4\}$	1	$x_1^4$
$\{id_4, \sigma_i\}$ $i = 2, 5, 8$	-1	$x_2^2$
$\{id_4, \tau_i, \tau_{i+1}\}$ $i = 1, 3, 5, 7$	-1	$x_1x_3$
$\{id_4, \sigma_2, \sigma_5, \sigma_8\}$	2	$x_4$
$\mathfrak{A}_4$	4	$x_4$

Rappelons qu'on s'intéresse à l'énumération des structures selon la classe de conjugaison de leur stabilisateur dans le *groupe symétrique*. La notation qui suit fournit une alternative élégante au codage des classes de conjugaison. Notons que nous l'avons utilisée dans [27].

**Notations 2.4.7.** Soient  $M = X^n/H$ ,  $H \leq \mathfrak{S}_n$ , et  $N = X^n/K$ ,  $K \leq \mathfrak{S}_n$ , deux espèces moléculaires. On désigne par  $N_M(x_1, x_2, \dots)$  la série  $\widetilde{M}_t^K(x) \Big|_{x_i=1}$  exprimée dans la base des sommes de puissances  $x_i = \sum_{k \geq 1} t_k^i$ .

**Exemple 2.4.8.** Nous illustrons le type de calcul à effectuer pour obtenir le polynôme  $N_M(x_1, x_2, \dots)$  lorsque  $N$  et  $M$  sont des espèces moléculaires en calculant

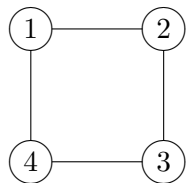
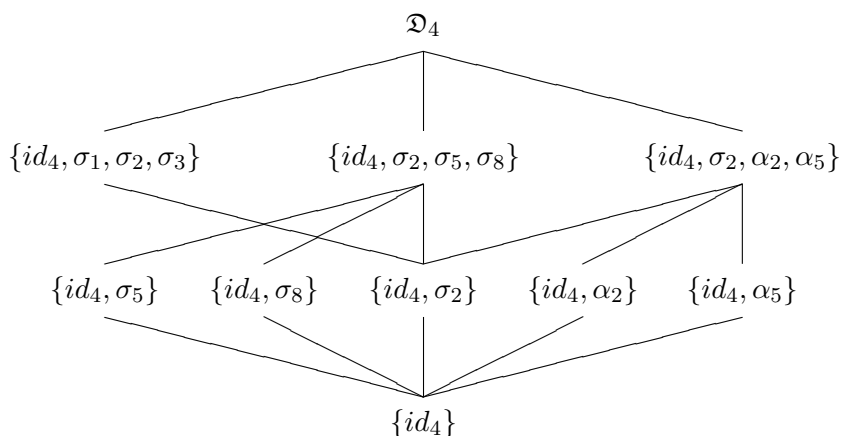
$$(E_2 \circ X^2)_{P_4}(x_1, x_2, \dots)$$

FIGURE 2.1 – Le treillis des sous-groupes de  $\mathfrak{A}_4$ .

où  $P_4$  est l'espèce des polygones sur 4 points et  $E_2 \circ X^2$  celle des paires de couples ordonnés.

Soit  $m$  la  $P_4$ -structure sur l'ensemble  $\llbracket 4 \rrbracket$  illustrée à la figure 2.2. Le stabilisateur de  $m$  est  $\text{stab}(m) = \{id_4, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_5, \sigma_8, \alpha_2, \alpha_5\} = \mathfrak{D}_4$ , le groupe diédral sur 4 points, dont le treillis des sous-groupes est illustré à la figure 2.3. Le stabilisateur de la  $E_2 \circ X^2$ -structure (voir la figure 2.4) est  $K = \{id_4, \sigma_5\}$  et sa classe de conjugaison dans  $\mathfrak{S}_4$  est  $\overline{K} = \{\{id_4, \sigma_i\} \mid i = 2, 5, 8\}$ . Les sous-groupes  $\{id_4, \sigma_2\}$ ,  $\{id_4, \sigma_5\}$ ,  $\{id_4, \sigma_8\}$  sont conjugués dans  $\mathfrak{S}_4$  mais ne le sont pas dans  $\mathfrak{D}_4$  :  $\overline{\{id_4, \sigma_2\}}^{\mathfrak{D}_4} = \{\{id_4, \sigma_2\}\}$  et  $\overline{\{id_4, \sigma_5\}}^{\mathfrak{D}_4} = \{\{id_4, \sigma_5\}, \{id_4, \sigma_8\}\}$ . On a :

$$\begin{aligned}
& (E_2 \circ X^2)_{P_4}(x_1, x_2, \dots) \\
&= \frac{1}{8} \sum_{Q \in \{\{id_4, \sigma_i\} \mid i=2,5,8\}} 2 \sum_{Q \leq V \leq \mathfrak{D}_4} \mu(Q, V) x_1^{V_1} x_2^{V_2} \dots \\
&= \frac{2}{8} \sum_{\{id_4, \sigma_2\} \leq V \leq \mathfrak{D}_4} \mu(\{id_4, \sigma_2\}, V) x_1^{V_1} x_2^{V_2} \dots + \frac{2 \cdot 2}{8} \sum_{\{id_4, \sigma_5\} \leq V \leq \mathfrak{D}_4} \mu(\{id_4, \sigma_5\}, V) x_1^{V_1} x_2^{V_2} \dots \\
&= \frac{1}{8} (2 \cdot 0 + 4(x_2^2 - x_4)) = \frac{1}{2} (x_2^2 - x_4) .
\end{aligned}$$

FIGURE 2.2 – Une  $P_4$ -structure sur  $\llbracket 4 \rrbracket$ .FIGURE 2.3 – Le treillis des sous-groupes de  $\mathfrak{D}_4$ .

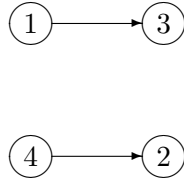
Pour obtenir la série indicatrice des cycles d'une espèce moléculaire  $M$ , on doit faire la somme des poids de tous les types de  $M_t$ -structures. En prenant la notation décrite ci-dessus, cela signifie que

$$Z_M(x_1, x_2, \dots) = \sum_{N \in \mathcal{M}_n} N_M(x_1, x_2, \dots).$$

Cette expression est beaucoup plus laborieuse à évaluer que l'expression (2.20) mais on s'y intéresse tout de même par souci d'uniformité.

**Exemple 2.4.9.** La série indicatrice des cycles de l'espèce  $E_4^\pm$  est

$$Z_{E_4^\pm}(x_1, x_2, x_3, \dots) = \sum_{N \in \mathcal{M}_4} N_{E_4^\pm}(x_1, x_2, x_3, \dots) \quad (2.22)$$

FIGURE 2.4 – Une  $E_2 \circ X^2$ -structure sur  $\llbracket 4 \rrbracket$ .

où  $\mathcal{M}_4 = \{E_4, E_4^\pm, P_4, X \cdot E_3, E_2^2, P_4^{bic}, C_4, X \cdot C_3, X^2 \cdot E_2, E_2 \circ X^2, X^4\}$ . Le tableau 2.6 contient les polynômes  $N_{E_4^\pm}(x_1, x_2, \dots)$  non nuls. En effectuant la somme (2.22), on obtient

$$Z_{E_4^\pm}(x_1, x_2, x_3, \dots) = \frac{1}{12}(x_1^4 + 8x_1x_3 + 3x_2^2).$$

◇

Tableau 2.6 – Les éléments de calculs pour  $Z_{E_4^\pm}(x_1, x_2, \dots)$ 

$N$	$N_{E_4^\pm}(x_1, x_2, x_3, \dots)$
$E_4^\pm$	$x_4$
$X \cdot C_3$	$x_1x_3 - x_4$
$E_2 \circ X^2$	$\frac{1}{2}(x_2^2 - x_4)$
$X^4$	$\frac{1}{12}(x_1^4 - 4x_1x_3 - 3x_2^2 + 6x_4)$

**Remarque 2.4.10.** Kerber nous a signalé que les calculs effectués aux exemples 2.4.6, 2.4.8 et 2.4.9 sont largement simplifiés par l'utilisation de la matrice de Burnside, voir [21], puisque celles-ci sont connues explicitement pour les groupes  $\mathfrak{D}_4$  et  $\mathfrak{A}_4$ . Notons que les résultats de Burnside [7] étaient plutôt en terme de la matrice des marques (*table of marks*), inverse de la matrice de Burnside. Soient  $H$  et  $K$  deux sous-groupes de  $\mathfrak{S}_n$ . Rappelons que  $\overline{K} \cap sg(H)$  se partitionne en  $k$  classes de conjugaison dans  $H$  :

$$\overline{K} \cap sg(H) = \bigsqcup_{i=1}^k \overline{Q_i}^H$$

et que la somme

$$\sum_{Q \leq V \leq H} \mu(Q, V) x_1^{V_1} x_2^{V_2} \dots$$

ne dépend que de la classe de conjugaison de  $Q$  dans  $H$ . L'égalité (2.19) se présente donc, pour  $M = X^n/H$ ,  $H \leq \mathfrak{S}_n$ , et  $N = X^n/K$ ,  $K \leq \mathfrak{S}_n$ , sous la forme

$$N_M(x_1, x_2, \dots) = \sum_{i=1}^k \frac{|Q_i| |\overline{Q_i}^H|}{|H|} \sum_{Q_i \leq V \leq H} \mu(Q_i, V) x_1^{V_1} x_2^{V_2} \dots$$

où pour  $i \geq 1$ ,  $V_i$  est le nombre d'orbites à  $i$  éléments de l'action naturelle de  $V$  sur  $\llbracket n \rrbracket$ . Pour  $i \geq 1$  fixé, l'expression

$$\frac{|Q_i| |\overline{Q_i}^H|}{|H|} \sum_{Q_i \leq V \leq H} \mu(Q_i, V) x_1^{V_1} x_2^{V_2} \dots \quad (2.23)$$

s'obtient à l'aide de la matrice de Burnside,  $B(H)$ , du groupe  $H$ .

On suppose d'abord que les groupes  $Q_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , représentant les classes de conjugaison des sous-groupes de  $H$  sont numérotés de façon à ce que l'ordre partiel d'inclusion dans le treillis des sous-groupes de  $H$  soit préservé c.-à-d. : si  $G_1 \in \overline{Q_i}^H$  et  $G_2 \in \overline{Q_j}^H$  sont tels que  $G_1 \leq G_2$  alors  $i \leq j$ . La matrice de Burnside du groupe  $H$  est formée des entrées

$$b_{ij} = \frac{|Q_i| |\overline{Q_i}^H|}{|H|} \sum_{V \in \overline{Q_j}^H} \mu(Q_i, V).$$

Tous les groupes  $V \in \overline{Q_j}^H$  agissent de la même façon sur l'ensemble  $\llbracket n \rrbracket$ . Le monôme  $x_1^{V_1} x_2^{V_2} \dots$  ne dépend donc que de la classe de conjugaison de  $V$  dans  $H$ .

Soit  $\mathbf{X}$  le vecteur colonne formé des monômes  $x_1^{V_1} x_2^{V_2} \dots$ , où, pour  $k \geq 1$ ,  $V_k$  désigne le nombre d'orbites à  $k$  éléments de l'action naturelle du groupe  $Q_i$  sur  $\llbracket n \rrbracket$ . Pour  $Q_i$  fixé, l'expression

$$\frac{|Q_i| |\overline{Q_i}^H|}{|H|} \sum_{Q_i \leq V \leq H} \mu(Q_i, V) x_1^{V_1} x_2^{V_2} \dots$$

est obtenue en effectuant le produit de la  $i$ -ème ligne de  $B(H)$  par le vecteur  $\mathbf{X}$ . Pour de plus amples détails, voir [21].  $\square$

**Exemple 2.4.11.** Nous reprenons l'exemple 2.4.8 mais cette fois-ci, nous calculons  $(E_2 \circ X^2)_{P_4}(x_1, x_2, \dots)$  à l'aide de la matrice de Burnside,  $B(\mathfrak{D}_4)$ , pour le groupe

diédral. Nous utilisons la même numérotation que Kerber [21] pour le système de représentants des classes de conjugaison de sous-groupes de  $\mathfrak{D}_4$ .

$i$	$V = Q_i$	$x_1^{V_1} x_2^{V_2} \dots$	$i$	$V = Q_i$	$x_1^{V_1} x_2^{V_2} \dots$
1	$\{id_4\}$	$x_1^4$	2	$\{id_4, \sigma_2\}$	$x_2^2$
3	$\{id_4, \sigma_5\}$	$x_2^2$	4	$\{id_4, \alpha_2\}$	$x_1^2 x_2$
5	$\{id_4, \sigma_2, \sigma_5, \sigma_8\}$	$x_4$	6	$\{id_4, \sigma_2, \alpha_2, \alpha_5\}$	$x_2^2$
7	$\{id_4, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$	$x_4$	8	$\mathfrak{D}_4$	$x_4$

Puisque  $B(\mathfrak{D}_4)$  est

$$\begin{pmatrix} 1/8 & -1/8 & -1/4 & -1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 & -1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on trouve le vecteur suivant.

$$B(\mathfrak{D}_4)\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}x_1^4 - \frac{1}{4}x_1^2x_2 - \frac{1}{8}x_2^2 + \frac{1}{4}x_4 \\ 0 \\ \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}x_4 \\ \frac{1}{2}x_1^2x_2 - \frac{1}{2}x_2^2 \\ 0 \\ \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}x_4 \\ 0 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Les groupes  $Q_2$  et  $Q_3$  sont conjugués dans  $\mathfrak{S}_4$  et correspondent tous les deux à l'espèce  $E_2 \circ X^2$ , c.-à-d. :  $X^4/Q_2 = X^4/Q_3 = E_2 \circ X^2$ . On doit donc faire la somme de la deuxième et de la troisième composante de  $B(\mathfrak{D}_4)\mathbf{X}$  pour obtenir

$$(E_2 \circ X^2)_{P_4}(x_1, x_2, \dots) = (B(\mathfrak{D}_4)\mathbf{X})_{21} + (B(\mathfrak{D}_4)\mathbf{X})_{31} = \frac{1}{2}(x_2^2 - x_4).$$

En fait, le vecteur  $B(\mathfrak{D}_4)\mathbf{X}$  contient toute l'information nécessaire au calcul des polynômes  $N_{P_4}(x_1, x_2, \dots)$  pour  $N \in \mathcal{M}_4$ .  $\diamond$

Les différents polynômes  $N_M(x_1, x_2, x_3, x_4)$  obtenus à partir des espèces moléculaires sur 4 points sont donnés à l'appendice B. On remarque que ces polynômes coïncident avec ceux qui ont été présentés au tableau 2.2, où les classes des conjugaison de sous-groupes de  $\mathfrak{S}_4$  sont maintenant codées par les espèces moléculaires. En effectuant la somme des éléments d'une colonne on retrouve la série indicatrice des cycles et à la dernière ligne, la série indicatrice d'asymétrie. De plus, les éléments de la diagonale ( $N_N(x_1, x_2, \dots)$ ) reflètent le critère de réductibilité de Yeh [54] concernant les espèces moléculaires qui ne sont pas atomiques. Pour une espèce moléculaire  $N$ ,  $N_N(x_1, x_2, x_3, \dots) \neq x_n$  si et seulement s'il existe un ensemble non vide  $W \subset \llbracket n \rrbracket$  qui satisfait la première condition du critère de Yeh. Une espèce atomique peut satisfaire la première condition du critère sans toutefois en satisfaire la deuxième, par exemple : prendre l'ensemble  $W \in \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$  pour la  $E_2 \circ X^2$ -structure de la figure 2.4.

Nous terminons cette section en donnant une généralisation des notations 2.4.7 telle que nous l'avons utilisée dans [27]. Lorsque l'espèce  $M = X^n/H$ ,  $H \leq \mathfrak{S}_n$ , est  $\mathbb{A}$ -pondérée, c.-à-d. :  $M = M_a$  où chaque  $M$ -structure est de poids  $a \in \mathbb{A}$ , on a, pour  $K \leq \mathfrak{S}_n$  un groupe fixé,

$$\widetilde{M}_{a,t}^K(x) = a \widetilde{M}_t^K(x)$$

et, pour  $N = X^n/K$ ,  $N_{M_a}(x_1, x_2, \dots) = a N_M(x_1, x_2, \dots)$ .

La correspondance entre les classes de conjugaison de sous-groupes, dans  $\mathfrak{S}_n$ , et les espèces moléculaires permet de coder tout ensemble  $\Phi \subseteq \{K \in cc(\mathfrak{S}_n) \mid n \geq 0\}$ , de groupes non conjugués deux à deux, par une espèce  $G$  :

$$G = \sum_{N \in \text{mol}(\Phi)} N = \sum_{N \in \mathcal{M}} g_N N$$

où  $g_N = \chi(N \in \text{mol}(\Phi))$ . Puisque toute espèce  $\mathbb{A}$ -pondérée  $F = F_w$  possède une décomposition moléculaire unique, à isomorphisme naturel près,

$$F = \sum_{\substack{M \in \mathcal{M} \\ a \in \mathbb{A}}} f_{M_a} M_a$$

et que la transformation  $F \mapsto \Phi_F$  préserve la somme, on peut facilement étendre la notation précédente pour écrire  $\Phi_F(x_1, x_2, \dots) = G_F(x_1, x_2, \dots)$  où

$$G_F(x_1, x_2, \dots) = \sum_{\substack{N, M \in \mathcal{M} \\ a \in \mathbb{A}}} g_N f_{M_a} N_{M_a}(x_1, x_2, \dots).$$

En particulier, on a

$$\Gamma_F(x_1, x_2, \dots) = L_F(x_1, x_2, \dots)$$

où  $L$  désigne l'espèce des ordres linéaires et

$$Z_F(x_1, x_2, \dots) = \left( \sum_{N \in \mathcal{M}} N \right)_F (x_1, x_2, \dots).$$

De plus, on vérifie facilement que pour trois espèces ordinaires  $G_1, G_2, G$  codant des ensembles de groupes et trois espèces pondérées  $F_1, F_2, F$ , on a, pour  $\alpha \in \mathbb{N}$ ,

- 1)  $(G_1 + G_2)_F(x_1, x_2, x_3, \dots) = G_{1_F}(x_1, x_2, x_3, \dots) + G_{2_F}(x_1, x_2, x_3, \dots)$
- 2)  $G_{(F_1+F_2)}(x_1, x_2, x_3, \dots) = G_{F_1}(x_1, x_2, x_3, \dots) + G_{F_2}(x_1, x_2, x_3, \dots)$
- 3)  $(\alpha G)_F(x_1, x_2, x_3, \dots) = \alpha G_F(x_1, x_2, x_3, \dots)$
- 4)  $G_{\alpha F}(x_1, x_2, x_3, \dots) = \alpha G_F(x_1, x_2, x_3, \dots)$ .

## 2.5 Quelques identités où intervient la fonction de Möbius

Les deux approches présentées dans ce chapitre pour le calcul des séries  $\widetilde{M}_t^K(x) \Big|_{x:=1}$  lorsque  $M = X^n/H$ ,  $H \leq \mathfrak{S}_n$ , est une espèce moléculaire et  $K$  est un sous-groupe de  $\mathfrak{S}_n$ , permettent d'obtenir des identités qui font intervenir la valeur de la fonction de Möbius dans des treillis de sous-groupes. En particulier, comme conséquence des propositions 2.1.6, 2.4.2 et 2.4.3 on obtient les égalités

$$\left( \frac{X^n}{H} \right)_t^{\sim K} (x) \Big|_{x:=1} = \sum_{\lambda \vdash n} T_\lambda(H, K) \text{mon}_\lambda(t_1, t_2, \dots) \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{|H|} \sum_{Q \in \overline{K} \cap \text{sg}(H)} |Q| \sum_{Q \leq V \leq H} \mu(Q, V) \sum_{\substack{s \in \Omega \\ V \leq \text{stab}(s)}} t_1^{n_1(s)} t_2^{n_2(s)} \dots \\ &= \frac{1}{|H|} \sum_{Q \in \overline{K} \cap \text{sg}(H)} |Q| \sum_{Q \leq V \leq H} \mu(Q, V) x_1^{V_1} x_2^{V_2} \dots \end{aligned} \quad (2.25)$$



où  $T_\lambda(H, K) = |\{\tau \in \mathfrak{S}_\lambda \setminus \mathfrak{S}_n/H \mid (\tau H \tau^{-1}) \cap \mathfrak{S}_\lambda \equiv K\}|$ ,  $\Omega = \{(m, f) \mid f : \llbracket n \rrbracket \rightarrow \mathbb{N}^*\}$ , pour  $m \in \frac{X^n}{H} \llbracket n \rrbracket$  fixée telle que  $\text{stab}(m) = H$ ,  $n_i(s)$  est le nombre d'occurrences du poids  $t_i$  dans  $s$ , pour  $k \geq 1$ ,  $x_k = \sum_{i \geq 1} t_i^k$  et, pour  $i \geq 1$ ,  $V_i$  est le nombre d'orbites à  $i$  éléments de l'action naturelle de  $V$  sur  $\llbracket n \rrbracket$ .

En utilisant la notation multiplicative pour les partages, c.-à-d. :  $\sigma = (1^{\sigma_1} 2^{\sigma_2} \dots) \vdash n$  signifie que  $\sigma$  a  $\sigma_i$  parts de longueur  $i$ ,  $i \geq 1$ , et l'expression (2.6) où  $\hat{\Phi} = \bar{K}$ , des égalités précédentes on obtient, par passage aux sommes de puissances,

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma \vdash n} \left( \sum_{\lambda \vdash n} (-1)^{\ell(\lambda) + \ell(\sigma)} A_{\sigma\lambda} T_\lambda(H, K) \right) \frac{x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots}{\text{aut}(\sigma)} \\ &= \frac{1}{|H|} \sum_{Q \in \bar{K} \cap \text{sg}(H)} |Q| \sum_{\substack{Q \leq V \leq H \\ V \text{ de type } \sigma}} \mu(Q, V) x_1^{V_1} x_2^{V_2} \dots \end{aligned}$$

où  $\text{aut}(\sigma) = 1^{\sigma_1} \sigma_1! 2^{\sigma_2} \sigma_2! \dots$  et  $\ell(\sigma) = \sum_i \sigma_i$ .

Nous dirons qu'un groupe  $V \leq \mathfrak{S}_n$  est de type  $\sigma \vdash n$  si l'action naturelle de  $V$  sur  $\llbracket n \rrbracket$  a, pour  $i \geq 1$ ,  $\sigma_i$  orbites de longueur  $i$ . Ainsi, en regroupant les termes du côté droit de la dernière égalité selon le type des groupes on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma \vdash n} \left( \sum_{\lambda \vdash n} (-1)^{\ell(\lambda) + \ell(\sigma)} A_{\sigma\lambda} T_\lambda(H, K) \right) \frac{x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots}{\text{aut}(\sigma)} \\ &= \sum_{\sigma \vdash n} \left( \frac{1}{|H|} \sum_{Q \in \bar{K} \cap \text{sg}(H)} |Q| \sum_{\substack{Q \leq V \leq H \\ V \text{ de type } \sigma}} \mu(Q, V) \right) x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots \end{aligned}$$

et on en tire la famille d'identités suivantes.

**Proposition 2.5.1.** *Pour tout partage  $\sigma \vdash n$  et tous groupes  $H \leq \mathfrak{S}_n$ ,  $K \leq \mathfrak{S}_n$ , on a*

$$\frac{1}{\text{aut}(\sigma)} \sum_{\lambda \vdash n} (-1)^{\ell(\lambda) + \ell(\sigma)} A_{\sigma\lambda} T_\lambda(H, K) = \frac{1}{|H|} \sum_{Q \in \bar{K} \cap \text{sg}(H)} |Q| \sum_{\substack{Q \leq V \leq H \\ V \text{ de type } \sigma}} \mu(Q, V)$$

où l'interprétation des coefficients de la matrice  $A$  est donnée à la section 2.2.  $\triangle$

En particulier, lorsque  $K = \{id_n\}$ , on a

$$\begin{aligned} [x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots] \Gamma_{X^n/H}(x_1, x_2, \dots) &= \frac{1}{\text{aut}(\sigma)} \sum_{\lambda \vdash n} (-1)^{\ell(\lambda) + \ell(\sigma)} A_{\sigma\lambda} T_\lambda(H, \{id_n\}) \\ &= \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{V \leq H \\ V \text{ de type } \sigma}} \mu(\{id_n\}, V). \end{aligned}$$

Il est donc possible d'obtenir des familles d'identités entre les valeurs de la fonction de Möbius lorsque l'on possède une expression explicite pour les coefficients d'une série indicatrice (calculée indépendamment de l'inversion de Möbius). Illustrons ce fait en faisant appel à l'espèce  $E_n = X^n/\mathfrak{S}_n$ , des ensembles de cardinal  $n$ , et l'espèce  $E_n^\pm = X^n/\mathfrak{A}_n$ , des ensembles orientés de cardinal  $n$ .

**Corollaire 2.5.2.** *Pour tout  $\sigma \vdash n \geq 0$ , on a l'identité*

$$\frac{\text{sgn}(\sigma)}{\text{aut}(\sigma)} = \frac{1}{n!} \sum_{\substack{V \leq \mathfrak{S}_n \\ V \text{ de type } \sigma}} \mu(\{id_n\}, V).$$

*Démonstration.* On sait d'une part que la série indicatrice d'asymétrie de l'espèce  $E_n$  des ensembles à  $n$  éléments est

$$\Gamma_{E_n}(x_1, x_2, x_3, \dots) = \sum_{\sigma \vdash n} \text{sgn}(\sigma) \frac{x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} \dots}{\text{aut}(\sigma)} \quad (2.26)$$

où  $\sigma$  parcourt les partages de l'entier  $n$ ,  $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{n - \sum \sigma_i} = (-1)^{\sum \sigma_{2k}}$  et  $\text{aut}(\sigma) = 1^{\sigma_1} \sigma_1! 2^{\sigma_2} \sigma_2! \dots$ .

D'autre part, en posant  $M = E_n = X^n/\mathfrak{S}_n$  dans (2.21), on obtient une deuxième expression pour cette série,

$$\begin{aligned} \Gamma_{E_n}(x_1, x_2, x_3, \dots) &= \frac{1}{n!} \sum_{V \leq \mathfrak{S}_n} \mu(\{id_n\}, V) x_1^{V_1} x_2^{V_2} x_3^{V_3} \dots \\ &= \sum_{\sigma \vdash n} \left( \frac{1}{n!} \sum_{\substack{V \leq \mathfrak{S}_n \\ V \text{ de type } \sigma}} \mu(\{id_n\}, V) \right) x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots \end{aligned}$$

Par identification des coefficients de  $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots$ , le résultat suit. ■

En particulier, pour  $\sigma = (n)$ , on obtient un résultat bien connu [48] concernant les valeurs de la fonction de Möbius dans le treillis des sous-groupes de  $\mathfrak{S}_n$  :

$$\sum_{\substack{V \leq \mathfrak{S}_n \\ V \text{ transitif}}} \mu(\{id_n\}, V) = (-1)^{n-1} (n-1)!. \quad (2.27)$$

**Corollaire 2.5.3.** *Pour tout  $\sigma \vdash n \geq 2$ , on a l'identité*

$$(2 + \sigma_1 - n) \frac{\text{sgn}(\sigma)}{\text{aut}(\sigma)} = \frac{2}{n!} \sum_{\substack{V \leq \mathfrak{A}_n \\ V \text{ de type } \sigma}} \mu(\{id_n\}, V).$$

*Démonstration.* Nous avons trouvé à la section 2.3, que la série indicatrice d'asymétrie de l'espèce  $E_n^\pm$  des ensembles orientés à  $n$  éléments est donnée par

$$\Gamma_{E_n^\pm}(x_1, x_2, x_3, \dots) = \sum_{\sigma \vdash n} (2 + \sigma_1 - n) \operatorname{sgn}(\sigma) \frac{x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} \dots}{\operatorname{aut}(\sigma)}, \quad n \geq 2.$$

De plus, en posant  $M = E_n^\pm = X^n/\mathfrak{A}_n$  dans (2.21),  $n \geq 2$ , on a

$$\begin{aligned} \Gamma_{E_n^\pm}(x_1, x_2, x_3, \dots) &= \frac{2}{n!} \sum_{V \leq \mathfrak{A}_n} \mu(\{id_n\}, V) x_1^{V_1} x_2^{V_2} x_3^{V_3} \dots \\ &= \sum_{\sigma \vdash n} \left( \frac{2}{n!} \sum_{\substack{V \leq \mathfrak{A}_n \\ V \text{ de type } \sigma}} \mu(\{id_n\}, V) \right) x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots \end{aligned}$$

Par identification des coefficients de  $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots$ , le résultat suit. ■

En particulier, pour  $\sigma = (n)$ , on obtient

$$\sum_{\substack{V \leq \mathfrak{A}_n \\ V \text{ transitif}}} \mu(\{id_n\}, V) = (-1)^{n-1} \left(1 - \frac{n}{2}\right) (n-1)!, \quad n \geq 2, \quad (2.28)$$

qui est un résultat analogue à (2.27) pour le groupe  $\mathfrak{A}_n$ .

Un résultat intéressant apparaît lorsqu'on soustrait (2.28) de (2.27) :

$$\sum_{\substack{V \leq \mathfrak{S}_n \\ V \text{ transitif}}} \mu(\{id_n\}, V) - \sum_{\substack{V \leq \mathfrak{A}_n \\ V \text{ transitif}}} \mu(\{id_n\}, V) = (-1)^{n-1} \frac{n!}{2}, \quad n \geq 2. \quad (2.29)$$

Ce coefficient est conjecturé (dans [48], p. 166 exercice 53c) comme la valeur de la fonction de Möbius du groupe symétrique.

Rappelons que dans [12], Décoste présente les substitutions simultanées

$$\Delta : x_k := \frac{(1-q)^k}{1-q^k} x^k, \quad k \geq 1$$

dans les séries indicatrices d'une espèce pondérée  $F = F_w$  :

$$F(x; q) = \sum_{n \geq 0} |F[[n]]|_q \frac{x^n}{[n]!_q} := Z_F(x_1, x_2, \dots)|_\Delta,$$

et

$$F \langle x; q \rangle := \Gamma_F(x_1, x_2, \dots)|_\Delta$$

où  $[n]!_q = \frac{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}{(1-q)^n}$ . L'analogue, dans le contexte des  $\Phi$ -séries, est désigné par

$$F(x; q)_\Phi := \Phi_F(x_1, x_2, \dots)|_\Delta.$$

Considérons le cas où  $F = M = X^n/H$ ,  $H \leq \mathfrak{S}_n$ ,  $n \geq 0$ , est une espèce moléculaire non pondérée et rappelons que

$$\Phi_M(x_1, x_2, \dots) = \sum_{\lambda \vdash n} T_\lambda^\Phi(H) \operatorname{mon}_\lambda(t_1, t_2, \dots) \quad (2.30)$$

où  $x_k = \sum_{i \geq 1} t_i^k$ . Puisque

$$\frac{(1-q)^k}{1-q^k} x^k = \sum_{i \geq 1} t_i^k \Big|_{t_i := (1-q)q^{i-1}x},$$

en effectuant les substitutions simultanées  $t_i := (1-q)q^{i-1}x$ ,  $i \geq 1$ , et  $x_k := \frac{(1-q)^k}{1-q^k} x^k$ ,  $k \geq 1$ , dans (2.30), on obtient l'égalité

$$M(x; q)_\Phi = \sum_{\lambda \vdash n} T_\lambda^\Phi(H) \operatorname{mon}_\lambda((1-q), (1-q)q, (1-q)q^2, \dots) x^n.$$

Or, Décoste a montré que

$$\operatorname{mon}_\lambda((1-q), (1-q)q, (1-q)q^2, \dots) = \frac{1}{[n]!_q} \sum_{i=0}^{\binom{n}{2}} c_n(\lambda, i) q^i \quad (2.31)$$

où les coefficients  $c_n(\lambda, i)$  sont des entiers pour lesquels elle donne l'interprétation suivante :

$$c_n(\lambda, i) = \sum_{\substack{\mu, \nu \in P_{<n}^\neq, \mu \triangleleft \nu \\ \langle \mu \rangle^+ = \lambda, \nu \vdash i}} (-1)^{\ell(\nu) - \ell(\mu)},$$

où  $P_{<n}^\neq = \{(\mu_1, \mu_2, \dots) \mid n > \mu_1 > \mu_2 > \dots\}$  est l'ensemble de tous les partages en parts distinctes de taille strictement inférieure à  $n$ ,  $\ell(\mu)$  est le nombre de parts du partage  $\mu$ ,  $\ell(\emptyset) := 1$ ,  $\mu \triangleleft \nu$  si et seulement si les parts de  $\mu$  sont des parts de  $\nu$  et  $\langle \mu \rangle^+$  est la composition de  $n$  formée des marches de  $\mu$ ,  $\langle \mu \rangle^+ = \langle n - \mu_1, \mu_1 - \mu_2, \dots, \mu_{s-2} - \mu_{s-1}, \mu_{s-1} \rangle$ .

Ainsi,

$$M(x; q)_\Phi = \sum_{\lambda \vdash n} T_\lambda^\Phi(H) \sum_{i=0}^{\binom{n}{2}} c_n(\lambda, i) q^i \frac{x^n}{[n]!_q}$$

et

$$\left[ \frac{x^n}{[n]!_q} \right] M(x; q)_\Phi = \sum_{i=0}^{\binom{n}{2}} \left( \sum_{\lambda \vdash n} T_\lambda^\Phi(H) c_n(\lambda, i) \right) q^i.$$

Le contexte des  $\Phi$ -séries permet de répondre en partie aux questions posées par Décoste [12] concernant l'interprétation des substitutions simultanées  $\Delta$  dans la série indicatrice d'asymétrie d'une espèce. En fait, dans l'expression

$$|F_w[[n]]|_q = \sum_{i=0}^{\binom{n}{2}} \left( \sum_{\lambda \vdash n} c_n(\lambda, i) t_\lambda \right) q^i$$

obtenue par Décoste, l'interprétation de ses  $t_\lambda$  est, dans le cadre des  $\Phi$ -séries, le nombre (la somme des poids) de représentants des types de  $F_w(X_{t_1} + X_{t_2} + \dots)$ -structures où la distribution sous-jacente des poids est  $\lambda$  et dont le stabilisateur est conjugué à un groupe de  $\Phi$ .

Décoسته [12] a introduit les polynômes  $P_n(\lambda; q)$  lors du  $q$ -comptage des permutations :

$$\begin{aligned} S(x; q) &= \sum_{n \geq 0} \sum_{\lambda \vdash n} \prod_{i=1}^n (1 - q^i)^{1 - \lambda_i} \frac{x^n}{[n]!_q} \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{\lambda \vdash n} P_n(\lambda; q) \frac{x^n}{[n]!_q}. \end{aligned}$$

Elle a montré que les  $P_n(\lambda; q)$  sont des polynômes en  $q$  de degré  $\binom{n}{2}$  à coefficients entiers.

Nous terminons cette section en donnant, dans le contexte des  $\Phi$ -séries et en terme de la fonction de Möbius, une expression analogue à

$$|F_w[[n]]|_q = \sum_{\lambda = 1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots} \frac{p_F(\lambda_1, \lambda_2, \dots)}{\text{aut}(\lambda)} P_n(\lambda; q)$$

où  $p_F(\lambda_1, \lambda_2, \dots) = |\{s \in F[[n]] \mid \sigma.s = s\}|$ ,  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  étant une permutation de type  $\lambda$ . En fait, nous nous limitons au cas où  $F = M = X^n/H$ ,  $H \leq \mathfrak{S}_n$ , est une espèce moléculaire et où  $\Phi = \{K\}$ ,  $K \leq \mathfrak{S}_n$ . Le cas plus général, où  $F$  est une espèce pondérée quelconque et  $\Phi$  est un ensemble de groupes non conjugués deux à deux, s'obtient facilement par linéarité.

**Proposition 2.5.4.** Soient  $H$  et  $K$  deux sous-groupes de  $\mathfrak{S}_n$ ,  $n \geq 0$ . Pour  $\Phi = \{K\}$ , on a :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{x^n}{[n]!_q} \right] \frac{X^n}{H}(x; q)_\Phi &= \sum_{i=0}^{\binom{n}{2}} \left( \sum_{\lambda \vdash n} T_\lambda(H, K) c_n(\lambda, i) \right) q^i \\ &= \sum_{\lambda \vdash n} \left( \frac{1}{|H|} \sum_{Q \in \overline{K} \cap \text{sg}(H)} |Q| \sum_{\substack{Q \leq V \leq H \\ V \text{ de type } \lambda}} \mu(Q, V) \right) P_n(\lambda, q). \end{aligned}$$

*Démonstration.* Puisque  $\frac{(1-q)^k}{1-q^k} x^k = \sum_{i \geq 1} t_i^k \Big|_{t_i := (1-q)q^{i-1}x}$ , en effectuant les substitutions simultanées  $t_i := (1-q)q^{i-1}x$ ,  $i \geq 1$ , dans (2.24) et  $x_k := \frac{(1-q)^k}{1-q^k} x^k$ ,  $k \geq 1$ , dans (2.25), on obtient l'égalité

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \vdash n} T_\lambda(H, K) \text{mon}_\lambda((1-q), (1-q)q, (1-q)q^2, \dots) x^n \\ = \frac{1}{|H|} \sum_{Q \in \overline{K} \cap \text{sg}(H)} |Q| \sum_{Q \leq v \leq H} \mu(Q, V) \prod_{k=1}^n (1-q^k)^{1-V_k} \frac{x^n}{[n]!_q}. \end{aligned}$$

Utilisant (2.31) et regroupant les termes de la dernière expression selon les partages induits des actions naturelles de groupes  $V$  sur  $[n]$ , on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \vdash n} T_\lambda(H, K) \sum_{i=0}^{\binom{n}{2}} c_n(\lambda, i) q^i \frac{x^n}{[n]!_q} \\ = \sum_{\lambda \vdash n} \left( \frac{1}{|H|} \sum_{Q \in \overline{K} \cap \text{sg}(H)} |Q| \sum_{\substack{Q \leq v \leq H \\ V \text{ de type } \lambda}} \mu(Q, V) \right) P_n(\lambda, q) \frac{x^n}{[n]!_q}. \end{aligned}$$

Par identification des coefficients de  $\frac{x^n}{[n]!_q}$ , le résultat suit. ■

**Corollaire 2.5.5.** On a :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{x^n}{[n]!_q} \right] \frac{X^n}{H} \langle x; q \rangle &= \sum_{i=0}^n \left( \sum_{\lambda \vdash n} T_\lambda(H, \{id_n\}) c_n(\lambda, i) \right) q^i \\ &= \sum_{\lambda \vdash n} \left( \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{V \leq H \\ V \text{ de type } \lambda}} \mu(\{id_n\}, V) \right) P_n(\lambda, q). \end{aligned}$$

△

## Chapitre 3

# Les conditions préservant les opérations

Quelles que soient les espèces pondérées  $F = F_w$  et  $G = G_v$ , on a vu au chapitre 1 que

$$\Phi_F(x, x^2, x^3, \dots) = \tilde{F}^\Phi(x)$$

et que

$$\Phi_{F+G}(x_1, x_2, \dots) = \Phi_F(x_1, x_2, \dots) + \Phi_G(x_1, x_2, \dots).$$

Par contre, on a vu au chapitre 2 que, pour toute espèce pondérée  $F = F_w$ ,

$$\Phi_F(x, 0, 0, \dots) = F(x)$$

si et seulement si  $\Gamma \subseteq \Phi$ , c.-à-d. : pour que la  $\Phi$ -série contienne les informations relatives aux structures étiquetées,  $\Phi$  doit contenir tous les groupes triviaux. L'objet de ce chapitre est donc de poursuivre l'étude, amorcée aux chapitres précédents, des propriétés de la série indicatrice des  $\Phi$ -symétries.

Puisque les séries indicatrices  $Z_F$  et  $\Gamma_F$  sont des cas particuliers de  $\Phi$ -séries, nous dégageons, aux sections 3.1 et 3.2, des conditions qui, imposées à  $\Phi$ , plus précisément imposées à son saturé sous la conjugaison, font en sorte que la transformation  $F \mapsto \Phi_F$  préserve les opérations de produit, de dérivation, de pointage et de substitution. Le

calcul des  $\Phi$ -séries est alors largement simplifié par l'utilisation d'égalités combinatoires caractérisant, explicitement ou implicitement, les espèces où interviennent ces opérations.

Finalement, nous proposons à la dernière section de ce chapitre, une façon de générer des ensembles explicites  $\Phi$  tels que les séries  $\Phi_F(x_1, x_2, \dots)$  possèdent des propriétés analogues à celles des séries indicatrices des cycles et d'asymétrie.

Notons qu'afin d'uniformiser la notation pour les produits en couronne avec celle des espèces, nous avons inversé l'ordre des groupes de la notation classique.

### 3.1 Les opérations de produit, de dérivée et de pointage

On a vu, au chapitre 1, que l'espèce  $\Phi$ -associée à un produit est égale (isomorphe) au produit des espèces  $\Phi$ -associées à chacune des espèces du produit si et seulement si le saturé de  $\Phi$  sous la conjugaison est fortement stable sous le produit externe de groupes. Ceci donne lieu au résultat suivant.

**Proposition 3.1.1.** *Soit  $\Phi \subseteq \{K \subseteq \text{cc}(\mathfrak{S}_n) \mid n \geq 0\}$ , un ensemble de groupes non conjugués deux à deux. Pour toutes espèces pondérées  $F = F_w$  et  $G = G_v$ ,*

$$\Phi_{F \cdot G}(x_1, x_2, \dots) = \Phi_F(x_1, x_2, \dots) \cdot \Phi_G(x_1, x_2, \dots)$$

*si et seulement si l'ensemble  $\hat{\Phi}$  est fortement stable sous le produit externe de groupes.*

*Démonstration.* D'une part, si pour toutes espèces pondérées  $F = F_w$  et  $G = G_v$  on a

$$\Phi_{F \cdot G}(x_1, x_2, \dots) = \Phi_F(x_1, x_2, \dots) \cdot \Phi_G(x_1, x_2, \dots),$$

de la proposition 1.5.5,  $F \uparrow^{\Phi} G(x) = \tilde{F}^{\Phi}(x) \cdot \tilde{G}^{\Phi}(x)$  et de la proposition 1.4.9,  $\hat{\Phi}$  est nécessairement fortement stable sous le produit externe de groupes.

D'autre part, lorsque  $\hat{\Phi}$  est fortement stable sous le produit externe de groupes, on a, par la proposition 1.4.9,

$$\begin{aligned} & ((F \cdot G)(X_{t_1} + X_{t_2} + \dots))^{\sim\Phi}(x) \\ &= (F(X_{t_1} + X_{t_2} + \dots) \cdot G(X_{t_1} + X_{t_2} + \dots))^{\sim\Phi}(x) \\ &= (F(X_{t_1} + X_{t_2} + \dots))^{\sim\Phi}(x) \cdot (G(X_{t_1} + X_{t_2} + \dots))^{\sim\Phi}(x). \end{aligned}$$



Il suffit de poser  $x = 1$  dans ces séries génératrices et le résultat suit. ■

**Corollaire 3.1.2.** *Pour toutes espèces pondérées  $F = F_w$  et  $G = G_v$ ,*

$$Z_{F.G}(x_1, x_2, \dots) = Z_F(x_1, x_2, \dots) \cdot Z_G(x_1, x_2, \dots),$$

$$\Gamma_{F.G}(x_1, x_2, \dots) = \Gamma_F(x_1, x_2, \dots) \cdot \Gamma_G(x_1, x_2, \dots).$$

△

Désignons par  $F'$  la dérivée d'une espèce quelconque  $F$ . En utilisant les tables de J. Labelle [33] et de Yeh [55] concernant les dérivées des espèces moléculaires, nous avons calculé  $\Phi_{M'}(x_1, x_2, \dots)$  (voir le tableau 3.1) et  $\frac{\partial}{\partial x_1} \Phi_M(x_1, x_2, \dots)$  (voir le tableau 3.2) pour  $M \in \mathcal{M}_n$ ,  $1 \leq n \leq 4$ . Une comparaison de ces deux tableaux nous a menés au résultat suivant.

**Proposition 3.1.3.** *Soit  $\Phi \subseteq \{K \in \text{cc}(\mathfrak{S}_n) \mid n \geq 0\}$ , un ensemble de groupes non conjugués deux à deux. Si  $\{id_0\} \in \hat{\Phi}$  et si  $\hat{\Phi}$  est fermé sous le produit externe par  $\{id_1\}$ , c.-à-d. : que  $1 \in \text{mol}(\Phi)$  et que  $\text{mol}(\Phi)$  est fermé sous la multiplication par  $X$ , alors pour toute espèce pondérée  $F = F_w$ ,*

$$\Phi_{F'}(x_1, x_2, \dots) = \frac{\partial}{\partial x_1} \Phi_F(x_1, x_2, \dots).$$

*Démonstration.* Ajoutons une nouvelle variable  $t_0$  à la famille de variables  $(t_i)_{i \geq 1}$ . La définition de la dérivée d'une espèce entraîne que

$$F(X_{t_0} + X_{t_1} + X_{t_2} + \dots) = F(X_{t_1} + X_{t_2} + \dots) + X_{t_0} \cdot F'(X_{t_1} + X_{t_2} + \dots) + O(t_0^2)(X) \quad (3.1)$$

où  $O(t_0^2)(X)$  désigne une espèce dont le poids de chaque structure est un multiple de  $t_0^2$ . Puisque  $\text{mol}(\Phi)$  est fermé sous la multiplication par  $X$ , on a :

$$(X_{t_0} \cdot F'(X_{t_1} + X_{t_2} + \dots))^{\sim \Phi} = \widetilde{X_{t_0}}^{\Phi} \cdot (F'(X_{t_1} + X_{t_2} + \dots))^{\sim \Phi}. \quad (3.2)$$

Les égalités (3.1) et (3.2) entraînent, par passage aux  $\Phi$ -séries et en utilisant le fait que  $X \in \text{mol}(\Phi)$ ,

$$\begin{aligned} \Phi_F(t_0 + t_1 + t_2 + \dots, t_0^2 + t_1^2 + t_2^2 + \dots, \dots) = \\ \Phi_F(t_1 + t_2 + \dots, t_1^2 + t_2^2 + \dots, \dots) + \\ t_0 \Phi_{F'}(t_1 + t_2 + \dots, t_1^2 + t_2^2 + \dots, \dots) + O(t_0^2) \end{aligned} \quad (3.3)$$

où  $O(t_0^2)$  désigne une série dont chaque terme est un multiple de  $t_0^2$ .

Notons que, pour  $z_i := t_0^i + t_1^i + t_2^i + \dots$ ,  $i \geq 1$ , on a :

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial}{\partial t_0} \Phi_F(t_0 + t_1 + t_2 + \dots, t_0^2 + t_1^2 + t_2^2 + \dots, \dots) \right|_{t_0=0} \\ &= \sum_{i \geq 1} \frac{\partial}{\partial z_i} \Phi_F(z_1, z_2, \dots) \left. \frac{\partial z_i}{\partial t_0} \right|_{t_0=0} \\ &= \frac{\partial \Phi_F}{\partial x_1}(t_1 + t_2 + \dots, t_1^2 + t_2^2 + \dots, \dots) \end{aligned}$$

puisque  $\partial z_i / \partial t_0|_{t_0=0} = 0$  si  $i > 1$ . Ainsi, on a le développement taylorien d'ordre 1 en  $t_0$  suivant :

$$\begin{aligned} & \Phi_F(t_0 + t_1 + t_2 + \dots, t_0^2 + t_1^2 + t_2^2 + \dots, \dots) = \\ & \Phi_F(t_1 + t_2 + \dots, t_1^2 + t_2^2 + \dots, \dots) + \\ & t_0 \frac{\partial \Phi_F}{\partial x_1}(t_1 + t_2 + \dots, t_1^2 + t_2^2 + \dots, \dots) + O(t_0^2). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Le résultat annoncé découle donc par comparaison de (3.3) et de (3.4). ■

**Proposition 3.1.4.** *Soit  $\Phi \subseteq \{K \underline{\in} cc(\mathfrak{S}_n) \mid n \geq 0\}$ , un ensemble de groupes non conjugués deux à deux. Si  $\hat{\Phi}$  satisfait toutes les conditions de la proposition 3.1.3 alors, pour toute espèce pondérée  $F = F_w$ ,*

$$\Phi_{F^\bullet}(x_1, x_2, \dots) = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \Phi_F(x_1, x_2, \dots)$$

où  $\bullet$  désigne l'opération de pointage.

*Démonstration.* Il suffit de se rappeler que l'espèce  $F^\bullet$ ,  $F$  point, satisfait l'égalité combinatoire  $F^\bullet = X \cdot F'$  et le résultat suit. ■

**Corollaire 3.1.5.** *Soit  $\Phi \subseteq \{K \underline{\in} cc(\mathfrak{S}_n) \mid n \geq 0\}$ , un ensemble de groupes non conjugués deux à deux. Si  $\{id_1\} \in \hat{\Phi}$  et si  $\hat{\Phi}$  est fortement stable sous le produit externe de groupes alors, pour toute espèce pondérée  $F = F_w$ ,*

$$\begin{aligned} & \Phi_{F'}(x_1, x_2, \dots) = \frac{\partial}{\partial x_1} \Phi_F(x_1, x_2, \dots), \\ & \Phi_{F^\bullet}(x_1, x_2, \dots) = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \Phi_F(x_1, x_2, \dots). \end{aligned}$$

△

**Corollaire 3.1.6.** *Pour toute espèce pondérée  $F = F_w$ ,*

$$Z_{F'}(x_1, x_2, \dots) = \frac{\partial}{\partial x_1} Z_F(x_1, x_2, \dots) \quad \text{et} \quad Z_{F^\bullet}(x_1, x_2, \dots) = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} Z_F(x_1, x_2, \dots),$$

$$\Gamma_{F'}(x_1, x_2, \dots) = \frac{\partial}{\partial x_1} \Gamma_F(x_1, x_2, \dots) \quad \text{et} \quad \Gamma_{F^\bullet}(x_1, x_2, \dots) = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \Gamma_F(x_1, x_2, \dots).$$

△

Tableau 3.1 – Les  $\Phi$ -polynômes de  $M'$  pour  $M \in \mathcal{M}_n$ ,  $n \leq 4$ 

$M$	$M'$	$\Phi_{M'}(x_1, x_2, \dots)$
$X$	1	$\chi(\mathfrak{S}_0 \in \hat{\Phi})$
$E_2$	$X$	$\chi(\mathfrak{S}_1 \in \hat{\Phi})x_1$
$X^2$	$2X$	$\chi(\mathfrak{S}_1 \in \hat{\Phi})2x_1$
$E_3$	$E_2$	$\chi(\mathfrak{S}_2 \in \hat{\Phi})x_2 + \chi(\mathfrak{S}_{1,1} \in \hat{\Phi})\left(\frac{x_1^2}{2} - \frac{x_2}{2}\right)$
$C_3$	$X^2$	$\chi(\mathfrak{S}_{1,1} \in \hat{\Phi})x_1^2$
$XE_2$	$E_2 + X^2$	$\chi(\mathfrak{S}_2 \in \hat{\Phi})x_2 + \chi(\mathfrak{S}_{1,1} \in \hat{\Phi})\left(\frac{3x_1^2}{2} - \frac{x_2}{2}\right)$
$X^3$	$3X^2$	$\chi(\mathfrak{S}_{1,1} \in \hat{\Phi})3x_1^2$
$E_4$	$E_3$	$\chi(\mathfrak{S}_3 \in \hat{\Phi})x_3 + \chi(\mathfrak{S}_{2,1} \in \hat{\Phi})(x_1x_2 - x_3)$ $+ \chi(\mathfrak{S}_{1,1,1} \in \hat{\Phi})\left(\frac{x_1^3}{6} - \frac{x_1x_2}{2} + \frac{x_3}{3}\right)$
$E_4^\pm$	$E_3^\pm = C_3$	$\chi(\mathbb{Z}_3 \in \hat{\Phi})x_3 + \chi(\mathfrak{S}_{1,1,1} \in \hat{\Phi})\left(\frac{x_1^3}{3} - \frac{x_3}{3}\right)$
$P_4$	$XE_2$	$\chi(\mathfrak{S}_{2,1} \in \hat{\Phi})x_1x_2 + \chi(\mathfrak{S}_{1,1,1} \in \hat{\Phi})\left(\frac{x_1^3}{2} - \frac{x_1x_2}{2}\right)$
$XE_3$	$E_3 + XE_2$	$\chi(\mathfrak{S}_3 \in \hat{\Phi})x_3 + \chi(\mathfrak{S}_{2,1} \in \hat{\Phi})(2x_1x_2 - x_3)$ $+ \chi(\mathfrak{S}_{1,1,1} \in \hat{\Phi})\left(\frac{2x_1^3}{3} - x_1x_2 + \frac{x_3}{3}\right)$
$E_2^2$	$2XE_2$	$\chi(\mathfrak{S}_{2,1} \in \hat{\Phi})2x_1x_2 + \chi(\mathfrak{S}_{1,1,1} \in \hat{\Phi})(x_1^3 - x_1x_2)$
$P_4^{\text{bic}}$	$X^3$	$\chi(\mathfrak{S}_{1,1,1} \in \hat{\Phi})x_1^3$
$C_4$	$X^3$	$\chi(\mathfrak{S}_{1,1,1} \in \hat{\Phi})x_1^3$
$XC_3$	$C_3 + X^3$	$\chi(\mathbb{Z}_3 \in \hat{\Phi})x_3 + \chi(\mathfrak{S}_{1,1,1} \in \hat{\Phi})\left(\frac{4x_1^3}{3} - \frac{x_3}{3}\right)$
$X^2E_2$	$2XE_2 + X^3$	$\chi(\mathfrak{S}_{2,1} \in \hat{\Phi})2x_1x_2 + \chi(\mathfrak{S}_{1,1,1} \in \hat{\Phi})(2x_1^3 - x_1x_2)$
$E_2 \circ X^2$	$2X^3$	$\chi(\mathfrak{S}_{1,1,1} \in \hat{\Phi})2x_1^3$
$X^4$	$4X^3$	$\chi(\mathfrak{S}_{1,1,1} \in \hat{\Phi})4x_1^3$

Tableau 3.2 –  $\frac{\partial}{\partial x_1} \Phi_M$  pour  $M \in \mathcal{M}_n$ ,  $n \leq 4$ 

$M$	$\frac{\partial}{\partial x_1} \Phi_M(x_1, x_2, \dots)$
$X$	$\chi(\mathfrak{S}_1 \in \hat{\Phi})$
$E_2$	$\chi(\mathfrak{S}_{1,1} \in \hat{\Phi})x_1$
$X^2$	$\chi(\mathfrak{S}_{1,1} \in \hat{\Phi})2x_1$
$E_3$	$\chi(\mathfrak{S}_{2,1} \in \hat{\Phi})x_2 + \chi(\mathfrak{S}_{1,1,1} \in \hat{\Phi})\left(\frac{x_1^2}{2} - \frac{x_2}{2}\right)$
$C_3$	$\chi(\mathfrak{S}_{1,1,1} \in \hat{\Phi})x_1^2$
$XE_2$	$\chi(\mathfrak{S}_{2,1} \in \hat{\Phi})x_2 + \chi(\mathfrak{S}_{1,1,1} \in \hat{\Phi})\left(\frac{3x_1^2}{2} - \frac{x_2}{2}\right)$
$X^3$	$\chi(\mathfrak{S}_{1,1,1} \in \hat{\Phi})3x_1^2$
$E_4$	$\chi(\mathfrak{S}_{3,1} \in \hat{\Phi})x_3 + \chi(\mathfrak{S}_{2,1,1} \in \hat{\Phi})(x_1x_2 - x_3)$ $+ \chi(\mathfrak{S}_{1,1,1,1} \in \hat{\Phi})\left(\frac{x_1^3}{6} - \frac{x_1x_2}{2} + \frac{x_3}{3}\right)$
$E_4^\pm$	$\chi(\mathbb{Z}_3 \star \mathfrak{S}_1 \in \hat{\Phi})x_3 + \chi(\mathfrak{S}_{1,1,1,1} \in \hat{\Phi})\left(\frac{x_1^3}{3} - \frac{x_3}{3}\right)$
$P_4$	$\chi(\mathfrak{S}_{2,1,1} \in \hat{\Phi})x_1x_2 + \chi(\mathfrak{S}_{1,1,1,1} \in \hat{\Phi})\left(\frac{x_1^3}{2} - \frac{x_1x_2}{2}\right)$
$XE_3$	$\chi(\mathfrak{S}_{3,1} \in \hat{\Phi})x_3 + \chi(\mathfrak{S}_{2,1,1} \in \hat{\Phi})(2x_1x_2 - x_3)$ $+ \chi(\mathfrak{S}_{1,1,1,1} \in \hat{\Phi})\left(\frac{2x_1^3}{3} - x_1x_2 + \frac{x_3}{3}\right)$
$E_2^2$	$\chi(\mathfrak{S}_{2,1,1} \in \hat{\Phi})2x_1x_2 + \chi(\mathfrak{S}_{1,1,1,1} \in \hat{\Phi})(x_1^3 - x_1x_2)$
$P_4^{\text{bic}}$	$\chi(\mathfrak{S}_{1,1,1,1} \in \hat{\Phi})x_1^3$
$C_4$	$\chi(\mathfrak{S}_{1,1,1,1} \in \hat{\Phi})x_1^3$
$XC_3$	$\chi(\mathbb{Z}_3 \star \mathfrak{S}_1 \in \hat{\Phi})x_3 + \chi(\mathfrak{S}_{1,1,1,1} \in \hat{\Phi})\left(\frac{4x_1^3}{3} - \frac{x_3}{3}\right)$
$X^2E_2$	$\chi(\mathfrak{S}_{2,1,1} \in \hat{\Phi})2x_1x_2 + \chi(\mathfrak{S}_{1,1,1,1} \in \hat{\Phi})(2x_1^3 - x_1x_2)$
$E_2 \circ X^2$	$\chi(\mathfrak{S}_{1,1,1,1} \in \hat{\Phi})2x_1^3$
$X^4$	$\chi(\mathfrak{S}_{1,1,1,1} \in \hat{\Phi})4x_1^3$

### 3.2 L'opération de substitution

Le but de cette section est de dégager des conditions à imposer au saturé d'un ensemble  $\Phi$  pour que, quelles que soient les espèces pondérées  $F = F_w$  et  $G = G_v$ , on ait

$$\Phi_{F \circ G}(x_1, x_2, \dots) = \Phi_F \circ \Phi_G(x_1, x_2, \dots).$$

**Remarque 3.2.1.** Soit  $\Phi \subseteq \{K \subseteq cc(\mathfrak{S}_n) \mid n \geq 0\}$ , un ensemble de groupes non conjugués deux à deux. Pour toute espèce pondérée  $F = F_w$ , on aimerait d'abord s'assurer que

$$\Phi_{F \circ X}(x_1, x_2, \dots) = \Phi_F \circ \Phi_X(x_1, x_2, \dots) \quad (3.5)$$

et que

$$\Phi_{X \circ F}(x_1, x_2, \dots) = \Phi_X \circ \Phi_F(x_1, x_2, \dots). \quad (3.6)$$

Notons que les égalités (3.5) et (3.6) sont satisfaites si et seulement si

$$\Phi_F(x_1, x_2, \dots) = \Phi_F \circ \Phi_X(x_1, x_2, \dots) = \Phi_X \circ \Phi_F(x_1, x_2, \dots). \quad (3.7)$$

Distinguons les deux situations suivantes.

- Si  $\{id_1\} \in \Phi$  alors  $\Phi_X(x_1, x_2, \dots) = x_1$  et les égalités (3.7) sont vérifiées.
- Si  $\{id_1\} \notin \Phi$  alors  $\Phi_X(x_1, x_2, \dots) = 0$  et

$$\Phi_F \circ \Phi_X(x_1, x_2, \dots) = \Phi_F \circ 0 = \Phi_{F_0}(x_1, x_2, \dots).$$

De plus,

$$\Phi_X \circ \Phi_F(x_1, x_2, \dots) = 0 \circ \Phi_F(x_1, x_2, \dots) = 0.$$

Mais en général,

$$0 \neq \Phi_F(x_1, x_2, \dots) \neq \Phi_{F_0}(x_1, x_2, \dots).$$

Seuls le cas  $\Phi = \emptyset$  donne lieu à l'égalité  $\Phi_F(x_1, x_2, \dots) = \Phi_{F_0}(x_1, x_2, \dots) = 0$  quelle que soit l'espèce  $F$ .

Pour éviter ce cas dégénéré, nous introduisons le lemme suivant. □

**Lemme 3.2.2.** Soit  $\Phi \subseteq \{K \subseteq cc(\mathfrak{S}_n) \mid n \geq 0\}$ , un ensemble non vide de groupes non conjugués deux à deux. Si la transformation  $F \mapsto \Phi_F$  préserve l'opération de substitution alors  $\{id_1\} \in \Phi$ .

*Démonstration.* La démonstration est immédiate à la suite de la remarque 3.2.1. ■

Il est intéressant de remarquer que si la transformation  $F \mapsto \Phi_F$  préserve la substitution alors elle préserve "presque" le produit. Plus précisément nous avons le lemme suivant.

**Lemme 3.2.3.** Soit  $\Phi \subseteq \{K \subseteq cc(\mathfrak{S}_n) \mid n \geq 0\}$ , un ensemble de groupes non conjugués deux à deux. Si  $\{id_0\} \in \Phi$  et si  $\Phi_{F \circ G}(x_1, x_2, \dots) = \Phi_F \circ \Phi_G(x_1, x_2, \dots)$  pour toutes espèces  $F$  et  $G$ ,  $G[\emptyset] = \emptyset$ , alors, pour toutes espèces pondérées  $A = A_w$  et  $B = B_v$ ,

$$\Phi_{A \cdot B}(x_1, x_2, \dots) = \Phi_A(x_1, x_2, \dots) \cdot \Phi_B(x_1, x_2, \dots)$$

si et seulement si  $\{id_2\} \in \Phi$ .

*Démonstration.* Puisque  $\{id_0\} \in \Phi$ , il suffit de se restreindre au cas où  $(A + B)[\emptyset] = \emptyset$ . Considérons le cas où  $F = X^2$  et  $G = A + B$ . On a :

$$\Phi_{X^2}(x_1, x_2, \dots) = \widetilde{X}_t^2 \Big|_{x:=1} = \chi(\{id_2\} \in \Phi) x_1^2.$$

D'une part, par hypothèse,

$$\begin{aligned} \Phi_{(A+B)^2}(x_1, x_2, \dots) &= \Phi_{X^2} \circ \Phi_{A+B}(x_1, x_2, \dots) \\ &= \chi(\{id_2\} \in \Phi) (\Phi_{A+B}(x_1, x_2, \dots))^2 \\ &= \chi(\{id_2\} \in \Phi) (\Phi_A(x_1, x_2, \dots) + \Phi_B(x_1, x_2, \dots))^2 \\ &= \chi(\{id_2\} \in \Phi) [(\Phi_A)^2 + 2\Phi_A \cdot \Phi_B + (\Phi_B)^2]. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \Phi_{(A+B)^2}(x_1, x_2, \dots) &= \Phi_{A^2+2A \cdot B+B^2}(x_1, x_2, \dots) \\ &= \Phi_{A^2}(x_1, x_2, \dots) + 2\Phi_{A \cdot B}(x_1, x_2, \dots) + \Phi_{B^2}(x_1, x_2, \dots) \\ &= \Phi_{X^2 \circ A}(x_1, x_2, \dots) + 2\Phi_{A \cdot B}(x_1, x_2, \dots) + \Phi_{X^2 \circ B}(x_1, x_2, \dots) \\ &= \chi(\{id_2\} \in \Phi)(\Phi_A)^2 + 2\Phi_{A \cdot B} + \chi(\{id_2\} \in \Phi)(\Phi_B)^2. \end{aligned}$$

En comparant les deux expressions obtenues pour  $\Phi_{(A+B)^2}$  on a, après simplification,

$$\Phi_{A \cdot B}(x_1, x_2, \dots) = \chi(\{id_2\} \in \Phi) \Phi_A(x_1, x_2, \dots) \cdot \Phi_B(x_1, x_2, \dots)$$

et le résultat suit. ■

**Définition 3.2.4.** Pour deux ensembles finis  $U$  et  $V$  tels que  $|U| = n$  et  $|V| = k$  et deux groupes  $H \leq \mathfrak{S}_U$  et  $K \leq \mathfrak{S}_V$ , le produit en couronne  $H \wr K$  est le groupe des permutations  $\sigma$  sur l'ensemble  $U \times V$  de la forme suivante :

$$\text{pour } (u, v) \in U \times V : \sigma((u, v)) = (h(u), \alpha(u)(v))$$

où  $h \in H$  et  $\alpha : U \rightarrow K$  est une fonction. Le produit de deux permutations,  $\sigma = (h, \alpha) \in H \wr K$  et  $\sigma' = (h', \alpha') \in H \wr K$ , est défini par  $\sigma\sigma' = (hh', \alpha\alpha'_h)$  où  $\forall u \in U$ ,  $\alpha\alpha'_h(u) = \alpha(u)\alpha'(h^{-1}(u))$ , c.-à-d. :  $\forall (u, v) \in U \times V$ ,

$$\sigma\sigma'((u, v)) = (hh'(u), \alpha(u)\alpha'(h^{-1}(u))(v)).$$

L'élément identité  $I_{H \wr K}$  de  $H \wr K$  est  $I_{H \wr K} = (I_H, \iota)$  où  $\iota : U \rightarrow K (u \mapsto I_K)$ , l'inverse de  $\sigma = (h, \alpha) \in H \wr K$  est  $\sigma^{-1} = (h^{-1}, \alpha_h^{-1})$  et l'ordre du groupe  $H \wr K$  est  $|H \wr K| = |K|^{|U|}|H|$ .

**Remarque 3.2.5.** Si  $M = X^n/H$ ,  $H \leq \mathfrak{S}_n$ ,  $n \geq 0$ , et  $N = X^k/K$ ,  $K \leq \mathfrak{S}_k$ ,  $k \geq 1$ , sont deux espèces moléculaires, le résultat de la substitution de  $N$  dans  $M$  est aussi moléculaire [5, 54] et  $M \circ N = X^{nk}/H \wr K$ .

On considère le groupe  $H \wr K$  comme le sous-groupe de  $\mathfrak{S}_{nk}$  obtenu en considérant les couples  $(u, v) \in \llbracket n \rrbracket \times \llbracket k \rrbracket$  comme les coordonnées des éléments  $\nu \in \llbracket nk \rrbracket$ . Tout élément  $\sigma = (h, \alpha) \in H \wr K$  s'écrit  $\sigma = (h, \iota) \circ (id_n, \alpha)$  où  $h \in H$  et  $\alpha : \llbracket n \rrbracket \rightarrow K$ . On considère le rectangle suivant.

$k$	$k$	$2k$	$3k$	$\dots$	$nk$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
$3$	$3$	$k+3$	$2k+3$	$\dots$	$(n-1)k+3$
$2$	$2$	$k+2$	$2k+2$	$\dots$	$(n-1)k+2$
$1$	$1$	$k+1$	$2k+1$	$\dots$	$(n-1)k+1$
$K$	$1$	$2$	$3$	$\dots$	$n$
$H$	$1$	$2$	$3$	$\dots$	$n$



D'abord, une fonction  $\alpha : \llbracket n \rrbracket \rightarrow K$  associe à  $u \in \llbracket n \rrbracket$  une permutation  $\alpha(u) \in K$  qui permute les éléments de la  $u$ -ième colonne. Ensuite,  $h \in H$  permute l'ensemble des colonnes sans en changer les composantes. Ainsi, pour  $\nu \in \llbracket nk \rrbracket$  et  $(u, v)$  ses coordonnées, l'image de  $\nu$  par  $\sigma = (h, \alpha) \in H \wr K$  est l'élément  $\sigma(\nu)$  dont les coordonnées sont

$$(h, \alpha)(u, v) = (h(u), \alpha(u)(v)).$$

□

**Définition 3.2.6.** Soit  $\Phi \subseteq \{K \subseteq \text{cc}(\mathfrak{S}_n) \mid n \geq 0\}$ , un ensemble de groupes non conjugués deux à deux. On dit que  $\hat{\Phi}$  est fortement stable sous le produit en couronne si  $\{id_1\} \in \hat{\Phi}$  et si

$$\forall H \leq \mathfrak{S}_n, n \geq 0, \forall K \leq \mathfrak{S}_k, k \geq 1 : H \wr K \in \hat{\Phi} \iff H \in \hat{\Phi} \text{ et } K \in \hat{\Phi}.$$

**Proposition 3.2.7.** Soit  $\Phi \subseteq \{K \subseteq \text{cc}(\mathfrak{S}_n) \mid n \geq 0\}$ , un ensemble de groupes non conjugués deux à deux. Pour toutes espèces moléculaires  $M$  et  $N$ ,

$$(M \circ N)^{\sim\Phi}(x) = \Phi_M(\tilde{N}^\Phi(x), \tilde{N}^\Phi(x^2), \dots)$$

si et seulement si  $\hat{\Phi}$  est fortement stable sous le produit en couronne.

*Démonstration.* Soient  $M = X^n/H$ ,  $H \leq \mathfrak{S}_n$ ,  $n \geq 0$ , et  $N = X^k/K$ ,  $K \leq \mathfrak{S}_k$ ,  $k \geq 1$ .

D'une part,

$$(M \circ N)^{\sim\Phi}(x) = \left( \frac{X^{nk}}{H \wr K} \right)^{\sim\Phi}(x) = \chi(H \wr K \in \hat{\Phi}) x^{nk}$$

et

$$\tilde{N}^\Phi(x) = \left( \frac{X^k}{K} \right)^{\sim\Phi}(x) = \chi(K \in \hat{\Phi}) x^k.$$

D'autre part, par la proposition 1.5.5,

$$\begin{aligned} \Phi_M(\tilde{N}^\Phi(x), \tilde{N}^\Phi(x^2), \dots) &= \Phi_M(\chi(K \in \hat{\Phi})x^k, \chi(K \in \hat{\Phi})x^{2k}, \dots) \\ &= \Phi_M(t, t^2, \dots) \Big|_{t:=\chi(K \in \hat{\Phi})x^k} \\ &= \tilde{M}^\Phi(t) \Big|_{t:=\chi(K \in \hat{\Phi})x^k} \\ &= \chi(H \in \hat{\Phi}) t^n \Big|_{t:=\chi(K \in \hat{\Phi})x^k} \\ &= \chi(H \in \hat{\Phi}) \chi(K \in \hat{\Phi}) x^{nk}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$(M \circ N)^{\sim\Phi}(x) = \Phi_M(\tilde{N}^\Phi(x), \tilde{N}^\Phi(x^2), \dots)$$

si et seulement si

$$\chi(H \wr K \in \hat{\Phi}) = \chi(H \in \hat{\Phi}) \chi(K \in \hat{\Phi})$$

et le résultat suit. ■

On ne peut malheureusement pas utiliser ce résultat pour trouver une condition nécessaire et suffisante à ce que  $\Phi_{M \circ N}(x_1, x_2, \dots) = \Phi_M \circ \Phi_N(x_1, x_2, \dots)$  puisque l'espèce  $N(X_{t_1} + X_{t_2} + \dots)$  n'est pas moléculaire. Nous allons utiliser le concept de produit en couronne généralisé classique et s'inspirer de l'utilisation qu'en fait Yeh [54, 55] dans le contexte des espèces multisortes pour obtenir un théorème pour la substitution, c.-à-d. : pour établir des conditions sur l'ensemble  $\hat{\Phi}$  pour que, quelles que soient les espèces pondérées  $F = F_w$  et  $G = G_v$ ,  $G[\emptyset] = \emptyset$ , à une sorte, on ait  $\Phi_{F \circ G}(x_1, x_2, \dots) = \Phi_F(x_1, x_2, \dots) \circ \Phi_G(x_1, x_2, \dots)$ .

**Définition 3.2.8.** Soient  $U_1, U_2, \dots, U_\ell, V_1, V_2, \dots, V_\ell$  des ensembles finis tels que  $|U_i| = n_i$  et  $|V_i| = k_i$ ,  $1 \leq i \leq \ell$  et soit  $\mathfrak{S}_{U_1, U_2, \dots, U_\ell}$  le groupe des permutations  $h$  de  $\uplus_{i=1}^\ell U_i$  telles que  $h(U_i) = U_i$ ,  $1 \leq i \leq \ell$ . Soient  $H \leq \mathfrak{S}_{U_1, U_2, \dots, U_\ell}$  et  $K_i \leq \mathfrak{S}_{V_i}$ ,  $1 \leq i \leq \ell$ . Le produit en couronne  $H \wr (K_1, K_2, \dots, K_\ell)$  est le groupe formé des permutations  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_\ell)$  de l'ensemble  $U_1 \times V_1 \uplus U_2 \times V_2 \uplus \dots \uplus U_\ell \times V_\ell$  de la forme suivante, pour  $1 \leq i \leq \ell$ ,

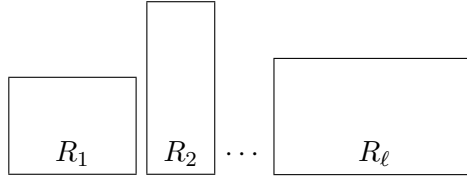
$$\sigma((u_i, v_i)) = \sigma_i((u_i, v_i)) = (h(u_i), \alpha_i(u_i)(v_i)) \in U_i \times V_i$$

où  $(u_i, v_i) \in U_i \times V_i$ ,  $h \in H$  et  $\alpha_i : U_i \rightarrow K_i$ . Le neutre de  $H \wr (K_1, K_2, \dots, K_\ell)$  est  $I_{H \wr (K_1, K_2, \dots, K_\ell)} = (I_H, \iota)$  où  $\iota_i : U_i \rightarrow K_i (u_i \mapsto I_{K_i})$ ,  $1 \leq i \leq \ell$ . Le produit de deux permutations  $\sigma, \sigma' \in H \wr (K_1, K_2, \dots, K_\ell)$  se définit de façon analogue à celui du produit en couronne simple où  $\sigma\sigma' = (\sigma_1\sigma'_1, \sigma_2\sigma'_2, \dots, \sigma_\ell\sigma'_\ell)$  de même pour l'inverse  $\sigma^{-1}$  de  $\sigma$ ,  $\sigma^{-1} = (\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, \dots, \sigma_\ell^{-1})$ . L'ordre du groupe  $H \wr (K_1, K_2, \dots, K_\ell)$  est

$$|H \wr (K_1, K_2, \dots, K_\ell)| = |K_1|^{|U_1|} |K_2|^{|U_2|} \dots |K_\ell|^{|U_\ell|} |H|.$$

**Remarque 3.2.9.** Soient  $1 \leq \ell < \infty$  et  $n_1, n_2, \dots, n_\ell \in \mathbb{N}$ . De façon analogue au produit en couronne, lorsque  $H \leq \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots, n_\ell}$  et  $K_i \leq \mathfrak{S}_{k_i}$ ,  $k_i \in \mathbb{N}^*$  pour  $i \in \llbracket \ell \rrbracket$ , on considère le groupe  $H \wr (K_1, K_2, \dots, K_\ell)$  comme un sous-groupe de  $\mathfrak{S}_{\sum n_i k_i}$ .

Tout élément  $\sigma \in H \wr (K_1, K_2, \dots, K_\ell)$  s'écrit  $\sigma = (h, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\ell)$  où  $h \in H \leq \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots, n_\ell}$  et  $\alpha_i : \llbracket n_i \rrbracket \rightarrow K_i$ ,  $i \in \llbracket \ell \rrbracket$ . On considère la suite de rectangles suivante :



où le  $i$ -ème rectangle  $R_i$ ,  $i \in \llbracket \ell \rrbracket$ , est formé des  $n_i$  colonnes suivantes.

$R_i$

$n_1 k_1 + \dots + n_{i-1} k_{i-1} + k_i$	$\dots$	$n_1 k_1 + \dots + n_{i-1} k_{i-1} + n_i k_i$
$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
$n_1 k_1 + \dots + n_{i-1} k_{i-1} + 2$		$n_1 k_1 + \dots + n_{i-1} k_{i-1} + (n_i - 1) k_i + 2$
$n_1 k_1 + \dots + n_{i-1} k_{i-1} + 1$		$n_1 k_1 + \dots + n_{i-1} k_{i-1} + (n_i - 1) k_i + 1$
1	$\dots$	$n_i$

D'abord, une fonction  $\alpha_i : \llbracket n_i \rrbracket \rightarrow K_i$  associe à  $u_i \in \llbracket n_i \rrbracket$  une permutation  $\alpha_i(u_i) \in K_i$  qui permute les éléments de la  $u_i$ -ième colonne de  $R_i$ . Ensuite,  $h \in H \leq \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots, n_\ell}$  permute les colonnes à l'intérieur de chacun des rectangles sans en modifier le contenu.

Ainsi, pour  $\nu \in \llbracket \sum_{i=1}^{\ell} n_i k_i \rrbracket$ , un élément du  $i$ -ème rectangle, et  $(u_i, v_i)$  ses coordonnées dans le rectangle  $R_i$ , l'image de  $\nu$  par  $\sigma = (h, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\ell)$  est l'élément  $\sigma(\nu)$  du même rectangle, dont les coordonnées sont  $(h(u_i), \alpha_i(u_i)(v_i))$ .  $\square$

**Définition 3.2.10.** Soient  $H \leq \mathfrak{S}_n$ ,  $n_1, n_2, \dots \in \mathbb{N}$  tels que  $n_1 + n_2 + \dots = n < \infty$  et  $K_i \leq \mathfrak{S}_{k_i}$ ,  $i \in \mathbb{N}^*$ ,  $k_i \in \mathbb{N}^*$ . On définit le produit en couronne généralisé indicé  $H \wr_{n_1, n_2, \dots} (K_1, K_2, \dots) \leq \mathfrak{S}_{n_1 k_1 + n_2 k_2 + \dots}$  par

$$H \wr_{n_1, n_2, \dots} (K_1, K_2, \dots) = (H \cap \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots}) \wr (K_1, K_2, \dots).$$

**Définition 3.2.11.** Soit  $\Phi \subseteq \{K \in \text{cc}(\mathfrak{S}_n) \mid n \geq 0\}$ , un ensemble de groupes non conjugués deux à deux. On dit que  $\hat{\Phi}$  est fortement stable sous le produit en couronne généralisé si  $\{id_1\} \in \hat{\Phi}$  et si  $\forall n_1, n_2, \dots \in \mathbb{N}$  tels que  $n_1 + n_2 + \dots = n < \infty$ ,  $\forall H \leq \mathfrak{S}_n$ , et  $\forall K_i \leq \mathfrak{S}_{k_i}$ ,  $i \in \mathbb{N}^*$ ,  $k_i \in \mathbb{N}^*$  :

$$H \wr_{n_1, n_2, \dots} (K_1, K_2, \dots) \in \hat{\Phi} \iff \begin{cases} H \cap \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots} \in \hat{\Phi} \\ \text{et} \\ \forall i, \text{ tel que } n_i \neq 0, K_i \in \hat{\Phi}. \end{cases}$$

**Théorème 3.2.12** (Yeh). Soient  $T_1, T_2, \dots, T_d$ ,  $d$  sortes de points,  $d \geq 1$ ,  $H \leq \mathfrak{S}_n$  et  $K_i \leq \mathfrak{S}_{k_i}$ ,  $i \in \llbracket d \rrbracket$ ,  $k_i \in \mathbb{N}^*$ . On a  $\forall n_1, n_2, \dots, n_d \in \mathbb{N}$  tels que  $n_1 + n_2 + \dots + n_d = n$

$$\frac{T_1^{n_1} T_2^{n_2} \dots T_d^{n_d}}{H \cap \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots, n_d}} \Big|_{T_i = X^{k_i} / K_i, i=1, 2, \dots, d} = \frac{X^{\sum n_i k_i}}{H \wr_{n_1, n_2, \dots, n_d} (K_1, K_2, \dots, K_d)}.$$

*Démonstration.* Voir le théorème III.2.3 de [54]. ■

**Remarque 3.2.13.** Quels que soient  $n_1, n_2, \dots \in \mathbb{N}$  tels que  $n_1 + n_2 + \dots = n < \infty$ ,  $H \leq \mathfrak{S}_n$ , et  $K_i \leq \mathfrak{S}_{k_i}$ ,  $i \in \mathbb{N}^*$ ,  $k_i \in \mathbb{N}^*$ , on peut toujours ramener l'expression du groupe  $H \wr_{n_1, n_2, \dots} (K_1, K_2, \dots)$  à une expression de la forme  $H \wr_{m_1, m_2, \dots} (H_1, H_2, \dots)$  où  $m_1, m_2, \dots \in \mathbb{N}^*$  et  $(H_1, H_2, \dots)$  est simplement la suite obtenue de  $(K_1, K_2, \dots)$  en omettant les groupes  $K_i$  lorsque  $n_i = 0$ ,  $i \geq 1$ , et en décalant le tout vers la gauche. Par exemple, pour  $H \leq \mathfrak{S}_{11}$ ,

$$\begin{aligned} H \wr_{0,0,3,0,4,1,0,1,0,2,0,\dots} (K_1, K_2, \dots) &= H \wr_{0,0,3,0,4,1,0,1,0,2} (K_1, K_2, \dots, K_{10}) \\ &= H \wr_{3,4,1,1,2} (K_3, K_5, K_6, K_8, K_{10}) \end{aligned}$$

Ceci nous permet de dire que  $\hat{\Phi}$  est fortement stable sous le produit en couronne généralisé lorsque  $\{id_1\} \in \hat{\Phi}$  et  $\forall n_1, n_2, \dots \in \mathbb{N}^*$  tels que  $n_1 + n_2 + \dots = n < \infty$ ,  $\forall H \leq \mathfrak{S}_n$ , et  $\forall K_i \leq \mathfrak{S}_{k_i}$ ,  $i \in \mathbb{N}^*$ ,  $k_i \in \mathbb{N}^*$  :

$$H \wr_{n_1, n_2, \dots} (K_1, K_2, \dots) \in \hat{\Phi} \iff \begin{cases} H \cap \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots} \in \hat{\Phi} \\ \text{et} \\ K_1, K_2, \dots \in \hat{\Phi}. \end{cases}$$

De plus,  $\forall n_1, n_2, \dots, n_\ell \in \mathbb{N}^*$  tels que  $(n_1, n_2, \dots, n_\ell)^+ = \lambda \vdash n$ , on sait qu'il existe  $\omega \in \mathfrak{S}_n$  tel que  $\omega \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots, n_\ell} \omega^{-1} = \mathfrak{S}_\lambda$  et que  $\forall H \leq \mathfrak{S}_n$ ,

$$H \cap \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots, n_\ell} = H^\omega \cap \mathfrak{S}_\lambda.$$

Soit  $f$  une bijection qui associe au vecteur  $(n_1, n_2, \dots, n_\ell)$  le vecteur  $(n_1, n_2, \dots, n_\ell)^+ = \lambda$ , c.-à-d. :  $n_i \mapsto \lambda_{f(i)}$ , on a :

$$H \wr_{n_1, n_2, \dots, n_\ell} (H_1, H_2, \dots, H_\ell) \equiv H^\omega \wr_\lambda (H_{f^{-1}(1)}, H_{f^{-1}(2)}, \dots, H_{f^{-1}(\ell)}).$$

Reprenons l'exemple ci-dessus. Soit  $\omega \in \mathfrak{S}_n$  telle que  $\omega \mathfrak{S}_{3,4,1,1,2} \omega^{-1} = \mathfrak{S}_{4,3,2,1,1}$ , on a :

$$\begin{aligned} H \wr_{3,4,1,1,2} (H_1, H_2, H_3, H_4, H_5) &\equiv H^\omega \wr_{4,3,2,1,1} (H_2, H_1, H_5, H_3, H_4) \\ &= H^\omega \wr_{4,3,2,1,1} (K_5, K_3, K_{10}, K_6, K_8). \end{aligned}$$

Nous pouvons donc dire que  $\hat{\Phi}$  est fortement stable sous le produit en couronne généralisé lorsque  $\{id_1\} \in \hat{\Phi}$  et  $\forall \lambda \vdash n < \infty$ , en  $\ell \geq 1$  parts,  $\forall H \leq \mathfrak{S}_n$ , et  $\forall K_i \leq \mathfrak{S}_{k_i}$ ,  $i \in \llbracket \ell \rrbracket$ ,  $k_i \in \mathbb{N}^*$  :

$$H \wr_\lambda (K_1, K_2, \dots, K_\ell) \in \hat{\Phi} \iff \begin{cases} H \cap \mathfrak{S}_\lambda \in \hat{\Phi} \\ \text{et} \\ K_1, K_2, \dots, K_\ell \in \hat{\Phi}. \end{cases}$$

□

**Exemples 3.2.14.** Examinons quelques cas de produits en couronne généralisé.

1. Soient  $H \leq \mathfrak{S}_n$ ,  $n_1, n_2, \dots \in \mathbb{N}^*$  tels que  $n_1 + n_2 + \dots = n < \infty$ . Si  $\forall i \in \mathbb{N}^*$ ,  $K_i = \{id_1\}$ , alors

$$\begin{aligned} \frac{T_1^{n_1} T_2^{n_2} \dots}{H \cap \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots}} \Big|_{T_i = X, i \geq 1} &= \frac{X^n}{H \wr_{n_1, n_2, \dots} (\{id_1\}, \{id_1\}, \dots)} \\ &= \frac{X^n}{H \cap \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots}} \end{aligned}$$

$$\text{et } H \wr_{n_1, n_2, \dots} (\{id_1\}, \{id_1\}, \dots) = H \cap \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots}$$

2. Soient  $H \leq \mathfrak{S}_n$  et  $K_i \leq \mathfrak{S}_{k_i}$ ,  $i \in \mathbb{N}^*$ ,  $k_i \in \mathbb{N}^*$  des groupes fixés, si  $\lambda = (1^n)$  alors

$$\begin{aligned}
\frac{X^{\sum \lambda_i k_i}}{H \wr_{\lambda_1, \lambda_2, \dots} (K_1, K_2, \dots)} &= \frac{T_1^{\lambda_1} T_2^{\lambda_2} \dots}{H \cap \mathfrak{S}_\lambda} \Big|_{T_i = X^{k_i}/K_i, i \geq 1} \\
&= \frac{T_1 T_2 \dots T_n}{\{id_n\}} \Big|_{T_i = X^{k_i}/K_i, i \geq 1} \\
&= T_1 T_2 \dots T_n \Big|_{T_i = X^{k_i}/K_i, i \geq 1} \\
&= \frac{X^{k_1}}{K_1} \cdot \frac{X^{k_2}}{K_2} \dots \frac{X^{k_n}}{K_n} \\
&= \frac{X^{\sum k_i}}{K_1 \star K_2 \star \dots \star K_n}
\end{aligned}$$

et  $H \wr_{\underline{1}, \dots, \underline{1}, 0, \dots} (K_1, K_2, \dots, K_n, \dots) = K_1 \star K_2 \star \dots \star K_n$ . Par conséquent, lorsque  $\{id_0\} \in \hat{\Phi}$ ,  $\{id_2\} \in \hat{\Phi}$  et  $\hat{\Phi}$  est fortement stable sous le produit en couronne généralisé,  $\hat{\Phi}$  l'est aussi sous le produit externe de groupes, voir le lemme 3.2.3.

3. Soient  $H \leq \mathfrak{S}_n$  et  $K_i \leq \mathfrak{S}_{k_i}$ ,  $i \in \mathbb{N}^*$ ,  $k_i \in \mathbb{N}^*$  des groupes fixés, si  $\lambda = (n)$  alors

$$\begin{aligned}
\frac{X^{\sum \lambda_i k_i}}{H \wr_\lambda (K_1, K_2, \dots)} &= \frac{T_1^{\lambda_1} T_2^{\lambda_2} \dots}{H \cap \mathfrak{S}_n} \Big|_{T_i = X^{k_i}/K_i, i \geq 1} \\
&= \frac{T_1^n}{H} \Big|_{T_1 = X^{k_1}/K_1} \\
&= \frac{X^n}{H} \circ \frac{X^{k_1}}{K_1} = \frac{X^{nk_1}}{H \wr K_1}
\end{aligned}$$

et  $H \wr_{n, 0, \dots} (K_1, K_2, \dots) = H \wr K_1$ . Ainsi, lorsque  $\hat{\Phi}$  est fortement stable sous le produit en couronne généralisé, il l'est aussi sous le produit en couronne.  $\diamond$

**Lemme 3.2.15.** Soient  $\Phi, \Psi$  et  $\Omega$ , trois ensembles formés de groupes non conjugués deux à deux. Pour une espèce moléculaire  $M = X^n/H$ ,  $H \leq \mathfrak{S}_n$ , et pour une espèce  $\mathbb{A}$ -pondérée  $G_v = \sum_{i=1}^{\ell} \left( \frac{X^{k_i}}{K_i} \right)_{a_i}$  où  $K_i \leq \mathfrak{S}_{k_i}$ ,  $k_i \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_i \in \mathbb{A}$ ,  $1 \leq i \leq \ell < \infty$ , et où  $a_i \neq a_j$  lorsque  $i \neq j$  on a :

$$\Phi_{M \circ G_v}(x, x^2, \dots) = \Psi_M(\widetilde{G_v}^\Omega(x), \widetilde{G_v^2}^\Omega(x^2), \dots)$$

si et seulement si,

$\forall n_1, n_2, \dots, n_\ell \in \mathbb{N}$  tels que  $n_1 + n_2 + \dots + n_\ell = n$ ,

$$\begin{aligned} & \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots, n_\ell} \setminus \mathfrak{S}_n / H} \chi(H^\tau \lambda_{n_1, n_2, \dots, n_\ell}(K_1, K_2, \dots, K_\ell) \in \hat{\Phi}) \\ &= \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots, n_\ell} \setminus \mathfrak{S}_n / H} \chi(H^\tau \cap \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots, n_\ell} \in \hat{\Psi}) \prod_{i=1}^{\ell} \chi^{n_i}(K_i \in \hat{\Omega}). \end{aligned}$$

*Démonstration.* D'une part, employant la proposition 1.5.5, la décomposition moléculaire de la proposition 2.1.1, la commutation sous l'addition et le théorème 3.2.12, on obtient successivement

$$\begin{aligned} \Phi_{M \circ G_v}(x, x^2, \dots) &= (M \circ G_v)^{\sim \Phi}(x) \\ &= \left( \sum_{\substack{n_1 + n_2 + \dots + n_\ell = n \\ \tau \in \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots, n_\ell} \setminus \mathfrak{S}_n / H}} \frac{T_1^{n_1} T_2^{n_2} \dots T_\ell^{n_\ell}}{H^\tau \cap \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots, n_\ell}} \Bigg|_{\substack{T_i := (X^{k_i} / K_i)_{a_i} \\ 1 \leq i \leq \ell}} \right)^{\sim \Phi}(x) \\ &= \sum_{\substack{n_1 + n_2 + \dots + n_\ell = n \\ \tau \in \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots, n_\ell} \setminus \mathfrak{S}_n / H}} \left( \frac{T_1^{n_1} T_2^{n_2} \dots T_\ell^{n_\ell}}{H^\tau \cap \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots, n_\ell}} \Bigg|_{\substack{T_i := (X^{k_i} / K_i)_{a_i} \\ 1 \leq i \leq \ell}} \right)^{\sim \Phi}(x) \\ &= \sum_{\substack{n_1 + n_2 + \dots + n_\ell = n \\ \tau \in \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots, n_\ell} \setminus \mathfrak{S}_n / H}} \left( \frac{X^{\sum_{i=1}^{\ell} n_i k_i}}{H^\tau \lambda_{n_1, n_2, \dots, n_\ell}(K_1, K_2, \dots, K_\ell)} \right)^{\sim \Phi}_{a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_\ell^{n_\ell}}(x) \\ &= \sum_{\substack{n_1 + n_2 + \dots + n_\ell = n \\ \tau \in \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots, n_\ell} \setminus \mathfrak{S}_n / H}} \chi(H^\tau \lambda_{n_1, n_2, \dots, n_\ell}(K_1, K_2, \dots, K_\ell) \in \hat{\Phi}) \prod_{i=1}^{\ell} a_i^{n_i} x^{n_i k_i}. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\widetilde{G}_v^\Omega(x) = \sum_{i=1}^{\ell} \left( \frac{X^{k_i}}{K_i} \right)_{a_i}^{\sim \Omega}(x) = \sum_{i=1}^{\ell} \chi(K_i \in \hat{\Omega}) a_i x^{k_i},$$

d'où

$$\Psi_M(\widetilde{G}_v^\Omega(x), \widetilde{G}_{v^2}^\Omega(x^2), \dots) = \Psi_M \left( \sum_{i=1}^{\ell} \chi(K_i \in \hat{\Omega}) a_i x^{k_i}, \sum_{i=1}^{\ell} \chi(K_i \in \hat{\Omega}) a_i^2 x^{2k_i}, \dots \right).$$

Par définition,

$$\Psi_M(t_1 + t_2 + \dots + t_\ell, t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_\ell^2, \dots) = M(X_{t_1} + X_{t_2} + \dots + X_{t_\ell})^{\sim \Psi}(1)$$

et ainsi,

$$\begin{aligned}
& \Psi_M(\widetilde{G}_v^\Omega(x), \widetilde{G}_{v^2}^\Omega(x^2), \dots) \\
&= M(X_{t_1} + X_{t_2} + \dots + X_{t_\ell})^{\sim\Psi}(1) \Big|_{\substack{t_i := \chi(K_i \in \hat{\Omega}) a_i x^{k_i} \\ 1 \leq i \leq \ell}} \\
&= \sum_{\substack{n_1+n_2+\dots+n_\ell=n \\ \tau \in \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots, n_\ell} \setminus \mathfrak{S}_n/H}} \left( \frac{X^n}{H^\tau \cap \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots, n_\ell}} \right)^{\sim\Psi} (1) \Big|_{\substack{t_i := \chi(K_i \in \hat{\Omega}) a_i x^{k_i} \\ 1 \leq i \leq \ell}} \\
&= \sum_{\substack{n_1+n_2+\dots+n_\ell=n \\ \tau \in \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots, n_\ell} \setminus \mathfrak{S}_n/H}} \chi(H^\tau \cap \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots, n_\ell} \in \hat{\Psi}) t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots t_\ell^{n_\ell} \Big|_{\substack{t_i := \chi(K_i \in \hat{\Omega}) a_i x^{k_i} \\ 1 \leq i \leq \ell}} \\
&= \sum_{\substack{n_1+n_2+\dots+n_\ell=n \\ \tau \in \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots, n_\ell} \setminus \mathfrak{S}_n/H}} \chi(H^\tau \cap \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots, n_\ell} \in \hat{\Psi}) \prod_{i=1}^{\ell} \chi^{n_i}(K_i \in \hat{\Omega}) a_i^{n_i} x^{n_i k_i}
\end{aligned}$$

Par comparaison de l'expression obtenue pour  $\Psi_M(\widetilde{G}_v^\Omega(x), \widetilde{G}_{v^2}^\Omega(x^2), \dots)$  avec celle obtenue pour  $(M \circ G_v)^{\sim\Phi}(x)$ , le résultat suit.  $\blacksquare$

**Remarque 3.2.16.** Dans le cas particulier où

$$G = \left( X^{k_1}/K_1 \right)_{a_1} + \left( X^{k_2}/K_2 \right)_{a_2}$$

on a :

$$\Phi_{M \circ G_v}(x, x^2, \dots) = \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ \tau \in \mathfrak{S}_{n_1, n_2} \setminus \mathfrak{S}_n/H}} \sum \chi(H^\tau \wr_{n_1, n_2} (K_1, K_2) \in \hat{\Phi}) a_1^{n_1} a_2^{n_2} x^{n_1 k_1 + n_2 k_2}$$

et

$$\begin{aligned}
& \Psi_M(\widetilde{G}_v^\Omega(x), \widetilde{G}_{v^2}^\Omega(x^2), \dots) = \\
& \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ \tau \in \mathfrak{S}_{n_1, n_2} \setminus \mathfrak{S}_n/H}} \chi(H^\tau \cap \mathfrak{S}_{n_1, n_2} \in \hat{\Psi}) \chi^{n_1}(K_1 \in \hat{\Omega}) \chi^{n_2}(K_2 \in \hat{\Omega}) a_1^{n_1} a_2^{n_2} x^{n_1 k_1 + n_2 k_2}.
\end{aligned}$$

Lorsque  $a_1 = a_2$ , les conditions du lemme 3.2.15 sur les ensembles  $\Phi, \Psi$  et  $\Omega$  sont suffisantes pour que

$$\Phi_{M \circ G_v}(x, x^2, \dots) = \Psi_M(\widetilde{G}_v^\Omega(x), \widetilde{G}_{v^2}^\Omega(x^2), \dots)$$

sans toutefois être nécessaires. Par contre, lorsque  $a_1 \neq a_2$  même lorsque  $K_1 \equiv K_2$ , les conditions sur  $\Phi, \Psi$  et  $\Omega$  demeurent nécessaires et suffisantes.  $\square$



En pratique, on s'intéresse aux conditions qui, imposées à  $\hat{\Phi}$ , sont suffisantes pour que, quelles que soient l'espèce moléculaire  $M$  et l'espèce pondérée  $G_v$ , on ait

$$\Phi_{M \circ G_v}(x, x^2, \dots) = \Phi_M \left( \widetilde{G_v}^{\Phi}(x), \widetilde{G_{v^2}}^{\Phi}(x^2), \dots \right).$$

**Remarque 3.2.17.** Soient  $M$  et  $G_v$ , deux espèces telles que définies au lemme 3.2.15.

Lorsque  $\hat{\Phi} = \hat{\Psi} = \hat{\Omega}$ , on a

$$\Phi_{M \circ G_v}(x, x^2, \dots) = \Phi_M \left( \widetilde{G_v}^{\Phi}(x), \widetilde{G_{v^2}}^{\Phi}(x^2), \dots \right)$$

si et seulement si

$$\begin{aligned} & \sum_{\tau \subseteq \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots, n_\ell} \setminus \mathfrak{S}_n / H} \chi(H^\tau \lambda_{n_1, n_2, \dots, n_\ell}(K_1, K_2, \dots, K_\ell) \in \hat{\Phi}) \\ &= \sum_{\tau \subseteq \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots, n_\ell} \setminus \mathfrak{S}_n / H} \chi(H^\tau \cap \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots, n_\ell} \in \hat{\Phi}) \prod_{i=1}^{\ell} \chi^{n_i}(K_i \in \hat{\Phi}). \end{aligned}$$

Clairement,

$$\Phi_{M \circ G_v}(x, x^2, \dots) = \Phi_M \left( \widetilde{G_v}^{\Phi}(x), \widetilde{G_{v^2}}^{\Phi}(x^2), \dots \right) \quad (3.8)$$

si  $\forall n_1, n_2, \dots, n_\ell \in \mathbb{N}$  tels que  $n_1 + n_2 + \dots + n_\ell = n$  et si  $\forall \tau \subseteq \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots, n_\ell} \setminus \mathfrak{S}_n / H$ ,

$$\chi(H^\tau \lambda_{n_1, n_2, \dots, n_\ell}(K_1, K_2, \dots, K_\ell) \in \hat{\Phi}) = \chi(H^\tau \cap \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots, n_\ell} \in \hat{\Phi}) \prod_{i=1}^{\ell} \chi^{n_i}(K_i \in \hat{\Phi}).$$

Or, lorsque  $\hat{\Phi}$  est fortement stable sous le produit en couronne généralisé, on a :  $\forall \ell \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall n_1, n_2, \dots, n_\ell \in \mathbb{N}$  tels que  $n_1 + n_2 + \dots + n_\ell = n$ ,  $\forall K \leq \mathfrak{S}_n$  et  $\forall K_i \leq \mathfrak{S}_{k_i}$ ,  $i \in \mathbb{N}^*$ ,  $k_i \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\chi(K \lambda_{n_1, n_2, \dots, n_\ell}(K_1, K_2, \dots, K_\ell) \in \hat{\Phi}) = \chi(K \cap \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots, n_\ell} \in \hat{\Phi}) \prod_{i=1}^{\ell} \chi^{n_i}(K_i \in \hat{\Phi}).$$

En particulier,  $\forall \tau \subseteq \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots, n_\ell} \setminus \mathfrak{S}_n / H$ ,

$$\chi(H^\tau \lambda_{n_1, n_2, \dots, n_\ell}(K_1, K_2, \dots, K_\ell) \in \hat{\Phi}) = \chi(H^\tau \cap \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots, n_\ell} \in \hat{\Phi}) \prod_{i=1}^{\ell} \chi^{n_i}(K_i \in \hat{\Phi}).$$

Ainsi, le fait que  $\hat{\Phi}$  soit fortement stable sous le produit en couronne généralisé est suffisant pour qu'on ait l'égalité (3.8).  $\square$

**Proposition 3.2.18.** *Soit  $\Phi \subseteq \{K \in \text{cc}(\mathfrak{S}_n) \mid n \geq 0\}$ , un ensemble de groupes non conjugués deux à deux. Si  $\hat{\Phi}$  est fortement stable sous le produit en couronne généralisé alors, pour toute espèce moléculaire  $M$  et pour toute espèce  $\mathbb{A}$ -pondérée  $G_v$ ,  $G[\emptyset] = \emptyset$ ,*

$$\Phi_{M \circ G_v}(x, x^2, \dots) = \Phi_M \left( \widetilde{G}_v^\Phi(x), \widetilde{G}_{v^2}^\Phi(x^2), \dots \right).$$

*Démonstration.* Puisqu'une  $M \circ G_v$ -structure est toujours formée d'une  $M$ -assemblée finie de  $G_v$ -structures on peut supposer que  $G_v$  est de la forme

$$G_v = \sum_{i=1}^{\ell} \left( \frac{X^{k_i}}{K_i} \right)_{a_i} \quad (3.9)$$

où  $K_i \leq \mathfrak{S}_{k_i}$ ,  $k_i \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_i \in \mathbb{A}$ ,  $1 \leq i \leq \ell < \infty$ . Les conditions étant imposées à  $\hat{\Phi}$  et non aux espèces  $M$  et  $G_v$ , on peut considérer distincts les poids  $a_i \in \mathbb{A}$ ,  $i \geq 1$ , intervenant dans la décomposition (3.9). En tenant compte du lemme 3.2.15 et de la remarque 3.2.17, le résultat suit. ■

**Proposition 3.2.19.** *Soit  $\Phi \subseteq \{K \in \text{cc}(\mathfrak{S}_n) \mid n \geq 0\}$ , un ensemble de groupes non conjugués deux à deux. Si  $\hat{\Phi}$  est fortement stable sous le produit en couronne généralisé alors, pour toutes espèces pondérées  $F_w$  et  $G_v$ ,  $G_v[\emptyset] = \emptyset$ ,*

$$\Phi_{F_w \circ G_v}(x_1, x_2, \dots) = \Phi_{F_w} \circ \Phi_{G_v}(x_1, x_2, \dots).$$

*Démonstration.* Notons d'abord qu'on peut se restreindre au cas où  $F_w$  est une espèce moléculaire non pondérée et le résultat suivra par linéarité. Soit  $F_w = M = X^n/H$ ,  $H \leq \mathfrak{S}_n$ . D'une part, on a, par définition,

$$\begin{aligned} (M \circ G_{v,t})^{\sim\Phi}(x) &= ((M \circ G_v) \circ X_t)^{\sim\Phi}(x) \\ &= \Phi_{M \circ G_v}(x_1 x, x_2 x^2, \dots). \end{aligned}$$

D'autre part, par la proposition 3.2.18, si  $\hat{\Phi}$  est fortement stable sous le produit en couronne généralisé alors

$$\begin{aligned} (M \circ G_{v,t})^{\sim\Phi}(x) &= (M \circ (G_v \circ X_t))^{\sim\Phi}(x) \\ &= \Phi_M((G_v \circ X_t)^{\sim\Phi}(x), (G_{v^2} \circ X_{t^2})^{\sim\Phi}(x^2), \dots), \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned}
\Phi_{M \circ G_v}(x_1 x, x_2 x^2, \dots) &= \Phi_M((G_v \circ X_t)^{\sim \Phi}(x), (G_{v^2} \circ X_{t^2})^{\sim \Phi}(x^2), \dots) \\
&= \Phi_M(\Phi_{G_v}(x_1 x, x_2 x^2, \dots), \Phi_{G_{v^2}}(x_2 x^2, x_4 x^4, \dots), \dots) \\
&= \Phi_M \circ \Phi_{G_v}(x_1 x, x_2 x^2, \dots),
\end{aligned}$$

le résultat suit. ■

**Corollaire 3.2.20.** *Pour toutes espèces pondérées  $F = F_w$  et  $G = G_v$ ,  $G[\emptyset] = \emptyset$ , on a :*

$$Z_{F \circ G}(x_1, x_2, \dots) = Z_F \circ Z_G(x_1, x_2, \dots)$$

et

$$\Gamma_{F \circ G}(x_1, x_2, \dots) = \Gamma_F \circ \Gamma_G(x_1, x_2, \dots).$$

△

### 3.3 Les espèces primitives et g-primitives

Dans le but de construire divers exemples d'ensembles  $\Phi$  de groupes tels que les transformations  $F \mapsto \Phi_F$  possèdent des propriétés particulières, nous introduisons maintenant les concepts de groupe g-primitif et d'espèce g-primitive. Essentiellement (voir les définitions 3.3.1 et 3.3.5), les groupes g-primitifs sont irréductibles sous le produit en couronne généralisé, tandis que les groupes primitifs sont irréductibles sous le produit en couronne simple. Commençons par quelques rappels concernant la primitivité simple au sens de Bouchard et de Ouellette [6].

**Définition 3.3.1.** *Une espèce atomique  $P \neq X$  est dite primitive si elle est indécomposable sous la substitution d'espèces, c.-à-d. :  $P = M \circ N \Rightarrow M = X$  ou  $N = X$ . On dit qu'un groupe  $H \leq \mathfrak{S}_n$  est primitif lorsque l'espèce  $X^n/H$  est primitive.*

Désignons par  $\mathcal{P}$ , l'ensemble de toutes les espèces primitives non pondérées et à isomorphisme naturel près,

$$\mathcal{P} = \left\{ E_2, E_3, C_3, E_4, E_4^\pm, P_4^{\text{bic}}, C_4, \dots \right\}.$$

En particulier, pour  $k \geq 2$ , toutes les espèces  $E_k$  et  $C_k$  sont primitives.

**Remarque 3.3.2.** Une notion "plus exigeante" d'action primitive existe déjà dans la littérature, voir par exemple Rose [43]. Essentiellement, pour  $H \leq \mathfrak{S}_U$ , on dit que  $B \subset U$  est un *bloc* de l'action de  $H$  sur  $U$  si  $0 \neq |B| \neq 1$  et si  $\forall \sigma \in H$ ,  $\sigma(B) = B$  ou  $\sigma(B) \cap B = \emptyset$ . L'action du groupe  $H$  sur l'ensemble  $U$  est dite primitive si elle est transitive et si elle n'admet aucun bloc.  $\square$

Dans notre contexte, un groupe atomique  $H \neq \{id_1\}$ , c.-à-d. : l'espèce  $X^n/H$  est atomique, est primitif s'il est indécomposable (sauf trivialement) sous le produit en couronne, c.-à-d. :  $H = H_1 \wr H_2 \Rightarrow H_1 = \{id_1\}$  ou  $H_2 = \{id_1\}$ .

**Proposition 3.3.3** (Bouchard et Ouellette [6]). *Pour toute espèce atomique  $A \neq X$  il existe une espèce primitive  $P$  et une espèce moléculaire  $M$ , uniques à isomorphisme naturel près, telles que  $A = P \circ M$ . De plus, si  $B, C$  et  $D$  sont des espèces moléculaires alors  $(B \circ C = B \circ D \Rightarrow C = D)$  et  $(B \circ C = D \circ C \Rightarrow B = D)$ .*  $\triangle$

**Remarque 3.3.4.** Puisque tout ensemble  $\hat{\Phi}$  fortement stable sous le produit en couronne généralisé l'est nécessairement sous le produit en couronne, on a :  $P \circ M \in \text{mol}(\Phi) \cap \mathcal{A} \iff P \in \text{mol}(\Phi) \cap \mathcal{P}$  et  $M \in \text{mol}(\Phi)$ , où  $\mathcal{A}$  désigne l'ensemble de toutes les espèces atomiques non pondérées et à isomorphisme naturel près.  $\square$

En ce qui concerne le produit en couronne généralisé, nous introduisons la définition suivante.

**Définition 3.3.5.** *Le produit en couronne généralisé,*

$$H = K \wr_{n_1, n_2, \dots, n_\ell} (K_1, K_2, \dots, K_\ell),$$

où  $1 \leq \ell < \infty$  et  $n_1, n_2, \dots, n_\ell \in \mathbb{N}$ , est trivial si

$$H = \begin{cases} K \cap \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots, n_\ell} \\ \text{ou} \\ K_i, \text{ pour un } i \in \llbracket \ell \rrbracket. \end{cases}$$

Un groupe  $H \neq \{id_1\}$  est  $g$ -primitif, ou primitif généralisé, s'il est indécomposable, sauf trivialement, sous le produit en couronne généralisé. De plus, on dit que l'espèce  $X^n/H$  est  $g$ -primitive lorsque le groupe  $H$  est  $g$ -primitif.

**Proposition 3.3.6.** *Toute espèce  $g$ -primitive différente de 1 et de  $X^2$  est primitive.*

*Démonstration.* Il est évident que toute espèce atomique  $g$ -primitive est primitive. Nous allons démontrer qu'une espèce moléculaire non atomique n'est pas  $g$ -primitive à moins que celle-ci ne soit l'espèce 1 ou l'espèce  $X^2$ . Nous considérons  $M = X^n/H$ ,  $H \leq \mathfrak{S}_n$ , une espèce moléculaire non atomique. Soit  $M = A_1 A_2 \cdots A_\ell$  la décomposition de  $M$  en produit d'espèces atomiques  $A_i$ ,  $i \in [\ell]$ ,  $\ell \geq 2$ . Posons  $A_i = X^{n_i}/H_i$  pour  $i \in [\ell]$ . On a

$$M = \frac{X^n}{H} = \frac{X^{n_1}}{H_1} \cdot \frac{X^{n_2}}{H_2} \cdot \cdots \cdot \frac{X^{n_\ell}}{H_\ell} = A_1 A_2 \cdots A_\ell$$

d'où

$$H \equiv H_1 \star H_2 \star \cdots \star H_\ell = \{id_\ell\}_{\lambda_{1,1}, \dots, 1} (H_1, H_2, \dots, H_\ell). \quad (3.10)$$

On vérifie facilement que le produit en couronne (3.10) est trivial si et seulement si  $H_1 = H_2 = \cdots = H_\ell = \{id_1\}$  et ce, si et seulement si  $H = \{id_\ell\}$ , c.-à-d. :  $M = X^\ell$ ,  $\ell \geq 2$ . Or, pour tout  $\ell \geq 3$ , on peut toujours écrire le groupe  $\{id_\ell\}$  comme le produit en couronne généralisé non trivial

$$\{id_\ell\} = \{id_2\}_{\lambda_{1,1}} (\{id_1\}, \{id_{\ell-1}\}).$$

Par conséquent, une espèce moléculaire non atomique n'est pas  $g$ -primitive à moins que celle-ci ne soit l'espèce 1 ou l'espèce  $X^2$ . Par contraposée, le résultat suit.  $\blacksquare$

**Corollaire 3.3.7.** *Toute espèce  $g$ -primitive différente de 1 et de  $X^2$  est atomique.*  $\triangle$

**Remarque 3.3.8.** Une espèce peut être primitive sans être  $g$ -primitive. Par exemple, considérons l'espèce primitive  $X^2 C_3 / \mathbb{Z}_2 = X^5 / Q$  où, voir [9, 33],

$$Q = \{id_5, (23)(45), (12)(45), (13)(45), (123), (132)\} \leq \mathfrak{S}_{3,2}.$$

Le groupe  $Q_{\lambda_{3,2}}(\{id_1\}, \{id_2\}) \leq \mathfrak{S}_7$  est primitif sans être  $g$ -primitif. En effet, d'une part, l'espèce quotient, voir [9],

$$\frac{X^7}{Q_{\lambda_{3,2}}(\{id_1\}, \{id_2\})} = \frac{(X^2)^2 C_3}{\mathbb{Z}_2} = \frac{X^7}{\langle (123), (12)(45)(67) \rangle}$$

est atomique ; l'action de  $\mathbb{Z}_2$  sur une  $(X^2)^2C_3$ -structure consiste à changer l'orientation des deux ordres linéaires et du cycle simultanément. D'autre part, si l'espèce

$$X^7/Q \wr_{3,2} (\{id_1\}, \{id_2\})$$

n'est pas primitive, alors il existe  $M = X^m/H \neq X$  et  $N = X^k/K \neq X$  telles que

$$M \circ N = X^7/Q \wr_{3,2} (\{id_1\}, \{id_2\}).$$

Puisque  $M \circ N$  est concentrée sur le cardinal  $mk = 7$  et que 7 est un nombre premier,  $M = X$  ou  $N = X$  et il y a une contradiction. L'espèce  $X^7/Q \wr_{3,2} (\{id_1\}, \{id_2\})$  est donc primitive.  $\square$

**Définition 3.3.9.** On dit qu'un ensemble  $\hat{\Phi}$  de groupes est engendré sous le produit externe par un ensemble  $G$  de groupes si

- $\{id_0\} \in \hat{\Phi}$  et  $\hat{G} \subseteq \hat{\Phi}$ ,
- $\forall H_1 \in \hat{\Phi}$  et  $\forall H_2 \in \hat{\Phi}$ ,  $H_1 \star H_2 \in \hat{\Phi}$ ,
- $\hat{\Phi}$  est le plus petit ensemble saturé de groupes satisfaisant les deux premières conditions.

De même, on dit qu'un ensemble  $\hat{\Phi}$  de groupes est engendré sous le produit en couronne (simple) par un ensemble  $G$  de groupes si

- $\{id_1\} \in \hat{\Phi}$  et  $\hat{G} \subseteq \hat{\Phi}$ ,
- $\forall H_1 \in \hat{\Phi}$  et  $\forall H_2 \in \hat{\Phi}$ ,  $H_1 \wr H_2 \in \hat{\Phi}$ ,
- $\hat{\Phi}$  est le plus petit ensemble saturé de groupes satisfaisant les deux premières conditions.

**Proposition 3.3.10.** Un ensemble  $\hat{\Phi}$  engendré sous le produit en couronne (simple) et sous le produit externe par un ensemble de groupes primitifs est fortement stable sous ces deux opérations.

*Démonstration.* Le résultat est obtenu, par contradiction, comme conséquence des lois de simplification données à la proposition 3.3.3 et de la proposition 1.3.21.  $\blacksquare$

Par contre, l'exemple suivant montre, qu'en général, il ne suffit pas qu'un ensemble  $\hat{\Phi}$  soit fortement stable sous le produit en couronne (simple) et sous le produit

externe pour que, quelles que soient les espèces  $F$  et  $G$ , on ait  $\Phi_{F \circ G}(x_1, x_2, \dots) = \Phi_F \circ \Phi_G(x_1, x_2, \dots)$ .

**Exemple 3.3.11.** Considérons  $\hat{\Omega}$ , le plus petit ensemble saturé de groupes qui contient  $\Gamma$  et qui est engendré sous le produit en couronne et sous le produit externe par l'ensemble ne contenant que le groupe  $Q$  décrit à la remarque 3.3.8.

Rappelons que si  $\Gamma \subseteq \Phi$  et que la transformation  $F \mapsto \Phi_F$  préserve l'opération de substitution alors

$$\left( \frac{X^2 C_3}{\mathbb{Z}_2} \circ (X + X^2) \right)^{\sim \Phi} (x) = \Phi_{\frac{X^2 C_3}{\mathbb{Z}_2}}(x + x^2, x^2 + x^4, x^3 + x^6, \dots). \quad (3.11)$$

Dans le cas de  $\Omega$ , l'affirmation (3.11) est fautive. Il suffit de comparer les coefficients de  $x^7$  dans les expressions

$$\left( \frac{X^2 C_3}{\mathbb{Z}_2} \circ (X + X^2) \right)^{\sim \Omega} (x) \text{ et } \Omega_{\frac{X^2 C_3}{\mathbb{Z}_2}}(x + x^2, x^2 + x^4, x^3 + x^6, \dots).$$

D'une part, posant  $Y = X^2$  dans la décomposition moléculaire de  $\frac{X^2 C_3}{\mathbb{Z}_2} \circ (X + Y)$  fournie à l'appendice 2.14 de [5], on trouve

$$\begin{aligned} [x^7] \left( \frac{X^2 C_3}{\mathbb{Z}_2} \circ (X + X^2) \right)^{\sim \Omega} (x) = \\ \chi \left( \frac{(X^2)^2 C_3}{\mathbb{Z}_2} \in \text{mol}(\Omega) \right) + \chi(X^7 \in \text{mol}(\Omega)) + \chi(XE_2(X^3) \in \text{mol}(\Omega)). \end{aligned}$$

Clairement, l'espèce primitive  $\frac{(X^2)^2 C_3}{\mathbb{Z}_2}$  et l'espèce moléculaire  $XE_2(X^3)$  n'appartiennent pas à  $\text{mol}(\Omega)$  et, puisque  $X^7 \in \text{mol}(\Omega)$ , on a :

$$[x^7] \left( \frac{X^2 C_3}{\mathbb{Z}_2} \circ (X + X^2) \right)^{\sim \Omega} (x) = 1.$$

D'autre part, en utilisant Maple [8] et le principe décrit à l'exemple 2.1.8, voir le tableau 3.3, on obtient

$$\begin{aligned} \Omega_{\frac{X^2 C_3}{\mathbb{Z}_2}}(x_1, x_2, x_3, \dots) &= \sum_{\lambda \vdash 5} T_\lambda^\Omega(Q) \text{mon}_\lambda(t_1, t_2, t_3, \dots) \\ &= \text{mon}_5 + 2\text{mon}_{3,2} + 3\text{mon}_{3,1,1} + 4\text{mon}_{2,2,1} \\ &\quad + 10\text{mon}_{2,1,1,1} + 20\text{mon}_{1,1,1,1,1} \\ &= \frac{1}{6}x_1^5 - \frac{1}{6}x_1^2 x_3 - \frac{1}{2}x_1 x_2^2 + \frac{3}{2}x_2 x_3 \end{aligned}$$

et

$$[x^7] \Omega_{\frac{X^2 C_3}{\mathbb{Z}_2}}(x + x^2, x^2 + x^4, x^3 + x^6, \dots) = 2.$$

◇

Tableau 3.3 – La décomposition de  $\frac{X^2 C_3}{\mathbb{Z}_2}(X_{t_1} + X_{t_2} + \dots)$ 

$\lambda$	$ \{\tau \in \mathfrak{S}_\lambda \setminus \mathfrak{S}_5 / Q\} $	$\overline{(\tau Q \tau^{-1}) \cap \mathfrak{S}_\lambda}$	$\frac{X^5}{(\tau Q \tau^{-1}) \cap \mathfrak{S}_\lambda}$
(5)	1	$Q$	$\frac{X^2 C_3}{\mathbb{Z}_2}$
(4, 1)	1	$\overline{\langle (123) \rangle}$	$X^2 C_3$
	1	$\overline{\langle (12)(34) \rangle}$	$X E_2(X^2)$
(3, 2)	1	$Q$	$\frac{X^2 C_3}{\mathbb{Z}_2}$
	1	$\overline{\langle (12)(34) \rangle}$	$X E_2(X^2)$
	1	$\{id_5\}$	$X^5$
(3, 1, 1)	1	$\overline{\langle (123) \rangle}$	$X^2 C_3$
	3	$\{id_5\}$	$X^5$
(2, 2, 1)	2	$\overline{\langle (12)(34) \rangle}$	$X E_2(X^2)$
	4	$\{id_5\}$	$X^5$
(2, 1, 1, 1)	10	$\{id_5\}$	$X^5$
(1, 1, 1, 1, 1)	20	$\{id_5\}$	$X^5$



**Définition 3.3.12.** On dit que  $\hat{\Phi}$  est engendré sous le produit en couronne généralisé par un ensemble  $G$  de groupes si

- $\{id_1\} \in \hat{\Phi}$  et  $\hat{G} \subseteq \hat{\Phi}$ ,
- pour  $n_1, n_2, \dots \in \mathbb{N}^*$ , si  $K \cap \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots} \in \hat{\Phi}$  et  $K_1, K_2, \dots \in \hat{\Phi}$  alors

$$K \wr_{n_1, n_2, \dots} (K_1, K_2, \dots) \in \hat{\Phi},$$

- $\hat{\Phi}$  est le plus petit ensemble saturé de groupes satisfaisant les deux premières conditions.

Si le saturé  $\hat{\Phi}$  d'un ensemble de groupes est fortement stable sous le produit en couronne généralisé alors il est engendré par l'ensemble des groupes  $g$ -primitifs qu'il contient. En particulier, si  $G_1 = \{H \subseteq cc(\mathfrak{S}_n) \mid n \geq 0, H \text{ est } g\text{-primitif}\}$  alors l'ensemble  $\hat{Z}$  de tous les groupes est engendré par  $G_1$  sous le produit en couronne généralisé. De même, si  $G_2 = \{\{id_0\}, \{id_2\}\}$  alors l'ensemble  $\hat{\Gamma}$ , de tous les groupes triviaux, est engendré par  $G_2$  sous le produit en couronne généralisé.

**Exemples 3.3.13.** Un sous-ensemble  $G$  de  $\{H \subseteq cc(\mathfrak{S}_n) \mid n \geq 0, H \text{ est } g\text{-primitif}\}$ , ne contenant pas  $\{id_0\}$  ou  $\{id_2\}$ , peut très bien engendrer, sous le produit en couronne généralisé, un ensemble  $\hat{\Phi}$  qui n'est pas fortement stable sous le produit externe de groupes. En particulier,

- si  $G = \emptyset$  alors  $\hat{\Phi} = \{\{id_1\}\}$  et le seul élément de  $\text{mol}(\hat{\Phi})$  est l'espèce  $X$  des singletons ;
- si  $G = \{\{id_2\}\}$  alors  $\hat{\Phi} = \widehat{\Gamma^*} = \hat{\Gamma} - \{\{id_0\}\}$  et les éléments de  $\text{mol}(\hat{\Phi})$  sont de la forme  $X^n$ ,  $n \geq 1$  ;
- si  $G = \{\mathfrak{S}_N\}$ , où  $N$  est fixé et  $N \geq 2$ , alors

$$\{\{id_1\}, \mathfrak{S}_N, \mathfrak{S}_N \wr \mathfrak{S}_N, \mathfrak{S}_N \wr \mathfrak{S}_N \wr \mathfrak{S}_N, \dots\}^\wedge \subseteq \hat{\Phi}$$

et les espèces  $X, E_N, E_N \circ E_N, E_N \circ E_N \circ E_N, \dots$  sont éléments de  $\text{mol}(\hat{\Phi})$  ;

- si  $G = \{\mathbb{Z}_N\}$ , où  $N$  est fixé et  $N \geq 3$ , alors

$$\{\{id_1\}, \mathbb{Z}_N, \mathbb{Z}_N \wr \mathbb{Z}_N, \mathbb{Z}_N \wr \mathbb{Z}_N \wr \mathbb{Z}_N, \dots\}^\wedge \subseteq \hat{\Phi}$$

et les espèces  $X, C_N, C_N \circ C_N, C_N \circ C_N \circ C_N, \dots$  sont éléments de  $\text{mol}(\hat{\Phi})$ .  $\diamond$

On s'intéresse particulièrement aux ensembles  $\hat{\Phi}$  qui sont fortement stables sous le produit en couronne généralisé et sous le produit externe de groupes. Ainsi, le calcul de la  $\Phi$ -série d'une espèce pondérée  $F = F_w$  peut être largement simplifié par l'utilisation d'égalités combinatoires faisant intervenir la somme, le produit, la dérivation, le pointage et la substitution d'espèces.

**Exemples 3.3.14.** Rappelons qu'un ensemble  $\hat{\Phi}$  fortement stable sous le produit en couronne généralisé qui contient  $\Gamma$  est fortement stable sous le produit externe de groupes. Ainsi, n'importe lequel des ensembles générateurs (d'ensembles fortement stables sous le produit en couronne généralisé) présentés aux exemples 3.3.13, par la réunion avec l'ensemble  $\{\{id_0\}, \{id_2\}\}$ , donne lieu à un ensemble qui est fortement stable sous le produit en couronne généralisé et sous le produit externe de groupes. Notons que chacun de ces ensembles contient  $\{id_1\}$ .

$$\begin{array}{c}
 \text{ensemble générateurs : } G \\
 \hline
 \{\{id_0\}, \{id_2\}, \mathfrak{S}_k \mid 2 \leq k \leq N < \infty\} \\
 \{\{id_0\}, \{id_2\}, \mathfrak{S}_n \mid 2 \leq n < \infty\} \\
 \{\{id_0\}, \{id_2\}, \mathbb{Z}_k \mid 2 \leq k \leq N < \infty\} \\
 \{\{id_0\}, \{id_2\}, \mathbb{Z}_n \mid 2 \leq n < \infty\} \\
 \{\{id_0\}, \{id_2\}, \mathfrak{S}_n, \mathbb{Z}_k \mid 2 \leq n < \infty, 3 \leq k < \infty\} \\
 \vdots
 \end{array}$$

◇

**Remarque 3.3.15.** Nous désignons par  $\hat{\mathcal{E}}$  l'ensemble engendré sous le produit en couronne et sous le produit externe par  $G = \{\mathfrak{S}_n \mid n \geq 2\}$ . Évidemment, il contient  $\Gamma$  et tous les sous-groupes de Young. Plus précisément, les espèces de  $\text{mol}(\mathcal{E})$  sont de l'une des formes suivantes

1. 1 ou  $X$
2.  $A_1^{a_1} A_2^{a_2} \cdots A_\ell^{a_\ell}$  où, pour  $1 \leq i \leq \ell < \infty$ ,  $A_i \in \text{mol}(\mathcal{E}) \cap \mathcal{A}$
3.  $E_n(M)$  où  $n \geq 2$  et  $M \in \text{mol}(\mathcal{E})$

où les seules espèces atomiques de  $\text{mol}(\mathcal{E})$  sont  $X$  et  $E_n(M)$ ,  $n \geq 2$ , où  $M \in \text{mol}(\mathcal{E})$ . De plus, nous désignons par  $\hat{\mathcal{C}}$  l'ensemble engendré sous le produit en couronne et sous le produit externe par  $G = \{\mathbb{Z}_n \mid n \geq 2\}$ . Il contient  $\Gamma$  ainsi que tous les produits de groupes cycliques. Plus précisément, les espèces de  $\text{mol}(\mathcal{C})$  sont de l'une des formes suivantes

1. 1 ou  $X$
2.  $A_1^{a_1} A_2^{a_2} \cdots A_\ell^{a_\ell}$  où, pour  $1 \leq i \leq \ell < \infty$ ,  $A_i \in \text{mol}(\mathcal{C}) \cap \mathcal{A}$
3.  $C_n(M)$  où  $n \geq 2$  et  $M \in \text{mol}(\mathcal{C})$

où les seules espèces atomiques de  $\text{mol}(\mathcal{C})$  sont  $X$  et  $C_n(M)$ ,  $n \geq 2$ , où  $M \in \text{mol}(\mathcal{C})$ .

Notons que, par la proposition 3.3.10, les ensembles  $\hat{\mathcal{E}}$  et  $\hat{\mathcal{C}}$  sont fortement stables sous le produit en couronne (simple) et sous le produit externe.  $\square$

En général, les ensembles engendrés sous le produit en couronne (simple) et sous le produit externe par un ensemble de groupes primitifs, même s'ils contiennent  $\Gamma$ , ne sont pas pour autant, engendré sous le produit en couronne généralisé par un ensemble de groupes g-primitifs, voir l'exemple 3.3.11 à cet effet. Par contre, nous allons voir à la proposition 3.3.19 que l'ensemble  $\hat{\mathcal{E}}$  est engendré sous le produit en couronne généralisé par

$$G_{\mathcal{E}} = \{\{id_0\}, \{id_2\}, \mathfrak{S}_n \mid 2 \leq n < \infty\}$$

et que  $\hat{\mathcal{C}}$  est engendré sous le produit en couronne généralisé par

$$G_{\mathcal{C}} = \{\{id_0\}, \{id_2\}, \mathbb{Z}_n \mid 2 \leq n < \infty\}.$$

Nous montrons, par ces exemples, que certains ensembles engendrés sous le produit en couronne (simple) et sous le produit externe de groupes par un ensemble de groupes primitifs, sont aussi engendré sous le produit en couronne généralisé par un ensemble de groupes g-primitifs.

**Définition 3.3.16.** *Le saturé  $\hat{\Phi}$  d'un ensemble de groupes est dit Young-fermé si*

$$\forall n \geq 1, \forall H \leq \mathfrak{S}_n, \forall \lambda \vdash n, \text{ si } H \in \hat{\Phi} \text{ alors } H \cap \mathfrak{S}_\lambda \in \hat{\Phi}.$$

**Proposition 3.3.17.** Soit  $\Phi \subseteq \{K \subseteq \mathfrak{S}_n \mid n \geq 0\}$ , un ensemble de groupes non conjugués deux à deux. Si  $\hat{\Phi}$  est Young-fermé alors

$$\forall M \in \text{mol}(\Phi), \Phi_M(x_1, x_2, \dots) = Z_M(x_1, x_2, \dots).$$

*Démonstration.* Pour  $M = X^n/H \in \text{mol}(\Phi)$ ,  $H \leq \mathfrak{S}_n$ , on a

$$\Phi_M(x_1, x_2, \dots)|_{x_k = \sum_{i \geq 1} t_i^k} = \sum_{\lambda \vdash n} T_\lambda^\Phi(H) \text{mon}_\lambda(t_1, t_2, \dots)$$

où  $T_\lambda^\Phi(H) = |\{\tau \in \mathfrak{S}_\lambda \setminus \mathfrak{S}_n/H \mid H^\tau \cap \mathfrak{S}_\lambda \in \hat{\Phi}\}|$ . Puisque  $\forall H \in \Phi$ ,  $\forall \tau \in \mathfrak{S}_\lambda \setminus \mathfrak{S}_n/H$ , on a  $H^\tau \in \hat{\Phi}$ , le fait que  $\hat{\Phi}$  soit Young-fermé implique que  $T_\lambda^\Phi(H) = |\mathfrak{S}_\lambda \setminus \mathfrak{S}_n/H|$  et que

$$\Phi_M(x_1, x_2, \dots)|_{x_k = \sum_{i \geq 1} t_i^k} = \sum_{\lambda \vdash n} |\mathfrak{S}_\lambda \setminus \mathfrak{S}_n/H| \text{mon}_\lambda(t_1, t_2, \dots) = Z_M(x_1, x_2, \dots).$$

■

**Lemme 3.3.18.** Soient  $K \leq \mathfrak{S}_\nu$  et  $\nu_1, \nu_2, \dots \in \mathbb{N}$  tels que  $\nu_1 + \nu_2 + \dots = \nu \geq 2$ . Si  $K \cap \mathfrak{S}_{\nu_1, \nu_2, \dots}$  est réductible sous le produit externe de groupes alors pour tous groupes  $K_1, K_2, \dots$  tels que  $K_i \leq \mathfrak{S}_{k_i}$ ,  $i \in \mathbb{N}^*$ ,  $k_i \in \mathbb{N}^*$  le groupe

$$K \wr_{\nu_1, \nu_2, \dots} (K_1, K_2, \dots)$$

est réductible sous le produit externe de groupes.

*Démonstration.* Par le critère de réductibilité de Yeh, si  $K \cap \mathfrak{S}_{\nu_1, \nu_2, \dots}$  est réductible sous le produit externe de groupes alors il existe  $W \subset [\nu]$ ,  $\emptyset \neq W \neq [\nu]$ , tel que  $\forall \sigma \in K \cap \mathfrak{S}_{\nu_1, \nu_2, \dots}$ ,

- $\forall \omega \in W$ ,  $\sigma(\omega) \in W$  et  $\forall \omega \in [\nu] - W = W^*$ ,  $\sigma(\omega) \in W^*$
- $\sigma|_W \star id_{W^*} \in K \cap \mathfrak{S}_{\nu_1, \nu_2, \dots}$

Représentons les éléments de  $W$  et ceux des colonnes correspondantes par  $\cdot$ , de même, représentons les éléments de  $W^*$  et ceux des colonnes correspondantes par  $\odot$ .

	·   ⊙   ⊙   ⊙	
	·   ⊙   ⊙   ⊙	
·   ⊙   ⊙   ·   ·	·   ⊙   ⊙   ⊙	
·   ⊙   ⊙   ·   ·	·   ⊙   ⊙   ⊙	...
·   ⊙   ⊙   ·   ·	·   ⊙   ⊙   ⊙	
·   ⊙   ⊙   ·   ·	·   ⊙   ⊙   ⊙	
·   ⊙   ⊙   ·   ·	·   ⊙   ⊙   ⊙	...
$\nu_1$ colonnes	$\nu_2$ colonnes	...

A la suite de la remarque 3.2.9, on constate que le groupe  $K \wr_{\nu_1, \nu_2, \dots} (K_1, K_2, \dots)$  s'identifie à un produit

$$(H_1 \wr_{w_1, w_2, \dots} (K_1, K_2, \dots)) \star (H_2 \wr_{w_1^*, w_2^*, \dots} (K_1, K_2, \dots))$$

où, pour  $i \geq 1$ ,  $w_i + w_i^* = \nu_i$ ,

$$H_1 \cap \mathfrak{S}_{w_1, w_2, \dots} = \{\sigma|_W \star id_{W^*} \mid \sigma \in K \cap \mathfrak{S}_{\nu_1, \nu_2, \dots}\}$$

et

$$H_2 \cap \mathfrak{S}_{w_1^*, w_2^*, \dots} = \{id_W \star \sigma|_{W^*} \mid \sigma \in K \cap \mathfrak{S}_{\nu_1, \nu_2, \dots}\}.$$

■

**Proposition 3.3.19.** *Les ensembles  $\hat{\mathcal{E}}$  et  $\hat{\mathcal{C}}$  sont respectivement engendré, sous le produit en couronne généralisé, par  $G_{\mathcal{E}}$  et  $G_{\mathcal{C}}$ .*

*Démonstration.* On doit montrer que pour  $\hat{\mathcal{F}} = \hat{\mathcal{E}}$  et  $\hat{\mathcal{F}} = \hat{\mathcal{C}}$ ,  $\forall n_1, n_2, \dots \in \mathbb{N}$  tels que  $n_1 + n_2 + \dots = n$ ,  $\forall K \leq \mathfrak{S}_n$  tel que  $K \cap \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots} \in \hat{\mathcal{F}}$  et  $\forall K_1, K_2, \dots \in \hat{\mathcal{F}}$ ,

$$K \wr_{n_1, n_2, \dots} (K_1, K_2, \dots) \in \hat{\mathcal{F}}.$$

Puisque dans les deux cas,  $\hat{\mathcal{F}}$  est engendré sous le produit externe de groupes par un ensemble de groupes g-primitifs, par le lemme 3.3.18, il suffit de considérer le groupe  $K \cap \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots}$  comme irréductible sous le produit. Autrement dit, l'espèce  $\frac{X^n}{K \cap \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots}}$  est atomique.

De plus, puisque dans les deux cas,  $\hat{\Phi}$  est engendré sous le produit en couronne par un ensemble de groupes g-primitifs, comme conséquence de la proposition 3.3.3, on peut se restreindre au cas où

$$\frac{X^n}{K \cap \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots}} = P \circ M \text{ où } P = \frac{X^p}{Q} \in \text{mol}(\Phi) \cap \mathcal{P} \text{ et } M = \frac{X^m}{H} \in \text{mol}(\Phi).$$

Examinons la décomposition moléculaire de

$$P \circ M (T_1 + T_2 + \dots) |_{T_i = N_i := X^{k_i}/K_i}.$$

Par l'associativité de la substitution, on a :

$$\begin{aligned} & P \circ M (T_1 + T_2 + \dots) |_{T_i = N_i := X^{k_i}/K_i} \\ &= \sum_{n_1 + n_2 + \dots = mp} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots} \setminus \mathfrak{S}_{mp}/(Q \wr H)} \frac{X^{\sum n_i k_i}}{(Q \wr H)^\tau \wr_{n_1, n_2, \dots} (K_1, K_2, \dots)} \\ &= P \circ \left( \sum_{m_1 + m_2 + \dots = m} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{m_1, m_2, \dots} \setminus \mathfrak{S}_m/H} \frac{X^{\sum m_i k_i}}{H^\sigma \wr_{m_1, m_2, \dots} (K_1, K_2, \dots)} \right) \\ &= P \circ \left( \frac{X^{\mu_1}}{H_1} + \frac{X^{\mu_2}}{H_2} + \dots \right) \\ &= \sum_{p_1 + p_2 + \dots = p} \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_{p_1, p_2, \dots} \setminus \mathfrak{S}_p/Q} \frac{X^{\sum p_i \mu_i}}{Q^\rho \wr_{p_1, p_2, \dots} (H_1, H_2, \dots)}. \end{aligned}$$

Ces égalités signifient que  $\forall n_1, n_2, \dots \in \mathbb{N}$  tels que  $n_1 + n_2 + \dots = mp$  et

$$\forall \tau \in \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots} \setminus \mathfrak{S}_{mp}/(Q \wr H),$$

$$(Q \wr H)^\tau \wr_{n_1, n_2, \dots} (K_1, K_2, \dots) \in \hat{\Phi}$$

si et seulement si  $\forall p_1, p_2, \dots \in \mathbb{N}$  tels que  $p_1 + p_2 + \dots = p$  et  $\forall \rho \in \mathfrak{S}_{p_1, p_2, \dots} \setminus \mathfrak{S}_p/Q$

$$Q^\rho \wr_{p_1, p_2, \dots} (H_1, H_2, \dots) \in \hat{\Phi}.$$

Le fait que les ensembles  $\widehat{G}_\mathcal{E}$  et  $\widehat{G}_\mathcal{C}$  soient Young-fermé (ce qui est facile à vérifier) nous assure que  $\forall Q \in \widehat{G}_\mathcal{E} \cap \mathcal{P}$ , respectivement  $\forall Q \in \widehat{G}_\mathcal{C} \cap \mathcal{P}$ , et  $\forall \rho \in \mathfrak{S}_{p_1, p_2, \dots} \setminus \mathfrak{S}_p/Q$ , on a  $Q^\rho \in \widehat{G}_\mathcal{E}$ , respectivement  $Q^\rho \in \widehat{G}_\mathcal{C}$ .

Ainsi, pour tout groupe primitif  $Q$  de  $\hat{\Phi}$ , que  $\hat{\Phi}$  soit  $\hat{\mathcal{E}}$  ou  $\hat{\mathcal{C}}$ ,  $Q \leq \mathfrak{S}_n$ ,  $n \geq 1$ ,  $\forall p_1, p_2, \dots \in \mathbb{N}$  tels que  $p_1 + p_2 + \dots = p$  et  $\forall \rho \in \mathfrak{S}_{p_1, p_2, \dots} \setminus \mathfrak{S}_p / Q$

$$Q^\rho \wr_{p_1, p_2, \dots} (H_1, H_2, \dots) \in \hat{\Phi}$$

lorsque  $H_1, H_2, \dots \in \hat{\Phi}$ .

Il suffit de procéder par induction sur l'ordre des produits en couronne généralisé et le résultat suit. ■

Notons qu'un ensemble de groupes peut très bien être engendré sous le produit en couronne généralisé sans toutefois être Young-fermé. Il suffit de considérer l'ensemble engendré sous le produit en couronne généralisé par  $\{\{id_0\}, \{id_2\}, \mathfrak{S}_3\}$ . Celui-ci n'est pas Young-fermé puisque  $\mathfrak{S}_3 \cap \mathfrak{S}_{2,1} = \mathfrak{S}_{2,1} \notin \hat{\Phi}$ .

Comme nous l'avons vu, il n'est pas difficile, en utilisant la notion de groupes g-primitifs, de construire des exemples d'ensembles saturés de groupes  $\hat{\Phi}$ , qui sont fortement stables sous le produit en couronne généralisé et sous le produit externe. La difficulté est plutôt de démontrer que ces ensembles sont différents de  $\hat{Z}$ , soit en trouvant la forme explicite des éléments de  $\text{mol}(\Phi) \subset \mathcal{M}$ , soit en montrant que tout produit en couronne généralisé de  $\hat{\Phi} \neq \hat{Z}$  ne s'écrit qu'à l'aide des groupes engendrés par l'ensemble des groupes g-primitifs de  $\hat{\Phi}$ .

**Proposition 3.3.20.** *Les ensembles  $\hat{\mathcal{E}}$  et  $\hat{\mathcal{C}}$  sont fortement stables sous le produit en couronne généralisé.*<sup>1</sup> △

---

1. Au dépôt initial de cette thèse, cette proposition était, en fait, une conjecture. Étant donné les propriétés des groupes symétriques et celles des groupes cycliques, nous étions convaincus de la véracité de celle-ci, il nous manquait, par contre, l'argument mathématique appuyant notre intuition. G. Labelle l'a démontrée au cours de l'été 1995. En fait, il a démontré le résultat suivant : si un ensemble saturé  $\hat{\Phi}$  de groupes est engendré, sous le produit en couronne généralisé, par un ensemble saturé de groupes g-primitifs alors  $\hat{\Phi}$  est fortement stable sous le produit en couronne généralisé.

## Chapitre 4

# Une exploration des $\Phi$ -séries indicatrices : formules explicites

Dans ce chapitre, nous appliquons la théorie générale développée aux chapitres précédents au calcul de formules explicites pour les séries indicatrices des  $\Phi$ -symétries,  $\Phi_F(x_1, x_2, \dots)$ , d'espèces  $F$  particulières :  $E$  (les ensembles),  $C$  (les cycles orientés),  $S$  (les permutations),  $ALT$  (les permutations paires),  $NALT$  (les permutations impaires),  $A$  (les arborescences),  $End$  (les endofonctions),  $Ar$  (les arbres) et  $\Lambda^{(\alpha)}$  (l'espèce pondératrice des composantes connexes). Ces  $\Phi$ -séries généralisent les résultats correspondants pour les séries  $Z_F$  et  $\Gamma_F$  dispersés dans la littérature récente [10, 12, 18], [22] à [28], [30] et [33].

### 4.1 Les ensembles

Plusieurs familles de structures combinatoires sont obtenues en considérant des assemblées de structures connexes. Nous commençons donc par étudier la série indicatrice des  $\Phi$ -symétries de l'espèce  $E$  des ensembles.

**Proposition 4.1.1.** *Soit  $\Phi \subseteq \{K_{\subseteq cc}(\mathfrak{S}_n) \mid n \geq 0\}$ , un ensemble de groupes non*



conjugués deux à deux. La  $\Phi$ -série de l'espèce  $E$ , des ensembles, est donnée par

$$\Phi_E(x_1, x_2, \dots)|_{x_i = \sum_{k \geq 1} t_k^i} = \sum_{n \geq 0} \sum_{\lambda \vdash n} \chi(\mathfrak{S}_\lambda \in \hat{\Phi}) \text{mon}_\lambda(t_1, t_2, \dots). \quad (4.1)$$

Si  $\hat{\Phi}$  est fortement stable sous le produit externe de groupes alors

$$\Phi_E(x_1, x_2, \dots) = \exp \left\{ \sum_{k \geq 1} \xi_k \frac{x_k}{k} \right\} \quad (4.2)$$

où les coefficients  $\xi_k$  sont donnés par

$$\sum_{k \geq 1} \xi_k \frac{x^k}{k} = \ln \left( \sum_{n \in J} x^n \right), \quad J = \{n \mid \mathfrak{S}_n \in \hat{\Phi}\}. \quad (4.3)$$

Si, de plus,  $\{id_1\} \in \hat{\Phi}$  alors  $\xi_1 = 1$ .

*Démonstration.* Puisque  $E = \sum_{n \geq 0} E_n = \sum_{n \geq 0} X^n / \mathfrak{S}_n$ , pour démontrer (4.1), il suffit de poser  $H = \mathfrak{S}_n$  dans l'expression (2.2) et de constater que  $T_\lambda^\Phi(\mathfrak{S}_n) = \chi(\mathfrak{S}_\lambda \in \hat{\Phi})$ .

Si  $\hat{\Phi}$  est fortement stable sous le produit externe de groupes alors  $\{id_0\} \in \hat{\Phi}$  et

$$\begin{aligned} \Phi_E(x_1, x_2, \dots)|_{x_k = \sum_{i \geq 1} t_i^k} &= (E(X_{t_1} + X_{t_2} + \dots))^{\sim\Phi}(1) = \prod_{i \geq 1} (E(X_{t_i}))^{\sim\Phi}(1) \\ &= \prod_{i \geq 1} \left( \sum_{n \geq 0} (E_n(X_{t_i}))^{\sim\Phi}(1) \right) = \prod_{i \geq 1} \left( \sum_{n \geq 0} (E_n)_{t_i^n}^{\sim\Phi}(1) \right) \\ &= \prod_{i \geq 1} \left( \sum_{n \geq 0} \chi(\mathfrak{S}_n \in \hat{\Phi}) t_i^n \right) = \prod_{i \geq 1} \left( \sum_{n \in J} t_i^n \right) \end{aligned}$$

où  $J = \{n \mid \mathfrak{S}_n \in \hat{\Phi}\}$ . Puisque  $\{id_0\} \in \hat{\Phi}$ , on peut écrire

$$\Phi_E(x_1, x_2, \dots)|_{x_k = \sum_{i \geq 1} t_i^k} = \prod_{i \geq 1} \left( \sum_{n \in J} t_i^n \right) = \exp \left\{ \sum_{i \geq 1} \ln \left( \sum_{n \in J} t_i^n \right) \right\}$$

et poser

$$\ln \left( \sum_{n \in J} x^n \right) = \ln \left( 1 + \sum_{n \in J - \{0\}} x^n \right) = \sum_{k \geq 1} \xi_k \frac{x^k}{k}.$$

Ainsi, pour  $x_k = \sum_{i \geq 1} t_i^k$ ,

$$\Phi_E(x_1, x_2, \dots) = \exp \left\{ \sum_{i \geq 1} \sum_{k \geq 1} \xi_k \frac{t_i^k}{k} \right\} = \exp \left\{ \sum_{k \geq 1} \frac{\xi_k}{k} \sum_{i \geq 1} t_i^k \right\} = \exp \left\{ \sum_{k \geq 1} \xi_k \frac{x_k}{k} \right\}$$

et (4.2) suit. Finalement, en comparant les coefficients de  $x^1$  dans les expressions

$$\sum_{n \in J} x^n = \exp \left\{ \sum_{k \geq 1} \xi_k \frac{x^k}{k} \right\} = 1 + \xi_1 x + O(x^2),$$

si  $\{id_1\} \in \hat{\Phi}$  alors  $1 \in J$  et  $\xi_1 = 1$ . ■

**Corollaire 4.1.2.** *Si  $\hat{\Phi}$  est fortement stable sous le produit externe de groupes alors la série des types de  $\Phi$ -symétries de l'espèce  $E$ , des ensembles, est donnée par*

$$\tilde{E}^\Phi(x) = \sum_{n \in J} x^n \text{ où } J = \{n \mid \mathfrak{S}_n \in \hat{\Phi}\}.$$

*Démonstration.* Puisque  $\Phi_E(x, x^2, x^3, \dots) = \tilde{E}^\Phi(x)$ , de (4.2) on a :

$$\Phi_E(x, x^2, x^3, \dots) = \exp \left\{ \sum_{k \geq 1} \xi_k \frac{x^k}{k} \right\} = \exp \left\{ \ln \left( \sum_{n \in J} x^n \right) \right\} = \sum_{n \in J} x^n.$$
■

Notons que si  $\Phi = Z = \{K \subseteq cc(\mathfrak{S}_n) \mid n \geq 0\}$  alors  $J = \{n \mid \mathfrak{S}_n \in \hat{Z}\} = \mathbb{N}$  et

$$\ln \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} x^n \right) = \ln \left( \frac{1}{1-x} \right) = \sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k}.$$

Ainsi,  $\forall k \geq 1$ ,  $\xi_k = 1$  et on retrouve bien la série indicatrice des cycles

$$Z_E(x_1, x_2, \dots) = \exp \left\{ \sum_{k \geq 1} \frac{x_k}{k} \right\}.$$

De plus, puisque  $\{n \mid \mathfrak{S}_n \in \hat{\Phi}\} = \mathbb{N}$  lorsque  $\Phi = \mathcal{E}$  et  $\Phi = Z$ , on a :

$$\mathcal{E}_E(x_1, x_2, \dots) = Z_E(x_1, x_2, \dots).$$

Si  $\Phi = \Gamma = \{\{id_n\} \mid n \geq 0\}$  alors  $J = \{n \mid \mathfrak{S}_n \in \hat{\Gamma}\} = \{0, 1\}$  et

$$\ln \left( \sum_{n \in J} x^n \right) = \ln(1+x) = \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}.$$

Ainsi,  $\forall k \geq 1$ ,  $\xi_k = (-1)^{k-1}$  et on retrouve bien la série indicatrice d'asymétrie

$$\Gamma_E(x_1, x_2, \dots) = \exp \left\{ \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} \frac{x_k}{k} \right\}.$$

On a aussi le résultat plus général suivant.

**Proposition 4.1.3.** Soit  $\Phi \subseteq \{K \in \text{cc}(\mathfrak{S}_n) \mid n \geq 0\}$ , un ensemble de groupes non conjugués deux à deux. Si  $\hat{\Phi}$  est fortement stable sous le produit externe de groupes et est tel que  $\{n \mid \mathfrak{S}_n \in \hat{\Phi}\} = \{0, 1, \dots, N-1\}$  où  $1 \leq N < \infty$  alors

$$\Phi_E(x_1, x_2, \dots) = \exp \left\{ \sum_{k \geq 1} \xi_k \frac{x_k}{k} \right\}$$

où

$$\xi_k = \begin{cases} 1 - N & \text{si } k = 0 \pmod N \\ 1 & \text{autrement.} \end{cases}$$

De plus, on a la relation

$$\Phi_E(x_1, x_2, \dots) = \frac{Z_E(x_1, x_2, \dots)}{Z_E(x_N, x_{2N}, \dots)}.$$

*Démonstration.* Si  $N = 1$  alors  $J = \{n \mid \mathfrak{S}_n \in \hat{\Phi}\} = \{0\}$  et

$$\Phi_E(x_1, x_2, \dots) = \Phi_{E_0}(x_1, x_2, \dots) = 1$$

et le résultat suit. Si  $N \geq 2$  alors  $J = \{n \mid \mathfrak{S}_n \in \hat{\Phi}\} = \{0, 1, \dots, N-1\}$  et

$$\sum_{j \in J} x^j = \sum_{j=1}^{N-1} x^j = \frac{1 - x^N}{1 - x}.$$

Nous allons extraire les coefficients  $\xi_k$ ,  $k \geq 1$ , pour la série

$$\Phi_E(x_1, x_2, \dots) = \exp \left\{ \sum_{k \geq 1} \xi_k \frac{x_k}{k} \right\}$$

de la relation

$$\sum_{j \in J} x^j = \frac{1 - x^N}{1 - x} = \exp \left\{ \sum_{k \geq 1} \xi_k \frac{x^k}{k} \right\}.$$

En développant l'expression  $\frac{1-x^N}{1-x}$ , on obtient successivement

$$\begin{aligned}
\frac{1-x^N}{1-x} &= \exp \{ \ln(1-x^N) - \ln(1-x) \} \\
&= \exp \left\{ \sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k} - \sum_{k \geq 1} \frac{x^{Nk}}{k} \right\} \\
&= \exp \left\{ \sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k} - N \sum_{k \geq 1} \frac{x^{Nk}}{Nk} \right\} \\
&= \exp \left\{ \sum_{\substack{k \geq 1 \\ k=0 \pmod N}} (1-N) \frac{x^k}{k} + \sum_{\substack{k \geq 1 \\ k \neq 0 \pmod N}} \frac{x^k}{k} \right\} \\
&= \exp \left\{ \sum_{k \geq 1} \xi_k \frac{x^k}{k} \right\}.
\end{aligned}$$

Par comparaison des deux dernières expressions,

$$\xi_k = \begin{cases} 1-N & \text{si } k = 0 \pmod N \\ 1 & \text{si } k \neq 0 \pmod N. \end{cases}$$

Remplaçant  $\xi_k$ ,  $k \geq 1$ , dans la  $\Phi$ -série de l'espèce des ensembles, on obtient

$$\begin{aligned}
\Phi_E(x_1, x_2, \dots) &= \exp \left\{ \sum_{\substack{k \geq 1 \\ k=0 \pmod N}} (1-N) \frac{x_k}{k} + \sum_{\substack{k \geq 1 \\ k \neq 0 \pmod N}} \frac{x_k}{k} \right\} \\
&= \exp \left\{ \sum_{k \geq 1} \frac{x_k}{k} - \sum_{k \geq 1} \frac{x_{Nk}}{k} \right\}
\end{aligned}$$

et, en passant au quotient des exponentielles, le résultat suit. ■

En posant  $N = 2$  à la proposition 4.1.3, on retrouve la relation entre la série indicatrice d'asymétrie et la série indicatrice des cycles de l'espèce des ensembles :

$$\Gamma_E(x_1, x_2, \dots) = \frac{Z_E(x_1, x_2, x_3, \dots)}{Z_E(x_2, x_4, x_6, \dots)}.$$

De plus, puisque  $\{n \mid \mathfrak{S}_n \in \hat{\mathcal{C}}\} = \{0, 1, 2\}$ , on a

$$\xi_k = \begin{cases} -2 & \text{si } k = 0 \pmod 3 \\ 1 & \text{si } k \neq 0 \pmod 3 \end{cases}$$

et la relation

$$\mathcal{C}_E(x_1, x_2, \dots) = \frac{Z_E(x_1, x_2, x_3, \dots)}{Z_E(x_3, x_6, x_9, \dots)}.$$

Plus généralement nous avons la proposition suivante.

**Proposition 4.1.4.** *Soit  $\Phi \subseteq \{K \subseteq \text{cc}(\mathfrak{S}_n) \mid n \geq 0\}$ , un ensemble de groupes non conjugués deux à deux. Si  $\hat{\Phi}$  est fortement stable sous le produit externe de groupes et est tel que*

$$\{n \mid \mathfrak{S}_n \in \hat{\Phi}\} = \{0, N^{\ell-1}, 2N^{\ell-1}, \dots, (N-1)N^{\ell-1}\},$$

où  $\ell \geq 1$  et  $N \geq 2$  sont fixés, alors

$$\Phi_E(x_1, x_2, \dots) = \exp \left\{ \sum_{k \geq 1} \xi_k \frac{x_k}{k} \right\}$$

où

$$\xi_k = \begin{cases} N^{\ell-1}(1-N) & \text{si } k = 0 \pmod{N^\ell} \\ N^{\ell-1} & \text{si } k = 0 \pmod{N^{\ell-1}} \text{ et } k \neq 0 \pmod{N^\ell} \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

De plus, on a la relation

$$\Phi_E(x_1, x_2, \dots) = \frac{Z_E(x_{N^{\ell-1}}, x_{2N^{\ell-1}}, x_{3N^{\ell-1}}, \dots)}{Z_E(x_{N^\ell}, x_{2N^\ell}, x_{3N^\ell}, \dots)}.$$

*Démonstration.* Le cas où  $\ell = 1$  a été traité à la proposition 4.1.3. Fixons les entiers  $N \geq 2$  et  $\ell \geq 2$ . Posons

$$J = \{0, N^{\ell-1}, 2N^{\ell-1}, \dots, (N-1)N^{\ell-1}\}$$

et suivons le même cheminement qu'à la démonstration de la proposition 4.1.3. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in J} x^j &= \sum_{i=0}^{N-1} x^{iN^{\ell-1}} = \frac{1 - x^{N^\ell}}{1 - x^{N^{\ell-1}}} \\
&= \exp \left\{ \ln \left( 1 - x^{N^\ell} \right) - \ln \left( 1 - x^{N^{\ell-1}} \right) \right\} \\
&= \exp \left\{ \sum_{k \geq 1} \frac{x^{kN^{\ell-1}}}{k} - \sum_{k \geq 1} \frac{x^{kN^\ell}}{k} \right\} \\
&= \exp \left\{ N^{\ell-1} \sum_{k \geq 1} \frac{x^{kN^{\ell-1}}}{kN^{\ell-1}} - N^\ell \sum_{k \geq 1} \frac{x^{kN^\ell}}{kN^\ell} \right\} \\
&= \exp \left\{ N^{\ell-1} \sum_{\substack{k \geq 1 \\ k=0 \pmod{N^{\ell-1}}} } \frac{x^k}{k} - N^\ell \sum_{\substack{k \geq 1 \\ k=0 \pmod{N^\ell}}} \frac{x^k}{k} \right\} \\
&= \exp \left\{ \sum_{k \geq 1} \xi_k \frac{x_k}{k} \right\}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\xi_k = \begin{cases} N^{\ell-1}(1 - N) & \text{si } k = 0 \pmod{N^\ell} \\ N^{\ell-1} & \text{si } k = 0 \pmod{N^{\ell-1}} \text{ et } k \neq 0 \pmod{N^\ell} \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\Phi_E(x_1, x_2, \dots) = \exp \left\{ \sum_{\substack{k=0 \pmod{N^{\ell-1}} \\ k \neq 0 \pmod{N^\ell}}} N^{\ell-1} \frac{x_k}{k} + \sum_{k=0 \pmod{N^\ell}} N^{\ell-1}(1 - N) \frac{x_k}{k} \right\}. \quad (4.4)$$

D'une part, posant  $k = N^{\ell-1}m$ ,

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{k=0 \pmod{N^{\ell-1}} \\ k \neq 0 \pmod{N^\ell}}} N^{\ell-1} \frac{x_k}{k} &= \sum_{m \geq 1} N^{\ell-1} \frac{x_{N^{\ell-1}m}}{N^{\ell-1}m} - \sum_{\substack{m \geq 1 \\ m=0 \pmod{N}}} N^{\ell-1} \frac{x_{N^{\ell-1}m}}{N^{\ell-1}m} \\
&= \sum_{m \geq 1} \frac{x_{N^{\ell-1}m}}{m} - \sum_{m \geq 1} \frac{x_{N^\ell m}}{Nm}. \quad (4.5)
\end{aligned}$$

D'autre part, posant  $k = N^\ell m$ ,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0 \pmod{N^\ell}} N^{\ell-1}(1 - N) \frac{x_k}{k} &= \sum_{m \geq 1} N^{\ell-1}(1 - N) \frac{x_{N^\ell m}}{N^\ell m} = \sum_{m \geq 1} \left( \frac{1}{N} - 1 \right) \frac{x_{N^\ell m}}{m} \\
&= \sum_{m \geq 1} \frac{x_{N^\ell m}}{Nm} - \sum_{m \geq 1} \frac{x_{N^\ell m}}{m}. \quad (4.6)
\end{aligned}$$

Lorsqu'on remplace le résultat de l'addition de (4.5) et de (4.6) dans (4.4) on obtient

$$\Phi_E(x_1, x_2, \dots) = \exp \left\{ \sum_{m \geq 1} \frac{x_{N^{\ell-1}m}}{m} - \sum_{m \geq 1} \frac{x_{N^\ell m}}{m} \right\}$$

et le résultat suit. ■

Dans le cas particulier où  $N$  est un nombre premier et  $\ell \geq 1$ , l'expression

$$\sum_{j \in J} x^j = \exp \left\{ \sum_{k \geq 1} \xi_k \frac{x_k}{k} \right\}$$

de la proposition précédente est intimement liée aux polynômes cyclotomiques définis par

$$C_n(x) = \prod_{d|n} (1 - x^{n/d})^{\mu(d)} \quad (4.7)$$

où  $\mu$  désigne la fonction de Möbius classique. Lorsque  $n = p^\ell$ ,  $p$  est premier et  $\ell \geq 1$ , on trouve que (4.7) se ramène à

$$C_{p^\ell}(x) = \prod_{0 \leq j \leq \ell} (1 - x^{p^{\ell-j}})^{\mu(p^j)} = \frac{1 - x^{p^\ell}}{1 - x^{p^{\ell-1}}} = \exp \left\{ \sum_{k \geq 1} \xi_k \frac{x_k}{k} \right\}$$

où

$$\begin{aligned} \xi_k &= - \sum_{i|(k, p^\ell)} i \mu\left(\frac{p^\ell}{i}\right) \\ &= \begin{cases} p^{\ell-1}(1-p) & \text{si } k = 0 \pmod{p^\ell} \\ p^{\ell-1} & \text{si } k = 0 \pmod{p^{\ell-1}} \text{ et } k \neq 0 \pmod{p^\ell} \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.8)$$

L'expression (4.8) est obtenue en développant le logarithme de (4.7) et  $(n, m)$  désigne le plus grand commun diviseur des entiers  $n$  et  $m$ .

Plusieurs familles de structures combinatoires sont obtenues en considérant des assemblées de structures connexes où chacune des composantes est de poids  $\alpha \in \mathbb{A}$ , où  $\mathbb{A}$  est un anneau pondérateur.

**Proposition 4.1.5.** *Soit  $\Phi \subseteq \{K \in \text{cc}(\mathfrak{S}_n) \mid n \geq 0\}$ , un ensemble de groupes non conjugués deux à deux. Si  $\{id_1\} \in \hat{\Phi}$  et si  $\hat{\Phi}$  est fortement stable sous le produit externe*

de groupes alors

$$\Phi_{E(X_\alpha)}(x_1, x_2, \dots) = \exp \left\{ \sum_{k \geq 1} \xi_k \alpha^k \frac{x_k}{k} \right\}$$

où  $X_\alpha$  désigne l'espèce des singletons de poids  $\alpha \in \mathbb{A}$  et les  $\xi_k$ ,  $k \geq 1$ , sont donnés par (4.3).

*Démonstration.* Puisque  $\{id_1\} \in \hat{\Phi}$ , à la suite de la remarque 3.2.1, on a

$$\Phi_{E(X_\alpha)}(x_1, x_2, \dots) = \Phi_E \circ \Phi_{X_\alpha}(x_1, x_2, \dots)$$

où  $\Phi_{X_\alpha}(x_1, x_2, \dots) = \alpha x_1$ . De la proposition 4.1.1, le résultat suit. ■

## 4.2 Les cycles orientés

Dans [25] G. Labelle a montré que, pour  $T_1, T_2, \dots$  une infinité de sortes de singletons,

$$C(T_1 + T_2 + \dots) = \sum_{n \geq 1} \sum_{d|n} \sum_{i_1+i_2+\dots=d} \lambda_{i_1, i_2, \dots} C_{n/d}(T_1^{i_1} T_2^{i_2} \dots) \quad (4.9)$$

où  $C$  désigne l'espèce des cycles orientés et  $\lambda_{i_1, i_2, \dots}$  est le nombre de mots de Lyndon sur l'alphabet totalement ordonné  $\{t_1 < t_2 < \dots\}$  dans lesquels il y a exactement  $i_k$  occurrences de la lettre  $t_k$ ,  $k \geq 1$ . Il a aussi montré que la forme explicite des coefficients  $\lambda_{i_1, i_2, \dots}$  est

$$\lambda_{i_1, i_2, \dots} = \frac{1}{i_1 + i_2 + \dots} \sum_{\delta | (i_1, i_2, \dots)} \mu(\delta) \binom{\frac{i_1+i_2+\dots}{\delta}}{\frac{i_1}{\delta}, \frac{i_2}{\delta}, \dots} \quad (4.10)$$

où  $\delta | (i_1, i_2, \dots)$  signifie que  $\delta | i_1, \delta | i_2, \dots$ .

**Proposition 4.2.1.** *Soit  $\Phi \subseteq \{K \subseteq \text{cc}(\mathfrak{S}_n) \mid n \geq 0\}$ , un ensemble de groupes non conjugués deux à deux. La  $\Phi$ -série de l'espèce  $C$ , des cycles orientés, est donnée par*

$$\Phi_C(x_1, x_2, \dots) = \sum_{(n, d) \in I(\Phi)} \frac{1}{d} \sum_{\delta | d} \mu(d/\delta) x_{n/\delta}^\delta$$

où  $I(\Phi) = \{(n, d) \mid 1 \leq d|n, C_{n/d}(X^d) \in \text{mol}(\Phi)\}$ .



*Démonstration.* La décomposition moléculaire de  $C(X_{t_1} + X_{t_2} + \dots)$  est obtenue de (4.9) en posant, pour  $i \geq 1$ ,  $T_i := X_{t_i}$ . Ainsi

$$\begin{aligned} C(X_{t_1} + X_{t_2} + \dots) &= \sum_{n \geq 1} \sum_{d|n} \sum_{i_1+i_2+\dots=d} \lambda_{i_1, i_2, \dots} C_{n/d}(X_{t_1}^{i_1} X_{t_2}^{i_2} \dots) \\ &= \sum_{n \geq 1} \sum_{d|n} \sum_{i_1+i_2+\dots=d} \lambda_{i_1, i_2, \dots} \left( C_{n/d}(X^d) \right)_{t_1^{i_1 n/d} t_2^{i_2 n/d} \dots} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Phi_C(t_1 + t_2 + \dots, t_1^2 + t_2^2 + \dots, \dots) \\ &= \sum_{n \geq 1} \sum_{d|n} \sum_{i_1+i_2+\dots=d} \lambda_{i_1, i_2, \dots} \left( C_{n/d}(X^d) \right)_{t_1^{i_1 n/d} t_2^{i_2 n/d} \dots}^{\sim \Phi} (x) \Big|_{x:=1} \\ &= \sum_{(n,d) \in I(\Phi)} \sum_{i_1+i_2+\dots=d} \lambda_{i_1, i_2, \dots} t_1^{i_1 n/d} t_2^{i_2 n/d} \dots \end{aligned}$$

où  $I(\Phi) = \{(n, d) \mid C_{n/d}(X^d) \in \text{mol}(\Phi)\}$ . Or, pour  $(n, d) \in I(\Phi)$  fixé on a, par (4.10),

$$\sum_{i_1+i_2+\dots=d} \lambda_{i_1, i_2, \dots} t_1^{i_1 n/d} t_2^{i_2 n/d} \dots = \sum_{i_1+i_2+\dots=d} \frac{1}{d} \sum_{\delta | (i_1, i_2, \dots)} \mu(\delta) \left( \frac{d}{\delta}, \frac{d}{\delta}, \dots \right) t_1^{i_1 n/d} t_2^{i_2 n/d} \dots$$

Posant, pour  $k \geq 1$ ,  $i_k = \delta j_k$  on a :  $i_1 + i_2 + \dots = d \Leftrightarrow j_1 + j_2 + \dots = d/\delta$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} &\sum_{i_1+i_2+\dots=d} \lambda_{i_1, i_2, \dots} t_1^{i_1 n/d} t_2^{i_2 n/d} \dots \\ &= \frac{1}{d} \sum_{\delta|d} \mu(\delta) \sum_{j_1+j_2+\dots=d/\delta} \binom{\frac{d}{\delta}}{j_1, j_2, \dots} t_1^{\delta j_1 n/d} t_2^{\delta j_2 n/d} \dots \\ &= \frac{1}{d} \sum_{\delta|d} \mu(\delta) \left( t_1^{\delta n/d} + t_2^{\delta n/d} + \dots \right)^{d/\delta} \\ &= \frac{1}{d} \sum_{\delta|d} \mu(\delta) x_{\delta n/d}^{d/\delta} = \frac{1}{d} \sum_{\delta|d} \mu(d/\delta) x_{n/\delta}^\delta \end{aligned}$$

et le résultat suit. ■

**Proposition 4.2.2.** *Soit  $\Phi \subseteq \{K \in \text{cc}(\mathfrak{S}_n) \mid n \geq 0\}$ , un ensemble de groupes non conjugués deux à deux. Si  $\hat{\Phi}$  est fortement stable sous le produit en couronne et sous le produit externe de groupes alors*

$$\Phi_C(x_1, x_2, \dots) = \sum_{n \geq 1} c_\Phi(n) \ln \left( \frac{1}{1 - x_n} \right)$$

où

$$c_{\Phi}(n) = \sum_{\substack{d|n \\ n/d \in I}} \frac{\mu(d)}{d}, \quad I = \{i \geq 1 \mid C_i \in \text{mol}(\Phi)\}. \quad (4.11)$$

*Démonstration.* Si  $\hat{\Phi}$  est fortement stable sous le produit en couronne alors  $X \in \text{mol}(\Phi)$  et, puisque  $\hat{\Phi}$  est fortement stable sous le produit externe,  $\forall d \geq 1, X^d \in \text{mol}(\Phi)$ . Ainsi,  $C_{n/d}(X^d) \in \text{mol}(\Phi) \Leftrightarrow C_{n/d} \in \text{mol}(\Phi)$ . Soit  $I = \{i \mid C_i \in \text{mol}(\Phi)\}$ , de la proposition 4.2.1 on a successivement

$$\begin{aligned} \Phi_C(x_1, x_2, \dots) &= \sum_{i \in I} \sum_{d \geq 1} \frac{1}{d} \sum_{\delta | d} \mu(d/\delta) x_{id/\delta}^{\delta} = \sum_{i \in I} \sum_{j \geq 1} \sum_{\delta \geq 1} \frac{1}{\delta j} \mu(j) x_{ij}^{\delta} \\ &= \sum_{i \in I} \sum_{j \geq 1} \frac{\mu(j)}{j} \sum_{\delta \geq 1} \frac{x_{ij}^{\delta}}{\delta} = \sum_{i \in I} \sum_{j \geq 1} \frac{\mu(j)}{j} \ln \left( \frac{1}{1 - x_{ij}} \right) \\ &= \sum_{n \geq 1} \sum_{\substack{d|n \\ n/d \in I}} \frac{\mu(d)}{d} \ln \left( \frac{1}{1 - x_n} \right) \end{aligned}$$

et le résultat suit. ■

**Corollaire 4.2.3.** *La série indicatrice des cycles, la série indicatrice d'asymétrie et la  $\mathcal{E}$ -série de l'espèce  $C$ , des cycles orientés, sont données par*

$$\begin{aligned} Z_C(x_1, x_2, \dots) &= \sum_{n \geq 1} \frac{\phi(n)}{n} \ln \left( \frac{1}{1 - x_n} \right), \\ \Gamma_C(x_1, x_2, \dots) &= \sum_{n \geq 1} \frac{\mu(n)}{n} \ln \left( \frac{1}{1 - x_n} \right), \\ \mathcal{E}_C(x_1, x_2, \dots) &= \Gamma_C(x_1, x_2, \dots) + \Gamma_C(x_2, x_4, x_6, \dots) \end{aligned}$$

où  $\phi$  désigne la fonction d'Euler.

*Démonstration.* Dans les deux premiers cas, il suffit de calculer les coefficients  $c_{\Phi}(n)$  pour  $\Phi$  correspondant à  $Z$  et à  $\Gamma$ . Pour la série indicatrice des cycles, on a  $I = \mathbb{N}^*$  et

$$c_Z(n) = \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} = \frac{\phi(n)}{n}.$$

Pour la série indicatrice d'asymétrie, on a  $I = \{1\}$  et

$$c_{\Gamma}(n) = \sum_{\substack{d|n \\ n/d=1}} \frac{\mu(d)}{d} = \frac{\mu(n)}{n}.$$

Pour la  $\mathcal{E}$ -série indicatrice on a :  $C_{n/d}(X^d) \in \text{mol}(\mathcal{E}) \Leftrightarrow n/d = 1$  ou  $n/d = 2$ . Ainsi,

$$c_{\mathcal{E}}(n) = \sum_{\substack{d|n \\ n/d=1,2}} \frac{\mu(d)}{d} = \begin{cases} \frac{\mu(n)}{n} & \text{si } n \text{ est impair} \\ \frac{\mu(n)}{n} + \frac{\mu(n/2)}{n/2} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

et on obtient successivement

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_C(x_1, x_2, \dots) &= \sum_{n \geq 1} c_{\mathcal{E}}(n) \ln \left( \frac{1}{1-x_n} \right) \\ &= \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ impair}}} \frac{\mu(n)}{n} \ln \left( \frac{1}{1-x_n} \right) + \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ pair}}} \left[ \frac{\mu(n)}{n} + \frac{\mu(n/2)}{n/2} \right] \ln \left( \frac{1}{1-x_n} \right) \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{\mu(n)}{n} \ln \left( \frac{1}{1-x_n} \right) + \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ pair}}} \frac{\mu(n/2)}{n/2} \ln \left( \frac{1}{1-x_n} \right) \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{\mu(n)}{n} \ln \left( \frac{1}{1-x_n} \right) + \sum_{n \geq 1} \frac{\mu(n)}{n} \ln \left( \frac{1}{1-x_{2n}} \right) \\ &= \Gamma_C(x_1, x_2, \dots) + \Gamma_C(x_2, x_4, \dots). \end{aligned}$$

■

Lorsque  $\hat{\Phi}$  satisfait les conditions de la proposition 4.2.2, les coefficients  $c_{\Phi}(n)$  ne dépendent que de l'ensemble  $\{i \geq 1 \mid C_i \in \text{mol}(\Phi)\}$ . Ainsi  $c_C(n) = c_Z(n)$  pour tout  $n \geq 1$  et

$$C_C(x_1, x_2, \dots) = Z_C(x_1, x_2, \dots). \quad (4.12)$$

Notons que l'égalité (4.12) est aussi obtenue du fait que  $\hat{C}$  contient tous les groupes cycliques. En fait, compte tenu de l'expression (4.9), ce sont les deux prochains résultats qui, initialement, ont donné lieu à la proposition 3.3.19.

**Proposition 4.2.4.** *Soient  $T$  une sorte de singleton et  $u \in \mathbb{N}^*$ . On a*

$$C(uT) = \sum_{n \geq 1} \sum_{d|n} \theta_d(u) C_{n/d}(T^d)$$

où les coefficients  $\theta_d(u)$  sont donnés par

$$\theta_d(u) = \sum_{i_1+i_2+\dots+i_u=d} \lambda_{i_1, i_2, \dots, i_u} = \frac{1}{d} \sum_{\delta|d} \mu(\delta) u^{d/\delta}.$$

*Démonstration.* Par (4.9), on obtient successivement

$$\begin{aligned}
C(uT) &= C(T_1 + T_2 + \cdots + T_u) \Big|_{T_i := T, 1 \leq i \leq u} \\
&= \sum_{n \geq 1} \sum_{d|n} \sum_{i_1 + i_2 + \cdots + i_u = d} \lambda_{i_1, i_2, \dots, i_u} C_{n/d}(T_1^{i_1} T_2^{i_2} \cdots T_u^{i_u}) \Big|_{T_i := T, 1 \leq i \leq u} \\
&= \sum_{n \geq 1} \sum_{d|n} \sum_{i_1 + i_2 + \cdots + i_u = d} \lambda_{i_1, i_2, \dots, i_u} C_{n/d}(T^d) \\
&= \sum_{n \geq 1} \sum_{d|n} \theta_d(u) C_{n/d}(T^d)
\end{aligned}$$

où

$$\theta_d(u) = \sum_{i_1 + i_2 + \cdots + i_u = d} \lambda_{i_1, i_2, \dots, i_u}.$$

En appliquant l'opérateur  $T \frac{\partial}{\partial T}$  des deux côtés de l'égalité

$$C(uT) = \sum_{n \geq 1} \sum_{d|n} \theta_d(u) C_{n/d}(T^d),$$

sachant que  $C'_{n/d} = X^{n/d-1}$ , on obtient

$$\sum_{n \geq 1} u^n T^n = \sum_{n \geq 1} \sum_{d|n} \theta_d(u) d T^n.$$

Par identification des coefficients de  $T^n$ ,  $n \geq 1$ ,

$$u^n = \sum_{d|n} \theta_d(u) d$$

et, par l'inversion de Möbius, le résultat suit. ■

**Proposition 4.2.5.** *Soient  $T_1, T_2, \dots$  une infinité de sortes de singletons et  $u_1, u_2, \dots$  une suite de nombres naturels non tous nuls. On a :*

$$C(u_1 T_1 + u_2 T_2 + \cdots) = \sum_{n \geq 1} \sum_{d|n} \sum_{i_1 + i_2 + \cdots = d} \lambda_{i_1, i_2, \dots}(u_1, u_2, \dots) C_{n/d}(T_1^{i_1} T_2^{i_2} \cdots)$$

où

$$\lambda_{i_1, i_2, \dots}(u_1, u_2, \dots) = \frac{1}{i_1 + i_2 + \cdots} \sum_{\delta | (i_1, i_2, \dots)} \mu(\delta) \left( \frac{i_1 + i_2 + \cdots}{\delta}, \frac{i_1}{\delta}, \frac{i_2}{\delta}, \dots \right) u_1^{i_1/\delta} u_2^{i_2/\delta} \cdots$$

*Démonstration.* De (4.9), on obtient successivement

$$\begin{aligned}
C(u_1 T_1 + u_2 T_2 + \dots) &= C(T_1 + T_2 + \dots) \Big|_{T_i := u_i T_i, i \geq 1} \\
&= \sum_{n \geq 1} \sum_{d|n} \sum_{i_1 + i_2 + \dots = d} \lambda_{i_1, i_2, \dots} C_{n/d}(T_1^{i_1} T_2^{i_2} \dots) \Big|_{T_i := u_i T_i, i \geq 1} \\
&= \sum_{n \geq 1} \sum_{d|n} \sum_{i_1 + i_2 + \dots = d} \lambda_{i_1, i_2, \dots} C_{n/d}(u_1^{i_1} u_2^{i_2} \dots T_1^{i_1} T_2^{i_2} \dots) \\
&= \sum_{n \geq 1} \sum_{d|n} \sum_{i_1 + i_2 + \dots = d} \lambda_{i_1, i_2, \dots} C_{n/d}(uT) \Big|_{\substack{u := u_1^{i_1} u_2^{i_2} \dots \\ T := T_1^{i_1} T_2^{i_2} \dots}} \\
&= \sum_{0 < i_1 + i_2 + \dots < \infty} \lambda_{i_1, i_2, \dots} C(uT) \Big|_{\substack{u := u_1^{i_1} u_2^{i_2} \dots \\ T := T_1^{i_1} T_2^{i_2} \dots}} \\
&= \sum_{0 < i_1 + i_2 + \dots < \infty} \lambda_{i_1, i_2, \dots} \sum_{j \geq 1} \theta_j(u) C(T^j) \Big|_{\substack{u := u_1^{i_1} u_2^{i_2} \dots \\ T := T_1^{i_1} T_2^{i_2} \dots}} \\
&= \sum_{0 < i_1 + i_2 + \dots < \infty} \lambda_{i_1, i_2, \dots} \sum_{j \geq 1} \theta_j(u_1^{i_1/j} u_2^{i_2/j} \dots) C((T_1^{i_1} T_2^{i_2} \dots)^j) \\
&= \sum_{\substack{0 < i_1 + i_2 + \dots < \infty \\ j|(i_1, i_2, \dots)}} \lambda_{i_1/j, i_2/j, \dots} \theta_j(u_1^{i_1/j} u_2^{i_2/j} \dots) C(T_1^{i_1} T_2^{i_2} \dots).
\end{aligned}$$

Posons

$$\lambda_{i_1, i_2, \dots}(u_1, u_2, \dots) = \sum_{j|(i_1, i_2, \dots)} \lambda_{i_1/j, i_2/j, \dots} \theta_j(u_1^{i_1/j} u_2^{i_2/j} \dots).$$

Pour trouver la forme explicite des coefficients  $\lambda_{i_1, i_2, \dots}(u_1, u_2, \dots)$ , procédons comme dans [25], c.-à-d. : appliquons l'opérateur  $\sum_{k \geq 1} T_k \frac{\partial}{\partial T_k}$  des deux côtés de l'égalité combinatoire

$$C(u_1 T_1 + u_2 T_2 + \dots) = \sum_{0 < i_1 + i_2 + \dots < \infty} \lambda_{i_1, i_2, \dots}(u_1, u_2, \dots) C(T_1^{i_1} T_2^{i_2} \dots). \quad (4.13)$$

Puisque  $C' = L = \sum_{n \geq 0} X^n$ , le côté gauche de (4.13) devient successivement

$$\begin{aligned}
\sum_{k \geq 1} T_k \frac{\partial}{\partial T_k} C(u_1 T_1 + u_2 T_2 + \dots) &= \sum_{k \geq 1} T_k L(u_1 T_1 + u_2 T_2 + \dots) u_k \\
&= L(u_1 T_1 + u_2 T_2 + \dots) \sum_{k \geq 1} u_k T_k \\
&= (u_1 T_1 + u_2 T_2 + \dots) L(u_1 T_1 + u_2 T_2 + \dots) \\
&= \sum_{k \geq 1} (u_1 T_1 + u_2 T_2 + \dots)^k \\
&= \sum_{n_1, n_2, \dots} \binom{n_1 + n_2 + \dots}{n_1, n_2, \dots} u_1^{n_1} u_2^{n_2} \dots T_1^{n_1} T_2^{n_2} \dots
\end{aligned}$$

De même, le côté droit de (4.13) devient successivement

$$\begin{aligned}
&\sum_{k \geq 1} T_k \frac{\partial}{\partial T_k} \sum_{0 < i_1 + i_2 + \dots < \infty} \lambda_{i_1, i_2, \dots}(u_1, u_2, \dots) C(T_1^{i_1} T_2^{i_2} \dots) \\
&= \sum_{k \geq 1} T_k \sum_{0 < i_1 + i_2 + \dots < \infty} \lambda_{i_1, i_2, \dots}(u_1, u_2, \dots) \frac{\partial}{\partial T_k} C(T_1^{i_1} T_2^{i_2} \dots) \\
&= \sum_{k \geq 1} T_k \sum_{0 < i_1 + i_2 + \dots < \infty} \lambda_{i_1, i_2, \dots}(u_1, u_2, \dots) L(T_1^{i_1} T_2^{i_2} \dots) i_k \dots T_{k-1}^{i_{k-1}} T_k^{i_k-1} T_{k+1}^{i_{k+1}} \dots \\
&= \sum_{k \geq 1} \sum_{0 < i_1 + i_2 + \dots < \infty} \lambda_{i_1, i_2, \dots}(u_1, u_2, \dots) i_k T_1^{i_1} T_2^{i_2} \dots L(T_1^{i_1} T_2^{i_2} \dots) \\
&= \sum_{0 < i_1 + i_2 + \dots < \infty} \lambda_{i_1, i_2, \dots}(u_1, u_2, \dots) (i_1 + i_2 + \dots) \sum_{k \geq 1} (T_1^{i_1} T_2^{i_2} \dots)^k \\
&= \sum_{\substack{0 < n_1 + n_2 + \dots < \infty \\ k | (n_1, n_2, \dots)}} \lambda_{n_1/k, n_2/k, \dots}(u_1, u_2, \dots) \frac{n_1 + n_2 + \dots}{k} T_1^{n_1} T_2^{n_2} \dots
\end{aligned}$$

Par identification des coefficients de  $T_1^{n_1} T_2^{n_2} \dots$ , on obtient

$$\binom{n_1 + n_2 + \dots}{n_1, n_2, \dots} u_1^{n_1} u_2^{n_2} \dots = \sum_{k | (n_1, n_2, \dots)} \lambda_{n_1/k, n_2/k, \dots}(u_1, u_2, \dots) \frac{n_1 + n_2 + \dots}{k}.$$

Il suffit maintenant d'appliquer l'inversion de Möbius et le résultat suit. ■

Ainsi, quelle que soit l'espèce  $G$ , les espèces moléculaires de la décomposition de  $C(G)$  ne font intervenir que des produits en couronne d'un groupe cyclique par un produit externe de stabilisateurs des  $G$ -structures.

### 4.3 Les permutations, les permutations paires et les permutations impaires

Une permutation est naturellement formée d'une assemblée de cycles. Nous sommes donc en mesure, à la suite des deux sections précédentes, d'obtenir les  $\Phi$ -séries des espèces  $S$ , des permutations, ALT, des permutations paires, et NALT, des permutations impaires. De plus, la  $\Phi$ -série de l'espèce des ensembles, voir (4.2), permet d'obtenir facilement les séries correspondantes aux espèces  $S$ , ALT, et NALT pondérées par le nombre de cycles, c.-à-d. : le poids d'une permutation  $\sigma$  est  $\alpha^{c(\sigma)}$  où  $\alpha \in \mathbb{A}$  et  $c(\sigma)$  est le nombre de cycles de  $\sigma$ .

Rappelons qu'un ensemble  $\hat{\Phi}$  contenant  $\Gamma = \{\{id_n\} \mid n \geq 0\}$  qui est fortement stable sous le produit en couronne généralisé l'est aussi sous le produit externe de groupes. La transformation  $F \mapsto \Phi_F$  préserve alors les opérations de somme, de produit, de dérivation, de pointage et de substitution.

**Proposition 4.3.1.** *Soit  $\Phi \subseteq \{K \subseteq cc(\mathfrak{S}_n) \mid n \geq 0\}$ , un ensemble de groupes non conjugués deux à deux. Si  $\Gamma \subseteq \Phi$  et si la transformation  $F \mapsto \Phi_F$  préserve l'opération de substitution alors la  $\Phi$ -série de l'espèce  $S$ , des permutations, est donnée par*

$$\Phi_S(x_1, x_2, \dots) = \prod_{n \geq 1} \left( \frac{1}{1 - x_n} \right)^{s_\Phi(n)}$$

où

$$s_\Phi(n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \xi_{n/d} d c_\Phi(d),$$

les  $c_\Phi(n)$ ,  $n \geq 1$ , sont donnés par (4.11) et les  $\xi_k$ ,  $k \geq 1$ , par (4.3).

*Démonstration.* Les restrictions imposées à  $\hat{\Phi}$  nous permettent d'utiliser l'égalité combinatoire  $S = E \circ C$  pour calculer  $\Phi_S(x_1, x_2, \dots)$ . De l'expression (4.2) et de la

proposition 4.2.2, on obtient successivement

$$\begin{aligned}
\Phi_E \circ \Phi_C(x_1, x_2, \dots) &= \exp \left\{ \sum_{k \geq 1} \frac{\xi_k}{k} (\Phi_C)_k \right\} \\
&= \exp \left\{ \sum_{k \geq 1} \frac{\xi_k}{k} \sum_{n \geq 1} c_\Phi(n) \ln \left( \frac{1}{1 - x_{nk}} \right) \right\} \\
&= \exp \left\{ \sum_{n \geq 1} \ln \left( \frac{1}{1 - x_n} \right) \frac{1}{n} \sum_{d|n} \xi_{n/d} d c_\Phi(d) \right\} \\
&= \exp \left\{ \sum_{n \geq 1} s_\Phi(n) \ln \left( \frac{1}{1 - x_n} \right) \right\}.
\end{aligned}$$

En passant au produit des exponentielles, le résultat suit. ■

**Corollaire 4.3.2.** *On a les séries indicatrices suivantes :*

$$\begin{aligned}
Z_S(x_1, x_2, \dots) &= \prod_{n \geq 1} \frac{1}{1 - x_n}, \\
\Gamma_S(x_1, x_2, \dots) &= \frac{1 - x_2}{1 - x_1}, \\
\mathcal{E}_S(x_1, x_2, \dots) &= \frac{1}{(1 - x_1)(1 - x_2)}, \\
\mathcal{C}_S(x_1, x_2, \dots) &= \prod_{\substack{n \geq 1 \\ n \neq 0 \pmod{3}}} \frac{1}{(1 - x_n)}.
\end{aligned}$$

*Démonstration.* Dans les trois premiers cas, il suffit de calculer les exposants  $s_\Phi(n)$  lorsque  $\Phi = Z$ ,  $\Phi = \Gamma$  et  $\Phi = \mathcal{E}$  et de les remplacer dans l'expression  $\Phi_S(x_1, x_2, \dots)$  de la proposition précédente. Les valeurs que prennent les coefficients  $\xi_k$ ,  $k \geq 1$ , ont été trouvés dans la section portant sur les ensembles et les coefficients  $c_\Phi(n)$ ,  $n \geq 1$ , dans celle portant sur les cycles orientés.

Pour la série indicatrice des cycles, on a  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\xi_k = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $c_Z(n) = \frac{\phi(n)}{n}$ . Ainsi,

$$s_Z(n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \xi_{n/d} d c_Z(d) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \phi(d) = 1, \quad \forall n \geq 1,$$

et le résultat suit. Pour la série indicatrice d'asymétrie, on a  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\xi_k = (-1)^{k-1}$  et



$\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $c_\Gamma(n) = \frac{\mu(n)}{n}$ . Ainsi,

$$s_\Gamma(n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} (-1)^{n/d-1} d c_\Gamma(d) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} (-1)^{n/d-1} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ -1 & \text{si } n = 2 \\ 0 & \text{si } n \geq 3, \end{cases}$$

et le résultat suit. Pour la  $\mathcal{E}$ -série, on a  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\xi_k = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$c_\mathcal{E}(n) = \begin{cases} \frac{\mu(n)}{n} & \text{si } n \text{ est impair} \\ \frac{\mu(n)}{n} + \frac{\mu(n/2)}{n/2} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} s_\mathcal{E}(n) &= \frac{1}{n} \sum_{d|n} \xi_{n/d} d c_\mathcal{E}(d) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} d c_\mathcal{E}(d) \\ &= \frac{1}{n} \left[ \sum_{\substack{d|n \\ d \text{ impair}}} \mu(d) + \sum_{\substack{d|n \\ d \text{ pair}}} (\mu(d) + 2\mu(d/2)) \right] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) + \frac{2}{n} \sum_{\substack{d|n \\ d \text{ pair}}} \mu(d/2) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \text{ ou si } n = 2 \\ 0 & \text{si } n \geq 3, \end{cases} \end{aligned}$$

et le résultat suit.

La série  $\mathcal{C}_S(x_1, x_2, \dots)$  est facilement obtenue en utilisant le fait que

$$\mathcal{C}_E(x_1, x_2, \dots) = \frac{Z_E(x_1, x_2, x_3, \dots)}{Z_E(x_3, x_6, x_9, \dots)}$$

et que  $\mathcal{C}_C(x_1, x_2, \dots) = Z_C(x_1, x_2, \dots)$ . ■

Soit  $S_{(\alpha)}$  l'espèce des permutations pondérées par  $\alpha^{\text{nombre de cycles}}$ . En utilisant l'égalité combinatoire  $S_{(\alpha)} = E_{(\alpha)}(C)$  où  $E_{(\alpha)} = E(X_\alpha)$ , il est maintenant facile d'obtenir la  $\Phi$ -série de l'espèce  $S_{(\alpha)}$ .

**Proposition 4.3.3.** *Soit  $\Phi \subseteq \{K \in \text{cc}(\mathfrak{S}_n) \mid n \geq 0\}$ , un ensemble de groupes non conjugués deux à deux. Si  $\Gamma \subseteq \Phi$  et si la transformation  $F \mapsto \Phi_F$  préserve l'opération*

de substitution alors la  $\Phi$ -série de l'espèce  $S_{(\alpha)}$  est donnée par

$$\Phi_{S_{(\alpha)}}(x_1, x_2, \dots) = \prod_{n \geq 1} \left( \frac{1}{1 - x_n} \right)^{s_{\Phi}^{(\alpha)}(n)}$$

où  $s_{\Phi}^{(\alpha)}(n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \xi_{n/d} \alpha^{n/d} d c_{\Phi}(d)$ , les  $c_{\Phi}(n)$ ,  $n \geq 1$ , sont donnés par (4.11) et les  $\xi_k$ ,  $k \geq 1$ , par (4.3).  $\triangle$

Nous nous intéressons maintenant aux éléments du groupe alterné comme tels. Afin d'adapter le concept de permutation paire à la théorie classique des espèces de structures, nous en donnons une définition qui ne fait pas appel à la notion d'inversion relativement à un ordre total donné à priori.

**Définition 4.3.4.** Soit  $U$  un ensemble fini de cardinal  $n$ . Une structure de permutation paire sur  $U$  est une endofonction bijective (c.-à-d. : permutation)  $\sigma : U \rightarrow U$  dont la décomposition en cycles disjoints possède un nombre pair de cycles de longueur paire.

Cette définition est basée sur le fait que le signe  $\text{sgn}(\sigma)$  d'une permutation de  $U$  ayant  $\sigma_i$  cycles de longueur  $i$ ,  $i \in \llbracket n \rrbracket$ , est donné par  $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{n - \sum \sigma_i} = (-1)^{\sum \sigma_{2i}}$ . Désignons par ALT l'espèce de toutes les permutations paires. On a l'égalité combinatoire

$$\begin{aligned} \text{ALT} &= E(C_1 + C_3 + C_5 + \dots) \cdot E_{\text{pair}}(C_2 + C_4 + C_6 + \dots) \\ &= E(C_{\text{imp}}) \cdot E_{\text{pair}}(C_{\text{pair}}) \end{aligned} \quad (4.14)$$

où  $E$ ,  $E_{\text{pair}}$ ,  $C_k$ ,  $C_{\text{imp}}$  et  $C_{\text{pair}}$  désignent respectivement l'espèce des ensembles, des ensembles de cardinal pair, des cycles de longueur  $k$ ,  $k \geq 1$ , des cycles de longueur impaire et des cycles de longueur paire. Notons que contrairement à l'espèce  $E^{\pm}$ , la décomposition moléculaire de l'espèce ALT ne correspond pas à sa décomposition canonique.

L'équation (4.14) découle simplement du fait qu'une permutation paire  $\sigma$  s'identifie canoniquement à un couple  $(\alpha, \beta)$  de permutations disjointes où  $\alpha$  est formée d'un nombre quelconque de cycles de longueur impaire et  $\beta$  est formée d'un nombre pair de

cycles de longueur paire. Notons que lorsque  $U = \llbracket n \rrbracket$  on a

$$\text{ALT}[U] = \text{ALT}[\llbracket n \rrbracket] = \mathfrak{A}_n$$

conformément à la notation précédente pour le groupe alterné.

Désignons par NALT l'espèce des permutations impaires. Une permutation, qu'elle soit paire ou impaire, est naturellement formée d'un ensemble de cycles de longueur impaire suivi d'un ensemble de cycles de longueur paire, d'où les égalités,

$$S = E(C_{\text{imp}}) \cdot E(C_{\text{pair}}) = \text{ALT} + \text{NALT} \quad (4.15)$$

où  $S$  désigne l'espèce des permutations.

**Lemme 4.3.5.** *Soit  $\Phi \subseteq \{K \in \text{cc}(\mathfrak{S}_n) \mid n \geq 0\}$ , un ensemble de groupes non conjugués deux à deux. Si  $\hat{\Phi}$  est fortement stable sous le produit en couronne et sous le produit externe de groupes alors*

$$\begin{aligned} \Phi_{E_{\text{pair}}}(x_1, x_2, \dots) &= \frac{1}{2} [\Phi_E(x_1, x_2, \dots) + \Phi_E(-x_1, x_2, -x_3, \dots)], \\ \Phi_{C_{\text{pair}}}(x_1, x_2, \dots) &= \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ pair}}} c_{\Phi}(n) \ln \left( \frac{1}{1-x_n} \right) + \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ impair}}} \frac{c_{\Phi}(n)}{2} \ln \left( \frac{1}{1-x_n^2} \right), \\ \Phi_{C_{\text{imp}}}(x_1, x_2, \dots) &= \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ impair}}} \frac{c_{\Phi}(n)}{2} \ln \left( \frac{1+x_n}{1-x_n} \right). \end{aligned}$$

*Démonstration.* Il suffit, dans un premier temps, de remarquer que pour toute série indicatrice formelle

$$f(x_1, x_2, \dots) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \vdash n} f_{\sigma} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots$$

on a

$$\begin{aligned} f(-x_1, x_2, -x_3, \dots) &= f((-1)^1 x_1, (-1)^2 x_2, (-1)^3 x_3, \dots) \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \vdash n} f_{\sigma} (-1)^n x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\Phi_{E_{\text{pair}}}(x_1, x_2, \dots) = \frac{1}{2} [\Phi_E(x_1, x_2, \dots) + \Phi_E(-x_1, x_2, -x_3, \dots)]$$

et, puisque  $\hat{\Phi}$  satisfait les conditions de la proposition 4.2.2,

$$\begin{aligned}
\Phi_{C_{\text{pair}}}(x_1, x_2, \dots) &= \frac{1}{2} [\Phi_C(x_1, x_2, \dots) + \Phi_C(-x_1, x_2, -x_3, \dots)] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} c_{\Phi}(n) \left[ \ln \left( \frac{1}{1-x_n} \right) + \ln \left( \frac{1}{1-(-1)^n x_n} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} c_{\Phi}(n) \ln \left( \frac{1}{(1-x_n)(1-(-1)^n x_n)} \right) \\
&= \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ pair}}} c_{\Phi}(n) \ln \left( \frac{1}{1-x_n} \right) + \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ impair}}} \frac{c_{\Phi}(n)}{2} \ln \left( \frac{1}{1-x_n^2} \right).
\end{aligned}$$

Pour  $\Phi_{C_{\text{imp}}}(x_1, x_2, \dots)$ , on utilise l'égalité combinatoire  $C = C_{\text{pair}} + C_{\text{imp}}$  pour obtenir

$$\begin{aligned}
\Phi_{C_{\text{imp}}}(x_1, x_2, \dots) &= \Phi_C(x_1, x_2, \dots) - \Phi_{C_{\text{pair}}}(x_1, x_2, \dots) \\
&= \frac{1}{2} [\Phi_C(x_1, x_2, \dots) - \Phi_C(-x_1, x_2, -x_3, \dots)] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} c_{\Phi}(n) \left[ \ln \left( \frac{1}{1-x_n} \right) - \ln \left( \frac{1}{1-(-1)^n x_n} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} c_{\Phi}(n) \ln \left( \frac{1-(-1)^n x_n}{1-x_n} \right) \\
&= \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ impair}}} \frac{c_{\Phi}(n)}{2} \ln \left( \frac{1+x_n}{1-x_n} \right).
\end{aligned}$$

■

**Proposition 4.3.6.** *Soit  $\Phi \subseteq \{K_{\text{cc}}(\mathfrak{S}_n) \mid n \geq 0\}$ , un ensemble de groupes non conjugués deux à deux. Si  $\Gamma \subseteq \Phi$  et si la transformation  $F \mapsto \Phi_F$  préserve l'opération de substitution alors les  $\Phi$ -séries des espèces ALT, des permutations paires, et NALT, des permutations impaires, sont données respectivement par*

$$\Phi_{\text{ALT}}(x_1, x_2, \dots) = \frac{1}{2} \left[ \prod_{n \geq 1} \left( \frac{1}{1-x_n} \right)^{s_{\Phi}(n)} + \prod_{n \geq 1} \left( \frac{1}{1-x_{2n}} \right)^{s'_{\Phi}(2n)} (1+x_{2n-1})^{s_{\Phi}(2n-1)} \right],$$

$$\Phi_{\text{NALT}}(x_1, x_2, \dots) = \frac{1}{2} \left[ \prod_{n \geq 1} \left( \frac{1}{1-x_n} \right)^{s_{\Phi}(n)} - \prod_{n \geq 1} \left( \frac{1}{1-x_{2n}} \right)^{s'_{\Phi}(2n)} (1+x_{2n-1})^{s_{\Phi}(2n-1)} \right],$$

où

$$s_{\Phi}(n) = s_{\Phi}^{(1)}(n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \xi_{n/d} d c_{\Phi}(d)$$

et

$$s'_{\Phi}(n) = s_{\Phi}^{(-1)}(n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} (-1)^{n/d} \xi_{n/d} d c_{\Phi}(d).$$

*Démonstration.* Les restrictions imposées à  $\hat{\Phi}$  nous permettent d'utiliser l'égalité combinatoire  $\text{ALT} = E(C_{\text{imp}}) \cdot E_{\text{pair}}(C_{\text{pair}})$  pour calculer

$$\Phi_{\text{ALT}}(x_1, x_2, \dots) = \Phi_E \circ \Phi_{C_{\text{imp}}}(x_1, x_2, \dots) \cdot \Phi_{E_{\text{pair}}} \circ \Phi_{C_{\text{pair}}}(x_1, x_2, \dots).$$

Pour simplifier l'écriture de ce qui suit, nous utilisons les variables intermédiaires :

$$\begin{aligned} \nu_1(n) &= \frac{1}{2n} \sum_{\substack{d|n \\ d \text{ impair}}} \xi_{n/d} d c_{\Phi}(d) & \nu'_1(n) &= \frac{1}{2n} \sum_{\substack{d|n \\ d \text{ impair}}} (-1)^{n/d} \xi_{n/d} d c_{\Phi}(d) \\ \nu_2(n) &= \frac{1}{n} \sum_{\substack{d|n \\ d \text{ pair}}} \xi_{n/d} d c_{\Phi}(d) & \nu'_2(n) &= \frac{1}{n} \sum_{\substack{d|n \\ d \text{ pair}}} (-1)^{n/d} \xi_{n/d} d c_{\Phi}(d). \end{aligned}$$

D'une part, puisque  $\Phi_{E(C_{\text{imp}})}(x_1, x_2, \dots) = \Phi_E \circ \Phi_{C_{\text{imp}}}(x_1, x_2, \dots)$ , on obtient successivement

$$\begin{aligned} \Phi_{E(C_{\text{imp}})}(x_1, x_2, \dots) &= \exp \left\{ \sum_{k \geq 1} \frac{\xi_k}{k} (\Phi_{C_{\text{imp}}})_k \right\} \\ &= \exp \left\{ \sum_{k \geq 1} \frac{\xi_k}{k} \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ impair}}} \frac{c_{\Phi}(n)}{2} \ln \left( \frac{1 + x_{nk}}{1 - x_{nk}} \right) \right\} \\ &= \exp \left\{ \sum_{n \geq 1} \ln \left( \frac{1 + x_n}{1 - x_n} \right) \frac{1}{2n} \sum_{\substack{d|n \\ d \text{ impair}}} \xi_{n/d} d c_{\Phi}(d) \right\} \\ &= \prod_{n \geq 1} \left( \frac{1 + x_n}{1 - x_n} \right)^{\nu_1(n)}. \end{aligned}$$

D'autre part, puisque  $\Phi_{E_{\text{pair}}(C_{\text{pair}})}(x_1, x_2, \dots) = \Phi_{E_{\text{pair}}} \circ \Phi_{C_{\text{pair}}}(x_1, x_2, \dots)$ , on obtient

$$\Phi_{E_{\text{pair}}(C_{\text{pair}})}(x_1, x_2, \dots) = \frac{1}{2} \left[ \exp \left\{ \sum_{k \geq 1} \frac{\xi_k}{k} (\Phi_{C_{\text{pair}}})_k \right\} + \exp \left\{ \sum_{k \geq 1} (-1)^k \frac{\xi_k}{k} (\Phi_{C_{\text{pair}}})_k \right\} \right]$$

où

$$\begin{aligned}
& \exp \left\{ \sum_{k \geq 1} \frac{\xi_k}{k} (\Phi_{C_{\text{pair}}})_k \right\} \\
&= \exp \left\{ \sum_{k \geq 1} \frac{\xi_k}{k} \left[ \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ pair}}} c_{\Phi}(n) \ln \left( \frac{1}{1-x_{nk}} \right) + \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ impair}}} \frac{c_{\Phi}(n)}{2} \ln \left( \frac{1}{1-x_{nk}^2} \right) \right] \right\} \\
&= \exp \left\{ \sum_{n \geq 1} \nu_2(n) \ln \left( \frac{1}{1-x_n} \right) + \sum_{n \geq 1} \nu_1(n) \ln \left( \frac{1}{1-x_n^2} \right) \right\} \\
&= \prod_{n \geq 1} \left( \frac{1}{1-x_n} \right)^{\nu_1(n)+\nu_2(n)} \prod_{n \geq 1} \left( \frac{1}{1+x_n} \right)^{\nu_1(n)}
\end{aligned}$$

et, par un calcul semblable,

$$\exp \left\{ \sum_{k \geq 1} (-1)^k \frac{\xi_k}{k} (\Phi_{C_{\text{pair}}})_k \right\} = \prod_{n \geq 1} \left( \frac{1}{1-x_n} \right)^{\nu'_1(n)+\nu'_2(n)} \prod_{n \geq 1} \left( \frac{1}{1+x_n} \right)^{\nu'_1(n)}.$$

La série  $\Phi_{\text{ALT}}(x_1, x_2, \dots)$ , du produit de  $\Phi_{E(C_{\text{imp}})}(x_1, x_2, \dots)$  par  $\Phi_{E_{\text{pair}}(C_{\text{pair}})}(x_1, x_2, \dots)$ , est alors

$$\frac{1}{2} \left[ \prod_{n \geq 1} \left( \frac{1}{1-x_n} \right)^{\nu_2(n)+2\nu_1(n)} + \prod_{n \geq 1} \left( \frac{1}{1-x_n} \right)^{\nu_1(n)+\nu'_1(n)+\nu'_2(n)} \left( \frac{1}{1+x_n} \right)^{\nu'_1(n)-\nu_1(n)} \right].$$

Examinons les différents exposants intervenant dans l'expression ci-dessus. On vérifie facilement que  $\nu_2(n) + 2\nu_1(n) = s_{\Phi}(n)$  et, par un regroupement stratégique, on obtient

$$\begin{aligned}
& \nu_1(n) + \nu'_1(n) + \nu'_2(n) \\
&= \frac{1}{2n} \sum_{\substack{d|n \\ d \text{ impair}}} \left( 1 + (-1)^{n/d} \right) \xi_{n/d} d c_{\Phi}(d) + \frac{1}{n} \sum_{\substack{d|n \\ d \text{ pair}}} (-1)^{n/d} \xi_{n/d} d c_{\Phi}(d) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{\substack{d|n \\ d \text{ pair}}} (-1)^{n/d} \xi_{n/d} d c_{\Phi}(d) + \frac{1}{n} \sum_{\substack{d|n \\ d \text{ impair} \\ n/d \text{ pair}}} \xi_{n/d} d c_{\Phi}(d).
\end{aligned}$$

On constate que dans ces deux expressions,  $n$  doit nécessairement être pair. Or, lorsque  $n$  est pair et  $d$  est impair,  $n/d$  doit être pair et  $(-1)^{n/d} = 1$ . On a donc

$$\nu_1(n) + \nu'_1(n) + \nu'_2(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ s'_{\Phi}(n) & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \nu'_1(n) - \nu_1(n) &= \frac{1}{2n} \sum_{\substack{d|n \\ d \text{ impair}}} \left( (-1)^{n/d} - 1 \right) \xi_{n/d} d c_\Phi(d) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -s_\Phi(n) & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{aligned}$$

et, remplaçant le tout dans  $\Phi_{\text{ALT}}(x_1, x_2, \dots)$ , on obtient

$$\Phi_{\text{ALT}}(x_1, x_2, \dots) = \frac{1}{2} \left[ \prod_{n \geq 1} \left( \frac{1}{1-x_n} \right)^{s_\Phi(n)} + \prod_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ pair}}} \left( \frac{1}{1-x_n} \right)^{s'_\Phi(n)} \prod_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ impair}}} (1+x_n)^{s_\Phi(n)} \right].$$

En utilisant l'égalité combinatoire  $S = \text{ALT} + \text{NALT}$ ,

$$\Phi_{\text{NALT}}(x_1, x_2, \dots) = \Phi_S(x_1, x_2, \dots) - \Phi_{\text{ALT}}(x_1, x_2, \dots),$$

le résultat suit. ■

**Remarque 4.3.7.** L'espèce  $S_{\text{sgn}}$  des permutations pondérées par leur signe, c.-à-d. : le poids d'une permutation  $\sigma$  est  $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{n-\sum \sigma_i} = (-1)^{n+\sum \sigma_i}$ , nous permet de donner une démonstration alternative de la proposition 4.3.6. D'une part, de l'égalité combinatoire  $S_{\text{sgn}} = S_{(-1)}(X_{-1})$ , on a

$$\begin{aligned} \Phi_{S_{\text{sgn}}}(x_1, x_2, \dots) &= \Phi_{S_{(-1)}} \circ \Phi_{X_{-1}}(x_1, x_2, \dots) = \prod_{n \geq 1} \left( \frac{1}{1 - (-1)^n x_n} \right)^{s_\Phi^{(-1)}(n)} \\ &= \prod_{\substack{n \geq 2 \\ n \text{ pair}}} \left( \frac{1}{1-x_n} \right)^{s_\Phi^{(-1)}(n)} \prod_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ impair}}} \left( \frac{1}{1+x_n} \right)^{s_\Phi^{(-1)}(n)} \\ &= \prod_{\substack{n \geq 2 \\ n \text{ pair}}} \left( \frac{1}{1-x_n} \right)^{s_\Phi^{(-1)}(n)} \prod_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ impair}}} (1+x_n)^{s_\Phi(n)} \end{aligned}$$

où la dernière égalité est obtenue du fait que, pour  $n$  impair,  $s_\Phi^{(-1)}(n) = -s_\Phi(n)$ .

D'autre part, on a aussi l'égalité combinatoire  $S_{\text{sgn}} = \text{ALT} + \text{NALT}_{-1}$  où  $\text{NALT}_{-1}$

désigne l'espèce des permutations impaires dont chaque structure est de poids  $-1$ .

Ainsi,

$$\Phi_{S_{\text{sgn}}}(x_1, x_2, \dots) = \Phi_{\text{ALT}}(x_1, x_2, \dots) - \Phi_{\text{NALT}}(x_1, x_2, \dots)$$

et, puisque  $\Phi_S(x_1, x_2, \dots) = \Phi_{\text{ALT}}(x_1, x_2, \dots) + \Phi_{\text{NALT}}(x_1, x_2, \dots)$ , on trouve

$$\Phi_S(x_1, x_2, \dots) + \Phi_{S_{\text{sgn}}}(x_1, x_2, \dots) = 2 \Phi_{\text{ALT}}(x_1, x_2, \dots) \quad (4.16)$$

d'où

$$\Phi_{\text{ALT}}(x_1, x_2, \dots) = \frac{1}{2} (\Phi_S(x_1, x_2, \dots) + \Phi_{S_{\text{sgn}}}(x_1, x_2, \dots)).$$

La connaissance de  $\Phi_S$  et de  $\Phi_{S_{\text{sgn}}}$  est donc équivalente à celle de  $\Phi_{\text{ALT}}$  et de  $\Phi_{\text{NALT}}$ . Notons, par contre, que l'égalité (4.16) entre  $\Phi$ -séries indicatrices ne se relève pas, comme telle, au niveau combinatoire, c'est-à-dire que

$$S + S_{\text{sgn}} \neq 2 \text{ ALT},$$

d'où l'intérêt de l'égalité combinatoire  $\text{ALT} = E(C_{\text{imp}}) \cdot E_{\text{pair}}(C_{\text{pair}})$ .  $\square$

Il est tout à fait remarquable que la série indicatrice d'asymétrie de l'espèce  $S$  des permutations ne dépende que des variables  $x_1$  et  $x_2$  [25, 26],

$$\Gamma_S(x_1, x_2, \dots) = \frac{1 - x_2}{1 - x_1}.$$

Ce phénomène persiste dans le cas des séries indicatrices d'asymétrie des espèces ALT et NALT.

**Corollaire 4.3.8.** *On a les séries indicatrices suivantes :*

$$\begin{aligned} Z_{\text{ALT}}(x_1, x_2, \dots) &= \frac{1}{2} \left[ \prod_{n \geq 1} \frac{1}{1 - x_n} + \prod_{n \geq 1} (1 + x_{2n-1}) \right], \\ \Gamma_{\text{ALT}}(x_1, x_2, \dots) &= \frac{2 - x_1^2 - x_2}{2(1 - x_1)}, \\ \mathcal{E}_{\text{ALT}}(x_1, x_2, \dots) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(1 - x_1)(1 - x_2)} + \frac{1 + x_1}{1 - x_4} \right], \\ \mathcal{C}_{\text{ALT}}(x_1, x_2, \dots) &= \frac{1}{2} \left[ \prod_{n \neq 0 \pmod 3} \frac{1}{(1 - x_n)} + \prod_{\substack{n \neq 0 \pmod 3 \\ n \text{ impair}}} (1 + x_n) \right]. \end{aligned}$$



*Démonstration.* Puisque,  $\forall n \geq 1$ ,  $s_Z(n) = 1$  et que

$$s'_Z(n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} (-1)^{n/d} d c_Z(d) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} (-1)^{n/d} \phi(d) = \begin{cases} -1 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair,} \end{cases}$$

on a

$$Z_{\text{ALT}}(x_1, x_2, \dots) = \frac{1}{2} \left[ \prod_{n \geq 1} \frac{1}{1 - x_n} + \prod_{n \geq 1} (1 + x_{2n-1}) \right].$$

Rappelons que

$$s_\Gamma(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ -1 & \text{si } n = 2 \\ 0 & \text{si } n \geq 3. \end{cases}$$

De plus,

$$s'_\Gamma(n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} (-1)^{n/d} (-1)^{n/d-1} d c_\Gamma(d) = -\frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} -1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

D'où

$$\Gamma_{\text{ALT}}(x_1, x_2, \dots) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1 - x_2}{1 - x_1} + (1 + x_1) \right].$$

On a vu que  $s_\mathcal{E}(n) = \chi(n = 1 \text{ ou } n = 2)$ . De plus,

$$\begin{aligned} s'_\mathcal{E}(n) &= \frac{1}{n} \sum_{d|n} (-1)^{n/d} d c_\mathcal{E}(d) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{\substack{d|n \\ d \text{ impair}}} (-1)^{n/d} \mu(d) + \frac{1}{n} \sum_{\substack{d|n \\ d \text{ pair}}} (-1)^{n/d} [\mu(d) + 2\mu(d/2)] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{d|n} (-1)^{n/d} \mu(d) + \frac{2}{n} \sum_{\substack{d|n \\ d \text{ pair}}} (-1)^{n/d} \mu(d/2) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{d|n} (-1)^{n/d} \mu(d) + \frac{2}{n} \chi(n \text{ pair}) \sum_{d|n/2} (-1)^{n/2d} \mu(d) \\ &= \begin{cases} -1 & \text{si } n = 1 \\ 1 & \text{si } n = 4 \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases} \end{aligned}$$

D'où

$$\mathcal{E}_{\text{ALT}}(x_1, x_2, \dots) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(1 - x_1)(1 - x_2)} + \frac{1 + x_1}{1 - x_4} \right].$$

De la  $\mathcal{C}$ -série de l'espèce  $\mathcal{S}$ , on a  $s_{\mathcal{C}}(n) = \chi(n \neq 0 \pmod{3})$ . Distinguons les deux situations suivantes pour le calcul de  $s'_{\mathcal{C}}(n)$  :

- si  $n \neq 0 \pmod{3}$  il est facile de voir que  $s'_{\mathcal{C}}(n) = -\chi(n \text{ impair})$  ;
- si  $n = 0 \pmod{3}$ , on a

$$\begin{aligned} s'_{\mathcal{C}}(n) &= \frac{-2}{n} \sum_{\substack{d|n \\ d=0 \pmod{3}}} (-1)^{n/d} \phi(d) + \frac{1}{n} \sum_{\substack{d|n \\ d \neq 0 \pmod{3}}} (-1)^{n/d} \phi(d) \\ &= \frac{-3}{n} \sum_{\substack{d|n \\ d=0 \pmod{3}}} (-1)^{n/d} \phi(d) - \chi(n \text{ impair}) \end{aligned}$$

et

$$\frac{1}{n} \sum_{\substack{d|n \\ d=0 \pmod{3}}} (-1)^{n/d} \phi(d) = -\chi(n \text{ impair}) \frac{3^r - 1}{3^r}$$

où  $r$  est la multiplicité de 3 dans la décomposition de  $n$  en produit de nombres premiers.

On constate alors que  $s'_{\mathcal{C}}(n)$  est nul pour tout  $n$  pair. En remplaçant les différents exposants intervenant dans  $\Phi_{\text{ALT}}(x_1, x_2, \dots)$  de la proposition précédente, le résultat suit. ■

**Corollaire 4.3.9.** *On a les séries indicatrices suivantes :*

$$\begin{aligned} Z_{\text{NALT}}(x_1, x_2, \dots) &= \frac{1}{2} \left[ \prod_{n \geq 1} \frac{1}{1 - x_n} - \prod_{n \geq 1} (1 + x_{2n-1}) \right], \\ \Gamma_{\text{NALT}}(x_1, x_2, \dots) &= \frac{x_1^2 - x_2}{2(1 - x_1)}, \\ \mathcal{E}_{\text{NALT}}(x_1, x_2, \dots) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(1 - x_1)(1 - x_2)} - \frac{1 + x_1}{1 - x_4} \right], \\ \mathcal{C}_{\text{NALT}}(x_1, x_2, \dots) &= \frac{1}{2} \left[ \prod_{n \neq 0 \pmod{3}} \frac{1}{(1 - x_n)} - \prod_{\substack{n \neq 0 \pmod{3} \\ n \text{ impair}}} (1 + x_n) \right]. \end{aligned}$$

*Démonstration.* On utilise l'égalité

$$\Phi_{\text{NALT}}(x_1, x_2, \dots) = \Phi_{\mathcal{S}}(x_1, x_2, \dots) - \Phi_{\text{ALT}}(x_1, x_2, \dots)$$

et le résultat suit. ■

Notons que pour obtenir les  $\Phi$ -séries des espèces  $\text{ALT}_{(\alpha)}$  et  $\text{NALT}_{(\alpha)}$  des permutations, respectivement paires et impaires, pondérées par le nombre de cycles, il suffit d'effectuer les changements de variables  $\xi_k := \xi_k \alpha^k$ ,  $k \geq 1$ , dans les  $\Phi$ -séries données à la proposition 4.3.6.

C'est en se servant de Darwin [4] que nous avons d'abord conjecturé la forme explicite de la série indicatrice d'asymétrie de l'espèce  $\text{NALT}$ . Sa démonstration a été publiée dans [30]. Nous terminons cette section par une preuve combinatoire directe de la formule explicite pour  $Z_{\text{NALT}}(x_1, x_2, \dots)$ , indépendante du corollaire 4.3.9.

La série indicatrice des cycles de  $Z_{\text{NALT}}(x_1, x_2, \dots)$  prend la forme

$$Z_{\text{NALT}}(x_1, x_2, \dots) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} p_{\text{NALT}}(\sigma) x_1^{\sigma_1} \cdots x_n^{\sigma_n}$$

où  $p_{\text{NALT}}(\sigma)$  est le nombre de permutations impaires de  $\llbracket n \rrbracket$  fixées par  $\sigma$ ,

$$\begin{aligned} p_{\text{NALT}}(\sigma) &= |\{\beta \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma\beta\sigma^{-1} = \beta, \beta \text{ impaire}\}| \\ &= |\{\beta \in \mathfrak{S}_n \mid \beta^{-1}\sigma\beta = \sigma, \beta \text{ impaire}\}| \end{aligned}$$

ou bien le nombre de permutations impaires fixant  $\sigma$ . Distinguons les deux situations suivantes :

– si  $\text{stab}(\sigma) = \{\beta \in \mathfrak{S}_n \mid \beta^{-1}\sigma\beta = \sigma\}$  contient une permutation impaire alors

$$p_{\text{NALT}}(\sigma) = \frac{|\text{stab}(\sigma)|}{2} = \frac{\text{aut}(\sigma)}{2};$$

– si  $\text{stab}(\sigma) \leq \mathfrak{A}_n$  alors  $p_{\text{NALT}}(\sigma) = 0$ .

Ainsi,

$$Z_{\text{NALT}}(x_1, x_2, \dots) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \text{stab}(\sigma) \not\leq \mathfrak{A}_n}} \frac{\text{aut}(\sigma)}{2} x_1^{\sigma_1} \cdots x_n^{\sigma_n}.$$

Examinons le type cyclique d'une permutation  $\sigma$  dont  $\text{stab}(\sigma) \leq \mathfrak{A}_n$ .

1. Si  $\sigma$  contient deux cycles de même longueur impaire  $\alpha = (\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_{2i-1})$  et  $\delta = (\delta_1\delta_2 \cdots \delta_{2i-1})$  alors la permutation  $\beta = (\alpha_1\delta_1)(\alpha_2\delta_2) \cdots (\alpha_{2i-1}\delta_{2i-1}) \in \text{stab}(\sigma)$ . Or  $\beta$  est une permutation impaire et ne peut appartenir à un sous-groupe de  $\mathfrak{A}_n$ .
2. Si  $\sigma$  contient un cycle de longueur paire  $\alpha = (\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_{2i})$  alors  $\alpha \in \text{stab}(\sigma)$ . Or  $\alpha$  est une permutation impaire et ne peut appartenir à un sous-groupe de  $\mathfrak{A}_n$ .

Une permutation  $\sigma$  dont  $\text{stab}(\sigma) \leq \mathfrak{A}_n$  correspond donc à un partage de  $n$  en parts distinctes de longueur impaire (PPDI $_n$ ) d'où

$$\begin{aligned} Z_{\text{NALT}}(x_1, x_2, \dots) &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \text{stab}(\sigma) \not\leq \mathfrak{A}_n}} \frac{\text{aut}(\sigma)}{2} x_1^{\sigma_1} \dots x_n^{\sigma_n} \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{\sigma \vdash n} \frac{1}{2} x_1^{\sigma_1} \dots x_n^{\sigma_n} - \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{\sigma \vdash n \\ \sigma \in \text{PPDI}_n}} \frac{1}{2} x_1^{\sigma_1} \dots x_n^{\sigma_n} \\ &= \frac{1}{2} \prod_{n \geq 1} \frac{1}{1 - x_n} - \frac{1}{2} \prod_{n \geq 1} (1 + x_{2n-1}). \end{aligned}$$

#### 4.4 Les arbres, les arborescences et les endofonctions

Dans [22] et [24], G. Labelle présente un relèvement de l'inversion multidimensionnelle de Good au niveau des séries indicatrices. Ce relèvement, généralisé au contexte des  $\Phi$ -séries, nous permet d'obtenir les  $\Phi$ -séries des espèces A, des arborescences, End, des endofonctions et Ar, des arbres.

**Proposition 4.4.1.** *Soient  $\Phi \subseteq \{K \in \text{cc}(\mathfrak{S}_n) \mid n \geq 0\}$ , un ensemble de groupes non conjugués deux à deux et  $A_R = X \cdot R(A_R)$ , l'espèce des arborescences  $R$ -enrichies. Si  $\Gamma \subseteq \Phi$  et si la transformation  $F \mapsto \Phi_F$  préserve l'opération de substitution, alors pour tout partage  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots)$  et toute espèce  $F$ ,*

$$[x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots] \Phi_{A_R}(x_1, x_2, \dots) = [x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots] x_1 \prod_{k \geq 1} \left( 1 - \frac{x_1 \frac{\partial \Phi_R}{\partial x_1}}{\Phi_R} \right)_k (\Phi_R)_k^{\sigma_k} \quad (4.17)$$

et

$$[x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots] \Phi_{F(A_R)}(x_1, x_2, \dots) = [x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots] \Phi_F \prod_{k \geq 1} \left( 1 - \frac{x_1 \frac{\partial \Phi_R}{\partial x_1}}{\Phi_R} \right)_k (\Phi_R)_k^{\sigma_k}. \quad (4.18)$$

*Démonstration.* Il suffit de démontrer (4.18), puisque (4.17) en est un cas particulier.

Simplifions d'abord la notation en posant

$$\begin{aligned} r &= r(x_1, x_2, \dots) &= \Phi_R(x_1, x_2, \dots) \\ a &= a(x_1, x_2, \dots) &= \Phi_{A_R}(x_1, x_2, \dots) \\ f &= f(x_1, x_2, \dots) &= \Phi_F(x_1, x_2, \dots). \end{aligned}$$

Les restrictions imposées à  $\hat{\Phi}$  nous permettent d'écrire, pour  $A_R = X \cdot R(A_R)$ ,

$$\begin{aligned}\Phi_{A_R}(x_1, x_2, \dots) &= \Phi_{X \cdot R(A_R)}(x_1, x_2, \dots) \\ &= \Phi_X(x_1, x_2, \dots) \cdot \Phi_R \circ \Phi_{A_R}(x_1, x_2, \dots) \\ &= x_1 r(a_1, a_2, \dots).\end{aligned}$$

Calculons  $\Phi_{F(A_R)}(x_1, x_2, \dots) = \Phi_{F \circ \Phi_{A_R}}(x_1, x_2, \dots)$  en utilisant la relation  $a = x_1 r(a)$ . Notons que ce qui suit est calqué sur les démonstrations données par Labelle dans [22] et dans [24] pour les cas où  $\Phi = Z$  et  $\Phi = \Gamma$ .

Posant  $g_k = g(x_k, x_{2k}, x_{3k}, \dots)$ , l'égalité  $a = x_1 r(a)$  donne lieu au système infini d'équations  $a_k = x_k r_k(a_1, a_2, \dots)$ ,  $k \geq 1$ . Pour un système fini d'équations

$$a_k = x_k r_k(a_1, a_2, \dots, a_m), \quad 1 \leq k \leq m,$$

la formule classique d'inversion multidimensionnelle de Lagrange-Good s'écrit

$$[x_1^{\sigma_1} \cdots x_m^{\sigma_m}] f(a_1, \dots, a_m) = [x_1^{\sigma_1} \cdots x_m^{\sigma_m}] f(x_1, \dots, x_m) \det \left( \delta_{ij} - \frac{x_i \frac{\partial r_i}{\partial x_j}}{r_i} \right) \prod_{k=1}^m r_k^{\sigma_k}.$$

La matrice impliquée dans le déterminant est triangulaire supérieure et

$$\det \left( \delta_{ij} - \frac{x_i \frac{\partial r_i}{\partial x_j}}{r_i} \right) = \prod_{k=1}^m \left( 1 - \frac{x_k \frac{\partial r_k}{\partial x_k}}{r_k} \right) = \prod_{k=1}^m \left( 1 - \frac{x_1 \frac{\partial r}{\partial x_1}}{r} \right)_k.$$

Puisque la transformation  $F \mapsto \Phi_F$  préserve l'opération de dérivation, en passant à la limite  $m \rightarrow \infty$ , le résultat suit. ■

**Proposition 4.4.2.** *Soit  $\Phi \subseteq \{K \subseteq \text{cc}(\mathfrak{S}_n) \mid n \geq 0\}$ , un ensemble de groupes non conjugués deux à deux. Si  $\Gamma \subseteq \Phi$  et si la transformation  $F \mapsto \Phi_F$  préserve l'opération de substitution alors la  $\Phi$ -série de l'espèce  $A$ , des arborescences, est donnée par*

$$\Phi_A(x_1, x_2, \dots) = \sum_{n_1+n_2+\dots < \infty} a_\Phi(n_1, n_2, \dots) \frac{x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots}{1^{n_1} n_1! 2^{n_2} n_2! \cdots}$$

où

$$a_\Phi(n_1, n_2, \dots) = \begin{cases} n_1^{n_1-1} \prod_{k \geq 2} \left( \theta_k^{n_k} - k n_k \theta_k^{n_k-1} \right) & \text{si } n_1 \neq 0 \\ 0 & \text{si } n_1 = 0 \end{cases}$$

et  $\theta_k = \sum_{d|k} \xi_{k/d} d n_d$ .

*Démonstration.* L'espèce des arborescences satisfait l'égalité combinatoire  $A = X \cdot E(A)$ . Calculons  $\Phi_A(x_1, x_2, \dots)$  en nous servant de (4.17). Puisque  $\{id_1\} \in \hat{\Phi}$ ,  $\Phi_X(x_1, x_2, \dots) = x_1$ . De plus,

$$r = \Phi_E(x_1, x_2, \dots) = \exp \left\{ \sum_{i \geq 1} \xi_i \frac{x_i}{i} \right\}$$

et, puisque les restrictions imposées à  $\hat{\Phi}$  impliquent que la transformation  $F \mapsto \Phi_F$  préserve l'opération de dérivation et que  $\{id_1\} \in \hat{\Phi}$ ,

$$r' = \frac{\partial}{\partial x_1} \Phi_E(x_1, x_2, \dots) = \xi_1 r = r.$$

Par (4.17) on a :

$$a_{\Phi}(n_1, n_2, \dots) = 1^{n_1} n_1! 2^{n_2} n_2! \cdots [x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots] x_1 \prod_{k \geq 1} (1 - x_k) \exp \left\{ n_k \sum_{i \geq 1} \xi_i \frac{x_{ki}}{i} \right\}.$$

En développant le côté droit de l'égalité ci-dessus, on obtient successivement

$$\begin{aligned}
& x_1 \prod_{k \geq 1} (1 - x_k) \exp \left\{ n_k \sum_{i \geq 1} \xi_i \frac{x_{ki}}{i} \right\} \\
&= x_1 \exp \left\{ \sum_{k \geq 1} \sum_{i \geq 1} n_k \xi_i \frac{x_{ki}}{i} \right\} \prod_{k \geq 1} (1 - x_k) \\
&= x_1 \exp \left\{ \sum_{m \geq 1} \left( \sum_{d|m} d n_d \xi_{m/d} \right) \frac{x_m}{m} \right\} \prod_{k \geq 1} (1 - x_k) \\
&= x_1 \exp \left\{ \sum_{m \geq 1} \theta_m \frac{x_m}{m} \right\} \prod_{k \geq 1} (1 - x_k) \\
&= x_1 \prod_{k \geq 1} (1 - x_k) \exp \left\{ \theta_k \frac{x_k}{k} \right\} = x_1 \prod_{k \geq 1} (1 - x_k) \sum_{j \geq 1} \frac{\theta_k^j x_k^j}{k^j j!} \\
&= x_1 \sum_{0 \leq i_1, i_2, \dots \leq 1} \sum_{j_1, j_2, \dots \geq 0} (-1)^{i_1 + i_2 + \dots} \frac{\theta_1^{j_1} \theta_2^{j_2} \dots x_1^{i_1 + j_1} x_2^{i_2 + j_2} \dots}{1^{j_1} j_1! 2^{j_2} j_2! \dots} \\
&= x_1 \sum_{\sigma_1, \sigma_2, \dots \geq 0} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots \sum_{0 \leq i_1, i_2, \dots \leq 1} (-1)^{i_1 + i_2 + \dots} \frac{\theta_1^{\sigma_1 - i_1} \theta_2^{\sigma_2 - i_2} \dots}{1^{\sigma_1 - i_1} (\sigma_1 - i_1)! 2^{\sigma_2 - i_2} (\sigma_2 - i_2)! \dots} \\
&= \sum_{\sigma_1, \sigma_2, \dots \geq 0} x_1^{\sigma_1 + 1} x_2^{\sigma_2} \dots \prod_{j \geq 1} \left( \frac{\theta_j^{\sigma_j} - j \sigma_j \theta_j^{\sigma_j - 1}}{j^{\sigma_j} \sigma_j!} \right) \\
&= \sum_{\sigma_1, \sigma_2, \dots \geq 0} \frac{x_1^{\sigma_1 + 1} x_2^{\sigma_2} \dots}{1^{\sigma_1} \sigma_1! 2^{\sigma_2} \sigma_2! \dots} \left( \theta_1^{\sigma_1} - \sigma_1 \theta_1^{\sigma_1 - 1} \right) \prod_{j \geq 2} \left( \theta_j^{\sigma_j} - j \sigma_j \theta_j^{\sigma_j - 1} \right).
\end{aligned}$$

Ainsi, si  $n_1 = \sigma_1 + 1 \geq 1$  alors

$$a_\Phi(n_1, n_2, \dots) = n_1 \left( \theta_1^{n_1 - 1} - (n_1 - 1) \theta_1^{n_1 - 2} \right) \prod_{j \geq 2} \left( \theta_j^{n_j} - j n_j \theta_j^{n_j - 1} \right).$$

Puisque  $\theta_1 = \xi_1 n_1 = n_1$ , on a

$$n_1 \left( \theta_1^{n_1 - 1} - (n_1 - 1) \theta_1^{n_1 - 2} \right) = n_1 \left( n_1^{n_1 - 1} - (n_1 - 1) n_1^{n_1 - 2} \right) = n_1^{n_1 - 1}$$

et le résultat suit. ■

En particulier, on retrouve les formules de G. Labelle [25, 22, 24, 26] pour  $Z_A$  et  $\Gamma_A$  puisque, pour  $\Phi = Z$ ,  $\theta_k = \sum_{d|k} d n_d$  et pour  $\Phi = \Gamma$ ,  $\theta_k = \sum_{d|k} (-1)^{k/d-1} d n_d$ . Voir [10], pour une démonstration bijective du résultat pour  $Z_A$ . Notons que nous aurions

pu démontrer la proposition précédente en précisant seulement que

$$a_{\Phi}(n_1, n_2, \dots) = 1^{n_1} n_1! 2^{n_2} n_2! \dots [x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots] x_1 \prod_{k \geq 1} (1 - x_k) \exp \left\{ \theta_k \frac{x_k}{k} \right\}$$

est l'analogie de (3.1.5) de G. Labelle [24], où seule l'expression pour les exposants  $\theta_k$  est différente. En fait, puisque la  $\Phi$ -série ne dépend essentiellement que des valeurs de  $\theta_k$ ,  $k \geq 1$ , et que ceux-ci ne dépendent que des valeurs de  $\xi_i$ ,  $i \geq 1$ , il est facile d'obtenir la  $\Phi$ -série de l'espèce des arborescences lorsqu'on connaît la  $\Phi$ -série de l'espèce des ensembles.

**Proposition 4.4.3.** *Soit  $\Phi \subseteq \{K_{\subseteq cc}(\mathfrak{S}_n) \mid n \geq 0\}$ , un ensemble de groupes non conjugués deux à deux. Si  $\Gamma \subseteq \Phi$  et si la transformation  $F \mapsto \Phi_F$  préserve l'opération de substitution alors la  $\Phi$ -série de l'espèce End, des endofonctions, est donnée par*

$$\Phi_{\text{End}}(x_1, x_2, \dots) = \sum_{n_1 + n_2 + \dots < \infty} \text{end}_{\Phi}(n_1, n_2, \dots) \frac{x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots}{1^{n_1} n_1! 2^{n_2} n_2! \dots}$$

où

$$\text{end}_{\Phi}(n_1, n_2, \dots) = \prod_{k \geq 1} \sum_{0 \leq i \leq n_k} \binom{n_k}{i} (1 - s_{\Phi}(k))^{(i)} (-k)^i \theta_k^{n_k - i},$$

$n^{(k)} = n(n-1) \dots (n-k+1)$ ,  $\theta_k = \sum_{d|k} \xi_{k/d} d n_d$  et où l'on prend comme convention que  $0^0 = 1$ .

*Démonstration.* L'espèce des endofonctions satisfait l'égalité combinatoire  $\text{End} = S(\text{A})$  où  $S$  désigne l'espèce des permutations et  $\text{A}$ , celle des arborescences. De (4.18), on a

$$\text{end}_{\Phi}(n_1, n_2, \dots) = 1^{n_1} n_1! 2^{n_2} n_2! \dots [x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots] \Phi_S(x_1, x_2, \dots) \prod_{k \geq 1} \left( 1 - \frac{x_1 r^k}{r} \right)_k r_k^{n_k}$$

où  $r = \Phi_E(x_1, x_2, \dots)$ . De ce qu'on a vu à la démonstration de la proposition 4.4.2,

$$\begin{aligned} \text{end}_{\Phi}(n_1, n_2, \dots) = \\ 1^{n_1} n_1! 2^{n_2} n_2! \dots [x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots] \Phi_S(x_1, x_2, \dots) \exp \left\{ \sum_{m \geq 1} \theta_m \frac{x_m}{m} \right\} \prod_{k \geq 1} (1 - x_k) \end{aligned}$$

où  $\theta_m = \sum_{d|m} \xi_{m/d} d n_d$ . Puisque

$$\Phi_S(x_1, x_2, \dots) = \prod_{k \geq 1} \left( \frac{1}{1 - x_k} \right)^{s_{\Phi}(k)}$$



on a :

$$\text{end}_{\Phi}(n_1, n_2, \dots) = 1^{n_1} n_1! 2^{n_2} n_2! \dots [x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots] \exp \left\{ \sum_{m \geq 1} \theta_m \frac{x_m}{m} \right\} \prod_{k \geq 1} (1 - x_k)^{1 - s_{\Phi}(k)}.$$

Développant le côté droit de l'expression ci-dessus, on obtient successivement

$$\begin{aligned} & \exp \left\{ \sum_{m \geq 1} \theta_m \frac{x_m}{m} \right\} \prod_{k \geq 1} (1 - x_k)^{1 - s_{\Phi}(k)} \\ &= \prod_{k \geq 1} (1 - x_k)^{1 - s_{\Phi}(k)} \exp \left\{ \theta_k \frac{x_k}{k} \right\} \\ &= \prod_{k \geq 1} \left( \sum_{i \geq 0} \binom{1 - s_{\Phi}(k)}{i} (-x_k)^i \sum_{j \geq 0} \frac{\theta_k^j x_k^j}{k^j j!} \right) \\ &= \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots \geq 0 \\ j_1, j_2, \dots \geq 0}} \left( \prod_{k \geq 1} \binom{1 - s_{\Phi}(k)}{i_k} (-1)^{i_k} \frac{\theta_k^{j_k} x_k^{i_k + j_k}}{k^{j_k} j_k!} \right) \\ &= \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots \geq 0 \\ j_1, j_2, \dots \geq 0}} \left( \prod_{k \geq 1} \frac{(1 - s_{\Phi}(k))^{(i_k)} (-k)^{i_k} \theta_k^{j_k} (i_k + j_k)!}{i_k! j_k!} \right) \frac{x_1^{i_1 + j_1} x_2^{i_2 + j_2} \dots}{1^{i_1 + j_1} (i_1 + j_1)! 2^{i_2 + j_2} (i_2 + j_2)! \dots} \\ &= \sum_{\substack{n_1, n_2, \dots \geq 0 \\ 0 \leq i_1, i_2, \dots \leq n_1, n_2, \dots}} \left( \prod_{k \geq 1} \binom{n_k}{i_k} (1 - s_{\Phi}(k))^{(i_k)} (-k)^{i_k} \theta_k^{n_k - i_k} \right) \frac{x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots}{1^{n_1} n_1! 2^{n_2} n_2! \dots} \\ &= \sum_{n_1, n_2, \dots \geq 0} \prod_{k \geq 1} \left( \sum_{0 \leq i \leq n_k} \binom{n_k}{i} (1 - s_{\Phi}(k))^{(i)} (-k)^i \theta_k^{n_k - i} \right) \frac{x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots}{1^{n_1} n_1! 2^{n_2} n_2! \dots}. \end{aligned}$$

■

**Corollaire 4.4.4.** *On a les coefficients suivants :*

$$\text{end}_Z(n_1, n_2, \dots) = \prod_{k \geq 1} \theta_k^{n_k} \text{ où } \theta_k = \sum_{d|k} d n_d$$

et

$$\text{end}_{\Gamma}(n_1, n_2, \dots) = n_1^{n_1} \left( \theta_2^{n_2} - 4n_2 \theta_2^{n_2 - 1} + 4n_2(n_2 - 1) \theta_2^{n_2 - 2} \right) \prod_{k \geq 3} \left( \theta_k^{n_k} - kn_k \theta_k^{n_k - 1} \right)$$

où  $\theta_k = \sum_{d|k} (-1)^{k/d-1} d n_d$ . De plus,

$$\text{end}_{\mathcal{C}}(n_1, n_2, \dots) = \prod_{k \neq 0 \pmod 3} \theta_k^{n_k} \prod_{k=0 \pmod 3} \left( \theta_k^{n_k} - kn_k \theta_k^{n_k - 1} \right)$$

où  $\theta_k = \sum_{d|k} \xi_{k/d} d n_d$ , pour  $j = 0 \pmod 3$ ,  $\xi_j = -2$ , et pour  $j \neq 0 \pmod 3$ ,  $\xi_j = 1$ .

*Démonstration.* L'expression pour  $\text{end}_Z(n_1, n_2, \dots)$  s'obtient facilement en constatant que  $(1 - s_Z(k))^{(i)} = \chi(i = 0)$ . Lorsque  $\Phi = \Gamma$ , on a :

$$s_\Gamma(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 1 \\ -1 & \text{si } k = 2 \\ 0 & \text{si } k \geq 3. \end{cases}$$

Distinguons les trois situations suivantes :

– si  $k = 1$ ,  $(1 - s_\Gamma(1))^{(i)} = 0^{(i)} = \chi(i = 0)$ , alors

$$\sum_{0 \leq i \leq n_1} \binom{n_1}{i} (1 - s_\Gamma(1))^{(i)} (-1)^i \theta_1^{n_1-i} = \theta_1^{n_1} = n_1^{n_1};$$

– si  $k = 2$ ,

$$(1 - s_\Gamma(2))^{(i)} = 2^{(i)} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ 2 & \text{si } i = 1 \text{ ou } i = 2 \\ 0 & \text{si } i \geq 3, \end{cases}$$

alors

$$\sum_{0 \leq i \leq n_2} \binom{n_2}{i} (1 - s_\Gamma(2))^{(i)} (-2)^i \theta_2^{n_2-i} = \theta_2^{n_2} - 4n_2 \theta_2^{n_2-1} + 4n_2(n_2 - 1) \theta_2^{n_2-2};$$

– si  $k \geq 3$ ,  $(1 - s_\Gamma(k))^{(i)} = 1^{(i)} = \chi(i = 0 \text{ ou } i = 1)$ , alors

$$\sum_{0 \leq i \leq n_k} \binom{n_k}{i} (1 - s_\Gamma(k))^{(i)} (-k)^i \theta_k^{n_k-i} = \theta_k^{n_k} - kn_k \theta_k^{n_k-1}.$$

En effectuant le produit de ce qui précède, le résultat pour  $\text{end}_\Gamma(n_1, n_2, \dots)$  suit.

Lorsque  $\Phi = \mathcal{C}$ ,  $s_{\mathcal{C}}(k) = \chi(k \neq 0 \pmod 3)$ . Distinguons les deux situations suivantes :

– si  $k \neq 0 \pmod 3$ ,  $(1 - s_{\mathcal{C}}(k))^{(i)} = 0^{(i)} = \chi(i = 0)$ , alors

$$\sum_{0 \leq i \leq n_k} \binom{n_k}{i} (1 - s_{\mathcal{C}}(k))^{(i)} (-k)^i \theta_k^{n_k-i} = \theta_k^{n_k};$$

– si  $k = 0 \pmod 3$ ,  $(1 - s_{\mathcal{C}}(k))^{(i)} = 1^{(i)} = \chi(i = 0 \text{ ou } i = 1)$ , alors

$$\sum_{0 \leq i \leq n_k} \binom{n_k}{i} (1 - s_{\mathcal{C}}(k))^{(i)} (-k)^i \theta_k^{n_k-i} = \theta_k^{n_k} - kn_k \theta_k^{n_k-1}.$$

En effectuant le produit de ce qui précède, rappelant que

$$\theta_k = \sum_{d|k} \xi_{k/d} d n_d, \text{ où } \xi_j = \begin{cases} -2 & \text{si } j = 0 \pmod 3 \\ 1 & \text{si } j \neq 0 \pmod 3, \end{cases}$$

le résultat suit. ■

**Proposition 4.4.5.** *Soit  $\Phi \subseteq \{K_{\subseteq cc}(\mathfrak{S}_n) \mid n \geq 0\}$ , un ensemble de groupes non conjugués deux à deux. Si  $\Gamma \subseteq \Phi$  et si la transformation  $F \mapsto \Phi_F$  préserve l'opération de substitution alors la  $\Phi$ -série de l'espèce Ar, des arbres, est donnée par*

$$\Phi_{\text{Ar}}(x_1, x_2, \dots) = \sum_{n_1+n_2+\dots<\infty} \text{ar}_{\Phi}(n_1, n_2, \dots) \frac{x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots}{1^{n_1} n_1! 1^{n_2} n_2! \dots}$$

où

$$\text{ar}_{\Phi}(n_1, n_2, \dots) = \begin{cases} \frac{1}{n_1} \text{a}_{\Phi}(n_1, n_2, \dots) & \text{si } n_1 \neq 0 \\ -\frac{(-1)^{\chi(\mathfrak{S}_2 \in \hat{\Phi})}}{2} 2^{n_2+n_4+\dots} \text{a}_{\Phi}(n_2, n_4, \dots) & \text{si } n_1 = n_3 = \dots = 0 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

et où  $\text{a}_{\Phi}(n_1, n_2, \dots) = 1^{n_1} n_1! 1^{n_2} n_2! \dots [x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots] \Phi_{\text{A}}(x_1, x_2, \dots)$ .

*Démonstration.* Nous utilisons le théorème de dissymétrie pour les arbres [37, 38, 5] qui lie l'espèce des arborescences à celle des arbres,

$$\text{A} + E_2(\text{A}) = \text{Ar} + \text{A}^2,$$

pour obtenir l'égalité

$$\Phi_{\text{Ar}}(x_1, x_2, \dots) = \left( x_1 + \chi(\mathfrak{S}_2 \in \hat{\Phi}) x_2 - \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2) \right) \circ \Phi_{\text{A}}(x_1, x_2, \dots), \quad (4.19)$$

par passage aux  $\Phi$ -séries. Puisque la transformation  $F \mapsto \Phi_F$  préserve l'opération de dérivation et que  $\text{A} = X \cdot \text{Ar}'$ , on a :

$$\Phi_{\text{Ar}}(x_1, x_2, \dots) = x_1 \Phi_{\text{Ar}'}(x_1, x_2, \dots) = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \Phi_{\text{Ar}}(x_1, x_2, \dots).$$

On en déduit que

$$\Phi_{\text{Ar}}(x_1, x_2, \dots) = \int_0^{x_1} \frac{1}{y} \Phi_{\text{A}}(y, x_2, x_3, \dots) dy + \Phi_{\text{Ar}}(x_1, x_2, \dots)|_{x_1=0}.$$

De (4.19),

$$\Phi_{\text{Ar}}(x_1, x_2, \dots)|_{x_1=0} = -(-1)^{\chi(\mathfrak{S}_2 \in \hat{\Phi})} \frac{1}{2} \Phi_{\text{A}}(x_2, x_4, x_6, \dots)$$

où

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \Phi_{\text{A}}(x_2, x_4, x_6, \dots) = \\ &= \sum_{\nu_1 + \nu_2 + \dots < \infty} \frac{\mathfrak{a}_{\Phi}(\nu_1, \nu_2, \dots)}{2} \frac{x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \dots}{1^{\nu_1} \nu_1! 2^{\nu_2} \nu_2! \dots} \\ &= \sum_{n_2 + n_4 + \dots < \infty} \frac{\mathfrak{a}_{\Phi}(n_2, n_4, n_6, \dots)}{2} 2^{n_2 + n_4 + n_6 + \dots} \frac{x_2^{n_2} x_4^{n_4} x_6^{n_6} \dots}{2^{n_2} n_2! 4^{n_4} n_4! 6^{n_6} n_6! \dots}. \end{aligned}$$

La dernière égalité étant obtenue du fait que

$$1^{n_2} 2^{n_4} 3^{n_6} \dots = \frac{2^{n_2} 4^{n_4} 6^{n_6} \dots}{2^{n_2} 2^{n_4} 2^{n_6} \dots}.$$

Puisque

$$\int_0^{x_1} \frac{1}{y} \Phi_{\text{A}}(y, x_2, x_3, \dots) dy = \sum_{n_1 + n_2 + \dots < \infty} \frac{\mathfrak{a}_{\Phi}(n_1, n_2, \dots)}{n_1} \frac{x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots}{1^{n_1} n_1! 2^{n_2} n_2! \dots},$$

on obtient

$$\begin{aligned} & \Phi_{\text{Ar}}(x_1, x_2, \dots) = \\ &= \sum_{n_1 + n_2 + \dots < \infty} \frac{\mathfrak{a}_{\Phi}(n_1, n_2, \dots)}{n_1} \frac{x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots}{1^{n_1} n_1! 2^{n_2} n_2! \dots} \\ & \quad - (-1)^{\chi(\mathfrak{S}_2 \in \hat{\Phi})} \sum_{n_2 + n_4 + \dots < \infty} \frac{\mathfrak{a}_{\Phi}(n_2, n_4, \dots)}{2} 2^{n_2 + n_4 + n_6 + \dots} \frac{x_2^{n_2} x_4^{n_4} \dots}{2^{n_2} n_2! 4^{n_4} n_4! \dots} \end{aligned}$$

et le résultat suit. ■

## 4.5 L'espace pondérateur des composantes connexes

Soit  $E^+ = E - 1$  l'espace des ensembles non-vides. Dans [19], Joyal a montré que  $E^+$  possède un inverse sous la substitution,  $(E^+)^{\langle -1 \rangle}$ , donné par

$$\begin{aligned} (E^+)^{\langle -1 \rangle} &= X - \Delta X + \Delta^2 X - \Delta^3 X + \dots \\ &= X - E_2 + X E_2 - E_3 - X^2 E_2 + X E_3 - E_4 + \dots \end{aligned}$$

où  $\Delta$  est l'opérateur de différence combinatoire défini par  $\Delta G = G \circ E^+ - G$ , pour toute espèce virtuelle  $G$ .

G. Labelle et P. Leroux présentent dans [28] une espèce virtuelle pondérée  $\Lambda^{(\alpha)}$ , dite *pondératrice des composantes connexes*, définie par

$$\Lambda^{(\alpha)} = E \circ X_\alpha \circ (E^+)^{\langle -1 \rangle} \quad (4.20)$$

où  $X_\alpha$  désigne l'espèce des singletons de poids  $\alpha$ .

Pour toute espèce pondérée  $F_w$ ,  $F_w[\emptyset] = 1$ , de la forme  $F_w = E(F_w^c)$ , où  $F_w^c$  désigne l'espèce des  $F_w$ -structures connexes, et pour toute variable formelle  $\alpha$ , le résultat de la substitution de  $F_w^+ = F_w - 1$  dans  $\Lambda^{(\alpha)}$  est une espèce  $F_{w^{(\alpha)}} := \Lambda^{(\alpha)} \circ F_w^+$  obtenue en posant, pour toute  $F_w$ -structure  $s$ ,

$$w^{(\alpha)}(s) = \alpha^{c(s)} w(s)$$

où  $c(s)$  est le nombre de composantes connexes de  $s$ . Par exemple, pour  $F = E$ , l'espèce des ensembles, on a  $\Lambda^{(\alpha)} \circ E^+ = E(X_\alpha)$  et pour l'espèce  $S$  des permutations, on a  $\Lambda^{(\alpha)} \circ S^+ = S_{(\alpha)}$ , l'espèce des permutations pondérées par  $\alpha^{\text{nombre de cycles}}$ .

**Lemme 4.5.1.** *Soit  $\Phi \subseteq \{K \subseteq \text{cc}(\mathfrak{S}_n) \mid n \geq 0\}$ , un ensemble de groupes non conjugués deux à deux. Si  $\Gamma \subseteq \Phi$  et si la transformation  $F \mapsto \Phi_F$  préserve l'opération de substitution alors la  $\Phi$ -série de l'espèce  $(E^+)^{\langle -1 \rangle}$  est donnée par*

$$\Phi_{(E^+)^{\langle -1 \rangle}}(x_1, x_2, \dots) = \sum_{j \geq 1} \frac{\mu_\Phi(j)}{j} \ln(1 + x_j)$$

où  $\mu_\Phi(1) = 1$  et  $\mu_\Phi(j)$ , pour  $j \geq 2$ , est donné par les formules équivalentes

$$\begin{aligned} \mu_\Phi(j) &= \sum_{n \geq 1} (-1)^n \sum_{\substack{(d_1, d_2, \dots, d_n) \\ d_i > 1, \prod d_i = j}} \xi_{d_1} \xi_{d_2} \cdots \xi_{d_n} \\ &= \sum_{n \geq 1} (-1)^n \sum_{\substack{(a_2, a_3, \dots) \\ \prod_{i \geq 2} i^{a_i} = j, \sum_{i \geq 2} a_i = n}} \binom{n}{a_2, a_3, \dots} \xi_2^{a_2} \xi_3^{a_3} \cdots \end{aligned}$$

*Démonstration.* Rappelons que

$$\Phi_E(x_1, x_2, \dots) = \exp \left\{ \sum_{k \geq 1} \xi_k \frac{x_k}{k} \right\}. \quad (4.21)$$

Puisque

$$E \circ (E^+)^{\langle -1 \rangle} = 1 + E^+ \circ (E^+)^{\langle -1 \rangle} = 1 + X,$$

et que la transformation  $F \mapsto \Phi_F$  préserve l'opération de substitution, on a :

$$\begin{aligned} \Phi_{E \circ (E^+)^{\langle -1 \rangle}}(x_1, x_2, \dots) &= \Phi_E \circ \Phi_{(E^+)^{\langle -1 \rangle}}(x_1, x_2, \dots) \\ &= \Phi_E \circ \Theta = 1 + x_1 \end{aligned}$$

où, pour simplifier l'écriture,  $\Theta = \Phi_{(E^+)^{\langle -1 \rangle}}(x_1, x_2, \dots)$ . Substituant  $\Theta$  dans (4.21) et prenant le logarithme de part et d'autre, on trouve

$$\sum_{k \geq 1} \xi_k \frac{\Theta_k}{k} = \ln(1 + x_1),$$

où  $\Theta_k = \Phi_{(E^+)^{\langle -1 \rangle}}(x_k, x_{2k}, \dots)$ , et

$$\sum_{k \geq 1} \xi_k \frac{\Theta_{nk}}{nk} = \frac{1}{n} \ln(1 + x_n). \quad (4.22)$$

Soit  $\Xi = (\Xi_{ij})$  la matrice triangulaire supérieure inversible définie par

$$\Xi_{ij} = \begin{cases} \xi_{j/i} & \text{si } i \text{ divise } j \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Considérons la décomposition  $\Xi = I + U$  où  $I$  est la matrice identité infinie et

$$U_{ij} = \begin{cases} \xi_{j/i} & \text{si } i \text{ divise } j \text{ et } i \neq j \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

pour écrire

$$\Xi^{-1} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n U^n.$$

L'égalité (4.22) donne lieu au système d'équations

$$\Xi \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ 1 \\ \Theta_2 \\ 2 \\ \Theta_3 \\ 3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\ln(1+x_1)}{1} \\ \frac{\ln(1+x_2)}{2} \\ \frac{\ln(1+x_3)}{3} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

et on en déduit que

$$\Theta = \sum_{j \geq 1} (\Xi^{-1})_{1j} \frac{1}{j} \ln(1 + x_j).$$

D'où

$$\begin{aligned} (\Xi^{-1})_{1j} &= \sum_{n \geq 0} (-1)^n (U^n)_{1j} \\ &= \sum_{n \geq 0} (-1)^n \sum_{\substack{1|k_1|k_2|\dots|k_{n-1}|j \\ 1 \neq k_1 \neq k_2 \neq \dots \neq k_{n-1} \neq j}} \xi_{k_1} \xi_{k_2/k_1} \cdots \xi_{j/k_{n-1}}. \end{aligned}$$

La dernière sommation s'effectue donc sur les chemins de longueur  $n$  allant de 1 à  $j$  dans le treillis des diviseurs de  $j$ . Posant  $d_1 = k_1$ ,  $d_2 = k_2/k_1$ ,  $\dots$  et  $d_n = j/k_{n-1}$ , on obtient

$$(\Xi^{-1})_{1j} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \sum_{\substack{(d_1, d_2, \dots, d_n) \\ d_i > 1, \prod d_i = j}} \xi_{d_1} \xi_{d_2} \cdots \xi_{d_n} = \mu_{\Phi}(j)$$

tel que nous l'avons annoncé. La deuxième expression pour les coefficients  $\mu_{\Phi}(j)$  est obtenue en considérant  $a_i$  comme le nombre d'occurrences de  $i \geq 2$  dans le vecteur  $(d_1, d_2, \dots, d_n)$  et le résultat suit.  $\blacksquare$

**Proposition 4.5.2.** *Soit  $\Phi \subseteq \{K \in \text{cc}(\mathfrak{S}_n) \mid n \geq 0\}$ , un ensemble de groupes non conjugués deux à deux. Si  $\Gamma \subseteq \Phi$  et si la transformation  $F \mapsto \Phi_F$  préserve l'opération de substitution alors la  $\Phi$ -série de l'espèce  $\Lambda^{(\alpha)}$  est donnée par*

$$\Phi_{\Lambda^{(\alpha)}}(x_1, x_2, \dots) = \prod_{n \geq 1} (1 + x_n)^{\lambda_{\Phi}^{(\alpha)}(n)}$$

où

$$\lambda_{\Phi}^{(\alpha)}(n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \xi_d \mu_{\Phi}(n/d) \alpha^d.$$

*Démonstration.* Les restrictions imposées à  $\hat{\Phi}$  permettent d'utiliser l'égalité combinatoire (4.20) pour obtenir

$$\begin{aligned} \Phi_{\Lambda^{(\alpha)}}(x_1, x_2, \dots) &= \Phi_E \circ \Phi_{X_{\alpha}} \circ \Phi_{(E^+)^{<-1>}}(x_1, x_2, \dots) \\ &= \Phi_E \circ (\alpha x_1) \circ \Phi_{(E^+)^{<-1>}}(x_1, x_2, \dots) \end{aligned}$$

où, du lemme 4.5.1,

$$\begin{aligned} \alpha x_1 \circ \Phi_{(E^+)<-1>}(x_1, x_2, \dots) &= \alpha \Phi_{(E^+)<-1>}(x_1, x_2, \dots) \\ &= \alpha \sum_{j \geq 1} \frac{\mu_{\Phi}(j)}{j} \ln(1 + x_j). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \Phi_{\Lambda^{(\alpha)}}(x_1, x_2, \dots) &= \exp \left\{ \sum_{k \geq 1} \frac{\xi_k}{k} \alpha^k \sum_{j \geq 1} \frac{\mu_{\Phi}(j)}{j} \ln(1 + x_{kj}) \right\} \\ &= \exp \left\{ \sum_{k \geq 1} \sum_{j \geq 1} \frac{\xi_k \alpha^k}{kj} \mu_{\Phi}(j) \ln(1 + x_{kj}) \right\} \\ &= \exp \left\{ \sum_{n \geq 1} \left( \frac{1}{n} \sum_{d|n} \xi_d \mu_{\Phi}(n/d) \alpha^d \right) \ln(1 + x_n) \right\} \\ &= \exp \left\{ \sum_{n \geq 1} \lambda_{\Phi}^{(\alpha)}(n) \ln(1 + x_n) \right\} \\ &= \prod_{n \geq 1} (1 + x_n)^{\lambda_{\Phi}^{(\alpha)}(n)}. \end{aligned}$$

■

Lorsque les  $\xi_k$  sont complètement multiplicatifs, on a

$$\mu_{\Phi}(j) = \xi_j \mu(j)$$

où  $\mu(j)$  désigne la fonction de Möbius classique. Voir [48] pour des détails concernant l'inversion de Möbius dans le treillis des diviseurs d'un entier positif. Ainsi, dans le cas particulier où  $\Phi = Z$ ,

$$\lambda_Z^{(\alpha)}(n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(n/d) \alpha^d$$

et on retrouve exactement la série  $Z_{\Lambda^{(\alpha)}}(x_1, x_2, \dots)$  de [28].

**Proposition 4.5.3.** *Sous les hypothèses de la proposition 4.5.2, les exposants  $\lambda_{\Phi}^{(\alpha)}(n)$  satisfont la récurrence*

$$\lambda_{\Phi}^{(\alpha)}(n) = \frac{1}{n} \left( \xi_n \alpha^n - \sum_{\substack{d|n \\ d \neq n}} \xi_{n/d} d \lambda_{\Phi}^{(\alpha)}(d) \right).$$



*Démonstration.* D'une part,  $\Lambda^{(\alpha)} \circ E^+ = E(X_\alpha)$  et

$$\begin{aligned} \Phi_{\Lambda^{(\alpha)} \circ E^+}(x_1, x_2, \dots) &= \Phi_{E(X_\alpha)}(x_1, x_2, \dots) \\ &= \Phi_E \circ \Phi_{X_\alpha}(x_1, x_2, \dots) \\ &= \exp \left\{ \sum_{n \geq 1} \xi_n \alpha^n \frac{x_n}{n} \right\}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

D'autre part, puisque  $E^+ = E - 1$ , on a :

$$\begin{aligned} \Phi_{\Lambda^{(\alpha)} \circ E^+}(x_1, x_2, \dots) &= \Phi_{\Lambda^{(\alpha)}} \circ \Phi_{E^+}(x_1, x_2, \dots) = \prod_{n \geq 1} (1 + (\Phi_{E^+})_n)^{\lambda_\Phi^{(\alpha)}(n)} \\ &= \prod_{n \geq 1} (1 + (\Phi_E - 1)_n)^{\lambda_\Phi^{(\alpha)}(n)} = \prod_{n \geq 1} (\Phi_E)_n^{\lambda_\Phi^{(\alpha)}(n)} \\ &= \prod_{n \geq 1} \exp \left\{ \lambda_\Phi^{(\alpha)}(n) \sum_{k \geq 1} \xi_k \frac{x_{kn}}{k} \right\} \\ &= \exp \left\{ \sum_{n \geq 1} \sum_{k \geq 1} n \lambda_\Phi^{(\alpha)}(n) \xi_k \frac{x_{kn}}{kn} \right\} \\ &= \exp \left\{ \sum_{n \geq 1} \sum_{d|n} d \lambda_\Phi^{(\alpha)}(d) \xi_{n/d} \frac{x_n}{n} \right\}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Par comparaison des expressions (4.23) et (4.24), on obtient

$$\xi_n \alpha^n = \sum_{d|n} \xi_{n/d} d \lambda_\Phi^{(\alpha)}(d) \quad (4.25)$$

et, isolant  $\lambda_\Phi^{(\alpha)}(n)$  de (4.25), le résultat suit. ■

Dans [28], Labelle et Leroux ont obtenu un certain nombre d'identités concernant les séries associées à une espèce  $F_{w^{(\alpha)}} = \Lambda^{(\alpha)} \circ F_w^+$  lorsque  $F[\emptyset] = 1$ . Celles-ci se généralisent facilement au contexte des  $\Phi$ -symétries. Soit  $\Phi \subseteq \{K \subseteq \text{cc}(\mathfrak{S}_n) \mid n \geq 0\}$ , un ensemble de groupes non conjugués deux à deux. Si  $\Gamma \subseteq \Phi$  et si la transformation  $F \mapsto \Phi_F$  préserve

l'opération de substitution alors

$$\begin{aligned}\widetilde{\Lambda^{(\alpha)} \Phi}(x) &= \prod_{n \geq 1} (1 + x^n)^{\lambda_{\Phi}^{(\alpha)}(n)}, \\ \Phi_{F_w^{(\alpha)}}(x_1, x_2, x_3, \dots) &= \prod_{n \geq 1} (\Phi_{F_w^n}(x_n, x_{2n}, x_{3n}, \dots))^{\lambda_{\Phi}^{(\alpha)}(n)}, \\ \widetilde{F_w^{(\alpha)} \Phi}(x) &= \prod_{n \geq 1} \left( \widetilde{F_w^n \Phi}(x^n) \right)^{\lambda_{\Phi}^{(\alpha)}(n)},\end{aligned}$$

et, posant

$$F(x; q)_{\Phi} = \Phi_F(x_1, x_2, \dots) |_{\Delta}$$

où  $\Delta : x_k := \frac{(1-q)^k}{1-q^k} x^k$ ,  $k \geq 1$ ,

$$F_w^{(\alpha)}(x; q)_{\Phi} = \prod_{n \geq 1} \left( F_w^n \left( \frac{(1-q)^n}{1-q^n} x^n; q^n \right)_{\Phi} \right)^{\lambda_{\Phi}^{(\alpha)}(n)}.$$

De plus, pour deux variables formelles  $\alpha$  et  $\beta$ , on a l'identité suivante

$$\lambda_{\Phi}^{(\alpha\beta)}(n) = \sum_{i+j=n} \lambda_{\Phi}^{(\alpha^j)}(i) \lambda_{\Phi}^{(\beta)}(j).$$

L'espèce  $\Lambda^{(\alpha)}$  permet d'obtenir une expression équivalente pour les exposants  $s_{\Phi}^{(\alpha)}(n)$ ,  $n \geq 1$ , de la proposition 4.3.3 en terme des  $\lambda_{\Phi}^{(\alpha)}(n)$ ,  $n \geq 1$ .

**Proposition 4.5.4.** *Soit  $\Phi \subseteq \{K \in \text{cc}(\mathfrak{S}_n) \mid n \geq 0\}$ , un ensemble de groupes non conjugués deux à deux. Si  $\Gamma \subseteq \Phi$  et si la transformation  $F \mapsto \Phi_F$  préserve l'opération de substitution alors*

$$s_{\Phi}^{(\alpha)}(n) = \sum_{d|n} s_{\Phi}(n/d) \lambda_{\Phi}^{(\alpha)}(d).$$

*Démonstration.* Pour obtenir l'espèce  $S_{(\alpha)}$ , on substitue dans  $\Lambda^{(\alpha)}$  l'espèce  $S^+ = S-1 =$

$E \circ C - 1$  des permutations ne vivant pas sur le vide. Ainsi, on obtient successivement

$$\begin{aligned}
\Phi_{S(\alpha)}(x_1, x_2, x_3, \dots) &= \Phi_{\Lambda(\alpha)} \circ \Phi_{S^+}(x_1, x_2, x_3, \dots) \\
&= \prod_{n \geq 1} (1 + (\Phi_S(x_n, x_{2n}, x_{3n}, \dots) - 1))^{\lambda_{\Phi}^{(\alpha)}(n)} \\
&= \prod_{n \geq 1} \left( \prod_{k \geq 1} \left( \frac{1}{1 - x_{nk}} \right)^{s_{\Phi}(n)} \right)^{\lambda_{\Phi}^{(\alpha)}(n)} \\
&= \prod_{n, k \geq 1} \left( \frac{1}{1 - x_{nk}} \right)^{s_{\Phi}(k) \lambda_{\Phi}^{(\alpha)}(n)} \\
&= \prod_{n \geq 1} \left( \frac{1}{1 - x_n} \right)^{s_{\Phi}^{(\alpha)}(n)},
\end{aligned}$$

où  $s_{\Phi}^{(\alpha)}(n) = \sum_{d|n} s_{\Phi}(n/d) \lambda_{\Phi}^{(\alpha)}(d)$ , et le résultat suit. ■

## Conclusion

La définition générale et l'étude des propriétés de la série indicatrice des  $\Phi$ -symétries d'une espèce, pour un ensemble  $\Phi$  de groupes non conjugués deux à deux, donne lieu non seulement à une uniformisation des définitions des séries indicatrices des cycles et d'asymétrie, mais également à des démonstrations uniformes de propriétés de commutation (entre opérations sur les espèces et opérations sur les séries) et à des calculs uniformes de séries pour des espèces données. Plusieurs voies de recherche sont encore à explorer et nous en indiquons quelques-unes dans ce qui suit.

Le calcul de la série génératrice

$$F_w^\Phi(x) = \sum_{n \geq 0} f_{n,w}^\Phi \frac{x^n}{n!},$$

où  $f_{n,w}^\Phi$  désigne le poids total des  $F_w$ -structures sur  $\llbracket n \rrbracket$  dont le stabilisateur est conjugué à un groupe appartenant à  $\Phi$ , n'est pas abordé. Le développement d'outils appropriés à son calcul est encore à faire.

Nous ne nous sommes pas préoccupés d'optimiser la programmation en Maple [8] afin d'obtenir les polynômes indicateurs d'asymétrie des espèces moléculaires concentrées sur de petits cardinaux. Une programmation plus efficace est nécessaire à l'obtention de ces polynômes pour les espèces moléculaires concentrées sur des cardinaux plus élevés.

Telle que nous l'avons vu au chapitre 2, l'utilisation des résultats de Stockmeyer [51] dans le cadre des  $\Phi$ -séries fournit une méthode de calcul alternative pour, entre autre, la série indicatrice d'asymétrie d'une espèce. En particulier, ses résultats concernant les valeurs de la fonction de Möbius dans les treillis des sous-groupes des groupes diédraux permettent d'obtenir la série indicatrice d'asymétrie des espèces  $P_n$  des polygones à  $n$ ,  $n \geq 1$ , sommets : si  $n$  est impair,

$$\Gamma_{P_n} = \frac{1}{2n} \sum_{d|n} \mu(d) x_d^{n/d} - \frac{1}{2} \sum_{d|n} \mu(d) x_d x_{2d}^{(n-d)/2d}$$

et, si  $n$  est pair,

$$\Gamma_{P_n} = \frac{1}{2n} \sum_{d|n} \mu(d) x_d^{n/d} - \frac{1}{2} \sum_{\substack{d|n \\ d \neq (n/2)}} \mu(d) x_d x_{2d}^{(n-d)/2d} - \frac{1}{4} \sum_{d|(n/2)} \mu(d) \left( x_d^2 x_{2d}^{(n-2d)/2d} + x_{2d}^{n/2d} \right).$$

Nous pouvons aussi en déduire la série indicatrice d'asymétrie de l'espèce  $P^{\text{bic}}$  des polygones bicolorés :

$$\Gamma_{P^{\text{bic}}} = \frac{1}{2} \sum_{k \geq 1} \mu(k) \left( \frac{1}{k} \ln \left( \frac{1}{1-x_k^2} \right) - \frac{x_{2k}}{1-x_{2k}} \right).$$

Il est donc important de ne pas perdre de vue le travail accompli dans le cadre classique.

L'étude des substitutions simultanées  $\Delta : x_k = \frac{(1-q)^k}{1-q^k} x^k$ ,  $k \geq 1$ , de Décoste [12] dans les  $\Phi$ -séries d'espèces pondérées que nous n'avons ici qu'amorcée, doit maintenant être effectuée de façon systématique. Notons que plusieurs résultats de Décoste [12] sont faciles à relever au niveau des  $\Phi$ -séries. Par exemple, puisque

$$\lim_{q \rightarrow 0} \frac{(1-q)^k}{1-q^k} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{q \rightarrow 1} \frac{(1-q)^k}{1-q^k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{si } k > 1, \end{cases}$$

on obtient facilement, pour toute espèce pondérée  $F = F_w$ ,

$$\lim_{q \rightarrow 0} \Phi_F(x_1, x_2, \dots) |_{\Delta} = \widetilde{F}^{\Phi}(x)$$

et, si  $\Gamma \subseteq \Phi$ ,

$$\lim_{q \rightarrow 1} \Phi_F(x_1, x_2, \dots) |_{\Delta} = F(x).$$

Une étude exhaustive des substitutions  $\Delta$  dans le cadre des  $\Phi$ -séries ne peut qu'enrichir le répertoire des identités qu'elle a su trouver.

Aux chapitres 2 et 3, nous avons dégagé des conditions qui, imposées à  $\Phi$ , font en sorte que la transformation  $F \mapsto \Phi_F$  préserve les opérations combinatoires de somme, de produit, de dérivation, de pointage et de substitution. Par contre, le comportement de la  $\Phi$ -série face aux opérations  $\times$ , de produit cartésien, et  $\square$ , de composition fonctorielle, n'a pas été traité. Pour deux espèces pondérées  $F = F_w$  et  $G = G_v$ , il est bien connu [5] que

$$Z_{F \times G}(x_1, x_2, \dots) = Z_F(x_1, x_2, \dots) \times Z_G(x_1, x_2, \dots)$$

où l'opération  $\times$  de droite est interprété comme le produit terme à terme des coefficients de  $\frac{x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots}{\text{aut}(\sigma)}$ . Par contre, G. Labelle [25] a montré qu'en général

$$\Gamma_{F \times G}(x_1, x_2, \dots) \neq \Gamma_F(x_1, x_2, \dots) \times \Gamma_G(x_1, x_2, \dots)$$

et que  $\Gamma_{F \times G}(x_1, x_2, \dots)$  n'est pas fonction de  $\Gamma_F$  et de  $\Gamma_G$ . Dans le contexte des  $\Phi$ -séries, on doit s'interroger sur les conditions à imposer à  $\Phi$  pour que

$$\Phi_{F \times G}(x_1, x_2, \dots) = \Phi_F(x_1, x_2, \dots) \times \Phi_G(x_1, x_2, \dots).$$

Du moins, on aimerait savoir pour quels  $\Phi$ ,  $\Phi_{F \times G}$  est fonction de  $\Phi_F$  et de  $\Phi_G$ . De plus,  $\Phi_{F \square G}(x_1, x_2, \dots)$ , même lorsque  $\Phi = \Gamma$ , est encore entourée de mystère. Une étude du comportement de la  $\Phi$ -série face aux opérations  $\times$  et  $\square$  permettrait d'obtenir des  $\Phi$ -séries associées à l'espèce des graphes, des multigraphes et de certaines de leurs sous-espèces. Notons que la forme explicite pour la série indicatrice d'asymétrie des graphes est encore inconnue.

Au chapitre 2, nous avons utilisé les  $\Phi$ -séries d'espèces pour obtenir certaines familles d'identités concernant les valeurs de la fonction de Möbius sur des treillis de sous-groupes. Pouvons-nous trouver, à la lumière des propriétés de nos  $\Phi$ -séries, de nouveaux résultats concernant ces valeurs ?

Si  $\Phi$  et  $\Psi$  sont deux ensembles de groupes non conjugués deux à deux, peut-on donner une "signification combinatoire" à  $\Phi_F \circ \Psi_G$  pour  $F$  et  $G$  deux espèces ? Le lemme 3.2.15 semble être un pas dans cette direction. Les cas  $Z_F \circ \Gamma_G$  et  $\Gamma_F \circ Z_G$  sont intéressants. Notons que dans [5], au lemme 4.4.6, Bergeron, Labelle et Leroux donnent une interprétation combinatoire de la substitution  $\Gamma_{F_w}(\widetilde{G}_v(x), \widetilde{G}_{v^2}(x^2), \widetilde{G}_{v^3}(x^3), \dots)$  en terme des types d'assemblées  $F$ -injectives de  $G$ -structures.

À la suite de la proposition 3.3.20, il faut maintenant construire d'autres exemples élégants d'ensembles  $\Phi$ , pour lesquels la série  $\Phi_F$  préserve l'opération de substitution. Aussi, un ensemble de groupes qui risque d'être intéressant mais qui n'a pas été traité est celui formé des groupes diédraux.

À la section 4.4, nous avons obtenu les  $\Phi$ -séries des espèces A, Ar et End. Celles-ci ne sont que des cas particuliers des espèces  $R$ -enrichies  $A_R$ ,  $Ar_R$  et  $End_R$  où

l'enrichissement  $R = E$  est l'espèce des ensembles. Quelles sont les  $\Phi$ -séries de ces espèces pour les enrichissements  $R = 1 + C$ ,  $R = S$ ,  $R = X + C_4$ ,  $R = X + E_2 + E_3$ , etc ?

Puisque l'expression (4.5.2) pour  $\Phi_{\Lambda(\alpha)}$  est plutôt rébarbative, une étude parallèle à celle de G. Labelle et P. Leroux dans [28] pour la série indicatrice d'asymétrie  $\Gamma_{\Lambda(\alpha)}$  est de mise. En considérant un ensemble  $\hat{\Phi}$  contenant  $\Gamma$  qui est fortement stable sous le produit en couronne généralisé et qui est tel que  $\{n \mid \mathfrak{S}_n \in \hat{\Phi}\} = \{0, 1, \dots, p-1\}$  où  $p$  est un nombre premier, le calcul de la série  $\Phi_{\Lambda(\alpha)}$  peut être effectué à partir des relations

$$\Lambda^{(\alpha)} = E \circ X_{(\alpha)} \circ (E^+)^{\langle -1 \rangle}$$

et

$$Z_{(E^+)^{\langle -1 \rangle}}(x_1, x_2, x_3, \dots) = \Phi_{(E^+)^{\langle -1 \rangle}}(x_1, x_2, x_3, \dots) - \Phi_{(E^+)^{\langle -1 \rangle}}(x_p, x_{2p}, x_{3p}, \dots).$$

Ceci généraliserait les calculs effectués par Labelle et Leroux [28] pour obtenir  $\Gamma_{\Lambda(\alpha)}$  qui correspond au cas  $p = 2$  et permettrait d'obtenir facilement  $\mathcal{C}_{\Lambda(\alpha)}$ .

Finalement, il est naturel de s'intéresser aux  $\Phi$ -séries des modèles combinatoires pour les familles classiques de polynômes orthogonaux<sup>1</sup>. En fait, la généralisation au contexte des  $\Phi$ -séries de certains résultats de H. Décoste [12], qui concernent leurs séries indicatrices des cycles, sont, à la lumière des résultats du chapitre 4, assez facile à obtenir. Illustrons ce fait en considérant un des modèles pour les polynômes de Charlier [12, 35]. Soit Char l'espèce pondérée définie par l'isomorphisme  $\text{Char} = S_{(-z)}(X_{1/a}) \cdot E(X)$ , où  $S_{(-z)}$  désigne l'espèce des permutations dont chacun des cycles est de poids  $-z$ . On a :

$$\Phi_{\text{Char}}(x_1, x_2, \dots) = \prod_{n \geq 1} \exp(\xi_n x_n / n) \left( \frac{1}{1 - a^{-n} x_n} \right)^{s_{\Phi}^{(-z)}(n)}$$

où

$$s_{\Phi}^{(-z)}(n) = \frac{1}{n} \sum_{d \mid n} d \xi_{n/d} (-z)^{n/d} c_{\Phi}(d).$$

---

1. Voir D. Foata [15] pour un exposé de synthèse sur l'utilisation de techniques combinatoires dans l'étude des familles classiques de polynômes orthogonaux.

Notons en terminant que pour d'autres suites que  $\{\mathfrak{S}_n\}_{n \geq 0}$ , telle que la suite  $\{\mathfrak{B}_n\}_{n \geq 0}$  formée des groupes hyperoctaédraux, on pourrait aussi faire une théorie des  $\Phi$ -séries pour une classe  $\Phi$  de leurs sous-groupes.



## Annexe A

# Polynômes indicateurs d'asymétrie

Les polynômes indicateurs d'asymétrie des espèces moléculaires et atomiques, respectivement sur 5 et 6 points, présentés dans cet appendice ont été calculés à l'aide de Maple [8] en nous servant de l'expression

$$\Gamma_{X^n/H}(x_1, x_2, \dots) = \sum_{\lambda \vdash n} T_\lambda^\Gamma(H) \text{mon}_\lambda(t_1, t_2, \dots)$$

où  $T_\lambda^\Gamma(H) = |\{\tau \subseteq \mathfrak{S}_\lambda \setminus \mathfrak{S}_n/H \mid H^\tau \cap \mathfrak{S}_\lambda = \{id_n\}\}|$  et où les fonctions symétriques  $\text{mon}_\lambda(t_1, t_2, \dots)$  ont été traduites en terme des sommes de puissances  $x_k = \sum_{i \geq 1} t_i^k$  à l'aide de la librairie SF [49]. La notation pour les espèces moléculaires et atomiques est tirée de Chiricota [9].

Tableau A.1 – Les polynômes indicateurs d'asymétrie pour  $M \in \mathcal{M}_5$ 

$M$	$\Gamma_M(x_1, x_2, \dots)$
$E_5$	$\frac{1}{120}x_1^5 - \frac{1}{12}x_1^3x_2 + \frac{1}{6}x_1^2x_3 + \frac{1}{8}x_1x_2^2 - \frac{1}{4}x_1x_4 - \frac{1}{6}x_2x_3 + \frac{1}{5}x_5$
$E_5^\pm$	$\frac{1}{60}x_1^5 - \frac{1}{6}x_1^2x_3 - \frac{1}{4}x_1x_2^2 + \frac{1}{2}x_1x_4 + \frac{1}{2}x_2x_3 - \frac{3}{5}x_5$
$X \cdot E_4$	$\frac{1}{24}x_1^5 - \frac{1}{4}x_1^3x_2 + \frac{1}{3}x_1^2x_3 + \frac{1}{8}x_1x_2^2 - \frac{1}{4}x_1x_4$
$P_5/\mathbb{Z}_2$	$\frac{1}{20}x_1^5 - \frac{1}{4}x_1x_2^2 + \frac{1}{5}x_5$
$X \cdot E_4^\pm$	$\frac{1}{12}x_1^5 - \frac{1}{3}x_1^2x_3 - \frac{1}{4}x_1x_2^2 + \frac{1}{2}x_1x_4$
$E_2 \cdot E_3$	$\frac{1}{12}x_1^5 - \frac{1}{3}x_1^3x_2 + \frac{1}{6}x_1^2x_3 + \frac{1}{4}x_1x_2^2 - \frac{1}{6}x_2x_3$
$P_5$	$\frac{1}{10}x_1^5 - \frac{1}{2}x_1x_2^2 + \frac{2}{5}x_5$
$X \cdot P_4$	$\frac{1}{8}x_1^5 - \frac{1}{4}x_1^3x_2 - \frac{1}{8}x_1x_2^2 + \frac{1}{4}x_1x_4$
$X^2 \cdot E_3$	$\frac{1}{6}x_1^5 - \frac{1}{2}x_1^3x_2 + \frac{1}{3}x_1^2x_3$
$E_2 \cdot C_3$	$\frac{1}{6}x_1^5 - \frac{1}{6}x_1^3x_2 - \frac{1}{6}x_1^2x_3 + \frac{1}{6}x_2x_3$
$(X^2 \cdot C_3)/\mathbb{Z}_2$	$\frac{1}{6}x_1^5 - \frac{1}{6}x_1^2x_3 - \frac{1}{2}x_1x_2^2 + \frac{1}{2}x_2x_3$
$C_5$	$\frac{1}{5}x_1^5 - \frac{1}{5}x_5$
$X \cdot E_2^2$	$\frac{1}{4}x_1^5 - \frac{1}{2}x_1^3x_2 + \frac{1}{4}x_1x_2^2$
$X \cdot P_4^{bic}$	$\frac{1}{4}x_1^5 - \frac{3}{4}x_1x_2^2 + \frac{1}{2}x_1x_4$
$X \cdot C_4$	$\frac{1}{4}x_1^5 - \frac{1}{4}x_1x_2^2$
$X^2 \cdot C_3$	$\frac{1}{3}x_1^5 - \frac{1}{3}x_1^2x_3$
$X^3 \cdot E_2$	$\frac{1}{2}x_1^5 - \frac{1}{2}x_1^3x_2$
$X \cdot (E_2 \circ X^2)$	$\frac{1}{2}x_1^5 - \frac{1}{2}x_1x_2^2$
$X^5$	$x_1^5$

Tableau A.2 – Les polynômes indicateurs d'asymétrie pour  $A \in \mathcal{A}_6$  (1)

$A$	$\Gamma_A(x_1, x_2, \dots)$
$E_6$	$\frac{1}{720}x_1^6 - \frac{1}{48}x_1^4x_2 + \frac{1}{18}x_1^3x_3 + \frac{1}{16}x_1^2x_2^2 - \frac{1}{8}x_1^2x_4 - \frac{1}{6}x_1x_2x_3$ $+ \frac{1}{5}x_1x_5 - \frac{1}{48}x_2^3 + \frac{1}{8}x_2x_4 + \frac{1}{18}x_3^2 - \frac{1}{6}x_6$
$E_6^\pm$	$\frac{1}{360}x_1^6 - \frac{1}{18}x_1^3x_3 - \frac{1}{8}x_1^2x_2^2 + \frac{1}{4}x_1^2x_4 + \frac{1}{2}x_1x_2x_3 - \frac{3}{5}x_1x_5$ $+ \frac{1}{12}x_2^3 - \frac{1}{2}x_2x_4 - \frac{2}{9}x_3^2 + \frac{2}{3}x_6$
$X^6/S_5b$	$\frac{1}{120}x_1^6 + \frac{1}{24}x_1^4x_2 - \frac{1}{8}x_1^2x_2^2 - \frac{1}{4}x_1^2x_4 - \frac{2}{3}x_1x_2x_3 + \frac{6}{5}x_1x_5$ $- \frac{1}{8}x_2^3 + \frac{5}{4}x_2x_4 + \frac{2}{3}x_3^2 - 2x_6$
$X^6/A_5b$	$\frac{1}{60}x_1^6 + \frac{1}{24}x_1^4x_2 - \frac{1}{4}x_1^2x_2^2 - \frac{1}{4}x_1^2x_4 - \frac{2}{3}x_1x_2x_3$ $+ \frac{7}{5}x_1x_5 + \frac{5}{24}x_2^3 + \frac{1}{2}x_2x_4 + \frac{5}{6}x_3^2 - \frac{11}{6}x_6$
$E_2(E_3)$	$\frac{11}{720}x_1^6 - \frac{5}{48}x_1^4x_2 + \frac{1}{9}x_1^3x_3 + \frac{3}{16}x_1^2x_2^2 - \frac{1}{8}x_1^2x_4 - \frac{1}{3}x_1x_2x_3$ $+ \frac{1}{5}x_1x_5 - \frac{5}{48}x_2^3 + \frac{3}{8}x_2x_4 + \frac{1}{9}x_3^2 - \frac{1}{3}x_6$
$C_3^2/\mathbb{Z}_4$	$\frac{1}{36}x_1^6 + \frac{1}{24}x_1^4x_2 - \frac{2}{9}x_1^3x_3 - \frac{1}{4}x_1^2x_2^2 + \frac{1}{4}x_1^2x_4 + \frac{1}{3}x_1x_2x_3$ $- \frac{1}{8}x_2^3 + \frac{1}{2}x_2x_4 - \frac{1}{18}x_3^2 - \frac{1}{2}x_6$
$E_2(E_3^\pm)/\mathbb{Z}_2$	$\frac{1}{36}x_1^6 + \frac{1}{24}x_1^4x_2 - \frac{2}{9}x_1^3x_3 - \frac{1}{4}x_1^2x_2^2 + \frac{1}{4}x_1^2x_4 + \frac{1}{3}x_1x_2x_3$ $- \frac{7}{24}x_2^3 + x_2x_4 - \frac{1}{18}x_3^2 - \frac{5}{6}x_6$
$E_2(C_3)$	$\frac{1}{18}x_1^6 + \frac{1}{24}x_1^4x_2 - \frac{5}{18}x_1^3x_3 + \frac{1}{4}x_1^2x_4 - \frac{1}{6}x_1x_2x_3 - \frac{1}{8}x_2^3 + \frac{2}{9}x_2^2$
$E_3(E_2)$	$\frac{1}{48}x_1^6 - \frac{1}{16}x_1^4x_2 + \frac{1}{6}x_1^3x_3 - \frac{1}{16}x_1^2x_2^2 - \frac{3}{8}x_1^2x_4 - \frac{1}{2}x_1x_2x_3$ $+ x_1x_5 + \frac{13}{48}x_2^3 - \frac{1}{8}x_2x_4 + \frac{1}{2}x_3^2 - \frac{5}{6}x_6$
$X^6/S_4d$	$\frac{1}{24}x_1^6 + \frac{1}{6}x_1^3x_3 - \frac{3}{8}x_1^2x_2^2 + \frac{1}{4}x_1^2x_4 - \frac{1}{2}x_1x_2x_3 + \frac{1}{12}x_2^3$ $+ \frac{2}{3}x_3^2 - \frac{1}{3}x_6$
$X^6/S_4c$	$\frac{1}{24}x_1^6 + \frac{1}{6}x_1^3x_3 - \frac{1}{8}x_1^2x_2^2 + \frac{1}{2}x_1x_2x_3 - x_1x_5 - \frac{1}{6}x_2^3$ $- \frac{3}{4}x_2x_4 - \frac{5}{6}x_3^2 + \frac{13}{6}x_6$
$C_3(E_2)$	$\frac{1}{24}x_1^6 - \frac{1}{8}x_1^4x_2 + \frac{1}{6}x_1^3x_3 + \frac{1}{8}x_1^2x_2^2 - \frac{1}{2}x_1^2x_4 + \frac{1}{2}x_1x_2x_3$ $+ \frac{1}{8}x_2^3 - x_2x_4 - \frac{5}{6}x_3^2 + \frac{3}{2}x_6$
$X^6/A_4b$	$\frac{1}{12}x_1^6 + \frac{1}{6}x_1^3x_3 - \frac{1}{4}x_1^2x_2^2 + \frac{1}{2}x_1x_2x_3 - x_1x_5 + \frac{1}{6}x_2^3 - x_3^2 + \frac{4}{3}x_6$

Tableau A.3 – Les polynômes indicateurs d'asymétrie pour  $A \in \mathcal{A}_6$  (2)

$A$	$\Gamma_A(x_1, x_2, \dots)$
$P_6$	$\frac{1}{12}x_1^6 - \frac{1}{4}x_1^2x_2^2 + \frac{1}{2}x_1^2x_4 + x_1x_2x_3 - 2x_1x_5 - \frac{1}{6}x_3^3$ $-\frac{3}{2}x_2x_4 - \frac{5}{6}x_3^2 + \frac{19}{6}x_6$
$P_6^{\text{bic}}$	$\frac{1}{6}x_1^6 + \frac{1}{6}x_1^3x_3 + \frac{1}{2}x_1x_2x_3 - \frac{1}{2}x_2^3 - \frac{5}{6}x_3^2 + \frac{1}{2}x_6$
$C_6$	$\frac{1}{6}x_1^6 + x_1x_5 + \frac{1}{2}x_2x_4 + \frac{1}{3}x_3^2 - 2x_6$
$(E_3^\pm)^2/\mathbb{Z}_2$	$\frac{1}{18}x_1^6 + \frac{1}{24}x_1^4x_2 - \frac{5}{18}x_1^3x_3 - \frac{1}{2}x_1^2x_2^2 + \frac{1}{4}x_1^2x_4 + \frac{5}{6}x_1x_2x_3$ $-\frac{1}{8}x_2^3 + \frac{1}{2}x_2x_4 - \frac{5}{18}x_3^2 - \frac{1}{2}x_6$
$E_3(X^2)$	$\frac{1}{6}x_1^6 + \frac{1}{6}x_1^3x_3 - \frac{1}{2}x_1^2x_2^2 - \frac{1}{2}x_1x_2x_3 + \frac{2}{3}x_3^2$
$C_3(X^2)$	$\frac{1}{3}x_1^6 + \frac{1}{6}x_1^3x_3 + \frac{1}{2}x_1x_2x_3 - x_2^2$
$(E_2^\pm E_4^\pm)/\mathbb{Z}_2$	$\frac{1}{24}x_1^6 - \frac{1}{6}x_1^3x_3 - \frac{3}{8}x_1^2x_2^2 + \frac{1}{4}x_1^2x_4 + \frac{1}{2}x_1x_2x_3 + \frac{1}{4}x_2^3 - \frac{1}{2}x_2x_4$
$X^6/D_4d$	$\frac{1}{8}x_1^6 - \frac{5}{8}x_1^2x_2^2 + \frac{1}{4}x_1^2x_4 + \frac{1}{4}x_2^3$
$E_2(XE_2)$	$\frac{1}{8}x_1^6 - \frac{1}{4}x_1^4x_2 + \frac{1}{8}x_1^2x_2^2 - \frac{1}{4}x_2^3 + \frac{1}{4}x_2x_4$
$X^2C_4/\mathbb{Z}_2$	$\frac{1}{8}x_1^6 - \frac{3}{8}x_1^2x_2^2 + \frac{1}{4}x_2x_4$
$X^6/Ke$	$\frac{1}{4}x_1^6 - \frac{1}{4}x_1^2x_2^2 - \frac{1}{2}x_2^3 + \frac{1}{2}x_2x_4$
$X^6/C_4b$	$\frac{1}{4}x_1^6 - \frac{1}{4}x_1^2x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 - \frac{1}{2}x_6$
$X^6/Kd$	$\frac{1}{4}x_1^6 - \frac{3}{4}x_1^2x_2^2 + \frac{1}{2}x_2^3 + \frac{1}{2}x_3^2 - \frac{1}{2}x_6$
$E_2 \circ X^3$	$\frac{1}{2}x_1^6 - \frac{1}{2}x_2^3 + \frac{1}{2}x_3^2 - \frac{1}{2}x_6$

## Annexe B

# Burnside et l'énumération des *K*-symétries

Cet appendice contient les polynômes  $\widetilde{M}_t^K(1)$ , exprimés dans la base des sommes de puissances, pour chacune des espèces  $M \in \mathcal{M}_4$  et chacun des groupes  $K \leq \mathfrak{S}_4$ . Ceux-ci ont été calculé à l'aide des matrices de Burnside appropriées, voir l'exemple 2.4.11 de la section 2.4 et [21]. Nous utilisons les notations 2.4.7 en terme d'espèces, c.-à-d. :  $N_M(x_1, x_2, x_3, x_4) = \widetilde{M}_t^K(1)$  où  $N = X^4/K, K \leq \mathfrak{S}_4$ .

Tableau B.1 –  $N_M(x_1, x_2, x_3, x_4)$  pour  $N \in \mathcal{M}_4$  (1)

$N_M$	$E_4$	$E_4^\pm$
$E_4$	$x_4$	0
$E_4^\pm$	0	$x_4$
$P_4$	0	0
$X \cdot E_3$	$x_1x_3 - x_4$	0
$E_2^2$	$\frac{1}{2}(x_2^2 - x_4)$	0
$P_4^{bic}$	0	0
$C_4$	0	0
$X \cdot C_3$	0	$x_1x_3 - x_4$
$X^2 \cdot E_2$	$\frac{1}{2}(x_1^2x_2 - 2x_1x_3 - x_2^2 + 2x_4)$	0
$E_2 \circ X^2$	0	$\frac{1}{2}(x_2^2 - x_4)$
$X^4$	$\frac{1}{24}(x_1^4 - 6x_1^2x_2 + 8x_1x_3 + 3x_2^2 - 6x_4)$	$\frac{1}{12}(x_1^4 - 4x_1x_3 - 3x_2^2 + 6x_4)$
$Z_M$	$\frac{1}{24}(x_1^4 + 6x_1^2x_2 + 8x_1x_3 + 3x_2^2 + 6x_4)$	$\frac{1}{12}(x_1^4 + 8x_1x_3 + 3x_2^2)$

Tableau B.2 –  $N_M(x_1, x_2, x_3, x_4)$  pour  $N \in \mathcal{M}_4(2)$ 

$N_M$	$P_4$	$X \cdot E_3$
$E_4$	0	0
$E_4^\pm$	0	0
$P_4$	$x_4$	0
$X \cdot E_3$	0	$x_1 x_3$
$E_2^2$	$\frac{1}{2}(x_2^2 - x_4)$	0
$P_4^{bic}$	0	0
$C_4$	0	0
$X \cdot C_3$	0	0
$X^2 \cdot E_2$	$\frac{1}{2}(x_1^2 x_2 - x_2^2)$	$x_1^2 x_2 - x_1 x_3$
$E_2 \circ X^2$	$\frac{1}{2}(x_2^2 - x_4)$	0
$X^4$	$\frac{1}{8}(x_1^4 - 2x_1^2 x_2 - x_2^2 + 2x_4)$	$\frac{1}{6}(x_1^4 - 3x_1^2 x_2 + 2x_1 x_3)$
$Z_M$	$\frac{1}{8}(x_1^4 + 2x_1^2 x_2 + 3x_2^2 + 2x_4)$	$\frac{1}{6}(x_1^4 + 3x_1^2 x_2 + 2x_1 x_3)$

Tableau B.3 –  $N_M(x_1, x_2, x_3, x_4)$  pour  $N \in \mathcal{M}_4$  (3)

$N_M$	$E_2^2$	$P_4^{bic}$	$C_4$
$E_4$	0	0	0
$E_4^\pm$	0	0	0
$P_4$	0	0	0
$X \cdot E_3$	0	0	0
$E_2^2$	$x_2^2$	0	0
$P_4^{bic}$	0	$x_4$	0
$C_4$	0	0	$x_4$
$X \cdot C_3$	0	0	0
$X^2 \cdot E_2$	$x_1^2 x_2 - x_2^2$	0	0
$E_2 \circ X^2$	0	$\frac{3}{2}(x_2^2 - x_4)$	$\frac{1}{2}(x_2^2 - x_4)$
$X^4$	$\frac{1}{4}(x_1^4 - 2x_1^2 x_2 + x_2^2)$	$\frac{1}{4}(x_1^4 - 3x_2^2 + 2x_4)$	$\frac{1}{4}(x_1^4 - x_2^2)$
$Z_M$	$\frac{1}{4}(x_1^4 + 2x_1^2 x_2 + x_2^2)$	$\frac{1}{4}(x_1^4 + 3x_2^2)$	$\frac{1}{4}(x_1^4 + x_2^2 + 2x_4)$



Tableau B.4 –  $N_M(x_1, x_2, x_3, x_4)$  pour  $N \in \mathcal{M}_4$  (4)

$N_M$	$X \cdot C_3$	$X^2 \cdot E_2$	$E_2 \circ X^2$	$X^4$
$E_4$	0	0	0	0
$E_4^\pm$	0	0	0	0
$P_4$	0	0	0	0
$X \cdot E_3$	0	0	0	0
$E_2^2$	0	0	0	0
$P_4^{bic}$	0	0	0	0
$C_4$	0	0	0	0
$X \cdot C_3$	$x_1x_3$	0	0	0
$X^2 \cdot E_2$	0	$x_1^2x_2$	0	0
$E_2 \circ X^2$	0	0	$x_2^2$	0
$X^4$	$\frac{1}{3}(x_1^4 - x_1x_3)$	$\frac{1}{2}(x_1^4 - x_1^2x_2)$	$\frac{1}{2}(x_1^4 - x_2^2)$	$x_1^4$
$Z_M$	$\frac{1}{3}(x_1^4 + 2x_1x_3)$	$\frac{1}{2}(x_1^4 + x_1^2x_2)$	$\frac{1}{2}(x_1^4 + x_2^2)$	$x_1^4$

# Bibliographie

- [1] ANDREWS, E. *Theory of Partitions*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 2, Reading MA, Addison-Wesley, 1976.
- [2] APOSTOL, T.M. *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer-Verlag, New York, 1976.
- [3] BAUMSLAG, B. et B. Chandler, *Theory and Problems of Group Theory*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1968.
- [4] BERGERON, F. et G. CARTIER, *Darwin : Computer Algebra and Enumerative Combinatorics*, Proceedings of STACS-88, éditeurs : R. Cori et M. Wirsing, Lecture Notes in Computer Sciences 294, Spinger-Verlag, 1988, 393-394.
- [5] BERGERON, F., LABELLE, G. et P. LEROUX, *Théorie des espèces et combinatoire des structures arborescentes*, Publications du LACIM no 19, U. du Québec à Montréal, 1994.
- [6] BOUCHARD, P. et M. OUELLETTE, *Décomposition arborescente de Mario Ouellette pour les espèces de structures*, dans : Actes du 21ème Séminaire Lotharingien, Publications de l'IRMA, Strasbourg, 1990, 5-13.
- [7] BURNSIDE, W. *Theory of Groups of Finite Order*, 2ème édition, Cambridge 1911, republié par Dover Publications, 1955.
- [8] CHAR, K.O., GEDDES, G.H., GONNET, G.H., MONAGAN, M.B. et S.M. WATT, *Maple V : Language Reference Manual*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [9] CHIRICOTA, Y. *Structures combinatoires et calcul symbolique*, Thèse de doctorat, Dép. de mathématiques et d'informatique, U. du Québec à Montréal, Montréal, 1993 ; Publication du LACIM no 12, U. du Québec à Montréal, 1993.
- [10] CONSTANTINEAU, I. *Calcul combinatoire de séries indicatrices de cycles*, Thèse de doctorat, Dép. de mathématiques et d'informatique, U. du Québec à Montréal, Montréal, 1991 ; Publication du LACIM no 5, U. du Québec à Montréal, 1991.
- [11] DE BRUIJN, N.G. *Pólya's Theory of Counting*, éditeur : E. Beckenbach, Applied Combinatorial Mathematics, Wiley, 1964, 144-184.
- [12] DÉCOSTE, H. *Séries indicatrices d'espèces pondérées et q-analogues*, Thèse de doctorat, U. de Montréal, 1989 ; Publication du LACIM no 2, U. du Québec à Montréal, 1990.

- [13] DÉCOSTE, H. *Séries indicatrices et q-séries*, Theoretical Computer Science **117**, 1993, 169-186.
- [14] EHRESMANN, C. *Catégories et structures*, Dunod, Paris, 1965.
- [15] FOATA, D. *Combinatoire des identités sur les polynômes orthogonaux*, Internat. Congress Math. Section 16, Combinatorics and Mathematical Programming, Varsovie, Pologne, 1983.
- [16] FRALEIGH, J. B. *A First Course in Abstract Algebra*, 2ème édition, Addison-Wesley, 1976.
- [17] HARARY, F. et E. PALMER, *Graphical Enumeration*, Academic Press, 1973.
- [18] JOYAL, A. *Une théorie combinatoire des séries formelles*, Advances in Mathematics **42**, 1981, 1-82.
- [19] JOYAL, A. *Foncteurs analytiques et espèces de structures*, dans : [29], 1986, 126-159.
- [20] KERBER, A. *Enumeration Under Finite Group Action : Symmetry Classes of Mappings*, dans : [29], 1986, 160-176.
- [21] KERBER, A. *Algebraic Combinatorics via Finite Group Actions*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1991.
- [22] LABELLE, G. *Some new Computational Methods in the Theory of Species*, dans : [29], 1986, 192-209.
- [23] LABELLE, G. *On the Generalized Iterates of Yeh's Combinatorial K-Species*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **50**, 1989, 235-258.
- [24] LABELLE, G. *Counting Asymmetric Enriched Trees*, Journal of Symbolic Computation **14**, 1992, 211-242.
- [25] LABELLE, G. *On Asymmetric Structures*, Discrete Mathematics **99**, North-Holland, 1992, 141-164.
- [26] LABELLE, G. *Sur la symétrie et l'asymétrie des structures combinatoires*, Theoretical Computer Science **117**, Elsevier, 1993, 3-22.
- [27] LABELLE, G., LABELLE, J. et K. PINEAU, *Sur une généralisation des séries indicatrices d'espèces*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **69**, 1995, 17-35.
- [28] LABELLE, G. et P. LEROUX, *Un prolongement de la formule exponentielle en combinatoire énumérative*, dans : [36], 1995, 329-341.
- [29] LABELLE, G. et P. LEROUX, ÉDITEURS, *Combinatoire énumérative*, Lecture notes in Mathematics 1234, Springer-Verlag, 1986.
- [30] LABELLE, G. et K. PINEAU, *Ensembles orientés et permutations paires : séries indicatrices d'asymétrie et q-séries*, Advances in Applied Mathematics **15**, 1994, 452-475.
- [31] LABELLE, G. et K. PINEAU, *Séries indicatrices des  $\Phi$ -symétries*, dans : [36], 1995, 343-350.

- [32] LABELLE, J. *Applications diverses de la théorie combinatoire des espèces de structures*, Annales des sciences mathématiques du Québec **7**, 1983, 59-94.
- [33] LABELLE, J. *Quelques espèces sur les ensembles de petite cardinalité*, Annales des sciences mathématiques du Québec **9**, 1985, 31-58.
- [34] LABELLE, J. et Y.N. YEH, *The Relation between Burnside Rings and Combinatorial Species*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **50**, 1989, 269-284.
- [35] LABELLE, J. et Y.N. YEH, *The Combinatorics of Laguerre, Charlier and Hermite Polynomials Revisited*, Studies in Applied Mathematics **80**, 1989, 25-36.
- [36] LECLERC, B. et J. Y. THIBON, ÉDITEURS, *Séries formelles et combinatoire algébrique*, Actes du 7ème Colloque international des Séries Formelles et Combinatoire Algébrique, U. Marne-la-Vallée, SFCA 1995.
- [37] LEROUX, P. *Methoden der Anzahlbestimmung für einige Klassen von Graphen*, Bayreuther Mathematische Schriften **26**, 1988, 1-36.
- [38] LEROUX, P. et B. MILOUDI, *Généralisations de la formule d'Otter*, Annales des sciences mathématiques du Québec **16**, 1992, 53-80.
- [39] LÉVESQUE, J.-B. *Sur la pondération en combinatoire énumérative*, Mémoire de maîtrise, Dép. de mathématiques et d'informatique, U. du Québec à Montréal, 1989.
- [40] MACDONALD, I. G. *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Clarendon Press, Oxford, 1979.
- [41] PÓLYA, G. *Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und Chemische Verbindungen*, Acta Mathematica **68**, 1937, 145-254.
- [42] PÓLYA, G. et R.C. READ, *Combinatorial Enumeration of Groups, Graphes, and Chemical Compounds*, Springer-Verlag, New York, 1987.
- [43] ROSE, J. S. *A Course on Group Theory*, Cambridge University Press, 1978.
- [44] ROTA, G.-C. *On the Foundations of Combinatorial Theory, I: Theory of Möbius Functions*, Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie **2**, 1964, 340-368.
- [45] ROTA, G.-C. *Baxter Algebras and Combinatorial Identities, II*, Bulletin of the American Mathematical Society **75**, 1969, 330-334.
- [46] ROTA, G.-C. et B.E. SAGAN, *Congruences Derived from Group Action*, European Journal of Combinatorics **1**, 1980, 67-76.
- [47] ROTA, G.-C. et D.A. SMITH, *Enumeration under group action*, Annali Scuola Normale Superiore Pisa, Classe di Scienze, Série IV, Vol. IV, 1977, 637-646.
- [48] STANLEY, R. *Enumerative Combinatorics*, Volume 1, Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series, 1986.
- [49] STEMBRIDGE, J. *SF*, Maple Share Library Package, disponible sur Maple V, 3ème édition.
- [50] STEMBRIDGE, J. communication verbale, MSI Workshop on Symbolic Computation in Combinatorics ACSyAM, U. Cornell, Ithaca, New York, 1993.

- [51] STOCKMEYER, P.K. *Enumeration of Graphs with Prescribed Automorphism Group*, Thèse de doctorat, U. of Michigan, 1971.
- [52] WHITE, D. *Counting Patterns with a given Automorphism Group*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 47, no 1, 1975, 41-44.
- [53] YANG, J.S. *Symmetric Functions, Plethysm, and Enumeration*, Thèse de doctorat, Massachusetts Institute of Technology, 1991.
- [54] YEH, Y.-N. *On the Combinatorial Species of Joyal*, Thèse de doctorat, U. of New York at Buffalo, 1985.
- [55] YEH, Y.-N. *The Calculus of Virtual Species and K-species*, dans : [29], 1986, 351-369.
- [56] ZASSENHAUS, H. *The Theory of Groups*, Chelsea, 2ème édition, 1958.
- [57] ZENG, J. Communication verbale, U. Louis-Pasteur, Strasbourg, 1992.