UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

HYPERBINOMIALES : DOUBLES SUITES SATISFAISANT À DES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES DE DIMENSION ET D'ORDRE DEUX DE LA FORME H(n,k)=p(n,k)H(n-1,k)+q(n,k)H(n-1,k-1)

THÈSE
PRÉSENTÉE
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DU DOCTORAT EN MATHÉMATIQUE

PAR
PIERRE THÉORÊT

MAI 1994

Table des matières

RÉSUMÉ

On dit qu'une double suite H (c'est-à-dire une fonction $H : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to K$, où K est un corps) est triangulaire si $H(n,k) = 0$ pour tout $k > n$. On écrit $H = \mathcal{HB}(p(n,k); q(n,k))$ pour l'unique double suite H satisfaisant l'équation linéaire aux différences partielles

$$H(n,k) = p(n,k)H(n-1,k) + q(n,k)H(n-1,k-1)$$

avec valeurs initiales $H(0,k) = \chi(k = 0)$, ici χ désigne la valeur de vérité, où les coefficients $p(n,k)$ et $q(n,k)$ sont des doubles suites données. On dit dans ce cas que H est une hyperbinomiale.

On montre dans ce travail que les hyperbinomiales sont des doubles suites triangulaires. Par exemple, si $H = \mathcal{HB}(1;1)$, alors $H(n,k) = \binom{n}{k}$. Les nombres de Stirling de première et seconde espèce et leurs q-analogues, les nombres de Lah, les nombres eulériens et les polynômes gaussiens donnent d'autres exemples de doubles suites hyperbinomiales.

Dans le premier chapitre on examine des formules de sommation dans lesquelles interviennent des hyperbinomiales. Tout d'abord, on donne des conditions suffisantes sur les coefficients de deux hyperbinomiales F et G pour que le produit matriciel $(F \times G)(n,k) = \sum_j F(n,j)G(j,k)$ soit encore une double suite hyperbinomiale.

On considère aussi le produit de la matrice des valeurs d'une hyperbinomiale par une matrice colonne dont la k-ième entrée est de la forme $\prod_{j=1}^{k} g(j)$ pour $\{g(j)\}_{j\geq 1}$ une suite donnée. On déduit alors des formules de la forme $\sum_k F(n,k)\prod_{j=1}^{k} g(j) = \prod_{j=1}^{n} h(j)$. Ce type de formule permet en outre de trouver les formules de conversion entre diverses bases de l'espace des polynômes.

On considère aussi les hyperbinomiales dont l'inverse matriciel F^{-1} satisfait une récurrence hyperbinomiale. On trouve pour $F = \mathcal{HB}(a(n)v(k) + u(n); a(n)b(k))$ telle que pour tout n, k on a $a(n)b(k) \neq 0$, que F est inversible et alors

$$F^{-1} = \mathcal{HB}\left(\frac{-a(k+1)v(n-1) - u(k+1)}{a(k+1)b(n)}; \frac{1}{a(k)b(n)}\right).$$

Pour l'hyperbinomiale inversible $B = \mathcal{HB}(b(k); b'(k))$ on démontre que

$$\sum_{j=0}^{a} B^{-1}(a,j)B(n+j,a+k) = B_{(-a)}(n,k)$$

où $B_{(-a)} = \mathcal{HB}(b(k+a); b'(k+a))$.

On donne également, pour toute hyperbinomiale H une formule de récurrence verticale du type

$$H(n+1,k+1) = \sum_{j=k}^{n} H(j,k)w_j(n,k),$$

et une formule de récurrence diagonale

$$H(n+k+1,n) = \sum_{j=0}^{n} H(k+j,j)w'_j(n,k).$$

Dans le deuxième chapitre on appelle hypergéométrique une double suite G pour laquelle il existe des fonctions rationnelles $A(n,k)$ et $B(n,k)$ telles que $G(n,k) = A(n,k)G(n-1,k) = B(n,k)G(n-1,k-1)$, on écrit alors $G \in \mathcal{HG}(A(n,k);B(n,k))$.

On montre que les doubles suites hypergéométriques G telles que $G(0,k) = \chi(k=0)$ et $G(n,k) = 0$, si $k < 0$ ou $k > n$, sont aussi des doubles suites hyperbinomiales. Explicitement, si $G \in \mathcal{HG}\left(\frac{n}{n-k}A(n,k); \frac{n}{k}B(n,k)\right)$, avec $G(0,0) = 1$, alors pour toute double suite $X(n,k)$ on a

$$G = \mathcal{HB}\left(\{1 + kX(n,k)\}A(n,k); \{1 + (k-n)X(n,k)\}B(n,k)\right).$$

On cherche également les récurrences hyperbinomiales dont la solution est hypergéométrique. Les résultats trouvés peuvent alors être utilisés dans deux directions. Tout d'abord lorsque qu'une double suite est définie par une récurrence hyperbinomiale et que l'on en trouve une solution hypergéométrique (donc holonome au sens de Zeilberger), on peut démontrer effectivement une multitude d'identités la reliant à d'autres hypergéométriques. Réciproquement, étant donnée une double suite hypergéométrique, on obtient des récurrences hyperbinomiales et on peut donc appliquer tous les résultats de notre étude.

On considère ensuite les récurrences hyperbinomiales dont les coefficients sont des polynômes du premier degré. On les appelle *spéciales*. On appelle *régulière* une hyperbinomiale H telle que $H(1,0) \neq 0$ et $H(1,1) \neq 0$ et on dit qu'elle est multiple si elle satisfait au moins deux récurrences hyperbinomiales spéciales. On caractérise les hyperbinomiales spéciales qui sont à la fois régulières et multiples. Pour une telle double suite on donne le terme général et l'ensemble de toutes les récurrences hyperbinomiales spéciales qu'elle satisfait. Ce type d'hyperbinomiales est en fait un cas particulier de double suite à la fois hyperbinomiale et hypergéométrique.

On présente ensuite une méthode permettant d'obtenir des récurrences pour une fonction qui est la somme de deux doubles suites pour lesquelles on dispose de récurrences. Cette méthode est particulièment intéressante lorsque l'une des deux doubles suites est hyperbinomiale et l'autre hypergéométrique. Finalement on considère le produit matriciel de deux doubles suites dont l'une est hyperbinomiale et l'autre hypergéométrique.

Dans le troisième chapitre on considère les hyperbinomiales spéciales (à coefficients polynomiaux du premier degré). Pour ces hyperbinomiales on développe une algèbre d'opérateurs définis, ou partiellement définis, sur celles-ci. Sans nécessairement permettre d'obtenir les termes généraux d'hyperbinomiales sous forme close, ces opérateurs permettent de les exprimer les uns en fonction des autres. Si les termes généraux de deux hyperbinomiales sont reliés par une relation simple, alors il n'y a qu'à résoudre une des deux équations de récurrence. Par ailleurs, étant données deux récurrences hyperbinomiales, il se peut qu'il existe un rapport assez simple entre les termes généraux de leurs solutions sans que cela ne provienne d'une seule transformation. Ceci permet d'introduire une notion de récurrence canonique.

Dans le quatrième chapitre on présente, sous forme close, des fonctions génératrices associées aux doubles suites hyperbinomiales. Pour $H = \mathcal{HB}(p(n); q(n))$ on a une formule pour les polynômes hyperbinomiaux $H_n^\ell(t) := \sum_k H(n,k)t^k$ et pour les hyperbinomiales à coefficients polynomiaux du premier degré $G = \mathcal{HB}(\alpha n + \beta k + \gamma; \beta' k + \gamma')$. On donne dans ce cas une formule explicite pour les fonctions génératrices $G_k^c(x) := \sum_n G(n,k)x^n/n!$ et $G(x,t) := \sum_{n,k} G(n,k)t^k x^n/n!$. On utilise ensuite ces fonctions génératrices pour exprimer sous forme close le terme général d'une hyperbinomiale et on montre que pour $B = \mathcal{HB}(\alpha n + \beta k + \gamma; \gamma')$ avec $\gamma' \neq 0$ la suite des polynômes hyperbinomiaux $\{B_n^\ell(t)\}_{n\geq 0}$ est une suite de Sheffer.

INTRODUCTION

Une double suite dans un corps K est une fonction $D : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to K$. Autrement dit, D est un élément de l'anneau $K^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$. On identifie aussi les doubles suites avec les matrices infinies dont les entrées sont indicées par les couples d'entiers, on écrit $D(n,k)$ pour le terme général de la matrice aussi bien que pour celui de la double suite D avec n et k dans $\mathbb{N}$. Pour deux doubles suites D_1 et D_2, le produit de Hadamard (D_1D_2) est la double suite de terme général $D_1(n,k)D_2(n,k)$.

On dit qu'une double suite D est triangulaire lorsque $D(n,k) = 0$ pour tout $k > n$. Dans ce cas la matrice des valeurs de D prend la forme

$$\begin{pmatrix} D(0,0) & 0 & 0 & 0 & \dots \\ D(1,0) & D(1,1) & 0 & 0 & \dots \\ D(2,0) & D(2,1) & D(2,2) & 0 & \cdots \\ D(3,0) & D(3,1) & D(3,2) & D(3,3) & \cdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}$$

On écrit $T_1 \times T_2$ pour le produit matriciel de deux doubles suites triangulaires, c'est-à-dire

$$(T_1 \times T_2)(n,k) = \sum_j T_1(n,j)T_2(j,k).$$

On écrit $\mathcal{HB}(p(n,k); q(n,k))$ pour l'équation aux différences partielles linéaire

$$H(n,k) = p(n,k)H(n-1,k) + q(n,k)H(n-1,k-1) \tag{0.1}$$

avec coefficients p et q dans l'anneau $K^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ des doubles suites à valeurs dans un corps K. On écrit aussi $H = \mathcal{HB}(p(n,k); q(n,k))$ pour dire que H est l'unique double suite H satisfaisant l'équation (0.1) avec valeurs initiales $H(0,k) = \chi(k = 0)$. On dit alors que H est une hyperbinomiale, par analogie avec le cas particulier de la double suite des coefficients binomiaux $B(n,k) = \binom{n}{k}$ puisque $B = \mathcal{HB}(1;1)$:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, \qquad \binom{0}{k} = \begin{cases} 1, & \text{si } k = 0, \\ 0, & \text{si } k \neq 0. \end{cases}$$

On montrera que les hyperbinomiales sont toujours des doubles suites triangulaires.

Table 1. Exemples d'Hyperbinomiales

$p(n,k)$	$p'(n,k)$	Références/ Terme Général
1	1	Coefficients binomiaux, $\binom{n}{k}$
k	1	Stirling de seconde espèce, $S(n,k)$
$n-1$	1	Stirling de première espèce, $c(n,k)$
$1-n$	1	Stirling de première espèce, $s(n,k)$
k	$n-k+1$	Nombres Eulériens, $A(n,k)$
$k+1$	$n-k+1$	Nombres Eulériens, $E(n,k)$
$n+k-1$	1	Nombres de Lah
-1	1	$(-1)^{n-k}\binom{n}{k}$
n	1	$c(n+1,k+1)$
1	n	$s(n+1,k-n+1)$
$k+1$	1	$S(n+1,k+1)$
k	k	$k!S(n,k)$
$-k$	1	$(-1)^{n-k}S(n,k)$
1	k	$n^{\underline{k}}$
$n+k+\alpha$	1	[CHR 77]
$k+\alpha$	1	[KOU 82],[CAR 80a]
$2n-k-1$	1	[ROM]
$n+\alpha-1$	1	[KOU 82],[CAR 80a]
$\alpha(1-n)+k$	1	[CAR 78b]
$n-\alpha k+\alpha-2$	1	[CHR 79]
$n-\alpha k-1$	1	[CS 88],[CHR 77,79],[CAR 78b]
$n-\alpha k-\beta-1$	1	[CK],[CHK]
$n-\alpha k+\beta-\alpha-1$	1	[HOW], [CAR 79,80b]
$k+1$	$n-k+1$	[CHR 82]
k	$2n-k$	[GS],[CAR 65,68,71,78a]
$2n-k-1$	$2n-k-1$	[CAR 68,71],[JOR]
$2n-k-1$	$n-k$	[CAR 68,71],[JOR],[WAR]
$2n-k-1$	$k+1$	[CAR 78a]

Le problème consistant à étudier les récurrences hyperbinomiales et leurs solutions est proposée dans *Concrete Mathematics* ([GKP,p.305], problème de recherche 6.89) :

> Develop a general theory of the solutions to the two-parameter recurrence
>
> $$\left|\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right| = (\alpha n+\beta k+\gamma)\left|\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix}\right| + (\alpha' n+\beta' k+\gamma')\left|\begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix}\right|$$
>
> assuming that $\left|\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right| = 0$ when $n<0$ or $k<0$. (...) What special values $(\alpha,\beta,\gamma,\alpha',\beta',\gamma')$ yield "fundamental solutions" in terms of which the general solution can be expressed?

Le troisième chapitre de cette thèse est celui qui répond le plus directement à cette question.

Table 2. Autres Exemples d'Hyperbinomiales

$p(n,k)$	$p'(n,k)$	Références/ Terme Général
q^k	1	Polynômes Gaussiens, $\left[{n \atop k}\right]_q$
$\frac{q^{n-1}-1}{1-q}$	1	$s_q[n,k]$
$\frac{1-q^{n-1}}{1-q}$	1	$c_q[n,k]$
$\frac{q^{n-1}-p^{n-1}}{p-q}$	1	$s_{p,q}[n,k]$
$\frac{p^{n-1}-q^{n-1}}{p-q}$	1	$c_{p,q}[n,k]$
$\frac{1-q^k}{1-q}$	1	$S_q[n,k]$
q^k-1	1	$(q-1)^{n-k}S_q[n,k]$
$\frac{p^k-q^k}{p-q}$	1	$S_{p,q}[n,k]$
$2n-k-1$	$n-k-\alpha$	[CAR 80b]
$k+\alpha$	$2n-k-\alpha$	[CAR 80b]
$k+\alpha$	$n-2k+1$	[CS]
$k+\alpha$	$n-2k+2$	[CS]
$k+\alpha$	$n-k+1-\alpha$	[DWY],[KOU 94]
$k+\alpha$	$n-k-\alpha$	[DWY],[KOU 94]

Le premier chapitre est consacré aux formules de sommation dans lesquelles interviennent des hyperbinomiales. Tout d'abord, on donne des conditions suffisantes sur les coefficients de deux hyperbinomiales F et G pour que le produit matriciel $(F \times G)(n,k) = \sum_j F(n,j)G(j,k)$ soit encore une double suite hyperbinomiale. On montre que si

$$\begin{aligned} F &= \mathcal{HB}(a(n)v(k) + u(n); a(n)b(k)), \\ G &= \mathcal{HB}\left(\frac{y(k) - v(n-1)}{b(n)}; \frac{d(k)}{b(n)}\right), \end{aligned}$$

alors

$$(F \times G) = \mathcal{HB}(a(n)y(k) + u(n); a(n)d(k)). \tag{0.2}$$

On considère le produit de la matrice d'une hyperbinomiale avec une matrice colonne dont la k-ième entrée est de la forme $\prod_{j=1}^k g(j)$ pour $\{g(j)\}_{j\geq 1}$ une suite donnée. On montre que pour $F = \mathcal{HB}(p(n,k); q(n,k))$, si

$$h(n) := p(n,k-1) + g(k)q(n,k)$$

est une fonction indépendante de k, alors on peut déduire que

$$\sum_k F(n,k) \prod_{j=1}^k g(j) = \prod_{j=1}^n h(j).$$

Cette formule permet d'obtenir de façon uniforme les formules de conversion entre diverses bases de l'espace des polynômes.

On considère aussi les hyperbinomiales F et G telles que $(F \times G)(n,k) = \chi(n,k)$, ce qui revient à dire que les matrices de F et G sont l'inverse l'une de l'autre. On dit alors que F (et donc G) est inversible et on écrit $G = F^{-1}$. Si

$$F = \mathcal{HB}(a(n)v(k) + u(n); a(n)b(k))$$

avec $a(n)b(k) \neq 0$ pour tout n, k, alors F est inversible et

$$F^{-1} = \mathcal{HB}\left(\frac{-a(k+1)v(n-1) - u(k+1)}{a(k+1)b(n)}; \frac{1}{a(k)b(n)}\right).$$

Pour $B = \mathcal{HB}(b(k); b'(k))$ on démontre que

$$\sum_{j=0}^{a} B^{-1}(a,j)B(n+j, a+k) = B_{(-a)}(n,k)$$

où $B_{(-a)} = \mathcal{HB}(b(k+a); b'(k+a))$.

Pour $H = \mathcal{HB}(p(n,k); q(n,k))$, on a des récurrences de la forme

$$\begin{aligned} H(n+1, k+1) &= \sum_{j=k}^{n} H(j,k) w_j(n,k), \\ H(n+k+1, n) &= \sum_{j=0}^{n} H(k+j, j) w'_j(n,k), \end{aligned}$$

les poids w_j et w'_j étant donnés par

$$\begin{aligned} w_j(n,k) &= q(j+1, k+1) \prod_{m=j+1}^{n} p(m+1, k+1) \\ w'_j(n,k) &= p(k+j+1, j) \prod_{m=j+1}^{n} q(m+k+1, m). \end{aligned}$$

Dans le deuxième chapitre on appelle hypergéométrique une double suite G pour laquelle il existe des fonctions rationnelles $A(n,k)$ et $B(n,k)$ telles que

$$\begin{aligned} G(n,k) &= A(n,k)G(n-1,k) \\ &= B(n,k)G(n-1,k-1). \end{aligned}$$

On écrit alors $G \in \mathcal{HG}(A(n,k); B(n,k))$.

On montre que les doubles suites hypergéométriques G telles que $G(0,k) = \chi(k=0)$ et $G(n,k) = 0$, si $k < 0$ ou $k > n$, sont aussi des doubles suites hyperbinomiales. Explicitement, si

$$G \in \mathcal{HG}\left(\frac{n}{n-k}A(n,k); \frac{n}{k}B(n,k)\right), \ (G(0,0) = 1),$$

alors quelque soit la double suite $X(n,k)$ on a

$$G = \mathcal{HB}\left(\{1+kX(n,k)\}A(n,k);\{1+(k-n)X(n,k)\}B(n,k)\right).$$

On cherche également les récurrences hyperbinomiales dont la solution est hypergéométrique. Les résultats trouvés peuvent alors être utilisés dans deux directions. Tout d'abord lorsque qu'une double suite est définie par une récurrence hyperbinomiale et que l'on en trouve une solution hypergéométrique (donc holonome au sens de Zeilberger), on peut démontrer effectivement une multitude d'identités la reliant à d'autres hypergéométriques. Réciproquement, étant donnée une double suite hypergéométrique on en trouve les récurrences hyperbinomiales et on peut appliquer les résultats de notre étude.

On considère ensuite les récurrences hyperbinomiales dites *spéciales*, c'est-à-dire dont les coefficients sont des polynômes du premier degré . On appelle aussi *régulière* une hyperbinomiale H telle que $H(1,0) \neq 0$ et $H(1,1) \neq 0$ et on dit de plus qu'elle est multiple si elle satisfait au moins deux récurrences hyperbinomiales spéciales. On caractérise alors les hyperbinomiales spéciales qui sont à la fois régulière et multiple. Pour une telle double suite on donne le terme général et l'ensemble de toutes les récurrences hyperbinomiales spéciales qu'elle satisfait. Ce type d'hyperbinomiale est en fait un cas particulier de double suite à la fois hyperbinomiale et hypergéométrique. Explicitement, on montre pour une hyperbinomiale M régulière et multiple, que pour toute constante x et pour certains paramètres m_1 et m_3 donnés, on a

$$M = \mathcal{HB}(m_1n + xk + m_3; rm_1n - rxn + krx + rm_3)$$

ce qui entrane que

$$M(n,k) = r^k \binom{n}{k} \prod_{j=1}^{n} (m_1j + m_3)$$

avec $r = M(1,1)/M(1,0)$.

On présente ensuite une méthode permettant d'obtenir des récurrences pour la somme de deux doubles suites pour lesquelles on dispose de récurrences. Cette méthode est particulièment intéressante lorsque l'une des deux doubles suites est hyperbinomiale et l'autre hypergéométrique. Finalement on considère le produit matriciel de deux doubles suites l'une étant hyperbinomiale et l'autre hypergéométrique.

Dans le troisième chapitre, on considère les hyperbinomiales spéciales. Pour ces hyperbinomiales on développe une algèbre d'opérateurs (définis, ou partiellement définis) sur les hyperbinomiales. Sans nécessairement permettre d'obtenir les termes généraux d'hyperbinomiales sous forme close, ces opérateurs permettent de les exprimer les unes en fonction des autres. Si les termes généraux de deux hyperbinomiales sont reliés par une relation simple, on n'a qu'à résoudre une de ces équations de récurrence pour en déduire l'autre. Par ailleurs, étant données deux récurrences hyperbinomiales, il se peut qu'il existe un rapport assez simple entre les termes généraux de leurs solutions sans que cela ne provienne d'une transformation unique. Ceci permet en fait d'introduire une notion de récurrence canonique.

Dans le quatrième chapitre on trouve, sous forme close, des fonctions génératrices associées aux doubles suites hyperbinomiales. Pour $H = \mathcal{HB}(p(n); q(n))$ on donne une formule pour les polynômes hyperbinomiaux $H_n^\ell(t) := \sum_k H(n,k)t^k$. Pour les hyperbinomiales à coefficients polynomiaux de degré 1, $G = \mathcal{HB}(\alpha n + \beta k + \gamma; \phi k + \psi)$, on calcule les fonctions génératrices $G_k^c(x) := \sum_n G(n,k)x^n/n!$ et $G(x,t) := \sum_{n,k} G(n,k)t^k x^n/n!$. Par exemple, si $\alpha \neq 0, \phi \neq 0$ et $\beta \neq 0$, alors on a la fonction génératrice $G_k^c(x)$

$$G(k,k)(1-\alpha x)^{-\frac{\alpha+\gamma}{\alpha}} \frac{1}{\beta^k k!} \left\{1 - (1-\alpha x)^{-\frac{\alpha+\beta}{\alpha}}\right\}^k,$$

et la fonction génératrice $G(x,t)$

$$(1-\alpha x)^{-\frac{\gamma+\alpha}{\alpha}} \left(1 + \frac{\phi t}{\beta}(1-\alpha x)^{\frac{\beta}{\alpha}}\right)^{-\frac{\phi+\psi}{\phi}}.$$

On utilise ensuite ces fonctions génératrices pour exprimer sous forme close le terme général d'une hyperbinomiale. Enfin, on montre que pour $B = \mathcal{HB}(\alpha n + \beta k + \gamma; \gamma')$ avec $\gamma' \neq 0$, la suite des polynômes hyperbinomiaux $\{B_n^\ell(t)\}_{n\geq 0}$ est une suite de Sheffer.

Chapitre 1

FORMULES DE SOMMATION

Résumé

Ce premier chapitre est consacré aux formules de sommation dans lesquelles interviennent des hyperbinomiales.

Tout d'abord, on donne des conditions suffisantes sur les coefficients de deux hyperbinomiales F et G pour que leur produit matriciel $(F \times G)(n,k) = \sum_j F(n,j)G(j,k)$ soit aussi une double suite hyperbinomiale . Dans ce cas on dit que $F \times G$ est un produit hyperbinomial.

Dans la première section on montre que si

$$\begin{aligned} F &= \mathcal{HB}(a(n)v(k) + u(n); a(n)b(k)), \\ G &= \mathcal{HB}\left(\frac{y(k) - v(n-1)}{b(n)}; \frac{d(k)}{b(n)}\right), \end{aligned}$$

alors

$$(F \times G) = \mathcal{HB}(a(n)y(k) + u(n); a(n)d(k)). \tag{1.1}$$

Comme application on en déduit la formule de Carlitz

$$\sum_j \binom{n}{j} (q-1)^{j-k} S_q[j,k] = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q,$$

où $S_q(n,k) = \frac{1-q^k}{1-q} S_q(n-1,k) + S_q(n-1,k-1)$ sont des q-analogues pour les nombres de Stirling de seconde espèce et $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ les polynômes gaussiens sont des q-analogues des coefficients binomiaux.

Dans la deuxième section on considère le produit de la matrice correspondant à une hyperbinomiale avec une matrice colonne dont la k-ième entrée est de la

forme $\prod_{j=1}^k g(j)$ pour $\{g(j)\}_{j\geq 1}$ une suite donnée. Si $F = \mathcal{HB}(p(n,k);q(n,k))$ et

$$h(n) := p(n,k-1) + g(k)q(n,k)$$

est une fonction indépendante de k, on montre que

$$\sum_k F(n,k)\prod_{j=1}^k g(j) = \prod_{j=1}^n h(j).$$

Cette formule permet de déduire de façon uniforme les formules de conversion entre diverses bases de l'espace des polynômes en t, comme par exemple $\sum_k S(n,k)t^{\underline{k}} = t^n$, où S désigne la double suite des nombres de Stirling de seconde espèce et $t^{\underline{k}} = t(t-1)\cdots(t-k+1)$ est le polynôme définissant les factorielles descendantes. Dans le cas où $F = \mathcal{HB}(p(n);q(n))$, la formule permet aussi de donner sous forme close la fonction génératrice $F_n^\ell(t) := \sum_k F(n,k)t^k$.

A la section suivante, sans aucune contrainte sur les paramètres, on trouve pour une hyperbinomiale $H = \mathcal{HB}(p(n,k);q(n,k))$ des récurrences de la forme

$$\begin{aligned} H(n+1,k+1) &= \sum_j H(j,k)w_j(n,k), \\ H(n+k+1,n) &= \sum_j H(k+j,j)w'_j(n,k), \end{aligned}$$

les poids w_j et w'_j étant donnés par

$$\begin{aligned} w_j(n,k) &= q(j+1,k+1)\prod_{m=j+1}^n p(m+1,k+1) \\ w'_j(n,k) &= p(k+j+1,j)\prod_{m=j+1}^n q(m+k+1,m). \end{aligned}$$

On montre que les deux récurrences précédentes s'obtiennent l'une de l'autre à l'aide de l'opérateur ρ de réflexion défini par $(\rho H)(n,k) = H(n,n-k)$ et tel que

$$(\rho H) = \mathcal{HB}(q(n,n-k);p(n,n-k)).$$

Ainsi, pour $S(n,k) = kS(n-1,k) + S(n-1,k-1)$ on obtient

$$\begin{aligned} S(n+1,k+1) &= \sum_{j=k}^n S(j,k)(k+1)^{n-j}, \\ S(n+k+1,n) &= \sum_{j=0}^n j\cdot S(k+j,j). \end{aligned}$$

A la quatrième section on considère aussi les hyperbinomiales F et G telles que $(F\times G)(n,k) = \chi(n,k)$, ce qui revient à dire que G est l'unique inverse de

F. Si $F = \mathcal{HB}(a(n)v(k)+u(n); a(n)b(k))$ avec $a(n)b(k) \neq 0$ pour tout $n, k \in \mathbb{N}$, alors F est inversible et

$$F^{-1} = \mathcal{HB}\left(\frac{-a(k+1)v(n-1)-u(k+1)}{a(k+1)b(n)}; \frac{1}{a(k)b(n)}\right).$$

Pour $B = \mathcal{HB}(b(k); b'(k))$ on démontre, dans la cinquième section, que si B est inversible, alors

$$\sum_{j=0}^{a} B^{-1}(a,j)B(n+j, a+k) = B_{(-a)}(n,k)$$

où $B_{(-a)} = \mathcal{HB}(b(k+a); b'(k+a))$.

Finalement, le chapitre se termine par une formule de sommation, indicée par des partitions ensemblistes , donnant le terme général de toute hyperbinomiale. Par exemple,

$$S(n, n-k) = \sum \prod_{j=1}^{k} (\beta_j - j),$$

où la somme est faite sur les ensembles $\{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$ avec $1 \leq \beta_j < \beta_{j+1} \leq n$ pour $1 \leq j \leq k-1$. Pour les coefficients binomiaux la formule exprime le fait que $\binom{n}{k}$ dénombre les sous-ensembles de $[n]$ ayant k éléments ou encore les chemins de $(0,0)$ à (n,k).

1.1 Produits Hyperbinomiaux

Définition 1. Étant données deux doubles suites triangulaires F et G on note $F \times G$ la double suite H telle que

$$H(n,k) = \sum_{j} F(n,j)G(j,k). \tag{1.2}$$

Définition 2. On appelle *hyperbinomiale* une double suite B pour laquelle il existe des fonctions b et $b' : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to K$ (où K est un corps) telles que

$$B(n,k) = b(n,k)B(n-1,k) + b'(n,k)B(n-1,k-1) \tag{1.3}$$

et ayant les valeurs initiales

$$B(0,k) = \chi(k=0), \tag{1.4}$$

c'est-à-dire que $B(0,0) = 1$ et $B(0,k) = 0$ si $k \neq 0$.

On écrit alors

$$B = \mathcal{HB}(b(n,k); b'(n,k))$$

comme abréviation du fait que B est l'unique double suite définie par la récurrence (1.3) avec conditions initiales (1.4). On dit aussi que l'équation (1.3) est une *récurrence hyperbinomiale* et on la désigne aussi $\mathcal{HB}(b(n,k); b'(n,k))$. Deux récurrences hyperbinomiales sont dites *équivalentes* si elles admettent la même solution.

Afin d'introduire le produit matriciel d'hyperbinomiales on doit d'abord s'assurer que ce sont des doubles suites triangulaires sinon la matrice produit pourrait ne pas être définie. C'est l'objet de la proposition suivante qui donne aussi explicitement les valeurs $B(n,0)$ et $B(n,n)$.

Proposition 1.1.1 *Soit $B = \mathcal{HB}(b(n,k); b'(n,k))$, alors pour $n \geq 0$*

$$B(n,k) = \begin{cases} 0, & si\ k < 0, \\ \prod_{j=1}^{n} b(j,0), & si\ k = 0, \\ \prod_{j=1}^{n} b'(j,j), & si\ k = n, \\ 0, & si\ k > n. \end{cases}$$

Preuve. Pour $k < 0$, $B(0,k) = 0$ par définition et alors, par induction sur n, $B(n,k) = 0$ pour tout $k < 0$ et $n \geq 0$.

Pour $k = 0$ et $n \geq 1$ on a

$$B(n,0) = b(n,0)B(n-1,0) + b'(n,0)B(n-1,-1) = b(n,0)B(n-1,0),$$

qui est une récurrence ordinaire en n avec la valeur initiale $B(0,0) = 1$. Si l'on suppose que pour $n-1$ on a $B(n-1,k-1) = 0$, pour tout $k-1 > n-1$, alors $B(n,k) = 0$ pour $k > n$ car $B(n-1,k)$ et $B(n-1,k-1)$ sont nuls par hypothèse de récurrence et ainsi B est triangulaire.

Pour le troisième point on résoud l'équation aux différences ordinaires

$$B(n,n) = b'(n,n)B(n-1,n-1) + \chi(n=0).$$

□

Dans la proposition suivante on donne des conditions suffisantes pour que le produit de deux hyperbinomiales soit aussi hyperbinomiale. Dans l'exemple et le corollaire qui suivent on traduit ces conditions suffisantes de façon à pouvoir produire effectivement une multitude d'identités particulières.

Proposition 1.1.2 *Soient F et G les hyperbinomiales*

$$F = \mathcal{HB}(f(n,k); f'(n,k)), \tag{1.5}$$

$$G = \mathcal{HB}(g(n,k); g'(n,k)), \tag{1.6}$$

et soient h, h' les fonctions

$$h(n,k,j) = f(n,j-1) + f'(n,j)g(j,k), \tag{1.7}$$

$$h'(n,k,j) = f'(n,j)g'(j,k). \tag{1.8}$$

Si les fonctions h et h' sont indépendantes de j, c'est-à-dire que $h(n,k,j) = h(n,k,0)$ et $h'(n,k,j) = h'(n,k,0)$ pour tout j, alors

$$H := F \times G = \mathcal{HB}(h(n,k,0); h'(n,k,0)).$$

Preuve. Il suffit de développer les termes $F(n,j)$ et $G(j,k)$ dans le produit :

$$\begin{aligned} H(n,k) &:= \sum_j F(n,j)G(j,k) \\ &= \sum_j \left(f(n,j)F(n-1,j) + f'(n,j)F(n-1,j-1)\right) G(j,k) \\ &= \sum_j \{f(n,j-1) + f'(n,j)g(j,k)\} F(n-1,j-1)G(j-1,k) \\ &\quad + \sum_j \{f'(n,j)g'(j,k)\} F(n-1,j-1)G(j-1,k-1). \end{aligned}$$

$\square$

Exemple 1. Pour $F = \mathcal{HB}(f(n); f'(n))$ et $G = \mathcal{HB}(g(k); g'(k))$,

$$F \times G = \mathcal{HB}(f(n) + f'(n)g(k); f'(n)g'(k)).$$

En particulier pour $S(n,k)$ les nombres de Stirling de seconde espèce, $s(n,k)$ les nombres de Stirling de première espèce et $c(n,k)$ les nombres de Stirling de première espèce sans signe ainsi que pour leurs q et p,q-analogues[1] on a

$f(n)$	$f'(n)$	$F(n,k)$
1	1	$\binom{n}{k}$
$n-1$	1	$c(n,k)$
$-n+1$	1	$s(n,k)$
-1	1	$(-1)^{n-k}\binom{n}{k}$
n	1	$c(n+1,k+1)$
1	n	$s(n+1,k-n+1)$
$\frac{q^{n-1}-1}{1-q}$	1	$s_q[n,k]$
$\frac{1-q^{n-1}}{1-q}$	1	$c_q[n,k]$
$\frac{q^{n-1}-p^{n-1}}{p-q}$	1	$s_{p,q}[n,k]$
$\frac{p^{n-1}-q^{n-1}}{p-q}$	1	$c_{p,q}[n,k]$

$g(k)$	$g'(k)$	$G(n,k)$
1	1	$\binom{n}{k}$
q^k	1	$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$
k	1	$S(n,k)$
$k+1$	1	$S(n+1,k+1)$
k	k	$k!S(n,k)$
$-k$	1	$(-1)^{n-k}S(n,k)$
1	k	$n^{\underline{k}}$
$\frac{1-q^k}{1-q}$	1	$S_q[n,k]$
q^k-1	1	$(q-1)^{n-k}S_q[n,k]$
$\frac{p^k-q^k}{p-q}$	1	$S_{p,q}[n,k]$

[1] Voir [dML].

où $n^{\underline{k}} = n(n-1)\cdots(n-k+1)$ et $\left[{n \atop k}\right]_q$ dénote les polynômes gaussiens qui sont des q-analogues des coefficients binomiaux. On dit que $H(n,k,q)$ est un q-analogue de $H(n,k)$ si $\lim_{q\to 1} H(n,k,q) = H(n,k)$.

On en déduit donc de façon uniforme les formules de sommation classiques[2]

$$\begin{aligned}
&(1.9) & \sum_j \binom{n}{j} S(j,k) &= S(n+1,k+1),\\
&(1.10) & \sum_j c(n,j)\binom{j}{k} &= c(n+1,k+1),\\
&(1.11) & \sum_j (-1)^{n-j}\binom{n}{j} S(j+1,k+1) &= S(n,k),\\
&(1.12) & \sum_j c(n+1,j+1)(-1)^{j-k}\binom{j}{k} &= c(n,k),\\
&(1.13) & \sum_j S(n+1,j+1)s(j,k) &= \binom{n}{k},\\
&(1.14) & \sum_j c(n+1,j+1)(-1)^{j-k}S(j,k) &= n^{\underline{n-k}}.
\end{aligned}$$

La proposition 1.1.2 fournit aussi des formules pour le produit d'hyperbinomiales, lorsque le coefficient f dépend de k et le coefficient g dépend de n. Ainsi,

$$\sum_j (-1)^n L(n,j)s(j,k) = (-1)^k s(n,k) = (-1)^n c(n,k),$$

où $L = \mathcal{HB}(n+k-1;1)$.

Enfin, la même approche donne les identités suivantes entre q-analogues[3]

$$\begin{aligned}
&(1.15) & \sum_j \binom{n}{j}(q-1)^{j-k} S_q[j,k] &= \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q,\\
&(1.16) & \sum_j (-1)^{n-j}\binom{n}{j}\begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}_q &= (q-1)^{n-k} S_q[n,k],\\
&(1.17) & \sum_j \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q (1-q)^{j-k} c_q[j,k] &= \binom{n}{k}.
\end{aligned}$$

Donnons maintenant d'autres conditions suffisantes pour que le produit matriciel de deux hyperbinomiales soit une hyperbinomiale.

---

[2] Voir [GKP,p.251].
[3] Voir [dML,p.26-27] et [CAR 33].

Corollaire 1.1.3 *Soient* $F = \mathcal{HB}(f(n,k); f'(n,k))$ *et* $G = \mathcal{HB}(g(n,k); g'(n,k))$. *S'il existe des suites* a, b, d, u, v *et* y *telles que*

$$f(n,k) = a(n)v(k) + u(n), \tag{1.18}$$

$$f'(n,k) = a(n)b(k), \tag{1.19}$$

$$g(n,k) = \frac{y(k) - v(n-1)}{b(n)}, \tag{1.20}$$

$$g'(n,k) = \frac{d(k)}{b(n)}, \tag{1.21}$$

c'est-à-dire que F *et* G *sont définies par*

$$F = \mathcal{HB}(a(n)v(k) + u(n); a(n)b(k)), \tag{1.22}$$

$$G = \mathcal{HB}\left(\frac{y(k) - v(n-1)}{b(n)}; \frac{d(k)}{b(n)}\right), \tag{1.23}$$

alors

$$F \times G = \mathcal{HB}(a(n)y(k) + u(n); a(n)d(k)). \tag{1.24}$$

Preuve. Il suffit d'utiliser la proposition 1.1.2 en calculant les fonctions $h(n,k,j)$ et $h'(n,k,j)$. □

Remarque 1. Les conditions du corollaire précédent sont les plus générales pour lesquelles le produit est non trivial[4]. En effet, si $h'(n,k,j) := f'(n,j)g'(j,k)$ est une fonction indépendante de j, alors $h'(n,k,n) = h'(n,k,0)$ et on en déduit que

$$g'(n,k) = \frac{f'(n,0)}{f'(n,n)} g'(0,k) := a(n)b(k),$$

et de même $h'(n,k,k) = h'(n,k,0)$ d'où

$$f'(n,k) = f'(n,0)\frac{g'(0,k)}{g'(k,k)} := c(n)d(k)$$

et alors $h'(n,k,j) = a(n)b(j)c(j)d(k)$ ce qui nous permet de poser $b(j)c(j) = 1$.

Par ailleurs, si

$$h(n,k,j) := f(n,j-1) + f'(n,j)g(j,k) = f(n,j-1) + a(n)b(j)g(j,k)$$

est aussi une fonction indépendante de j, alors $h(n,k,k+1) = h(n,k,0)$ d'où

$$\begin{aligned} f(n,k) &= f(n,-1) + a(n)\{b(0)g(0,k) - b(k+1)g(k+1,k)\} \\ &:= u(n) + a(n)v(k) \end{aligned}$$

[4]En ce sens que les fonctions f, f', g et g' ne sont pas identiquement nulles.

et de même $h(n,k,n) = h(n,k,0)$ et alors

$$\begin{aligned} g(n,k) &= \frac{f(n,-1) + a(n)b(0)g(0,k) - f(n,n-1)}{a(n)b(n)} \\ &= \frac{v(-1) + b(0)g(0,k) - v(n-1)}{b(n)} \\ &:= \frac{y(k) - v(n-1)}{b(n)}. \end{aligned}$$

Toutefois les conditions suffisantes de la proposition 1.1.2 ne sont pas nécessaires. À la section 2.6 on verra d'autres types de produits hyperbinomiaux.

1.2 Conversions

Soient les hyperbinomiales $F = \mathcal{HB}(f(n,k); f'(n,k))$, $G = \mathcal{HB}(g(n,k); g'(n,k))$ et $H = \mathcal{HB}(h(n,k); h'(n,k))$ et supposons que $F \times G = H$. En examinant le produit de F avec la première colonne de G, à savoir

$$\sum_j F(n,j)G(j,0) = H(n,0),$$

on obtient une formule où les termes $H(n,0)$ et $G(i,0)$ sont déterminés par la proposition 1.1.1. Explicitement

$$\begin{aligned} H(n,0) &= \prod_{m=1}^{n} h(m,0), \\ G(j,0) &= \prod_{m=1}^{j} g(m,0). \end{aligned}$$

Lorsque les termes $G(j,0)$ et $H(n,0)$ admettent une forme close, on obtient par ce biais d'autres récurrences pour les hyperbinomiales F. Pour ce faire, le produit $F \times G$ doit être hyperbinomial. La proposition qui suit permet d'éviter cette dernière contrainte.

Proposition 1.2.1 *Soit $F = \mathcal{HB}(f(n,k); f'(n,k))$ et $\{g(n)\}_{n\geq 1}$ une suite donnée. Si la fonction*

$$h(n,k) := f(n,k-1) + g(k)f'(n,k)$$

est indépendante de k, c'est-à-dire que $h(n,k) := h(n,0)$ pour tout k, alors

$$\sum_k F(n,k) \prod_{j=1}^{k} g(j) = \prod_{j=1}^{n} h(j,0). \tag{1.25}$$

Preuve. La démonstration se fait comme pour la proposition 1.1.2.

Soient $H(n) := \sum_k F(n,k)\prod_{j=1}^k g(j)$ et $G(k) := \prod_{j=1}^k g(j)$, alors

$$\begin{aligned}
H(n) &= \sum_k f(n,k)F(n-1,k)G(k) + \sum_k f'(n,k)F(n-1,k-1)g(k)G(k-1)\\
&= \sum_k \{f(n,k-1) + f'(n,k)g(k)\}F(n-1,k-1)G(k-1)\\
&= h(n,0)H(n-1).
\end{aligned}$$

$\square$

Exemple 2. En choisissant convenablement la suite $\{g(n)\}_{n\geq 1}$ et l'hyperbinomiale $F(n,k)$ et en posant $G(k) := \prod_{j=1}^k g(j)$, la proposition précédente permet de déduire de nombreuses formules intéressantes.

Dénotons encore $S(n,k)$, $s(n,k)$ et $c(n,k)$ pour les nombres de Stirling et observons que $L = \mathcal{HB}(n+k-1;1)$ est l'hyperbinomiale correspondant aux nombres de Lah[5]. De plus notons S_a pour[6] la solution de $\mathcal{HB}(-n+ak+1;a)$, c'est-à-dire que $S_a(n,k) = (-n+ak+1)S_a(n-1,k) + aS_a(n-1,k-1)$.

Si on considère pour $G(k)$ les suites

$$\begin{aligned}
t^{\underline{k}} &:= t(t-1)\cdots(t-k+1) = (t-k+1)t^{\underline{k-1}},\\
t^k &= t\cdot t^{k-1},\\
t^{\overline{k}} &:= t(t+1)\cdots(t+k-1) = (t+k-1)t^{\overline{k-1}},
\end{aligned}$$

on en déduit comme cas particuliers de (1.25) :

$$\sum_k c(n,k)t^k = t^{\overline{n}}, \tag{1.26}$$

$$\sum_k s(n,k)t^k = t^{\underline{n}}, \tag{1.27}$$

$$\sum_k S(n,k)t^{\underline{k}} = t^n, \tag{1.28}$$

$$\sum_k L(n,k)t^{\underline{k}} = t^{\overline{n}}, \tag{1.29}$$

$$\sum_k (-1)^k L(n,k)t^{\overline{k}} = (-t)^{\overline{n}}, \tag{1.30}$$

$$\sum_k S_a(n,k)t^{\underline{k}} = (at)^{\underline{n}}. \tag{1.31}$$

[5] Voir [COM,p.135,156]. Parfois on appelle aussi nombres de Lah les nombres $(-1)^n L(n,k)$.

[6] Voir [JOR].

Les exemples (1.26) et (1.27), à savoir

$$\begin{aligned}\sum_k c(n,k)t^k &= t^{\overline{n}},\\ \sum_k s(n,k)t^k &= t^{\underline{n}},\end{aligned}$$

seront reconsidérés plus loin du point de vue des fonctions génératrices.

Exemple 3. Les nombres de Stirling non-centrés[7] sont définis par les identités

$$\sum_k S_{(a)}(n,k)t^{\underline{k}} = (t-a)^n, \tag{1.32}$$

$$\sum_k s_{(a)}(n,k)(t-a)^k = t^{\underline{n}}, \tag{1.33}$$

$$c_{(a)}(n,k) = (-1)^{n-k}s_{(a)}(n,k). \tag{1.34}$$

La proposition précédente permet de trouver une récurrence hyperbinomiale pour ces nombres.

En effet, il suffit de trouver des fonctions à variables entières a_1, a_2, b_1 et b_2 telles que

$$a_1(n,k-1)+(t-a)a_2(n,k) = t-n+1, \tag{1.35}$$

$$b_1(n,k-1)+(t-k+1)b_2(n,k) = t-a, \tag{1.36}$$

pour obtenir

$$s_{(a)} = \mathcal{HB}(a_1(n,k);a_2(n,k)), \tag{1.37}$$

$$c_{(a)} = \mathcal{HB}(-a_1(n,k);a_2(n,k)), \tag{1.38}$$

$$S_{(a)} = \mathcal{HB}(b_1(n,k);b_2(n,k)). \tag{1.39}$$

Or, pour satisfaire (1.35) et (1.36) il suffit de prendre

$$\begin{aligned} a_1(n,k) = -n+a+1, &\qquad a_2(n,k)=1,\\ b_1(n,k)=k-a, &\qquad b_2(n,k)=1.\end{aligned}$$

Ainsi, pour $n>0$, $s_{(a)}(n,k)=(-n+a+1)s_{(a)}(n-1,k)+s_{(a)}(n-1,k-1)$ et $S_{(a)}(n,k)=(k-a)S_{(a)}(n-1,k)+S_{(a)}(n-1,k-1)$.

En utilisant le corollaire 1.1.3 on peut alors démontrer que

$$c_{(a)}(n,k) = \sum_j c(n,j)(-a)^{j-k}\binom{j}{k}, \tag{1.40}$$

$$S_{(a)}(n,k) = \sum_j (-a)^{n-j}\binom{n}{j}S(j,k). \tag{1.41}$$

[7] Voir [KOU 82].

Définition 3. Pour une hyperbinomiale $B = \mathcal{HB}(b(n,k); b'(n,k))$ on appelle *somme de ligne* la suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$ définie par

$$B_n := \sum_k B(n,k).$$

On considère aussi les fonctions génératrices

$$\begin{aligned}
B_n^\ell(t) &:= \sum_k B(n,k)t^k, \\
B_k^c(x) &:= \sum_{n\geq 0} B(n,k)\frac{x^n}{n!}, \\
B(x,t) &:= \sum_{n,k} B(n,k)\frac{x^n}{n!}t^k \\
&= \sum_n B_n^\ell(t)\frac{x^n}{n!} = \sum_k B_k^c(x)t^k,
\end{aligned}$$

respectivement appelées fonctions génératrices de ligne, de colonne et fonction génératrice double. Remarquons qu'on a évidemment $B_n = B_n^\ell(1)$.

La proposition 1.2.1 permet, dans certains cas, de déterminer les fonctions génératrices de ligne et, dans un plus grand nombre de cas, de déterminer la suite *somme de ligne*. Remarquons que ces mêmes informations peuvent toujours être obtenues dans le cas où B est une fonction holonome.[8]

Corollaire 1.2.2 *Si $B = \mathcal{HB}(b(n,k); b'(n,k))$ est une hyperbinomiale telle que*

$$h(n) := b(n,k-1) + b'(n,k)$$

soit une fonction indépendante de k, alors

$$B_n := \sum_k B(n,k) = \prod_{j=1}^n h(j).$$

En particulier, si $B = \mathcal{HB}(b(n); b'(n))$, alors on a de plus

$$B_n^\ell(t) := \sum_k B(n,k)t^k = \prod_{j=1}^n \{b'(j)t + b(j)\}.$$

Preuve. Par application de la proposition 1.2.1. □

[8]Voir [ZEI 90a] et [ZEI 90b].

Exemple 4. Pour les hyperbinomiales les mieux connues on retrouve comme fonctions génératrices de ligne les identités classiques

$$\begin{aligned}\sum_k \binom{n}{k} t^k &= (1+t)^n,\\ \sum_k c(n,k)t^k &= t^{\overline{n}},\\ \sum_k s(n,k)t^k &= t^{\underline{n}},\\ \sum_k c_{p,q}[n,k]t^k &= \prod_{m=0}^{n-1}(t+[m]_{p,q})\end{aligned}$$

où $[m]_{p,q} = \frac{p^m - q^m}{p-q}$, et les sommes de lignes

$$\begin{aligned}\sum_k \binom{n}{k} &= 2^n,\\ \sum_k c(n,k) &= n!,\\ \sum_k s(n,k) &= \chi(n=0)+\chi(n=1),\\ \sum_k A(n,k) &= n!,\\ \sum_k A_2(n,k) &= \frac{(2n)^{\underline{n}}}{2^n},\end{aligned}$$

où on écrit $A(n,k)$ pour les nombres eulériens avec $A = \mathcal{HB}(k+1; n-k)$ ou $A = \mathcal{HB}(k; n-k+1)$ selon que l'on dénombre les permutations selon[9] le nombre de montées ou de descentes et où on note A_2 pour les nombres eulériens de seconde espèce[10] avec $A_2 = \mathcal{HB}(k+1; 2n-k-1)$.

On trouve un rapport très général entre les fonctions génératrices de doubles suites triangulaires F, G et H reliées par $F \times G = H$.

Proposition 1.2.3 *Si $F \times G = H$, alors*

$$H(x,t) = \sum_j F_j^c(x) G_j^\ell(t).$$

Preuve. Il suffit de bien permuter les sommes

$$H(x,t) \quad = \quad \sum_n \sum_k \left(\sum_j F(n,j)G(j,k) \right) \frac{x^n}{n!} t^k$$

[9] Ou encore selon le nombre d'excédances ou d'anti-excédances, voir par exemple [FS].

[10] Ils dénombrent les permutations d'un multi-ensemble selon le nombre de montées. Voir [GS] et [GKP,p.256].

$$\begin{aligned} &= \sum_j \left(\sum_n F(n,j) \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_k G(j,k) t^k \right) \\ &:= \sum_j F_j^c(x) G_j^\ell(t). \end{aligned}$$

□

Exemple 5. Soit $F = \mathcal{HB}(1;k)$ et $G = \mathcal{HB}(1;1)$ les doubles suites de terme général $F(n,k) = k!\binom{n}{k}$, $G(n,k) = \binom{n}{k}$. Si on pose $H := F \times G$, c'est-à-dire que $H(n,k) = \sum_j j!\binom{n}{j}\binom{j}{k}$, alors à partir des fonctions génératrices $F_k^c(x) = \mathrm{e}^x x^k$ et $G_n^\ell(t) = (1+t)^n$ on en déduit que

$$H(x,t) = \sum_j \mathrm{e}^x x^j (1+t)^j = \frac{\mathrm{e}^x}{1-x-xt}.$$

1.3 Récurrences Verticales et Diagonales

Pour les nombres binomiaux, les formules

$$\binom{n+1}{k+1} = \sum_{j=0}^{n} \binom{j}{k}, \tag{1.42}$$

$$\binom{n+k+1}{n} = \sum_{j=0}^{n} \binom{k+j}{j}, \tag{1.43}$$

appelées respectivement sommation de l'indice supérieur et sommation parallèle, peuvent s'obtenir l'une de l'autre par réflexion.[11] Ces formules se généralisent très bien à une hyperbinomiale quelconque pour donner ce que l'on appelle des récurrences *verticales*[12] et *diagonales*.

Proposition 1.3.1 *Pour une hyperbinomiale $B = \mathcal{HB}(b(n,k); b'(n,k))$ on a la récurrence verticale*

$$B(n+1,k+1) = \sum_{j=k}^{n} B(j,k) b'(j+1,k+1) \prod_{m=j+1}^{n} b(m+1,k+1), \tag{1.44}$$

Preuve. Pour un k donné on fait la preuve par induction sur n. Si $n < k$, alors les deux membres de (1.44) sont nuls. Supposons que la formule (1.44) soit vraie pour $n-1$, c'est donc dire que

$$B(n,k+1) = \sum_{j=k}^{n-1} B(j,k) b'(j+1,k+1) \prod_{m=j+1}^{n-1} b(m+1,k+1), \tag{1.45}$$

[11] En remplaçant k par $n-k$.

[12] Voir [COM,p.207,209] ou [GKP,p.159].

alors, de la récurrence de B, on déduit que

$$\begin{aligned}
B(n+1,k+1) &:= b(n+1,k+1)B(n,k+1)+b'(n+1,k+1)B(n,k) \\
&= b'(n+1,k+1)B(n,k) \\
&+ b(n+1,k+1)\sum_{j=k}^{n-1} B(j,k)b'(j+1,k+1)\prod_{m=j+1}^{n-1} b(m+1,k+1) \\
&= b'(n+1,k+1)B(n,k) \\
&+ \sum_{j=k}^{n-1} B(j,k)b'(j+1,k+1)\prod_{m=j+1}^{n} b(m+1,k+1) \\
&= \sum_{j=k}^{n} B(j,k)b'(j+1,k+1)\prod_{m=j+1}^{n} b(m+1,k+1).
\end{aligned}$$

et la formule est vraie pour n. □

Exemple 6. Pour toute hyperbinomiale on a une récurrence verticale. Par exemple pour les nombres de Stirling $S(n,k)$, $s(n,k)$, $c(n,k)$, pour les nombres eulériens $A(n,k)$, $A_2(n,k)$ et pour les nombres de Lah, la formule (1.44) devient

$$\begin{aligned}
S(n+1,k+1) &= \sum_{j=0}^{n} S(j,k)(k+1)^{n-j}, \\
s(n+1,k+1) &= \sum_{j=0}^{n} s(j,k)(-1)^{n-j} n^{\underline{n-j}}, \\
c(n+1,k+1) &= \sum_{j=0}^{n} c(j,k) n^{\underline{n-j}}, \\
A(n+1,k+1) &= \sum_{j=0}^{n} A(j,k)(j-k)(k+2)^{n-j}, \\
A_2(n+1,k+1) &= \sum_{j=0}^{n} A_2(j,k)(2j-k)(k+2)^{n-j}, \\
L(n+1,k+1) &= \sum_{j=0}^{n} L(j,k)(n+k+1)^{\underline{n-j}},
\end{aligned}$$

où on note $x^{\underline{n}} = x(x-1)\cdots(x-n+1)$ pour la factorielle descendante. De même pour les q et p,q-analogues

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix}_q = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}_q q^{(k+1)(n-j)},$$

$$\begin{aligned} S_{p,q}[n+1,k+1] &= \sum_{j=0}^{n} S_{p,q}[j,k][k+1]_{p,q}^{n-j}, \\ c_{p,q}[n+1,k+1] &= \sum_{j=0}^{n} c_{p,q}[j,k] \prod_{m=j+1}^{n} [m]_{p,q}, \end{aligned}$$

où $[m]_{p,q} = \frac{p^m - q^m}{p-q}$.

On obtient les récurrences diagonales par réflexion de la formule (1.44), au sens suivant.

Définition 4. On dit que (ρT) est la *réflexion* de la double suite triangulaire T si

$$(\rho T)(n,k) = T(n, n-k).$$

Évidemment $\rho^2 T = T$.

Proposition 1.3.2 *Si $B = \mathcal{HB}(b(n,k); b'(n,k))$, alors*

$$\rho B = \mathcal{HB}(\rho b'(n,k); \rho b(n,k)).$$

Preuve. Avec la récurrence de B

$$\begin{aligned} (\rho B)(n,k) &:= B(n, n-k) \\ &= (\rho b)(n,k) B(n-1, n-k) + (\rho b')(n,k) B(n-1, n-k-1), \end{aligned}$$

mais $B(n-1, n-k) = (\rho B)(n-1, k-1)$ et $B(n-1, n-k-1) = (\rho B)(n-1, k)$.
□

Corollaire 1.3.3 *Pour l'hyperbinomiale $B = \mathcal{HB}(b(n,k); b'(n,k))$ on a la récurrence diagonale*

$$B(n+k+1, k) = \sum_{j=0}^{k} B(n+j, j) b(n+j+1, j) \prod_{m=j+1}^{n} b'(m+n+1, m). \tag{1.46}$$

Preuve. Il suffit d'utiliser la proposition précédente et appliquer la formule (1.44) à $(\rho B)(n+k+1, n+1)$:

$$(\rho B)(n+k+1, n+1) = \sum_{u=n}^{n+k} (\rho B)(u,k)(\rho b)(u+1, n+1) \prod_{v=u+1}^{n+k} (\rho b')(v+1, n+1),$$

avec le changement d'indices $j = u - k$ et $m = v - k$. □

Exemple 7. On déduit de (1.46) les récurrences diagonales suivantes :

$$\begin{aligned}
S(n+k+1,k) &= \sum_{j=0}^{k} S(n+j,j)j, \\
s(n+k+1,k) &= \sum_{j=0}^{k} s(n+j,j)(-n-j), \\
c(n+k+1,k) &= \sum_{j=0}^{k} c(n+j,j)(n+j), \\
A(n+k+1,k) &= \sum_{j=0}^{k} A(n+j,j)(j+1)(k+1)^{k-j}, \\
A_2(n+k+1,k) &= \sum_{j=0}^{k} A_2(n+j,j)(j+1)(k+2n+1)^{\underline{k-j}}, \\
L(n+k+1,k) &= \sum_{j=0}^{k} L(n+j,j)(n+2j), \\
\begin{bmatrix} n+k+1 \\ k \end{bmatrix}_q &= \sum_{j=0}^{k} \begin{bmatrix} n+j \\ j \end{bmatrix}_q q^j, \\
S_{p,q}[n+k+1,k] &= \sum_{j=0}^{k} S_{p,q}[n+j,j][j]_{p,q}, \\
c_{p,q}[n+k+1,k] &= \sum_{j=0}^{k} c_{p,q}[n+j,j][n+j]_{p,q}.
\end{aligned}$$

La proposition suivante exprime l'effet de la réflexion sur les fonctions génératrices de ligne et sur la fonction génératrice double.

Proposition 1.3.4 *Pour* $B = \mathcal{HB}(b(n,k); b'(n,k))$ *et*

$$\rho B = \mathcal{HB}(b'(n,n-k); b(n,n-k))$$

on a

$$B_n^\ell(t) = t^n (\rho B)_n^\ell \left(\frac{1}{t}\right), \tag{1.47}$$

$$B(x,t) = (\rho B)\left(xt, \frac{1}{t}\right). \tag{1.48}$$

Preuve. Par la proposition 1.3.2 on a $(\rho B)(n,k) = B(n,n-k)$, ainsi pour les fonctions génératrices de ligne

$$B_n^\ell(t) := \sum_k B(n,k)t^n$$

$$= \sum_k B(n,n-k)t^{n-k} = t^n \sum_k (\rho B)(n,k)\left(\frac{1}{t}\right)^k,$$

et pour la fonction génératrice double

$$\begin{aligned} B(x,t) &= \sum_{n\geq 0} B_n^\ell(t)\frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n\geq 0} (\rho B)_n^\ell\left(\frac{1}{t}\right)\frac{(xt)^n}{n!} = (\rho B)\left(xt,\frac{1}{t}\right). \end{aligned}$$

□

1.4 Inversions

Définition 5. L'inverse d'une double suite F est la double suite $G := F^{-1}$ telle que

$$\sum_{j=k}^{n} F(n,j)G(j,k) = \chi(n=k).$$

Lorsqu'une double suite est triangulaire, alors son inverse, s'il existe, est aussi triangulaire.

Pour identifier les hyperbinomiales ayant un inverse hyperbinomial on doit d'abord identifier les récurrences hyperbinomiales satisfaites par l'identité.

Lemme 1.4.1 *Soit I la double suite identité de terme général*

$$I(n,k) = \chi(n=k). \tag{1.49}$$

On a $I = \mathcal{HB}(u(n,k);u'(n,k))$ si, et seulement si $u(n,n-1) = 0$ et $u'(n,n) = 1$.

Proposition 1.4.2 (Inverses hyperbinomiales) *Soit*

$$F = \mathcal{HB}(a(n)v(k) + u(n); a(n)b(k)) \tag{1.50}$$

une hyperbinomiale telle que que pour tout n, k on a $a(n)b(k) \neq 0$. L'hyperbinomiale F admet l'inverse hyperbinomial :

$$F^{-1} = \mathcal{HB}\left(\frac{-a(k+1)v(n-1) - u(k+1)}{a(k+1)b(n)}; \frac{1}{a(k)b(n)}\right).$$

Preuve. Selon le corollaire 1.1.3, pour que le produit $F \times G$ soit hyperbinomial avec F donné par (1.50) il suffit qu'il existe des suites d et y telles que

$$G = \mathcal{HB}\left(\frac{y(k) - v(n-1)}{b(n)}; \frac{d(k)}{b(n)}\right),$$

et alors

$$H := F \times G = \mathcal{HB}(a(n)y(k) + u(n); a(n)d(k)). \tag{1.51}$$

Or pour que H soit l'identité il est nécessaire et suffisant que

$$a(n)d(n) = 1, \tag{1.52}$$

$$a(n)y(n-1) + u(n) = 0, \tag{1.53}$$

de sorte que

$$d(k) = \frac{1}{a(k)}, \tag{1.54}$$

$$y(k) = -\frac{u(k+1)}{a(k+1)}, \tag{1.55}$$

et alors

$$H = F \times G = \mathcal{HB}\left(-\frac{a(n)u(k+1)}{a(k+1)} + u(n); \frac{a(n)}{a(k)}\right) = I. \tag{1.56}$$

$\square$

Remarque 2. Si $M = \{M_{n,k}\}_{0 \leq k \leq n}$ est une matrice triangulaire infinie et inversible et si α et β sont des matrices colonnes d'entrées respectives a_i et b_i, alors on a $M\alpha = \beta$ si, et seulement si $M^{-1}\beta = \alpha$. Ce qui se traduit par

$$b_n = \sum_k M_{n,k} a_k \Leftrightarrow a_n = \sum_k M^{-1}_{n,k} b_k. \tag{1.57}$$

Ainsi pour chaque hyperbinomiale inversible on obtient une formule d'inversion.

Exemple 8. Pour les hyperbinomiales classiques[13] inversibles, on a :

$$F = \mathcal{HB}(1;1) \quad , \quad F(n,k) = \binom{n}{k}, \tag{1.58}$$

$$F^{-1} = \mathcal{HB}(-1;1) \quad , \quad F^{-1}(n,k) = (-1)^{n-k}\binom{n}{k}; \tag{1.59}$$

$$F = \mathcal{HB}(k;1) \quad , \quad F(n,k) = S(n,k), \tag{1.60}$$

[13] Voir par exemple [RIO].

$$F^{-1} = \mathcal{HB}(-n+1;1) \quad , \quad F^{-1}(n,k) = s(n,k); \tag{1.61}$$

$$F = \mathcal{HB}(-n-k+1;-1) \quad , \quad F(n,k) = (-1)^n L(n,k), \tag{1.62}$$
$$F^{-1} = \mathcal{HB}(-n-k+1;-1) \quad , \quad F^{-1}(n,k) = (-1)^n L(n,k), \tag{1.63}$$

et les p,q-analogues

$$F = \mathcal{HB}\left(\frac{p^k-q^k}{p-q};1\right) \quad , \quad F(n,k) = S_{p,q}[n,k], \tag{1.64}$$

$$F^{-1} = \mathcal{HB}\left(\frac{q^{n-1}-p^{n-1}}{p-q};1\right) \quad , \quad F^{-1}(n,k) = s_{p,q}[n,k]. \tag{1.65}$$

Pour les coefficients gaussiens, $F(n,k) = \left[{n \atop k}\right]_q = \mathcal{HB}(q^k;1)$, on a

$$F^{-1}(n,k) = (-1)^{n-k} q^{\binom{n-k-1}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \mathcal{HB}(-q^{n-1};1) \tag{1.66}$$

un q-analogue de $(-1)^{n-k}\binom{n}{k}$ différent de $(-1)^{n-k}\left[{n \atop k}\right]_q$.

Remarque 3. La proposition 1.4.2 se retrouve comme cas particulier du théorème 2 de [MIL 81] en posant $n_0 = \alpha_0 = \beta_0 = 1$. Dans cet article l'auteur considère des doubles suites triangulaires inversibles satisfaisant à des récurrences plus générales que les hyperbinomiales.

Dans un autre article, [MIL 77], S. Milne énonce de plus un résultat intéressant concernant les hyperbinomiales inversibles qui est démontré et généralisé dans la section suivante par la proposition 1.5.2 et le théorème 1.5.4.

1.5 Développements Généralisés

Lorsque l'on développe les termes $B(n-1,k)$ et $B(n-1,k-1)$ de la récurrence hyperbinomiale $B = \mathcal{HB}(b(n,k);b'(n,k))$ on obtient la récurrence du deuxième ordre :

$$\begin{aligned} B(n,k) &= b(n,k)b(n-1,k)B(n-2,k) \\ &+ (b(n,k)b'(n-1,k-1) + b(n-1,k-1)b'(n,k))B(n-2,k-1) \\ &+ b'(n,k)b'(n-1,k-1)B(n-2,k-2) \\ &+ B(n,k)\{\chi(n=1,k=0) + \chi(n=k=1) + \chi(n=k=0)\} \end{aligned}$$

où la dernière ligne, nulle pour $n > 1$, donne les valeurs initiales pour $n \leq 1$.

Par la proposition qui suit on généralise ce type de développement.

Proposition 1.5.1 *Soit* $B = \mathcal{HB}(b(n,k); b'(n,k))$ *et*

$$B^{\mathcal{G}}_{r,s} = \mathcal{HB}(b(r-n+1, s-k); b'(r-n+1, s-k+1)).$$

Pour $n > m$ *on a la récurrence d'ordre* m

$$B(n,k) = \sum_{j=0}^{m} B(n-m, k-j) B^{\mathcal{G}}_{n,k}(m,j). \tag{1.67}$$

Preuve. On développe les termes $B(n-m, k-j)$ dans (1.67)

$$\begin{aligned}
B(n,k) &= \sum_{i=0}^{m} B(n-m, k-i) B^{\mathcal{G}}_{n,k}(m,i) && (1.68)\\
&= \sum_{i=0}^{m} b(n-m, k-i) B(n-(m+1), k-i) B^{\mathcal{G}}_{n,k}(m,i) && (1.69)\\
&+ \sum_{i=0}^{m} b'(n-m, k-i) B(n-(m+1), k-i) B^{\mathcal{G}}_{n,k}(m,i). && (1.70)
\end{aligned}$$

Puisque $B^{\mathcal{G}}_{n,k}$ est triangulaire

$$B^{\mathcal{G}}_{n,k}(m, m+1) = B^{\mathcal{G}}_{n,k}(m, -1) = 0,$$

on peut alors changer la borne supérieure m par $m+1$ dans la somme (1.69) et procéder au changement de variable $j := i$, ce qui donne

$$\sum_{j=0}^{m+1} B(n-(m+1), k-j) B^{\mathcal{G}}_{n,k}(m,j) b(n-m, k-j). \tag{1.71}$$

De même on fait commencer la somme (1.70) à -1 et on procède au changement $j := i+1$ pour obtenir

$$\sum_{j=0}^{m+1} B(n-(m+1), k-j) B^{\mathcal{G}}_{n,k}(m, j-1) b'(n-m, k-j+1). \tag{1.72}$$

Enfin en combinant (1.71) et (1.72) on obtient

$$B^{\mathcal{G}}_{n,k}(m,j) = b(n-m+1, k-j) B^{\mathcal{G}}_{n,k}(m-1, j) + b'(n-m+1, k-j+1) B^{\mathcal{G}}_{n,k}(m-1, j-1).$$

□

Exemple 9. Les hyperbinomiales $B^{\mathcal{G}}_{r,s}$ correspondant aux nombres binomiaux satisfont à la même récurrence que ceux -ci. Ainsi, pour $n > m$, on a

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{m} \binom{n-m}{k-i} \binom{m}{i}. \tag{1.73}$$

Proposition 1.5.2 *Soit* $F = \mathcal{HB}(f(k); f'(k))$ *avec* $f'(k) \neq 0$ *pour tout* $k > 0$. *L'hyperbinomiale* F *est alors inversible et*

$$\sum_i F^{-1}(k,i)F(m+i,k) = f(k)^m. \tag{1.74}$$

Preuve. En général, pour les doubles suites inversibles, on a toujours

$$\sum_i F^{-1}(n,i)F(i,k) = \chi(n=k), \tag{1.75}$$

or, en utilisant la proposition 1.5.1, il vient

$$F(m+i,k) = \sum_r F(i,k-r)F^{\mathcal{G}}_{m+i,k}(m,r), \tag{1.76}$$

mais, dans ce cas, le terme $F^{\mathcal{G}}_{m+i,k}(m,r)$ ne dépend pas de $m+i$. Ainsi, quelque soit l, on a

$$F^{\mathcal{G}}_{l,k}(m,0) = \prod_{i=1}^{m} f(k) = f(k)^m. \tag{1.77}$$

Ainsi, il suffit de remplacer (1.76) dans la partie gauche de (1.74) et on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_i F^{-1}(k,i)F(m+i,k) &= \sum_i \sum_r F^{-1}(k,i)F(i,k-r)F^{\mathcal{G}}_{m+i,k}(m,r) \\
&= \sum_r \left(\sum_i F^{-1}(k,i)F(i,k-r) \right) F^{\mathcal{G}}_{l,k}(m,r) && (1.78)\\
&= \sum_r \chi(k=k-r)F^{\mathcal{G}}_{l,k}(m,r) && (1.79)\\
&= F^{\mathcal{G}}_{l,k}(m,0) = f(k)^m. && (1.80)
\end{aligned}$$

□

Exemple 10. Avec les nombres binomiaux et les nombres de Stirling la formule (1.74) devient

$$\begin{aligned}
\sum_i (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \binom{m+i}{k} &= 1, && (1.81)\\
\sum_i (-1)^{k-i} q^{\binom{k-i-1}{2}} \begin{bmatrix} k \\ i \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} m+i \\ k \end{bmatrix}_q &= q^{mk}, && (1.82)\\
\sum_i s(k,i)S(m+i,k) &= k^m, && (1.83)\\
\sum_i s_{p,q}[k,i]S_{p,q}[m+i,k] &= [k]^m_{p,q}. && (1.84)
\end{aligned}$$

On peut généraliser la proposition précédente. Pour ce faire on a besoin de la notion de partage d'une hyperbinomiale.

Proposition 1.5.3 *Les hyperbinomiales*

$$B = \mathcal{HB}(b(n,k); b'(n,k)), \tag{1.85}$$
$$B_g = \mathcal{HB}(b(n+1,k); b'(n+1,k)), \tag{1.86}$$
$$B_d = \mathcal{HB}(b(n+1,k+1); b'(n+1,k+1)), \tag{1.87}$$

sont mutuellement récursives avec l'équation

$$B(n,k) = B(1,0)B_g(n-1,k) + B(1,1)B_d(n-1,k-1) + \chi(n=k=0). \tag{1.88}$$

Preuve. On démontre la proposition par induction sur n.

L'équation (1.88) est trivialement vérifiée pour $n = 0$ et si elle l'est pour $n-1$, alors en développant $B(n,k)$ avec sa récurrence puis $B(n-1,k)$ et $B(n-1,k-1)$ en utilisant l'hypothèse d'induction on obtient

$$\begin{aligned}
B(n,k) &= b(n,k)B(n-1,k) + b'(n,k)B(n-1,k-1) + \chi(n=k=0)\\
&= b(n,k)B(1,0)B_g(n-2,k) + b'(n,k)B(1,0)B_g(n-2,k-1)\\
&+ b(n,k)B(1,1)B_d(n-2,k-1) + b'(n,k)B(1,1)B_d(n-2,k-2)\\
&+ \chi(n=k=0) + b(n,k)\chi(n=1,k=0) + b'(n,k)\chi(n=k=1)\\
&= B(1,0)B_g(n-1,k) + B(1,1)B_d(n-1,k-1) + \chi(n=k=0)\\
&+ (b(1,0) - B(1,0))\chi(n=1,k=0) + (b(1,1) - B(1,1))\chi(n=k=1),
\end{aligned}$$

et, puisque $b(1,0) = B(1,0)$ et $b(1,1) = B(1,1)$, alors l'équation (1.88) est aussi vérifiée pour n. □

Définition 6. Pour $B = \mathcal{HB}(b(n,k); b'(n,k))$, on appelle *partage en deux parts* l'équation (1.88) de la proposition précédente.

Exemple 11. Pour $E = \mathcal{HB}(k+1; n-k+1)$ le partage en deux parts

$$E(n,k) = E_g(n-1,k) + E_d(n-1,k-1) + \chi(n=k=0)$$

avec $E_g = \mathcal{HB}(k+1; n-k+2)$ et $E = \mathcal{HB}(k+2; n-k+1)$ se traduit, pour les premières lignes, par la somme de matrices

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 4 & 1 & 0\\ 1 & 11 & 11 & 1 \end{pmatrix}}_{\{E(n,k)\}_{0\le k,n\le 4}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 7 & 4 & 0 \end{pmatrix}}_{\{E_g(n,k)\}_{0\le k,n\le 4}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}}_{\{E_d(n,k)\}_{0\le k,n\le 4}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\{\chi(n=k=0)\}}$$

La théorème qui suit généralise la proposition 1.5.2.

Théorème 1.5.4 *Soit* $B = \mathcal{HB}(b(k); b'(k))$ *une hyperbinomiale inversible et*

$$B_{(-a)} = \mathcal{HB}(b(k+a); b'(k+a)).$$

Alors pour tout $a, n, k \in \mathbb{N}$ *on a*

$$\sum_{j}^{a} B^{-1}(a,j)B(n+j, a+k) = B_{(-a)}(n,k). \tag{1.89}$$

Preuve. On utilise la récurrence d'ordre n appliquée à $B(n+j, a+k)$ et on remplace dans le membre droit de (1.89)

$$\begin{aligned}
H(a,n,k) &:= \sum_{j}^{a} B^{-1}(a,j)B(n+j,a+k) && (1.90)\\
&= \sum_{j=0}^{a} B^{-1}(a,j)\sum_{l=0}^{n} B(j,k+a-l)B^{\mathcal{G}}_{x,k+a}(n,l) && (1.91)\\
&= \sum_{l=0}^{n} B^{\mathcal{G}}_{x,k+a}(n,l)\sum_{j=0}^{a} B^{-1}(a,j)B(j,k+a-l) && (1.92)\\
&= B^{\mathcal{G}}_{x,k+a}(n,l)\chi(l=k). && (1.93)
\end{aligned}$$

Dans (1.91) on désigne par $B^{\mathcal{G}}_{x,k+a}$ pour $B^{\mathcal{G}}_{n+j,k+a}$ qui est, dans ce cas, indépendant de $n+j$ ce qui permet d'exclure ce terme de la somme sur j.

Ainsi il reste à montrer que

$$B^{\mathcal{G}}_{x,k+a}(n,l)\chi(l=k) = B_{(-a)}(n,k). \tag{1.94}$$

où $B_{(-a)} = \mathcal{HB}(b(k+a); b'(k+a))$. Ce résultat fait l'objet du lemme qui suit. □

Lemme 1.5.5 *Soit* $B^{\mathcal{G}}_{u} = \mathcal{HB}(b(u-k); b'(u-k))$ *et*

$$B_{(u)} = \mathcal{HB}(b(k-u); b'(k-u)).$$

Alors pour tout $a, n, k \in \mathbb{Z}$ *on a*

$$B^{\mathcal{G}}_{k+a}(n,l)\chi(l=k) = B_{(-a)}(n,k). \tag{1.95}$$

Preuve. Le partage de $B^{\mathcal{G}}_{k+a}$ s'exprime par

$$B^{\mathcal{G}}_{k+a}(n,l) = B^{\mathcal{G}}_{k+a}(1,0)B^{\mathcal{G}}_{k+a,g}(n-1,l-1) + B^{\mathcal{G}}_{k+a}(1,1)B^{\mathcal{G}}_{k+a,d}(n-1,l-1)$$

avec
$$B^{\mathcal{G}}_{k+a}(1,0) = b(k+a), \quad B^{\mathcal{G}}_{k+a}(1,1) = b'(k+a),$$
et, par la proposition 1.5.3, $B^{\mathcal{G}}_{k+a,g} = B^{\mathcal{G}}_{k+a}$ et $B^{\mathcal{G}}_{k+a,d} = B^{\mathcal{G}}_{k+a-1}$.

Ainsi en multipliant l'équation de partage par $\chi(l=k)$, avec les informations précédentes et en posant $H(n,k) := B^{\mathcal{G}}_{k+a}(n,l)\chi(l=k)$ on obtient l'équation de récurrence

$$H(n,k) = b(a+k)H(n-1,k) + b'(a+k)H(n-1,k-1),$$

d'où $H(n,k) = B_{(-a)}(n,k)$. □

Exemple 12. Le dernier lemme exprime aussi le fait que pour toute colonne $\{B_{(-a)}(n,k)\}_{n\geq 0}$ de $B_{(-a)}$ il existe une autre hyperbinomiale ayant la même colonne à la même position. Par exemple, la colonne m de $S_{(0)} = S = \mathcal{HB}(k;1)$ concide avec la colonne m de $S^{\mathcal{G}}_m = \mathcal{HB}(m-k;1)$.

Pour S on a les valeurs

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 15 & 25 & 10 & 1 \end{pmatrix}}_{\{S(n,k)\}_{0\leq k,n\leq 5}}$$

et pour $S^{\mathcal{G}}_0$, $S^{\mathcal{G}}_1$, $S^{\mathcal{G}}_2$ et $S^{\mathcal{G}}_3$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -15 & 25 & -10 & 1 \end{pmatrix}}_{\{S^{\mathcal{G}}_0(n,k)\}_{0\leq k,n\leq 5}}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 5 & -5 & 1 \end{pmatrix}}_{\{S^{\mathcal{G}}_1(n,k)\}_{0\leq k,n\leq 5}},$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 16 & 15 & 7 & 2 & 1 & 0 \\ 32 & 31 & 15 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\{S^{\mathcal{G}}_2(n,k)\}_{0\leq k,n\leq 5}}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 27 & 19 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 81 & 65 & 25 & 6 & 1 & 0 \\ 243 & 241 & 90 & 25 & 5 & 1 \end{pmatrix}}_{\{S^{\mathcal{G}}_3(n,k)\}_{0\leq k,n\leq 5}}.$$

Exemple 13. Avec les mêmes exemples qu'en 1.5 le théorème s'exprime

$$\sum_{j=0}^{a}(-1)^{a-j}\binom{a}{j}\binom{n+j}{a+k} = \binom{n}{k}, \tag{1.96}$$

$$\sum_{j=0}^{a}(-1)^{a-j}q^{\binom{a-j-1}{2}}\begin{bmatrix}a\\j\end{bmatrix}_q\begin{bmatrix}n+j\\a+k\end{bmatrix}_q = q^{(n-k)a}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q, \tag{1.97}$$

$$\sum_{j=0}^{a}s(a,j)S(n+j,a+k) = S_{(-a)}(n,k), \tag{1.98}$$

où $S_{(-a)}$ désigne les nombres binomiaux de seconde espèce non-centrés.

En partageant chacune des parts d'un partage en deux parts et en itérant cette procédure on obtient un partage généralisé d'une hyperbinomiale.

Proposition 1.5.6 *En général pour $B = \mathcal{HB}(b(n,k); b'(n,k))$ on a le partage en $m+1$ parts*

$$B(n,k) = \sum_{i=0}^{m}B(m,i)B_{i,m}(n-m,k-i) \tag{1.99}$$

$$+B(n,k)\sum_{j=0}^{m-1}\chi(n=j)\sum_{i=0}^{j}\chi(k=i) \tag{1.100}$$

où pour $0 \le i \le m$

$$B_{i,m} = \mathcal{HB}(b(n+m,k+i); b'(n+m,k+i)) \tag{1.101}$$

la double somme (1.100) donnant les valeurs initiales pour $n < m$.

Preuve. La preuve se fait par induction sur le nombre de parts. Pour $m = 1$ cela revient au partage en deux parts de la proposition précédente. Pour induire de m à $m+1$, on partage en deux parts chacune des parts $B_{i,m}$ de (1.99) en utilisant la proposition 1.5.3 puis on regroupe les termes.

En effet, si on suppose que le corollaire est vrai pour $1,\ldots,m$, alors

$$B(n,k) = \sum_{i=0}^{m}B(m,i)B_{i,m}(n-m,k-i) \tag{1.102}$$

$$+B(n,k)\sum_{j=0}^{m-1}\chi(n=j)\sum_{i=0}^{j}\chi(k=i) \tag{1.103}$$

$$= \sum_{i=0}^{m}B(m,i)B_{i,m}(1,0)B_{g,i,m}(n-m-1,k-i) \tag{1.104}$$

$$+\sum_{i=0}^{m} B(m,i)B_{i,m}(1,1)B_{d,i,m}(n-m-1,k-i-1) \tag{1.105}$$

$$+B(n,k)\sum_{j=0}^{m}\chi(n=j)\sum_{i=0}^{j}\chi(k=i). \tag{1.106}$$

Or $B_{i,m}(1,0) = b(m+1,i)$, $B_{i,m}(1,1) = b'(m+1,i+1)$ et par la proposition précédente

$$B_{g,i,m} = \mathcal{HB}(b(n+m+1,k+i); b'(n+m+1,k+i)), \tag{1.107}$$
$$B_{d,i,m} = \mathcal{HB}(b(n+m+1,k+i+1); b'(n+m+1,k+i+1)). \tag{1.108}$$

Par ailleurs, en posant $i=-1$ dans (1.104) ou $i=m+1$ dans (1.105) on obtient 0 , ainsi, en changeant l'indice de sommation dans (1.104) et en additionnant à (1.105), on a

$$\sum_{i=0}^{m+1}\{b(m+1,i)B(m,i)+b'(m+1,i)B(m,i-1)\}B_{i,m+1}(n-m,k-i)$$

et le résultat désiré pour $m+1$ est obtenu en utilisant la récurrence de B. □

Une application intéressante du partage généralisé pour les nombres binomiaux découle des deux lemmes suivants.

Lemme 1.5.7 *Soit $B = \mathcal{HB}(b(n,k); b'(n,k))$ et u, u' deux nombres réels. Alors pour*

$$B_{u,u'} = \mathcal{HB}(u\cdot b(n,k); u'\cdot b'(n,k))$$

on a le terme général

$$B_{u,u'}(n,k) = u^{n-k}(u')^k B(n,k). \tag{1.109}$$

Preuve. Il suffit de développer le terme $B(n,k)$ intervenant dans (1.109) et remarquer que

$$\begin{aligned} u^{n-k}(u')^k B(n-1,k) &= u\cdot B_{u,u'}(n-1,k), \\ u^{n-k}(u')^k B(n-1,k-1) &= u'\cdot B_{u,u'}(n-1,k-1), \\ u^{n-k}(u')^k \chi(n=k=0) &= \chi(n=k=0). \end{aligned}$$

□

Lemme 1.5.8 *Soit $F(n,k) = \binom{n}{k}$. Alors pour toute fonction $x(n,k)$ à variables entières on a*

$$F = \mathcal{HB}(1+kx(n,k); 1+kx(n,k)-nx(n,k)).$$

Preuve. À partir de la formule

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

on déduit que

$$k\binom{n-1}{k} + (k-n)\binom{n-1}{k-1} = 0, \tag{1.110}$$

ainsi en multipliant l'équation (1.110) par $x(n,k)$ et en additionnant à l'équation de récurrence de F on obtient

$$\binom{n}{k} = \{1 + kx(n,k)\}\binom{n-1}{k} + \{1 + (k-n)x(n,k)\}\binom{n-1}{k-1} + \chi(n = k = 0).$$

□

Remarque 4. Les deux lemmes précédents sont généralisés dans un chapitre ultérieur.

Proposition 1.5.9 *Soit $F_{u,u'} = \mathcal{HB}(k+u; k-n+u')$ avec $u'-u = m$ un entier positif. Alors on peut écrire $F_{u,u'}(n,k)$ comme une combinaison linéaire de $m+1$ coefficients binomiaux. Explicitement*

$$F_{u,u'}(n,k) = \sum_{j=0}^{m} \frac{F_{u,u'}(m,j)}{(u+j)^n}\binom{n-m}{k-j}.$$

Preuve. Lorsque $n \geq m = c' - c$ le partage de $F_{u,u'}$ en $m+1$ parts s'écrit

$$F_{u,u'}(n,k) = \sum_{j=0}^{m} F_{u,u'}(m,j)F_{u,u',j,m}(n-m, k-j) \tag{1.111}$$

et avec la proposition 1.5.6

$$\begin{aligned} F_{u,u',j,m} &= \mathcal{HB}(k+j+u; k-n+j+u'-m) \\ &= \mathcal{HB}(k+j+u; k-n+j+u) = F_{u+j,u+j}, \end{aligned}$$

or, en prenant $x(n,k) = \frac{1}{u+j}$ dans le lemme 1.5.8, et $u = u' = u+j$ dans le lemme 1.5.7 on trouve

$$F_{u+j,u+j} = \frac{1}{(u+j)^n}\binom{n}{k}.$$

□

Exemple 14. La proposition précédente donne une façon d'exprimer $F_{u,u'}(n,k)$

en fonction de coefficients binomiaux d'autant plus simple que m est petit. Par exemple

$$\begin{aligned} F_{2,3}(n,k) &= \sum_{j=0}^{1} \frac{F_{2,3}(1,j)}{(2+j)^n} \binom{n-1}{k-j} \\ &= 2^{1-n}\binom{n-1}{k} + 3^{1-n}\binom{n-1}{k-1}, \end{aligned}$$

où $F_{2,3} = \mathcal{HB}(k+2; k-n+3)$.

Dans la proposition qui suit on donne le rapport entre les fonctions génératrices de B et B_g, B_d les deux parts du partage de l'hyperbinomiale B.

Proposition 1.5.10 *Pour les hyperbinomiales*

$$\begin{aligned} B &= \mathcal{HB}(b(n,k); b'(n,k)), \\ B_g &= \mathcal{HB}(b(n+1,k); b'(n+1,k)), \\ B_d &= \mathcal{HB}(b(n+1,k+1); b'(n+1,k+1)), \end{aligned}$$

intervenant dans le partage

$$B(n,k) = B(1,0)B_g(n-1,k) + B(1,1)B_d(n-1,k-1) + \chi(n=k=0)$$

on a les rapports entre fonctions génératrices

$$B_n^\ell(t) = \alpha(B_g)_{n-1}^\ell(t) + \beta(B_d)_{n-1}^\ell(t) + \chi(n=0) \tag{1.112}$$

$$\frac{d}{d\,x} B_k^c(x) = \alpha(B_g)_k^c(x) + \beta(B_d)_{k-1}^c(x) \tag{1.113}$$

$$\frac{\partial}{\partial\,x} B(x,t) = \alpha B_g(x,t) + \beta B_d(x,t), \tag{1.114}$$

où $\alpha := b(1,0)$ et $\beta := b(1,1)$.

Preuve. Pour les fonctions génératrices de ligne

$$\begin{aligned} B_n^\ell(t) &:= \sum_k B(n,k)t^k, \\ &= b(1,0)\sum_k B_g(n-1,k)t^k \\ &\quad + b(1,1)t\sum_k B_d(n-1,k-1)t^k + \sum_k \chi(n=k=0) \\ &= b(1,0)(B_g)_{n-1}^\ell(t) + b(1,1)(B_d)_{n-1}^\ell(t) + \chi(n=0). \end{aligned}$$

Pour les fonctions génératrices de colonne

$$\frac{d}{d\,x} B_k^c(x) = \frac{d}{d\,x} \sum_{n\geq 0} B(n,k)\frac{x^n}{n!}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{d\,x}b(1,0)\sum_{n\geq 0}B_g(n-1,k)\frac{x^n}{n!}\\
&\quad+\frac{d}{d\,x}b(1,1)\sum_{n\geq 0}B_d(n-1,k-1)\frac{x^n}{n!}\\
&\quad+\frac{d}{d\,x}\sum_{n\geq 0}\chi(n=k=0)\frac{x^n}{n!}\\
&= b(1,0)(B_g)^c_k(x)+b(1,1)(B_d)^c_{k-1}(x).
\end{aligned}$$

Finalement pour la fonction génératrice double on se sert du calcul précédent

$$\sum_k \frac{\partial}{\partial\,x}B^c_k(x)t^k = b(1,0)\sum_k (B_g)^c_k(x)t^k + b(1,1)t\sum_k (B_d)^c_k(x)t^k$$

ce qui donne l'équation désirée après avoir vérifié que la dérivée commute avec la somme dans le membre gauche de l'équation précédente. □

Proposition 1.5.11 *Pour $B=\mathcal{HB}(b(n,k);b'(n,k))$ et u, u' deux nombres réels avec $u\cdot u'\neq 0$ et*

$$B_{u,u'}=\mathcal{HB}(u\cdot b(n,k);u'\cdot b'(n,k))$$

on a

$$(B_{u,u'})^\ell_n(t) = u^n B^\ell_n\left(\frac{u'}{u}t\right), \tag{1.115}$$

$$(B_{u,u'})^c_k(x) = \left(\frac{u'}{u}\right)^k B^c_k(ux), \tag{1.116}$$

$$B_{u,u'}(x,t) = B\left(ux,\frac{u'}{u}t\right). \tag{1.117}$$

Preuve. Par le lemme 1.5.7

$$B_{u,u'}(n,k)=u^{n-k}(u')^kB(n,k),$$

ainsi pour les fonctions génératrices de lignes

$$\begin{aligned}
(B_{u,u'})^\ell_n(t) &= \sum_k u^{n-k}(u')^kB(n,k)t^k\\
&= u^n\sum_k B(n,k)\left(\frac{u't}{u}\right)^k = u^nB^\ell_n\left(\frac{u'}{u}t\right),
\end{aligned}$$

pour les fonctions génératrices de colonne

$$\begin{aligned}
(B_{u,u'})^c_k(x) &= \sum_k u^{n-k}(u')^kB(n,k)\frac{x^n}{n!}\\
&= \left(\frac{u'}{u}\right)^k\sum_k B(n,k)\frac{(ux)^n}{n!} = \left(\frac{u'}{u}\right)^k B^c_k(ux),
\end{aligned}$$

et finalement pour la fonction génératrice double

$$\begin{aligned} B_{u,u'}(x,t) &= \sum_{n\geq 0} u^n B_n^\ell \left(\frac{u'}{u}t\right) \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n\geq 0} B_n^\ell \left(\frac{u'}{u}t\right) \frac{(ux)^n}{n!} = B\left(ux, \frac{u'}{u}t\right). \end{aligned}$$

□

1.6 Formule Explicite pour les Hyperbinomiales

Définition 7. Pour $H = \mathcal{HB}(p(n,k); q(n,k))$ on appelle *normalisation* l'opérateur η tel que

$$(\eta H)(n,k) = H(n+k,k), \tag{1.118}$$

$$(\eta^{-1} H)(n,k) = H(n-k,k). \tag{1.119}$$

Les doubles suites (ηH) et $(\eta^{-1}H)$ sont solutions des récurrences

$$\begin{aligned} (\eta H)(n,k) &= p(n+k,k)(\eta H)(n-1,k) \\ &\quad + q(n+k,k)(\eta H)(n,k-1) + \chi(n=k=0), \end{aligned} \tag{1.120}$$

$$\begin{aligned} (\eta^{-1} H)(n,k) &= p(n-k,k)(\eta^{-1}H)(n-1,k) \\ &\quad + q(n-k,k)(\eta^{-1}H)(n-2,k-1) + \chi(n=k=0). \end{aligned} \tag{1.121}$$

Exemple 15. Pour les nombres binomiaux,

$$(\eta)\binom{n-1}{k} = \binom{n+k-1}{k}$$

dénombre les k-combinaisons de $[n]$ avec répétitions[14].

Par ailleurs, si on note Der pour l'hyperbinomiale $\mathcal{HB}(n+k-1; n+k-1)$, alors $(\eta^{-1}Der)(n,k)$ dénombre les dérangements[15] de $[n]$ ayant k cycles. Ainsi le nombre total de dérangements est donné par

$$\sum_{k=0}^{n} (\eta^{-1}Der)(n,k) = \sum_{k=0}^{n} Der(n-k,k). \tag{1.122}$$

Remarque 5. Certaines formules sont plus élégantes et plus faciles à démontrer lorsque l'on considère l'équivalent normalisé. Par exemple, par la proposition qui suit, on trouve une formule pour le terme général des normalisées et on en déduit une formule générale pour les hyperbinomiales.

[14] Voir [COM], p.15.

[15] Un dérangement est une permutation sans points fixes. Voir [COM], p.256.

Proposition 1.6.1 (Formule générale pour normalisées) *Le terme général*

$$(\eta H)(n,k)$$

de la normalisée de $H = \mathcal{HB}(p(n,k); q(n,k))$ *est donné par la formule*

$$\sum \prod_{i=1}^{n} p(\alpha_i, \alpha_i - i) \prod_{j=1}^{k} q(\beta_j, \beta_j + j) \tag{1.123}$$

où la somme est faite sur toutes les partitions de $[n+k] = \{1, 2, \ldots, n+k\}$ *en deux parties* $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $\{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$ *avec* $\alpha_i < \alpha_{i+1}$ *et* $\beta_j < \beta_{j+1}$.

Preuve. Si h est une double suite dont le terme général est donné par la formule (1.123), alors h est triangulaire et $h(0,0) = 1$. Par la suite il suffit de montrer que h satisfait à la même récurrence que (ηH) en considérant deux cas selon que $(n+k) \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ ou non. □

Pour les hyperbinomiales on en déduit une formule analogue.

Corollaire 1.6.2 *Soit* $H = \mathcal{HB}(p(n,k); q(n,k))$.
Le terme général $H(n,k)$ *est donné par la formule*

$$\sum \prod_{i=1}^{n-k} p(\alpha_i, \alpha_i - i) \prod_{j=1}^{k} q(\beta_j, j) \tag{1.124}$$

où la somme est faite sur toutes les partitions de $[n]$ *en deux parties* $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-k}\}$ *et* $\{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$ *avec encore* $\alpha_i < \alpha_{i+1}$ *et* $\beta_j < \beta_{j+1}$.

Preuve. Il suffit d'appliquer la proposition précédente à $(\eta H)(n-k, k)$. □

Remarque 6. Les formules (1.123) et (1.124) ont été construites en faisant une somme pondérée de tout les chemins de $(0,0)$ à (n,k) en utilisant des pas sud et est pour (1.123), sud et sud-est pour (1.124).

Exemple 16. Pour les nombres binomiaux la formule (1.124) exprime le fait que $\binom{n}{k}$ dénombre les sous-ensembles de $[n]$ ayant k éléments ou encore les chemins de $(0,0)$ à (n,k).

Pour les nombres de Stirling de première et seconde espèce on obtient respectivement

$$c(n, n-k) = \sum \prod_{j=1}^{k} (\beta_j - 1), \tag{1.125}$$

$$S(n, n-k) = \sum \prod_{j=1}^{k} (\beta_j - j), \tag{1.126}$$

où les sommes sont faites sur les ensembles $\{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$ avec $1 \leq \beta_j < \beta_{j+1} \leq n$ pour $1 \leq j \leq k-1$.

Chapitre 2

HYPERBINOMIALES ET HYPERGÉOMÉTRIQUES

Résumé

Dans ce chapitre on appelle hypergéométrique une double suite G pour laquelle il existe des fonctions rationnelles $A(n,k)$ et $B(n,k)$ telles que

$$\begin{aligned} G(n,k) &= A(n,k)G(n-1,k) \\ &= B(n,k)G(n-1,k-1). \end{aligned}$$

On écrit alors $G \in \mathcal{HG}(A(n,k);B(n,k))$ et, en général, G est complètement déterminée par la donnée d'une valeur initiale.

Le produit de Hadamard de deux matrices M_1, M_2 est la matrice M telle que $M(n,k) = M_1(n,k)M_2(n,k)$. On écrit $M = M_1 \odot M_2$ (à ne pas confondre avec le produit matriciel de matrices triangulaires $T_1 \times T_2$).

Les doubles suite hypergéométriques ayant la valeur initiale $G(0,0) = 1$ sont telles que le produit de Hadamard avec une hyperbinomiale est encore une double suite hyperbinomiale. Explicitement, si $G \in \mathcal{HG}(A(n,k);B(n,k))$, $G(0,0) = 1$ et si $H = \mathcal{HB}(P(n,k);Q(n,k))$, alors

$$(G \odot H) = \mathcal{HB}(A(n,k)P(n,k);B(n,k)Q(n,k))$$

où $(G \odot H)(n,k) = G(n,k)H(n,k)$.

Ce dernier résultat permet de simplifier beaucoup la résolution des récurrences hyperbinomiales. En effet, on connait toujours le terme général d'une hypergéométrique et, si on connait celui de H, alors on obtient immédiatement celui de $G \odot H$. Toutefois il y a une limite quant aux réductions que l'on peut faire de cette manière car, pour que l'ensemble $\mathcal{HG}(A(n,k);B(n,k))$ ne soit pas vide, il est nécessaire que la paire de fonctions rationnelles $(A(n,k), B(n,k))$ satisfasse la condition de compatibilité

$$A(n,k)B(n-1,k) = A(n-1,k-1)B(n,k).$$

Dans la deuxième section on caractérise les paires $(a(n,k), b(n,k))$ de polynômes du premier degré satisfaisant la condition de compatibilité. En fait les doubles suites hypergéométriques $\mathcal{HG}(a(n,k); b(n,k))$ sont celles qui sont le plus fréquemment utilisées. Ainsi

$$
\begin{aligned}
U_{\gamma,\gamma'}(n,k) &= \gamma^{n-k}(\gamma')^k, && U_{\gamma,\gamma'} \in \mathcal{HG}(\gamma;\gamma'),\\
V_{\alpha,\gamma}(n,k) &= \prod_{j=1}^{n-k}(\alpha j+\gamma), && V_{\alpha,\gamma} \in \mathcal{HG}(\alpha n-\alpha k+\gamma;1),\\
W_{\beta,\gamma}(n,k) &= \prod_{j=1}^{k}(\beta j+\gamma), && W_{\beta,\gamma} \in \mathcal{HG}(1;\beta k+\gamma),
\end{aligned}
$$

en particulier $V_{1,0}(n,k) = (n-k)!$ et $W_{1,0}(n,k) = k!$.

Dans la troisième section on montre que les doubles suite hypergéométriques G telles que $G(0,k) = \chi(k=0)$ et $G(n,k) = 0$ si $k < 0$ ou $k > n$ sont aussi des doubles suites hyperbinomiales. Explicitement, si

$$G \in \mathcal{HG}\left(\frac{n}{n-k}A(n,k); \frac{n}{k}B(n,k)\right),\ (G(0,0)=1),$$

alors quelque soit la double suite $X(n,k)$ on a

$$G = \mathcal{HB}\left(\{1+kX(n,k)\}A(n,k); \{1+(k-n)X(n,k)\}B(n,k)\right).$$

Par exemple, si $F(n,k) = \binom{n}{k}$, alors $F \in \mathcal{HG}\left(\frac{n}{n-k}; \frac{n}{k}\right)$, $F(0,0) = 1$ et pour toute double suite $X(n,k)$, $F = \mathcal{HB}\left(1+kX(n,k); 1+(k-n)X(n,k)\right)$.

On cherche également dans cette troisième section les récurrences hyperbinomiales dont la solution est une hypergéométrique. Les résultats trouvés peuvent alors être utilisés dans deux directions. Tout d'abord lorsqu'une double suite est définie par une récurrence hyperbinomiale et que l'on en trouve une solution hypergéométrique (donc holonome dans le sens de Zeilberger) on peut alors démontrer mécaniquement une multitude d'identités la reliant à d'autres hypergéométriques. Réciproquement, étant donnée une double suite hypergéométrique on en trouve les récurrences hyperbinomiales et on peut appliquer tous les résultats de notre étude. Par exemple, si on dénote par $Bes(n,k)$ le coefficient de t^k du n-ième polynôme de Bessel, alors on montre que $Bes = \mathcal{HB}(1; n+k-1)$ et de même, pour les polynômes de Laguerre d'ordre α on trouve que $Lag^\alpha = \mathcal{HB}(n+k+\alpha; 1)$.

On considère, à la quatrième section, les récurrences hyperbinomiales dont les coefficients sont des polynômes du premier degré. On dit de celles-ci qu'elles sont *spéciales*. On appelle *régulière* une hyperbinomiale H telle que $H(1,0) \neq 0$ et $H(1,1) \neq 0$ et on dit qu'elle est multiple si elle satisfait au moins deux récurrences hyperbinomiales spéciales.

Dans cette section on caractérise les hyperbinomiales qui sont à la fois régulière et multiple. Pour une telle double suite on donne le terme général et l'ensemble de toutes les récurrences hyperbinomiales spéciales qu'elle satisfait. Ce type d'hyperbinomiale est en fait un cas particulier de double suite à la fois hyperbinomiale et hypergéométrique.

Explicitement, on montre que si M est une hyperbinomiale à la fois régulière et multiple, alors pour toute constante x et pour certains paramètres m_1 et m_3 donnés on a

$$M = \mathcal{HB}(m_1 n + xk + m_3; r m_1 n - rxn + krx + r m_3)$$

ce qui entrane

$$M(n,k) = r^k \binom{n}{k} \prod_{j=1}^{n} (m_1 j + m_3)$$

où r est la constante (non nulle) $M(1,1)/M(1,0)$.

On présente, à la cinquième section, une méthode permettant d'obtenir des récurrences pour une fonction qui est la somme de deux doubles suites pour lesquelles on dispose de récurrences. Cette méthode est particulièment intéressante lorsque l'une des deux doubles suites est hyperbinomiale et l'autre hypergéométrique.

Cette partie de notre étude est motivée par un exemple particulier qui se retrouve dans [Man 91]. Si on désigne par P la double suite dénombrant les permutations paires selon le nombre d'anti-excédance, alors on peut montrer que

$$P(n,k) = \frac{1}{2}\{A(n,k) + B(n,k)\}$$

où $A = \mathcal{HB}(k; n-k+1)$ désigne les nombres eulériens tandis que pour la double suite B on a $B(n,k) = (-1)^{n-k}\binom{n-1}{k-1}$. Or le fait que B soit hypergéométrique permet de trouver une infinité de récurrences satisfaites par P. Ainsi, pour tout $n > 1$ la double suite P satisfait

$$\begin{aligned} P(n,k) &= (k-1)P(n-1,k) + (n-k+2)P(n-1,k-1) \\ &+ kP(n-2,k) + (n-2k+1)P(n-2,k-1) \\ &+ (k-n-1)P(n-2,k-2). \end{aligned}$$

Finalement, dans la dernière section on considère le produit matriciel de deux doubles suites dont l'une est hyperbinomiale et l'autre hypergéométrique. On obtient ainsi des formules de sommation généralisant

$$(n-k)!S(n,n-k) = \sum_j A(n,j)\binom{j}{k}.$$

2.1 Introduction et Définitions

Définition 1. On définit les *opérateurs de décalage partiels* $\mathbf{N}$ et $\mathbf{K}$ pour les doubles suites par

$$\mathbf{N}F(n,k) = F(n+1,k), \quad \mathbf{K}F(n,k) = F(n,k+1),$$

et on considère les polynômes de $\mathbb{C}[n,k]$ comme opérateurs sur les fonctions $F : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{C}$ en définissant leurs actions par multiplication.

Définition 2. On dénote

$$\mathcal{C} := \mathbb{C}\langle \mathbf{N}, \mathbf{K}, n, k\rangle$$

l'algèbre des opérateurs linéaires à coefficients complexes engendrée par les opérateurs $\mathbf{N}, \mathbf{K}, n$ et k. C'est une algèbre non-commutative ne possédant pas d'idéal bilatère non-triviaux et l'ensemble de règles de commutation

$$\{\mathbf{NK} = \mathbf{KN},\ \mathbf{K}n = n\mathbf{K},\ k\mathbf{N} = \mathbf{N}k, \mathbf{K}k = k\mathbf{K} + \mathbf{K},\ \mathbf{N}n = n\mathbf{N} + \mathbf{N}\}.$$

Définition 3. Étant donné une fonction $F : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{C}$ on dit que $P(\mathbf{N}, \mathbf{K}, n, k) \in \mathcal{C}$ annihile F si

$$P(\mathbf{N}, \mathbf{K}, n, k)F(n,k) \equiv 0. \tag{2.1}$$

On appelle *annihilateur* de F l'ensemble $\mathcal{I}_F$ des opérateurs de $\mathcal{C}$ annihilant F:

$$\mathcal{I}_F := \{P(\mathbf{N}, \mathbf{K}, n, k) \in \mathcal{C} |\ P(\mathbf{N}, \mathbf{K}, n, k)F(n,k) \equiv 0.\}.$$

C'est un idéal à gauche de $\mathcal{C}$.

Définition 4. Une fonction $F : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{C}$ est dite *hypergéométrique* si il existe des polynômes a_1, a_2, b_1, $b_2 \in \mathbb{C}[n,k]$ tels que

$$\{a_1(n,k)\mathbf{N} - a_2(n,k), \quad b_1(n,k)\mathbf{NK} - b_2(n,k)\} \subset \mathcal{I}_F. \tag{2.2}$$

On écrit alors

$$F \in \mathcal{HG}\left(\frac{a_2(n,k)}{a_1(n,k)}; \frac{b_2(n,k)}{b_1(n,k)}\right),$$

c'est-à-dire que $\mathcal{HG}\left(\frac{a_2(n,k)}{a_1(n,k)}; \frac{b_2(n,k)}{b_1(n,k)}\right)$ est l'ensemble des fonctions $F : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{C}$ satisfaisant la condition (2.2).

Pour complètement déterminer une fonction hypergéométrique il suffit en général de donner de plus une valeur initiale $F(n_0, k_0) \in \mathbb{C}$.

Définition 5. Un opérateur $P \in \mathcal{C}$ admet une forme normale :

$$P(\mathbf{N}, \mathbf{K}, n, k) = \sum_{s=0}^{d_1} \sum_{r=0}^{d_2} p_{r,s}(n, k) \mathbf{N}^r \mathbf{K}^s$$

avec $p_{r,s}(n, k) \in \mathbb{C}[n, k]$ des polynômes à deux variables.

On appelle alors degré et ordre de P les nombres

$$\begin{aligned} \deg(P) &:= \max\{\deg(p_{r,s}| \ 0 \leq s \leq d_1, 0 \leq r \leq d_2\}, \\ \operatorname{ord}(P) &:= \max\{r + s| \ 0 \leq s \leq d_1, 0 \leq r \leq d_2, p_{r,s} \not\equiv 0\}, \end{aligned}$$

et ainsi on dit que l'équation (2.1) est une équation linéaire aux différences partielles de dimension 2, à coefficients polynomiaux, de degré $\deg(P)$ et d'ordre $\operatorname{ord}(P)$.

Exemple 1. Rappelons que l'on écrit $H = \mathcal{HB}(P(n, k); Q(n, k))$ si H satisfait l'équation

$$H(n, k) = P(n, k)H(n - 1, k) + Q(n, k)H(n - 1, k - 1)$$

avec les valeurs initiales $H(0, k) = \chi(n = k = 0)$. Cela revient à dire que

$$\{1 - P(n, k)\mathbf{N}^{-1} - Q(n, k)\mathbf{N}^{-1}\mathbf{K}^{-1}\}H(n, k) \equiv 0$$

ou encore, lorsque $P(n, k)$ et $Q(n, k)$ sont des polynômes, on a sous sous forme normale

$$\mathbf{NK} - P(n + 1, k + 1)\mathbf{K} - Q(n + 1, k + 1) \in \mathcal{I}_H.$$

Ainsi les équations de récurrence hyperbinomiales sont des équations linéaires aux différences partielles de dimension 2 et d'ordre 2 avec certaines conditions initiales.

Remarque 1. La définition 1 revient aussi à dire qu'une fonction $F : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{C}$ est hypergéométrique[1] si il existe des polynômes a'_1, a'_2, b'_1, $b'_2 \in \mathbb{C}[n, k]$ tels que

$$\{a'_1(n, k)\mathbf{N} - a'_2(n, k), b'_1(n, k)\mathbf{K} - b'_2(n, k)\} \subset \mathcal{I}_F. \tag{2.3}$$

Il suffit en effet de poser

$$\begin{aligned} a'_1(n, k) = a_1(n + 1, k), &\qquad a'_2(n, k) = a_2(n + 1, k), \\ b'_1(n, k) = a_2(n+1, k+1)b_1(n+1, k+1), &\qquad b'_2(n, k) = a_1(n+1, k+1)b_2(n+1, k+1). \end{aligned}$$

Définition 6. Soient A et B les fonctions rationnelles

$$A(n, k) := \frac{a_2(n, k)}{a_1(n, k)}, \quad B(n, k) := \frac{b_2(n, k)}{b_1(n, k)}.$$

[1] C'est la définition habituelle. Voir [HOR] et[EXT].

Pour que l'ensemble

$$\mathcal{HG}\left(\frac{a_2(n,k)}{a_1(n,k)}; \frac{b_2(n,k)}{b_1(n,k)}\right)$$

soit non-vide il est évidemment nécessaire et suffisant que les conditions de compatibilité

$$A(n,k)B(n-1,k) = A(n-1,k-1)B(n,k) \tag{2.4}$$

soient satisfaites. On dit alors que (A, B) est une paire de fonctions rationnelles *compatible*. Par exemple,

$$\mathcal{HG}(A(n,k);1) \neq \emptyset \iff A(n,k) = A(n-k,0), \tag{2.5}$$

$$\mathcal{HG}(1;B(n,k)) \neq \emptyset \iff B(n,k) = B(0,k). \tag{2.6}$$

2.2 Facteurs

Dans cette section on considère des fonctions hypergéométriques d'un type particulier que l'on appelle facteur.

Définition 7. On appelle *facteur* une double suite triangulaire F telle que

$$\begin{aligned} F(0,0) &= 1, && (2.7)\\ F(n,k) &= f(n,k)F(n-1,k), \quad (n-1 \geq k \geq 0), && (2.8)\\ &= g(n,k)F(n-1,k-1), \quad (n \geq k \geq 1), && (2.9) \end{aligned}$$

avec $f(n,k) = f_1 n + f_2 k + f_3$ et $g(n,k) = g_1 n + g_2 k + g_3$, $f_i, g_i \in \mathbb{R}$.

Proposition 2.2.1 (Conditions du parallélogramme) *Pour que la définition précédente soit consistante on doit avoir*

$$f(n,k)g(n-1,k) = f(n-1,k-1)g(n,k)$$

ce qui équivaut à l'ensemble des conditions

$$\{f_2 g_1 = 0, \, (f_1 + f_2)g_2 = 0, \, (f_1 + f_2)g_3 = f_3 g_1\}. \tag{2.10}$$

On a alors

$$\begin{aligned} F(n,k) &= \prod_{i=1}^{n-k} \{f_1 i + (f_1 + f_2)k + f_3\} \prod_{j=1}^{k} \{(g_1 + g_2)j + g_3\} && (2.11)\\ &= \prod_{i=1}^{n-k} (f_1 i + f_3) \prod_{j=1}^{k} \{(g_1 + g_2)j + g_1(n-k) + g_3\}. && (2.12) \end{aligned}$$

Ces expressions donnant le terme général de F sont équivalentes.

Preuve. Lorsque $0 < k < n$ on peut remplacer le terme $F(n-1,k)$ dans la partie droite de l'équation (2.8) en utilisant (2.9) et faire de même pour le terme $F(n-1,k-1)$ de (2.9) en utilisant (2.8). On obtient ainsi deux façons d'exprimer $F(n,k)$ en fonction de $F(n-2,k-1)$ à savoir

$$\begin{aligned} F(n,k) &= f(n,k)g(n-1,k)F(n-2,k-1) \\ &= f(n-1,k-1)g(n,k)F(n-2,k-1). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Quelque soit la façon dont $F(n,k)$ soit exprimé en fonction de $F(n-i-j,k-j)$, avec $0 \le i \le k$ et $0 \le j \le n-k$, on obtient nécessairement des expressions équivalentes. En particulier, si on exprime $F(n,k)$ en fonction de $F(k,k)$ et $F(k,k)$ en fonction de $F(0,0)$ on obtient la formule (2.11) et la formule (2.12) est obtenue en exprimant d'abord $F(n,k)$ en fonction de $F(n-k,0)$. $\square$

Corollaire 2.2.2 (Type de facteurs) *On écrit*

$$\mathcal{HG}(f_1,f_2,f_3;g_1,g_2,g_3)$$

pour l'ensemble des doubles suites triangulaires satisfaisant (2.8) et (2.9). Les conditions (2.10) limitent les facteurs à être l'un des types suivant :

$$T_1 = \mathcal{HG}(\alpha,-\alpha,\gamma;0,\beta',\gamma'), \tag{2.14}$$

$$T_2 = \mathcal{HG}(\alpha,0,\gamma;r\alpha,0,r\gamma), \tag{2.15}$$

$$T_3 = \mathcal{HG}(0,0,0;\alpha',\beta',\gamma'), \tag{2.16}$$

$$T_4 = \mathcal{HG}(\alpha,\beta,\gamma;0,0,0). \tag{2.17}$$

Les doubles suites F_i telles que $F_i \in T_i$ avec $F_i(0,0)=1$, $i=1,...,4$, ont respectivement les termes généraux

$$F_1(n,k) = \prod_{i=1}^{n-k}(\alpha i+\gamma)\prod_{j=1}^{k}(\beta' j+\gamma') \tag{2.18}$$

$$F_2(n,k) = r^k\prod_{i=1}^{n}(\alpha i+\gamma), \tag{2.19}$$

$$F_3(n,k) = F_4(n,k) = \chi(n=k=0). \tag{2.20}$$

Preuve. On vérifie que les conditions du parallélogramme sont respectées et pour les termes généraux il suffit d'utiliser l'une des formules (2.11) ou (2.12). $\square$

Définition 8. On dit qu'une double suite D est *admissible pour une hyperbinomiale H* lorsque le produit de Hadamard

$$(D \odot H)(n,k) = D(n,k)H(n,k)$$

est hyperbinomial.

La proposition suivante fait le lien entre les facteurs et les hyperbinomiales.

Proposition 2.2.3 *Soit* $F \in \mathcal{HG}(f_1, f_2, f_3; g_1, g_2, g_3)$ *et* $H = \mathcal{HB}(p(n,k); q(n,k))$. *La double suite* $(F \odot H)$ *satisfait la récurrence*

$$\begin{aligned}(F \odot H)(n,k) &= p(n,k)(f_1 n + f_2 k + f_3)(FH)(n-1,k) \\ &+ q(n,k)(g_1 n + g_2 k + g_3)(F \odot H)(n-1,k-1) \\ &+ \chi(n = k = 0).\end{aligned}$$

Ainsi les facteurs sont admissibles pour les hyperbinomiales.

Preuve. En utilisant la récurrence hyperbinomiale de H on obtient

$$\begin{aligned}(F \odot H)(n,k) &= p(n,k)F(n,k)H(n-1,k) \\ &+ q(n,k)F(n,k)H(n-1,k-1) \\ &+ F(n,k)\chi(n = k = 0),\end{aligned}$$

or, par la définition de F il vient

$$\begin{aligned}F(n,k)H(n-1,k) &= (f_1 n + f_2 k + f_3)(FH)(n-1,k), \\ F(n,k)H(n-1,k-1) &= (g_1 n + g_2 k + g_3)(FH)(n-1,k-1), \\ F(n,k)\chi(n = k = 0) &= F(0,0)\chi(n = k = 0) = \chi(n = k = 0).\end{aligned}$$

□

L'importance de cette proposition tient surtout au corollaire suivant qui permet, entre autres, de trouver directement le terme général de certaines familles d'hyperbinomiales.

Corollaire 2.2.4 *Soient les facteurs*

$$F \in \mathcal{HG}(f_1, f_2, f_3; f_1', f_2', f_3'), \tag{2.21}$$

$$G \in \mathcal{HG}(g_1, g_2, g_3; g_1', g_2', g_3'), \tag{2.22}$$

et les hyperbinomiales

$$H_F = \mathcal{HB}(f_1 n + f_2 k + f_3; f_1' n + f_2' k + f_3'), \tag{2.23}$$

$$H_G = \mathcal{HB}(g_1 n + g_2 k + g_3; g_1' n + g_2' k + g_3'), \tag{2.24}$$

alors on a l'égalité

$$G(n,k)H_F(n,k) = F(n,k)H_G(n,k). \tag{2.25}$$

En particulier, si $H_G = \mathcal{HB}(1;1)$, *alors* $G(n,k) \equiv 1$ *et*

$$H_F(n,k) = F(n,k)\binom{n}{k}. \tag{2.26}$$

Preuve. Il suffit d'utiliser la proposition précédente et remarquer que (GH_F) et (FH_G) satisfont à la même équation aux différences avec les mêmes valeurs initiales. Comme la solution de ces équations est unique, il s'en suit que ces doubles suites sont égales. $\square$

Exemple 2. Les hyperbinomiales $D_0 = \mathcal{HB}(an+c; ran+rc)$ et $D_1 = \mathcal{HB}(an-ak+c; b'k+c')$ ont respectivement les termes généraux

$$D_0(n,k) = r^k \binom{n}{k} \prod_{i=1}^{n} (ai+c), \tag{2.27}$$

$$D_1(n,k) = \binom{n}{k} \prod_{i=1}^{n-k} (ai+c) \prod_{j=1}^{k} (b'j+c'). \tag{2.28}$$

Exemple 3. Les facteurs

$$U_{\gamma,\gamma'} \in \mathcal{HG}(0,0,\gamma;0,0,\gamma') \tag{2.29}$$

sont tels que pour toutes hyperbinomiales $H = \mathcal{HB}(p(n,k); q(n,k))$ on a la récurrence

$$(U_{\gamma,\gamma'} \odot H) = \mathcal{HB}(\gamma p(n,k); \gamma' q(n,k)) \tag{2.30}$$

avec terme général

$$(U_{\gamma,\gamma'} \odot H)(n,k) = \gamma^{n-k}(\gamma')^k H(n,k). \tag{2.31}$$

On appelle $U_{\gamma,\gamma'}$ un *facteur admissible universel*.

La multiplication de facteurs admissibles universels est une loi de composition interne avec $U_{\gamma,\gamma'}U_{\alpha,\alpha'} = U_{\gamma\alpha,\gamma'\alpha'}$.

Exemple 4. Les termes généraux des nombres de Stirling de première espèce sans signe $c = \mathcal{HB}(n-1;1)$ et des nombres de Stirling de première espèce signés $s = \mathcal{HB}(1-n;1)$ sont reliés par

$$s(n,k) = (U_{-1,1} \odot c)(n,k) = (-1)^{n-k} c(n,k), \tag{2.32}$$

Comme c est positive, alors $c(n,k) = |s(n,k)|$.

Exemple 5. Les facteurs $U_{\gamma,0}$ et $U_{0,\gamma'}$ ont respectivement les termes généraux

$$U_{\gamma,0}(n,k) = \gamma^{n-k} 0^k = \gamma^{n-k}\chi(k=0), \tag{2.33}$$

$$U_{0,\gamma'}(n,k) = 0^{n-k}(\gamma')^k = (\gamma')^n \chi(n=k). \tag{2.34}$$

Il s'en suit que $V = U_{\gamma,0}H$ est verticale et $D = U_{0,\gamma'}H$ diagonale en ce sens que $V(n,k) = 0$ si $k \neq 0$ et $D(n,k) = 0$ si $n \neq k$.

Remarque 2. Lorsque $H_2 = (F \odot H_1)$ on dit que H_2 s'obtient de H_1 par multiplication de facteur admissible et H_1 de H_2 par simplification. Si $\gamma \cdot \gamma' \neq 0$, alors

$$H_2 = U_{\gamma,\gamma'} H_1 \Leftrightarrow H_1 = U_{1/\gamma,1/\gamma'} H_2 \tag{2.35}$$

de sorte que l'ensemble $\mathcal{U} = \{U_{\gamma,\gamma'} | \gamma \cdot \gamma' \neq 0\}$ forme un groupe, isomorphe au groupe multiplicatif $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$, avec $U_{1,1}$ pour élément neutre.

Définition 9. Certains facteurs méritent une notation particulière. Les facteurs

$$V_{\alpha,\gamma} \in \mathcal{HG}(\alpha, -\alpha, \gamma; 0, 0, 1), \tag{2.36}$$

$$W_{\beta',\gamma'} \in \mathcal{HG}(0, 0, 1; 0, \beta', \gamma'), \tag{2.37}$$

ont respectivement les termes généraux

$$V_{\alpha,\gamma}(n,k) = \prod_{j=1}^{n-k} (\alpha j + \gamma), \tag{2.38}$$

$$W_{\beta',\gamma'}(n,k) = \prod_{j=1}^{k} (\beta' j + \gamma'). \tag{2.39}$$

Exemple 6. Les nombres de Stirling de seconde espèce $S(n,k)$ dénombrent les partitions de $[n]$ en k classes d'équivalences. On en déduit que le nombre de surjections de $[n]$ sur k est donné par

$$Sur(n,k) = k! S(n,k). \tag{2.40}$$

Puisque $S = \mathcal{HB}(k; 1)$ et $k! = W_{1,0}(n,k)$, alors $Sur = \mathcal{HB}(k; k)$.

Exemple 7. La double suite L telle que

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} L(n,k) x^{\underline{k}}$$

est solution de $\mathcal{HB}(n + k - 1; 1)$, les nombres

$$(U_{-1,-1} \odot L)(n,k) = (-1)^n L(n,k) \tag{2.41}$$

$$= (-1)^n (n-1)^{\underline{n-k}} \binom{n}{k} \tag{2.42}$$

sont les nombres de Lah[2]. Ainsi $(U_{-1,-1} \odot L) = \mathcal{HB}(-n - k + 1; -1)$

Exemple 8. Pour les doubles suites C_1 et C_2 telles que[3]

$$(-1)^k s(n, n-k) = \sum_{i=0}^{k} C_1(k,i) \binom{n}{2k-i}, \tag{2.43}$$

$$S(n, n-k) = \sum_{i=0}^{k} C_2(k,i) \binom{n}{2k-i} \tag{2.44}$$

[2] Voir [COM]
[3] Voir [JOR].

on a respectivement $C_1 = \mathcal{HB}(-2n+k+1; -n+k+1)$ et $C_2 = \mathcal{HB}(n-k; 2n-k-1)$.

Comme les doubles suites (ρC_2) et $(W_{1,0} \odot L)$ satisfont la même récurrence hyperbinomiale, à savoir $\mathcal{HB}(n+k-1; k)$, on déduit que

$$C_2(n,k) = (n-k)!L(n,n-k) = n^{\underline{n-k}}(n-1)^{\underline{k}}. \tag{2.45}$$

2.3 Solutions Hypergéométriques

Dans cette section on cherche les équations de récurrences hyperbinomiales

$$\mathcal{HB}(P(n,k); Q(n,k)),$$

c'est-à-dire les équations de la forme

$$H(n,k) = P(n,k)H(n-1,k) + Q(n,k)H(n-1,k-1) + \chi(n=k=0),$$

dont la solution H est une fonction hypergéométrique à deux variables.

Lemme 2.3.1 *Le produit de Hadamard de deux hypergéométriques est hypergéométrique.*

Preuve. Soient (A,B) et (A',B') deux paires de fonctions rationnelles compatibles, c'est-à dire telles que

$$\begin{aligned} A(n,k)B(n-1,k) &= A(n-1,k-1)B(n,k), \\ A'(n,k)B'(n-1,k) &= A'(n-1,k-1)B'(n,k), \end{aligned}$$

et soient $F \in \mathcal{HG}(A(n,k); B(n,k))$, $F' \in \mathcal{HG}(A'(n,k); B'(n,k))$ deux fonctions hypergéométriques :

$$\begin{aligned} F(n,k) &= A(n,k)F(n-1,k) = B(n,k)F(n-1,k-1), \\ F'(n,k) &= A'(n,k)F'(n-1,k) = B'(n,k)F'(n-1,k-1). \end{aligned}$$

Le produit de Hadamard de F et F' est encore hypergéométrique :

$$\begin{aligned} (F \odot F')(n,k) &:= F(n,k)F'(n,k) \\ &= (A \odot A')(n,k)(F \odot F')(n-1,k) \\ &= (B \odot B')(n,k)(F \odot F')(n-1,k-1), \end{aligned}$$

et on aura montré que $(F \odot F') \in \mathcal{HG}((A \odot A')(n,k); (B \odot B')(n,k))$ après avoir vérifié que $(A \odot A', B \odot B')$ est encore une paire compatible de fonctions rationnelles. $\square$

Exemple 9. Si $H(n,k) = \binom{n}{k}$ et $F \in \mathcal{HG}\left(\frac{a_2(n,k)}{a_1(n,k)}; \frac{b_2(n,k)}{b_1(n,k)}\right)$, alors

$$H \odot F \in \mathcal{HG}\left(\frac{n}{n-k}\frac{a_2(n,k)}{a_1(n,k)}; \frac{n}{k}\frac{b_2(n,k)}{b_1(n,k)}\right)$$

et en plus si $F(0,0) = 1$, alors HF est triangulaire dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et

$$(H \odot F)(0,k) = \chi(k=0).$$

Lemme 2.3.2 *Le produit de Hadamard d'une hyperbinomiale et d'une hypergéométrique F avec $F(0,0) = 1$ est une hyperbinomiale.*

Preuve. On vérifie que si $H = \mathcal{HB}(P(n,k); Q(n,k))$ et $F \in \mathcal{HG}(A(n,k); B(n,k))$ avec la valeur initiale $F(0,0) = 1$, alors

$$(H \odot F) = \mathcal{HB}((P \odot A)(n,k); (Q \odot B)(n,k)).$$

□

Théorème 2.3.3 *Soit G une fonction hypergéométrique. La double suite G est hyperbinomiale dans $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ si, et seulement si il existe une fonction hypergéométrique F telle que $F(0,0) = 1$ et*

$$G(n,k) = \binom{n}{k} F(n,k). \tag{2.46}$$

En outre, si $F \in \mathcal{HG}(A(n,k); B(n,k))$, alors pour toute double suite $X(n,k)$

$$G = \mathcal{HB}(A(n,k) + k \cdot A(n,k)X(n,k); B(n,k) + (k-n) \cdot B(n,k)X(n,k)). \tag{2.47}$$

Preuve. On montre d'abord que la condition (2.46) est nécessaire.

Supposons que $G \in \mathcal{HG}\left(\frac{g_1(n,k)}{g_2(n,k)}; \frac{g_1'(n,k)}{g_2'(n,k)}\right)$, c'est-à-dire que

$$g_2(n,k)G(n,k) = g_1(n,k)G(n-1,k), \tag{2.48}$$
$$g_2'(n,k)G(n,k) = g_1'(n,k)G(n-1,k-1) \tag{2.49}$$

avec g_1, g_2, g_1' et g_2' des polynômes à deux variables n et k et supposons aussi que G soit hyperbinomiale.

Pour s'assurer que $G(0,k) = \chi(k=0)$ il est nécessaire que

$$g_1(0,k) = g_1'(0,k) = g_2(0,0) = g_2'(0,0) = 0.$$

Pour que G soit triangulaire et non identiquement nulle il est aussi nécessaire que

$$g_2'(n,0) = g_2(n,n) = 0.$$

En résumé pour que G soit hyperbinomiale il est nécessaire que, pour certains polynômes a_1, b_1, a_2 et b_2, l'on ait

$$g_1(n,k) = n \cdot a_1(n,k), \qquad g_2(n,k) = (n-k) \cdot a_2(n,k),$$
$$g_1'(n,k) = n \cdot b_1(n,k), \qquad g_2'(n,k) = k \cdot b_2(n,k),$$

ainsi, par le premier lemme,

$$G(n,k) = \binom{n}{k} F(n,k)$$

avec

$$F \in \mathcal{HG}\left(\frac{a_1(n,k)}{a_2(n,k)}; \frac{b_1(n,k)}{b_2(n,k)}\right).$$

Montrons maintenant que

$$G \in \mathcal{HG}\left(\frac{n \cdot a_1(n,k)}{(n-k) \cdot a_2(n,k)}; \frac{n \cdot b_1(n,k)}{k \cdot b_2(n,k)}\right), \tag{2.50}$$

avec $G(0,0) = 1$, est hyperbinomiale.

Tout d'abord $G = \mathcal{HB}(A(n,k); B(n,k))$, où $A(n,k) := \frac{a_1(n,k)}{a_2(n,k)}$ et $B(n,k) := \frac{b_1(n,k)}{b_2(n,k)}$. En effet, (2.50) résume les deux équations

$$(n-k) \cdot a_2(n,k) G(n,k) = n \cdot a_1(n,k) G(n-1,k), \tag{2.51}$$
$$k \cdot b_2(n,k) G(n,k) = n \cdot b_1(n,k) G(n-1,k-1), \tag{2.52}$$

ou encore

$$(n-k) \cdot G(n,k) = n \cdot A(n,k) G(n-1,k), \tag{2.53}$$
$$k \cdot G(n,k) = n \cdot B(n,k) G(n-1,k-1), \tag{2.54}$$

ainsi, en additionnant les équations (2.53) et (2.54) et en multipliant le résultat par $\frac{1}{n}$, on obtient l'équation

$$G(n,k) = A(n,k) G(n-1,k) + B(n,k) G(n-1,k-1). \tag{2.55}$$

Donc en additionnant l'équation (2.53) multipliée par k à l'équation (2.54) multipliée par $k-n$, on obtient

$$0 = k \cdot A(n,k) G(n-1,k) + (k-n) \cdot B(n,k) G(n-1,k-1) \tag{2.56}$$

et en additionnant cette dernière multipliée par $X(n,k)$ à l'équation (2.55) on obtient finalement l'équation de récurrence

$$\begin{aligned} G(n,k) &= \{1 + k \cdot X(n,k)\} A(n,k) G(n-1,k) \\ &\quad + \{1 + (k-n) \cdot X(n,k)\} B(n,k) G(n-1,k-1), \end{aligned} \tag{2.57}$$

avec $X(n,k)$ une double suite quelconque. $\square$

Corollaire 2.3.4 *Soit* $H = \mathcal{HB}(P(n,k); Q(n,k))$.

Si

$$P(n,k)Q(n-1,k) = P(n-1,k-1)Q(n,k), \tag{2.58}$$

alors $H \in \mathcal{HG}\left(\frac{n}{n-k}P(n,k); \frac{n}{k}Q(n,k)\right)$.

Par ailleurs, si il existe une paire de fonctions rationnelles $(A(n,k), B(n,k))$ *telle que*

$$A(n,k)B(n-1,k) = A(n-1,k-1)B(n,k),$$

et

$$(k-n)P(n,k)B(n,k) + nB(n,k)A(n,k) - kA(n,k)Q(n,k) = 0, \tag{2.59}$$

alors $H \in \mathcal{HG}(A(n,k); B(n,k))$.

Preuve. Par le théorème, si

$$H = \mathcal{HB}(P(n,k); Q(n,k)) \in \mathcal{HG}(A(n,k); B(n,k)),$$

alors il existe une double suite $X(n,k)$ telle que

$$\begin{array}{rcl} P(n,k) & = & \{1 + kX(n,k)\}A(n,k), \\ Q(n,k) & = & \{1 + (k-n)X(n,k)\}B(n,k), \end{array}$$

ainsi

$$X(n,k) = \frac{P(n,k) - A(n,k)}{kA(n,k)} = \frac{Q(n,k) - B(n,k)}{(k-n)B(n,k)}$$

ce qui donne (en prenant la deuxième égalité)

$$(k-n)B(n,k)\{P(n,k) - A(n,k)\} = kA(n,k)\{Q(n,k) - B(n,k)\}$$

après simplification ceci donne l'équation (2.59).

Lorsque l'équation (2.58) est satisfaite on résoud aussi l'équation (2.59) en posant $A(n,k) = P(n,k)$ et $B(n,k) = Q(n,k)$. □

On peut ramener l'équation (2.59) à une équation où une seule fonction rationnelle est inconnue.

Corollaire 2.3.5 *Soit* $H = \mathcal{HB}(P(n,k); Q(n,k))$. *Si il existe une fonction rationnelle* $A(n,k)$ *telle que*

(2.60) $A(n-1,k)Q(n-1,k)\{(k-n)P(n,k) + nA(n,k)\}$

(2.61) $= A(n-1,k-1)Q(n,k)\{(k-n+1)P(n-1,k) + (n-1)A(n-1,k)\}$,

alors

$$H \in \mathcal{HG}\left(A(n,k); \frac{kA(n,k)Q((n,k)}{(k-n)P(n,k) + nA(n,k)}\right).$$

De manière équivalente, si il existe une fonction rationnelle $B(n,k)$ telle que

$$B(n-1,k)P(n,k)\cdot\{(k-1)Q(n-1,k-1)-(n-1)B(n-1,k-1)\} \tag{2.62}$$
$$= B(n-1,k-1)P(n-1,k-1)\{kQ(n,k)-nB(n,k)\}, \tag{2.63}$$

alors

$$H \in \mathcal{HG}\left(\frac{(k-n)B(n,k)P(n,k)}{kQ(n,k)-nB(n,k)}; B(n,k)\right).$$

Preuve. L'équation (2.59) permet d'exprimer $A(n,k)$ en fonction de $B(n,k)$, à savoir

$$\begin{aligned} A(n,k) &= \frac{(k-n)B(n,k)P(n,k)}{kQ(n,k)-nB(n,k)}, \\ B(n,k) &= \frac{kA(n,k)Q((n,k)}{(k-n)P(n,k)+nA(n,k)}, \end{aligned}$$

ensuite on résoud via l'équation de compatibilité

$$A(n,k)B(n-1,k) = A(n-1,k-1)B(n,k).$$

□

Exemple 10. On donne ici des exemples de doubles suites H avec

$$H = \mathcal{HB}(P(n,k);Q(n,k)) \in \mathcal{HG}\left(\frac{n}{n-k}A(n,k); \frac{n}{k}B(n,k)\right)$$

pour lesquelles on obtient la double suite $X(n,k)$ telle que

$$\begin{aligned} P(n,k) &= \{1+kX(n,k)\}A(n,k), \\ Q(n,k) &= \{1+(k-n)X(n,k)\}B(n,k), \end{aligned}$$

et le terme général

$$H(n,k) = \prod_{j=k+1}^{n} A(i,k) \prod_{l=1}^{k} B(l,l).$$

1. Les polynômes de Bessel sont donnés par

$$y_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+k)!}{k!(n-k)!2^k} t^k.$$

On considère la double suite Bes dont le terme général est le coefficient de t^k dans le n-ième polynôme de Bessel, soit

$$Bes(n,k) := \frac{(n+k)!}{k!(n-k)!2^k}.$$

En calculant les quotients $Bes(n,k)/Bes(n-1,k)$ et $Bes(n,k)/Bes(n-1,k-1)$ on trouve les doubles suites

$$A(n,k) = \frac{n+k}{n}, \quad B(n,k) = \frac{(n+k)(n+k-1)}{2n}.$$

Si on prend $X(n,k) = \frac{-1}{n+k}$, alors on trouve pour Bes la récurrence hyperbinomiale

$$Bes = \mathcal{HB}(1; n+k-1).$$

2. Soit $L^{(\alpha)}(t)$ le $n$ième polynôme de Laguerre d'ordre α donné par

$$L^{(\alpha)}(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (n+\alpha)^{\underline{n-k}} (-t)^k,$$

et soit $Lag^{(\alpha)}$ la double suite définie par

$$Lag^{(\alpha)}(n,k) = [t^k]L^{(\alpha)}(t) = \binom{n}{k} (n+\alpha)^{\underline{n-k}}.$$

Alors, pour $Lag^{(\alpha)}$ on a les doubles suites

$$A(n,k) = n+\alpha, \quad B(n,k) = \frac{n+\alpha}{k+\alpha},$$

et en prenant $X(n,k) = \frac{1}{n+\alpha}$ on a

$$Lag^{(\alpha)} = \mathcal{HB}(n+k+\alpha; 1).$$

3. Soit $H(n,k) = \binom{n}{k}$. Alors pour toute double suite $X(n,k)$

$$H = \mathcal{HB}(1 + kX(n,k); 1 + (k-n)X(n,k)).$$

2.4 Hyperbinomiale Régulière et Multiple

Dans ce qui suit on appelle régulière une double suite triangulaire h telle que $h(1,0) \neq 0$ et $h(1,1) \neq 0$. Étant donnée une telle double suite pour laquelle on connait les premières valeurs on aimerait déterminer s'il se peut qu'elle satisfasse une récurrence hyperbinomiale $\mathcal{HB}(p(n,k); q(n,k))$ avec p et q des polynômes du premier degré à coefficients réels. La procédure consiste à trouver un système de six équations qui soient linéairement indépendantes, où chaque équation est de la forme

$$f(n,k) = (p_1 n + p_2 k + p_3) f(n-1,k) + (q_1 n + q_2 k + q_3) f(n-1,k-1) \tag{2.64}$$

avec p_i, $q_i \in \mathbb{R}$ les inconnues et n, k des nombres naturels donnés. Toutefois le problème consiste à trouver six de ces équations qui soient linéairement indépendantes. Toutefois ce problème peut se ramener à la recherche d'un système de seulement deux équations. Par exemple, si f est une double suite régulière dont on connait les valeurs $f(1,0)$, $f(1,1)$, $f(2,0)$, et $f(2,2)$ et si $f = \mathcal{HB}(p(n,k); q(n,k))$ avec $p(n,k) = p_1 n + p_2 k + p_3$ et $q(n,k) = q_1 n + q_2 k + q_3$, alors en résolvant le système

$$\begin{cases} p_1 + p_3 = f(1,0), \\ 2p_1 + p_3 = f(2,0)/f(1,0), \end{cases} \tag{2.65}$$

on détermine p_1 et p_3

$$\begin{aligned} p_1 &= f(2,0)/f(1,0) - f(1,0), \\ p_3 &= 2f(1,0) - f(2,0)/f(1,0), \end{aligned}$$

et avec

$$\begin{cases} q_1 + q_2 + q_3 = f(1,1), \\ 2q_1 + 2q_2 + q_3 = f(2,2)/f(1,1), \end{cases} \tag{2.66}$$

on trouve $(q_1 + q_2)$ et q_3:

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= f(2,2)/f(1,1) - f(1,1), \\ q_3 &= 2f(1,1) - f(2,2)/f(1,1), \end{aligned}$$

et il ne reste plus qu'à trouver deux équations linéairement indépendantes pour déterminer p_2 et q_1.

Si on considère les équations associées à $f(2,1)$ et $f(3,1)$ on obtient, après remplacements, les deux équations

$$\begin{cases} f(1,1)p_2 + f(1,0)q_1 = f(2,1) - f(1,1)\frac{f(2,0)}{f(1,0)} - \frac{f(1,0)}{f(1,1)}, \\ f(2,1)p_2 + 2f(2,0)q_1 = f(3,1) - f(2,1)\frac{f(2,0)}{f(1,0)} - \frac{f(2,0)}{f(1,1)}. \end{cases} \tag{2.67}$$

Or, si le système (2.67) est incompatible, alors on peut dire que la double suite régulière f n'est pas hyperbinomiale. Par contre, lorsque les deux équations du système (2.67) sont linéairement dépendantes on doit chercher une autre équation.

Il se peut qu'une double suite satisfasse plus d'une récurrence hyperbinomiale à coefficients polynomiaux du premier degré.

Définition 10. On appelle *multiple* une hyperbinomiale M satisfaisant à au moins deux récurrences hyperbinomiales distinctes à coefficients polynomiaux du premier degré.

Exemple 11. Dans l'exemple 2.2 on a trouvé, pour $D = \mathcal{HB}(an+c; ran+rc)$, le terme général

$$D(n,k) = r^k \binom{n}{k} \prod_{j=1}^{n} (aj+c). \tag{2.68}$$

Combiné avec le théorème 2.3.3, on a aussi $D = \mathcal{HB}(an + xk + c; ran + (n - k)rx + rc)$ quelque soit x.

Dans ce qui suit on montre que D ne satisfait à aucune autre récurrence hyperbinomiale à coefficients polynomiaux du premier degré et que c'est la seule forme d'hyperbinomiale à la fois régulière et multiple.

Remarque 3. Par définition, une hyperbinomiale multiple satisfait à au moins deux récurrences hyperbinomiales distinctes. Par ce qui préce, lorsque M est régulière, ces récurrences ne peuvent être trop différentes. En effet, si l'hyperbinomiale $M = \mathcal{HB}(m_1n + m_2k + m_3; m'_1n + m'_2k + m'_3)$ est régulière et multiple, alors elle ne peut satisfaire qu'à des récurrences de la forme $\mathcal{HB}(m_1n + pk + m_3; (m'_1 + m'_2 - q)n + qk + m'_3)$.

Dans ce qui suit on suppose que M est une hyperbinomiale régulière satisfaisant aux deux récurrences

$$\mathcal{HB}(m_1n + m_2k + m_3; m'_1n + m'_2k + m'_3), \tag{2.69}$$

$$\mathcal{HB}(m_1n + pk + m_3; (m'_1 + m'_2 - q)n + qk + m'_3) \tag{2.70}$$

avec $(p,q) \neq (m_2, m'_2)$. On dénote aussi

$$r := M(1,1)/M(1,0) \tag{2.71}$$

une constante non nulle.

Théorème 2.4.1 *Si on suppose que M est une hyperbinomiale régulière satisfaisant aux récurrences distinctes (2.69) et (2.70), alors elle admet le terme général*

$$M(n,k) = r^k \binom{n}{k} \prod_{j=1}^{n} (m_1j + m_3) \tag{2.72}$$

où r est la constante non nulle donnée en (2.71). Elle satisfait aussi à toutes les récurrences hyperbinomiales spéciales (à coefficients polynomiaux du premier degré)

$$\mathcal{HB}(m_1n + xk + m_3; rm_1n - rxn + krx + rm_3) \tag{2.73}$$

et à aucune autre.

Preuve. Si on calcule $M(2,1)$ alternativement avec (2.69) et (2.70), alors on obtient

$$\begin{aligned} M(2,1) &= (2m_1 + m_2 + m_3)M(1,1) + (2m'_1 + m'_2 + m'_3)M(1,0) \\ &= (2m_1 + p + m_3)M(1,1) + (2m'_1 + 2m'_2 + m_3 - q)M(1,0), \end{aligned}$$

et en simplifiant

$$(p - m_2)M(1,1) = (q - m'_2)M(1,0), \tag{2.74}$$

comme M est régulière, alors $p \neq m_2$, $q \neq m'_2$, et donc

$$r := \frac{M(1,1)}{M(1,0)} = \frac{q - m'_2}{p - m_2}. \tag{2.75}$$

En faisant de même pour $M(n+1,k)$ on obtient après simplification

$$M(n,k) = \frac{r(n-k+1)}{k} M(n,k-1), (k \geq 1), \tag{2.76}$$

qui est une équation aux différences admettant la solution

$$M(n,k) = M(n,0) \prod_{i=1}^{k} \left[\frac{r(n-i+1)}{i} \right] = M(n,0) r^k \binom{n}{k}. \tag{2.77}$$

En développant $M(n,0)$ on voit que les formules (2.72) et (2.68) sont identiques de sorte que l'on a aussi

$$M = \mathcal{HB}(m_1 n + m_3; r m_1 n + r m_3)$$

on en déduit par (2.74) que $m'_3 = r m_3, m'_1 + m'_2 = r m_1$, et prenant $p = q = 0$ dans l'équation (2.75) on obtient $m'_2 = r m_2$. On conclut en remarquant que la formule (2.72) ne dépend pas de p. $\square$

2.5 Somme avec Hypergéométrique

Dans cette section on trouve des récurrences pour la double suite P, introduite dans [MAN 91], telle que $P(n,k)$ dénombre les permutations paires du groupe alterné A_n présentant k anti-excédances. À partir de l'expression de $2 \cdot P(n,k)$ sous la forme de d'une somme d'une hyperbinomiale et d'une hypergéométrique, on montre comment trouver une infinité de récurrences pour P.

Rappelons d'abord que l'on dénote $\mathcal{C} := \mathbb{C}\langle \mathbf{N}, \mathbf{K}, n, k \rangle$ l'algèbre des opérateurs linéaires à coefficients complexes engendrée par les opérateurs $\mathbf{N}, \mathbf{K}, n$ et k. C'est une algèbre non-commutative ne possédant pas d'idéal bilatère non-triviaux, avec l'ensemble de règles de commutation

$$\{\mathbf{NK} = \mathbf{KN},\ \mathbf{K}n = n\mathbf{K},\ k\mathbf{N} = \mathbf{N}k, \mathbf{K}k = k\mathbf{K} + \mathbf{K},\ \mathbf{N}n = n\mathbf{N} + \mathbf{N}\}.$$

Rappelons aussi qu'étant donnée une fonction $F : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{C}$ on dit que $P(\mathbf{N}, \mathbf{K}, n, k)$ *annihile* F si

$$P(\mathbf{N}, \mathbf{K}, n, k) F(n,k) \equiv 0. \tag{2.78}$$

On appelle *annihilateur* de F l'ensemble $\mathcal{I}_F$ des opérateurs de $\mathcal{C}$ annihilant F:

$$\mathcal{I}_F := \{P(\mathbf{N}, \mathbf{K}, n, k) \in \mathcal{C} |\ P(\mathbf{N}, \mathbf{K}, n, k) F(n,k) \equiv 0\}.$$

Cet ensemble est un idéal à gauche de $\mathcal{C}$.

Définition 11. Soit $i \in [n] := \{1, \ldots, n\}$ et σ une permutation du groupe symétrique S_n. On dit que σ présente une anti-excédance en i si $\sigma(i) \leq i$ et on désigne par $AX(\sigma)$ pour le nombre total d'anti-excédances de σ.

On considère aussi les doubles suites P et D

$$P(n,k) := card\{\sigma \in A_n |\ AX(\sigma) = k\}, \tag{2.79}$$

$$D(n,k) := card\{\sigma \in S_n - A_n |\ AX(\sigma) = k\}. \tag{2.80}$$

Il est bien connu[4] que le nombre total de permutations de S_n ayant k anti-excédances, soit $P(n,k)+D(n,k)$, est donné par $A(n,k)$ où $A = \mathcal{HB}(k; n+k-1)$ est la double suite des nombres eulériens.

Dans [MAN 91] il est montré que les doubles suites P et D sont mutuellement récursives avec

$$P(n,k) = kD(n-1,k) + (n-k)D(n-1,k-1) + P(n-1,k-1), \tag{2.81}$$

$$D(n,k) = kP(n-1,k) + (n-k)P(n-1,k-1) + D(n-1,k-1), \tag{2.82}$$

et on peut calculer récursivement les termes de ces suites avec $P(0,0) = 1$:

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0	0
3	0	1	1	1	0	0
4	0	0	7	4	1	0
5	0	1	11	36	11	1

$\{P(n,k)\}_{0 \leq k,n \leq 5}$

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0
3	0	0	3	0	0	0
4	0	1	4	7	0	0
5	0	0	15	30	15	0

$\{D(n,k)\}_{0 \leq k,n \leq 5}$

Dans la proposition suivante on montre que la double suite $B := P - D$ est une hyperbinomiale et on en donne le terme général.

Proposition 2.5.1 *La double suite $B := P - D$ est hyperbinomiale*

$$B = \mathcal{HB}(-k; -n+k+1), \tag{2.83}$$

et elle a le terme général

$$B(n,k) = (-1)^{n-k} \binom{n-1}{k-1} + \chi(n = k = 0). \tag{2.84}$$

[4] Voir [FS] ou [LOT].

Preuve. On trouve d'abord la récurrence hyperbinomiale de B en soustrayant l'équation (2.82) de l'équation (2.81).

En utilisant la proposition 1.5.3 on a

$$B(n,k) = B_d(n-1,k-1) + \chi(n=k=0)$$

où $B_d = \mathcal{HB}(-k-1; -n+k+1)$. Or, les lemmes 1.5.7 et 1.5.8 impliquent que

$$B_d(n,k) = (-1)^{n-k}\binom{n}{k}.$$

□

Cette dernière proposition est aussi démontrée récursivement dans [MAN 91] et combinatoirement dans [MAN 93].

Les équations (2.81) et (2.82) permettent d'obtenir P comme la moyenne de deux hyperbinomiales :

$$P(n,k) = \frac{1}{2}\{A(n,k) + B(n,k)\}.$$

Or le fait que B soit aussi hypergéométrique permet de trouver une infinité de récurrences pour P à l'aide de la proposition générale qui suit.

Proposition 2.5.2 *Soit $S(n,k) := G(n,k)+G'(n,k)$ la somme de deux doubles suites et*

$$\mathcal{I}_G + \mathcal{I}_{G'} = \{Q + Q' \mid Q \in \mathcal{I}_G, Q' \in \mathcal{I}_{G'}\}.$$

Si $1 \in \mathcal{I}_G + \mathcal{I}_{G'}$, c'est-à-dire qu'il existe des opérateurs $Q \in \mathcal{I}_G$ et $Q' \in \mathcal{I}_{G'}$ tels que $Q + Q' = 1$ et $QG = Q'G' = 0$, alors pour tout $R \in \mathcal{I}_G$, $R' \in \mathcal{I}_{G'}$ et pour tout $X, Y \in \mathcal{C}$ on a

$$XR'Q + YRQ' \in \mathcal{I}_S.$$

Preuve. On montre que $RQ' \in \mathcal{I}_S$:

$$\begin{aligned}(RQ')S &= (RQ')G + (RQ')G' \\ &= (RQ')G = R(Q+Q')G \\ &= RG = 0,\end{aligned}$$

et de même $R'Q \in \mathcal{I}_S$. □

Corollaire 2.5.3 *Pour tout $n > 1$ la double suite P satisfait la récurrence*

$$\begin{aligned}P(n,k) &= (k-1)P(n-1,k) + (n-k+2)P(n-1,k-1) \\ &\quad +kP(n-2,k) + (n-2k+1)P(n-2,k-1) \\ &\quad +(k-n-1)P(n-2,k-2).\end{aligned}$$

Preuve. On considère les opérateurs

$$\begin{aligned}
\alpha &:= 1 - k\mathbf{N}^{-1} + (k-n-1)\mathbf{N}^{-1}\mathbf{K}^{-1} \in \mathcal{I}_A, \\
\beta_1 &:= 1 + k\mathbf{N}^{-1} + (n-k-1)\mathbf{N}^{-1}\mathbf{K}^{-1} \in \mathcal{I}_B, \\
\beta_2 &:= 1 + \mathbf{N}^{-1} - \mathbf{N}^{-1}\mathbf{K}^{-1} \in \mathcal{I}_B.
\end{aligned}$$

Par un calcul simple on voit que

$$\frac{1}{2}\mathbf{N}(2\beta_2 - \beta_1) + \frac{1}{2}\mathbf{N}(-\alpha) = 1,$$

ainsi, pour retrouver la récurrence du corollaire, on applique la proposition en posant $Y = 0$, $X = -2\mathbf{N}^{-1}$, $R' = \beta_2$ et $Q = \frac{1}{2}\mathbf{N}(-\alpha)$. □

Dans [MAN 91], par résolution d'équation différentielle, il est trouvé la récurrence

$$\begin{aligned}
P_{n,k} &= 3P_{n-1,k-1} + k^2 P_{n-2,k} + (2nk - 2k^2 - n)P_{n-2,k-1} \\
&+ (k^2 - 2nk + n^2 - 3)P_{n-2,k-2} - (k-1)(k-2)P_{n-3,k-1} \\
&+ (2k^2 - 2nk + 4n - 3k - 2)P_{n-3,k-2} + (2nk - k^2 - n^2 + 1)P_{n-3,k-3}
\end{aligned}$$

pour $n > 3$.

2.6 Produit par Hypergéométrique

Dans le chapitre précédent on a donné des conditions suffisantes pour que le produit matriciel de deux hyperbinomiales soit encore une hyperbinomiale.

On a aussi vu que si $F = \mathcal{HB}(f(n,k); f'(n,k))$, $G = \mathcal{HB}(g(n,k); g'(n,k))$ et si les fonctions

$$\begin{aligned}
h(n,k) &:= f(n,j-1) + f'(n,j)g(j,k), \\
h'(n,k) &:= f'(n,j)g'(j,k)
\end{aligned}$$

sont indépendantes de j, alors $F \times G = \mathcal{HB}(h(n,k); h'(n,k))$.

Dans cette section on montre que l'on peut avoir des conditions suffisantes moins restrictives lorsque l'une des deux hyperbinomiales F ou G est aussi hypergéométrique.

Proposition 2.6.1 . *Soit $F = \mathcal{HB}(f(n,k); f'(n,k))$, et l'hypergéométrique $G \in \mathcal{HG}\left(\frac{n}{n-k}g(n,k); \frac{n}{k}g'(n,k)\right)$ avec $G(0,0) = 1$. Si il existe une double suite $\{x(n,k)\}_{0 \le k \le n}$ telle que les fonctions $h_x(n,k,j) := h(n,k)$ et $h'_x(n,k,j) := h'(n,k)$ soient indépendantes de j, où*

$$\begin{aligned}
h_x(n,k,j) &:= f(n,j-1) + f'(n,j)g(j,k) + kx(j,k)g(j,k), \\
h'_x(n,k,j) &:= f'(n,j)g'(j,k) + (k-j)x(j,k)g'(j,k),
\end{aligned}$$

alors $F \times G = \mathcal{HB}(h(n,k); h'(n,k))$.

Preuve. Par le théorème 2.3.3 on a $G = \mathcal{HB}(g(n,k); g'(n,k))$ et pour toute double suite $x(n,k)$ on a aussi

$$kx(n,k)G(n-1,k) + (k-n)x(n,k)G(n-1,k-1) = 0. \tag{2.85}$$

Or, si on développe les termes $F(n,k)$ et $G(n,k)$ dans le produit on obtient

$$\begin{aligned} H(n,k) &= \sum_j \{f(n,j-1) + f'(n,j)g(j,k)\}F(n-1,j-1)G(j-1,k) \\ &\quad + \sum_j \{f'(n,j)g'(j,k)\}F(n-1,j-1)G(j-1,k-1) \end{aligned} \tag{2.86}$$

et avec l'équation (2.85) on a aussi

$$\sum_j F(n-1,j-1)\{kx(j,k)G(j-1,k) + (k-j)x(j,k)G(j-1,k-1)\} = 0. \tag{2.87}$$

Ainsi en additionnant (2.86) à (2.87) on a le résultat désiré. □

Corollaire 2.6.2 . *Soit q une constante, $\{a(n)\}_{0\leq n}$ et $\{b(n)\}_{0\leq n}$ des suites simples et soit $F = \mathcal{HB}(a(n) - kq - q; b(n) + kq)$. Si on définit la double suite H par*

$$H(n,k) := \sum_j F(n,j)\binom{j}{k},$$

alors $H = \mathcal{HB}(a(n) + b(n) + kq; b(n) + kq)$.

Preuve. Si dans la proposition précédente on prend $x(n,k) \equiv q$ et $G = \mathcal{HB}(1;1)$, alors

$$\begin{aligned} h_x(n,k,j) &:= a(n) - jq + b(n) + jq + kq = a(n) + b(n) + kq, \\ h'_x(n,k,j) &:= b(n) + jq + kq - jq = b(n) + kq. \end{aligned}$$

□

Exemple 12. Soit $A = \mathcal{HB}(k+1; n-k)$ la double suite des nombres eulériens. Pour

$$H(n,k) := \sum_j A(n,j)\binom{j}{k},$$

on a, par application du corollaire, $H = \mathcal{HB}(n-k; n-k)$.

Or, par réflexion, la double suite $(\rho H)(n,k) := H(n, n-k)$ satisfait $(\rho H) = \mathcal{HB}(k;k)$ et avec les résultats de la section sur les facteurs on a aussi

$$(\rho H)(n,k) = k!S(n,k),$$

où $S = \mathcal{HB}(k;1)$ est la double suite des nombres de Stirling de seconde espèce.

Ainsi on retrouve[5] l'identité de Frobenius

$$(n-k)!S(n,n-k) = \sum_j A(n,j)\binom{j}{k}.$$

[5] Voir [GKP], p.251.

Chapitre 3

RÉDUCTIONS CANONIQUES

Résumé

Dans ce chapitre on considère les hyperbinomiales à coefficients polynomiaux du premier degré pour lesquelles on écrit $\mathcal{HB}(p_1, p_2, p_3; q_1, q_2, q_3)$ plutôt que $\mathcal{HB}(p_1n + p_2k + p_3; q_1n + q_2k + q_3)$. On appelle ces dernières *hyperbinomiales spéciales.*

On développe une algèbre d'opérateurs définis, ou partiellement définis, sur les hyperbinomiales spéciales. Sans nécessairement permettre d'obtenir les termes généraux d'hyperbinomiales sous forme close, ces opérateurs permettent de les exprimer les uns en fonction des autres.

Si les termes généraux de deux hyperbinomiales sont reliés par une relation simple, alors il n'y a qu'à résoudre une des deux équations de récurrence. Par ailleurs, étant données deux récurrences hyperbinomiales, il se peut qu'il existe un rapport assez simple entre les termes généraux de leurs solutions sans que cela ne provienne d'une seule transformation. C'est pourquoi on fixe des critères tels que l'on n'aura plus qu'à réduire canoniquement chacune des récurrences pour ensuite les comparer entre elles. Par exemple, on pourra voir que le terme général de l'hyperbinomiale $X = \mathcal{HB}(2, -2, 3; 2, -2, 2)$ s'exprime en fonction de nombres de Stirling de seconde espèce $S = \mathcal{HB}(0, 1, 0; 0, 0, 1)$.

Essentiellement on considère trois types d'opérateurs : soit la réflexion ρ; la multiplication par l'un des trois facteurs $U_{\alpha,\beta}$, $V_{\alpha,\beta}$ ou $W_{\alpha,\beta}$; l'application de l'un des quatre opérateurs de translation τ_g, τ_h, τ_d ou τ_b.

Pour chacun de ces opérateurs on donne le domaine de définition, le rapport entre les termes généraux et les récurrences d'une hyperbinomiale du domaine et de son image par transformation et on déduit des critères de canonicité. Finalement on considère la composition de ces opérateurs qu'ils soient ou non du même type.

Dans la première section on donne la définition et le domaine d'application de chacuns de ces opérateurs et on rappelle quelques résultats qui ont déjà été démontrés dans les chapitres précédents.

A la deuxième section on examine l'opérateur ρ de réflexion qui est défini pour toutes les hyperbinomiales.

Pour $H = \mathcal{HB}(p_1, p_2, p_3; q_1, q_2, q_3)$, l'opérateur de réflexion a les propriétés suivantes.

Rapport entre termes généraux

$$(\rho H)(n,k) = H(n, n-k), \quad H(n,k) = (\rho H)(n, n-k).$$

Rapport entre récurrences

$$(\rho H) = \mathcal{HB}(q_1 + q_2, -q_2, q_3; p_1 + p_2, -p_2, p_3).$$

Composition

$$\rho \circ \rho = Id \quad \text{ou} \quad \rho^{-1} = \rho.$$

Critères de canonicité On dit que

$$C = \mathcal{HB}(a, b, c; a', b', c')$$

est canonique pour la réflexion si, et seulement si on a la satisfaction de l'un des trois ensembles de relations

$$\begin{array}{rcl} \{a + c & < & a' + b' + c'\}; \\ \{a + c & = & a' + b' + c',\, a < a' + b'\}; \\ \{a & = & a' + b',\, c = c', b \leq -b'\}. \end{array}$$

de sorte qu'exactement une de H ou (ρH) est canonique pour la réflexion.

Dans la troisième section on considère la multiplication par l'un des trois facteurs $U_{\alpha,\beta}$, $V_{\alpha,\beta}$ ou $W_{\alpha,\beta}$.

Tout d'abord toute hyperbinomiale $H = \mathcal{HB}(p_1, p_2, p_3; q_1, q_2, q_3)$ peut être multipliée par le facteur $U_{\alpha,\beta}$. La multiplication par les facteurs $U_{\alpha,\beta}$ a les propriétés suivantes.

Rapport entre termes généraux

$$(U_{\alpha,\beta} H)(n,k) = \alpha^{n-k} \beta^k H(n,k).$$

Rapport entre récurrences

$$(U_{\alpha,\beta} H) = \mathcal{HB}(\alpha p_1, \alpha p_2, \alpha p_3; \beta q_1, \beta q_2, \beta q_3).$$

Composition

$$\begin{aligned} U_{\alpha_1,\beta_1} \circ U_{\alpha_2,\beta_2} &= U_{\alpha_1\alpha_2,\beta_1\beta_2}, \\ \rho \circ U_{\alpha,\beta} &= U_{\beta,\alpha} \circ \rho. \end{aligned}$$

Critères de canonicité On dit que $C = \mathcal{HB}(c_1, c_2, c_3; c_1', c_2', c_3')$ est canonique pour les facteurs admissibles universels si

$$c_1 + c_2 \geq 0, \quad c_1' \geq 0.$$

En outre, si les paramètres de C sont des nombres rationnels, alors on doit aussi avoir

$$\begin{aligned} c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{Z}, &\qquad c_1', c_2', c_3' \in \mathbb{Z}, \\ \text{p.g.c.d.}(c_1, c_2, c_3) = 1, &\qquad \text{p.g.c.d.}(c_1', c_2', c_3') = 1. \end{aligned}$$

Seules les hyperbinomiales $H_v = \mathcal{HB}(0, 0, p; q_1, q_2, q_3)$ peuvent être multipliées par $V_{\alpha,\beta}$ et seules $H_w = \mathcal{HB}(p_1, p_2, p_3; 0, 0, q)$ peuvent être multipliées par $W_{\alpha,\beta}$. En plus on a les propriétés suivantes.

Rapport entre termes généraux

$$\begin{aligned} (V_{\alpha,\beta} H_v)(n, k) &= H_v(n, k) \prod_{j=1}^{n-k} (\alpha j + \beta), \\ (W_{\alpha,\beta} H_w)(n, k) &= H_w(n, k) \prod_{j=1}^{k} (\alpha j + \beta). \end{aligned}$$

Rapport entre récurrences

$$\begin{aligned} (V_{\alpha,\beta} H_v) &= \mathcal{HB}(p\alpha, -p\alpha, p\beta; q_1, q_2, q_3), \\ (W_{\alpha,\beta} H_w) &= \mathcal{HB}(p_1, p_2, p_3; 0, q\alpha, q\beta). \end{aligned}$$

Composition Les facteurs V et W commutent avec les facteurs U et

$$\rho \circ V_{\alpha,\beta} = W_{\alpha,\beta} \circ \rho.$$

Critères de canonicité On dit que $C = \mathcal{HB}(c_1, c_2, c_3; c_1', c_2', c_3')$ est canonique pour les facteurs V et W si, et seulement si

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 \neq 0 \quad &\text{ou} \quad c_1 = c_2 = 0, \\ c_1' \neq 0 \quad &\text{ou} \quad c_1' = c_2' = 0. \end{aligned}$$

Dans la quatrième section on considère les opérateurs de translation. On définit quatre opérateurs de translation τ_g, τ_h, τ_d et τ_b qui sont partiellement définis sur l'ensemble des hyperbinomiales. On présente ici les données essentielles les concernant et on s'y réfèrera tout au long de ce chapitre.

Voici chacun de ces opérateurs et pour $H = \mathcal{HB}(p_1, p_2, p_3; q_1, q_2, q_3)$, les conditions sur les paramètres de H pour appartenir au domaine de l'opérateur, la récurrence hyperbinomiale et le terme général de τH.

1. Pour $\tau = \tau_g$

$$\begin{aligned}
&p_3 = -p_1 \Rightarrow H \in \mathrm{Dom}(\tau),\\
&(\tau H) = \mathcal{HB}(p_1, p_2, p_2; q_1, q_2, q_1 + q_2 + q_3),\\
&(q_1 + q_2 + q_3)(\tau H)(n, k) = H(n + 1, k + 1).
\end{aligned}$$

2. Pour $\tau = \tau_h$

$$\begin{aligned}
&q_3 = -q_2 - q_1 \Rightarrow H \in \mathrm{Dom}(\tau),\\
&(\tau H) = \mathcal{HB}(p_1, p_2, p_1 + p_3; q_1, q_2, -q_2),\\
&(p_1 + p_3)(\tau H)(n, k) = H(n + 1, k).
\end{aligned}$$

3. Pour $\tau = \tau_d$

$$\begin{aligned}
&p_2 = p_3 \Rightarrow H \in \mathrm{Dom}(\tau),\\
&(\tau H) = \mathcal{HB}(p_1, p_2, -p_1; q_1, q_2, q_3 - q_2 - q_1),\\
&(\tau H)(n, k) = q_3 H(n - 1, k - 1).
\end{aligned}$$

4. Pour $\tau = \tau_b$

$$\begin{aligned}
&q_3 = -q_2 \Rightarrow H \in \mathrm{Dom}(\tau),\\
&(\tau H) = \mathcal{HB}(p_1, p_2, p_3 - p_1; q_1, q_2, -q_1 - q_2),\\
&q_1(\tau H)(n, k) = H(n - 1, k).
\end{aligned}$$

L'opérateur de réflexion se compose bien avec les opérateurs de translation. En fait

$$\rho \circ \tau_d = \tau_b \circ \rho, \quad \rho \circ \tau_h = \tau_g \circ \rho.$$

Finalement, on dit qu'une hyperbinomiale $C = \mathcal{HB}(c_1, c_2, c_3; c'_1, c'_2, c'_3)$ est canonique pour la translation si, et seulement si

$$c_1 + c_3 \neq 0, \quad c'_1 + c'_2 + c'_3 \neq 0.$$

Le domaine de définition de la composition de ces opérateurs fait l'objet de la quatrième section où l'on donne à une classification des hyperbinomiales. Ceci permet d'exprimer le terme général d'une hyperbinomiale donnée en fonction d'une hyperbinomiale canonique pour la translation.

3.1 Rappels et Définitions

On rappelle ici certaines définitions et résultats des chapitres précédents que l'on adapte pour les hyperbinomiales à coefficients polynomiaux du premier degré.

Définition 1. On dit que (ρT) est la réflexion de la double suite triangulaire T si

$$(\rho T)(n,k) = T(n, n-k).$$

Évidemment $\rho^2 T = T$. On dit aussi que T est symétrique si $T = \rho T$.

Proposition 3.1.1 *Soit $H = \mathcal{HB}(h_1, h_2, h_3; h_1', h_2', h_3')$ et ρH sa réflexion. La double suite triangulaire ρH est hyperbinomiale avec*

$$(\rho H) = \mathcal{HB}(h_1' + h_2', -h_2', h_3'; h_1 + h_2, -h_2, h_3). \tag{3.1}$$

Ainsi pour que H soit symétrique, en ce sens que $H = \rho H$, il suffit que les paramètres de H satisfasse l'ensemble de conditions

$$\{h_1 + h_2 = h_1', h_2 = -h_2', h_3 = h_3'\}. \tag{3.2}$$

Preuve. D'abord montrons que ρH est nulle si n ou $k < 0$. Si $n < 0$, alors $(\rho H)(n,k) = H(n, n-k) = 0$ par définition de H et si $k < 0$, alors $(\rho H)(n,k) = H(n, n-k) = 0$ par ce qu'alors $n - k > n$ et que H est triangulaire. Ensuite ρH est triangulaire car $0 \leq k \leq n$ si, et seulement si $0 \leq n - k \leq n$. Finalement, on trouve la récurrence satisfaite par ρH en développant $H(n, n-k)$ avec sa récurrence et en remarquant que

$$\begin{aligned}
H(n-1, n-k-1) &= (\rho H)(n-1, k), && (3.3)\\
H(n, n-k-1) &= (\rho H)(n-1, k-1), && (3.4)\\
\chi(n = k = 0) &= \chi(n = n-k-0). && (3.5)
\end{aligned}$$

□

Proposition 3.1.2 *Les hyperbinomiales*

$$\begin{aligned}
B &= \mathcal{HB}(p_1, p_2, p_3; q_1, q_2, q_3), && (3.6)\\
B_g &= \mathcal{HB}(p_1, p_2, p_1 + p_3; q_1, q_2, q_1 + q_3), && (3.7)\\
B_d &= \mathcal{HB}(p_1, p_2, p_1 + p_2 + p_3; q_1, q_2, q_1 + q_2 + q_3), && (3.8)
\end{aligned}$$

sont mutuellement récursives avec l'équation

$$\begin{aligned}
B(n,k) &= (p_1 + p_3) B_g(n-1, k)\\
&\quad + (q_1 + q_2 + q_3) B_d(n-1, k-1) + \chi(n = k = 0).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Preuve. Cette proposition est un corollaire direct de la proposition 1.5.3 du premier chapitre. □

Définition 2. Pour $B = \mathcal{HB}(p_1, p_2, p_3; q_1, q_2, q_3)$, on appelle partage en deux parts l'équation (3.9) de la proposition précédente.

On peut montrer que si une hyperbinomiale H est symétrique, alors les deux parts H_g et H_d s'obtiennent l'une de l'autre par réflexion.

Proposition 3.1.3 *Soit $H = \mathcal{HB}(h_1, h_2, h_3; h_1 + h_2, -h_2, h_3)$ une hyperbinomiale symétrique. On a alors le partage*[1]

$$H(n,k) = (h_1 + h_3)\{H_g(n-1,k) + H_g(n-1,n-k)\} + \chi(n = k = 0), \tag{3.10}$$

où

$$H_g = \mathcal{HB}(h_1, h_2, h_1 + h_3; h_1 + h_2, -h_2, h_1 + h_2 + h_3). \tag{3.11}$$

Preuve. L'hyperbinomiale H est symétrique par application de la proposition 3.1.1 et ainsi $H(1,0) = H(1,1) = h_1 + h_3$. Par la suite, selon la même proposition et la proposition 3.1.2 on voit que les deux parts H_g et H_d sont telles que $\rho H_g = H_d$ et ainsi le partage de H revient à la formule (3.10). □

Définition 3. On appelle translation le partage d'une hyperbinomiale

$$H = \mathcal{HB}(p_1, p_2, p_3; q_1, q_2, q_3)$$

dont l'une des deux valeurs $H(1,0) = p_1 + p_3$ ou $H(1,1) = q_1 + q_2 + q_3$ est nulle. Par exemple, pour $H = \mathcal{HB}(a, b, -a; a', b', c')$ on a la translation

$$H(n,k) = H(1,1) \cdot H_d(n-1, k-1) + \chi(n = k = 0)$$

avec $H_d = \mathcal{HB}(a, b, b; a', b', a' + b' + c')$. On dit que les doubles suites H et H_d s'obtiennent l'une de l'autre par translation et on écrit $H = \tau_d H_g$ et $H_d = \tau_g H$.

On appelle τ_d l'opérateur de translation vers la droite et on dit que l'hyperbinomiale $H = \mathcal{HB}(p_1, p_2, p_3; q_1, q_2, q_3)$ est dans son domaine de définition si, et seulement si $p_1 + p_3 = 0$. On appelle aussi τ_g l'opérateur de translation vers la gauche et on dit que $H = \mathcal{HB}(p_1, p_2, p_3; q_1, q_2, q_3)$ est dans son domaine de définition si, et seulement si $p_2 = p_3$.

Par ailleurs, pour $H = \mathcal{HB}(a, b, c; a', b', -a' - b')$ on a la translation

$$H(n,k) = H(1,0) \cdot H_g(n-1, k) + \chi(n = k = 0)$$

[1] Voir la proposition 3.1.2.

avec $H_g = \mathcal{HB}(a, b, a + c; a', b', -b')$. On dit aussi que les doubles suites H et H_g s'obtiennent l'une de l'autre par translation, on écrit $H = \tau_b H_g$ et $H_g = \tau_h H$. On appelle τ_b l'opérateur de translation vers le bas et on dit que $H = \mathcal{HB}(p_1, p_2, p_3; q_1, q_2, q_3)$ est dans son domaine de définition si, et seulement si $q_2 + q_3 = 0$. On appelle aussi τ_h l'opérateur de translation vers la haut et on dit que $H = \mathcal{HB}(p_1, p_2, p_3; q_1, q_2, q_3)$ est dans son domaine de définition si, et seulement si $q_1 + q_2 + q_3 = 0$.

Exemple 1. Les nombres eulériens $A = \mathcal{HB}(0, 1, 1; 1, -1, 0)$ ne sont pas symétriques mais, après translation, on obtient $\tau_h A = \mathcal{HB}(0, 1, 1; 1, -1, 1)$ qui est symétrique. Ainsi on en déduit que

$$A(n, k) = A(n, n - k + 1). \tag{3.12}$$

Définition 4. On appelle *facteur* une double suite triangulaire F telle que

$$\begin{aligned} F(n, k) &= f(n, k)F(n - 1, k),\ (n > 0), \\ &= g(n, k)F(n - 1, k - 1),\ (n, k > 0), \end{aligned}$$

avec $f(n, k) = f_1 n + f_2 k + f_3, g(n, k) = g_1 n + g_2 k + g_3$ et $f_i, g_i \in \mathbb{R}$.

Pour que la définition précédente soit consistante il suffit que

$$f(n, k)g(n - 1, k) = f(n - 1, k - 1)g(n, k)$$

ce qui est, après simplification, équivalent à l'ensemble de conditions

$$\{f_2 g_1 = 0,\ (f_1 + f_2)g_2 = 0,\ (f_1 + f_2)g_3 = f_3 g_1\},$$

et lorsqu'elles sont satisfaites on a

$$\begin{aligned} F(n, k) &= \prod_{i=1}^{n-k} f_1 i + (f_1 + f_2)k + f_3 \prod_{j=1}^{k} (g_1 + g_2)j + g_3 \\ &= \prod_{i=1}^{n-k} (f_1 i + f_3) \prod_{j=1}^{k} (g_1 + g_2)j + g_1(n - k) + g_3, \end{aligned}$$

deux expressions équivalentes pour le terme général de F. On note

$$F \in \mathcal{HG}(f_1, f_2, f_3; g_1, g_2, g_3)$$

pour le facteur ainsi définit.

On porte une attention particulière aux facteurs

$$\begin{aligned} U_{\alpha,\beta} &\in \mathcal{HG}(0, 0, \alpha; 0, 0, \beta), \\ V_{\alpha,\beta} &\in \mathcal{HG}(\alpha, -\alpha, \beta; 0, 0, 1), \\ W_{\alpha,\beta} &\in \mathcal{HG}(0, 0, 1; 0, \alpha, \beta), \end{aligned}$$

qui ont respectivement les termes généraux

$$\begin{aligned} U_{\alpha,\beta}(n,k) &= \alpha^{n-k}\beta^k, \\ V_{\alpha,\beta}(n,k) &= \prod_{j=1}^{n-k}(\alpha j+\beta), \\ W_{\alpha,\beta}(n,k) &= \prod_{j=1}^{k}(\alpha j+\beta). \end{aligned}$$

Définition 5. On dit qu'un *facteur* F est *admissible* pour une hyperbinomiale H lorsque la double suite FH donnée par $(FH)(n,k) = F(n,k)H(n,k)$ est encore hyperbinomiale à coefficients polynomiaux du premier degré.

En général si $H = \mathcal{HB}(p_1,p_2,p_3;q_1,q_2,q_3)$ et $F \in \mathcal{HG}(f_1,f_2,f_3;g_1,g_2,g_3)$ on a toujours

$$\begin{aligned} (FH)(n,k) &= (f_1n+f_2k+f_3)(p_1n+p_2k+p_3)(FH)(n-1,k) \\ &+ (g_1n+g_2k+g_3)(q_1n+q_2k+q_3)(FH)(n-1,k-1) \\ &+ \chi(n=k=0), \end{aligned}$$

de sorte que tous les facteurs sont admissibles pour les nombres binomiaux

$$B = \mathcal{HB}(0,0,1;0,0,1)$$

et que les facteurs $U_{\alpha,\beta}$ sont admissibles pour toutes les hyperbinomiales.

En outre, les facteurs $V_{\alpha,\beta}$ sont admissibles pour les hyperbinomiales de la forme $H = \mathcal{HB}(0,0,1;q_1,q_2,q_3)$ et $W_{\alpha,\beta}$ pour $H = \mathcal{HB}(p_1,p_2,p_3;0,0,1)$.

3.2 Canonicité pour la Réflexion

Si on connat, sous forme close, le terme général d'une hyperbinomiale H, alors en remplaçant k par $n-k$ on obtient le terme général de ρH. Ainsi, lorsque l'on s'intéresse à étabir des critères de canonicité on n'a qu'à considérer comme canonique qu'une seule des deux hyperbinomiales H ou ρH. Pour faire ce choix on introduit une relation d'ordre sur les triplets.

Définition 6. Soit (a,b,c) et (d,e,f) des triplets de nombres. On écrit $(a,b,c) \prec (d,e,f)$ si, et seulement si l'une des trois situations suivante est vérifiée:

$$a+c < d+f; \tag{3.13}$$

$$a+c = d+f,\ a<d; \tag{3.14}$$

$$a = d,\ c=f,\ b \le e. \tag{3.15}$$

Proposition 3.2.1 *La relation $\prec$ est une relation d'ordre total sur les triplets de nombres réels.*

Preuve. Pour tout (a, b, c) on a $a = a$, $c = c$ et $b \leq b$ de sorte que (3.15) est vérifiée et $\prec$ est réflexive.

Si on suppose que

$$(a, b, c) \prec (d, e, f) \prec (a, b, c), \tag{3.16}$$

alors on a nécessairement $a + c = d + f$, $a = d$ et $b = e$, il s'en suit que $(a, b, c) = (d, e, f)$ et $\prec$ est antisymétrique.

Si on suppose que

$$(a, b, c) \prec (d, e, f) \prec (g, h, i), \tag{3.17}$$

alors $a + c \leq d + f \leq g + i$. Ainsi, lorsque $a + c = g + i$ on a $a \leq d \leq g$ et si $a = g$, alors $b \leq e \leq h$. Il s'en suit que $(a, b, c) \prec (g, h, i)$ et $\prec$ est transitive et c'est donc une relation d'ordre.

Finalement, si aucune des relations

$$(a, b, c) \prec (d, e, f), \ (d, e, f) \prec (a, b, c) \tag{3.18}$$

n'est satisfaite, alors $a + c \geq d + f \geq a + c$ d'où $a \geq d \geq a$ ce qui implique la contradiction $b > e > b$, donc $\prec$ est une relation d'ordre total. □

Définition 7. On note $(a, b, c)_\rho$ pour le triplet $(a + b, -b, c)$ et on dit que

$$H = \mathcal{HB}(a, b, c; a', b', c')$$

est canonique pour la réflexion si, et seulement si

$$(a, b, c) \prec (a', b', c')_\rho \tag{3.19}$$

ce qui est équivalent à la satisfaction de l'un des trois ensemble de relations

$$\{a + c \ < \ a' + b' + c'\}; \tag{3.20}$$
$$\{a + c \ = \ a' + b' + c',\, a < a' + b'\}; \tag{3.21}$$
$$\{a \ = \ a' + b',\, c = c', b \leq -b'\}. \tag{3.22}$$

En particulier, pour une hyperbinomiale symétrique, la relation (3.22) est vérifiée.

Proposition 3.2.2 *Si H n'est pas symétrique, alors une et une seule des hyperbinomiales H ou ρH est canonique pour la réflexion.*

Preuve. Si H est solution de $\mathcal{HB}(h_1, h_2, h_3; h'_1, h'_2, h'_3)$, alors, puisque

$$(h_1, h_2, h_3) \neq (h'_1, h'_2, h'_3)_\rho$$

et que $\prec$ est une relation d'ordre total, exactement une des deux relations

$$(h_1, h_2, h_3) \prec (h'_1, h'_2, h'_3)_\rho, \tag{3.23}$$
$$(h'_1, h'_2, h'_3)_\rho \prec (h_1, h_2, h_3), \tag{3.24}$$

est vérifiée. Si la relation (3.23) est vérifiée, alors H est canonique par réflexion, sinon

$$(\rho H) = ((h'_1, h'_2, h'_3)_\rho; (h_1, h_2, h_3)_\rho)$$

et $(h_1, h_2, h_3) = (h'_1, h'_2, h'_3)_{\rho^2}$, alors (ρH) est canonique par réflexion. □

3.3 Canonicité pour Facteurs Admissibles

Proposition 3.3.1 *Le terme général de toute hyperbinomiale peut s'exprimer, par simplification de facteur admissible, en fonction d'une hyperbinomiale*

$$C = \mathcal{HB}(c_1, c_2, c_3; c'_1, c'_2, c'_3)$$

telle que

$$c_1 + c_2 \geq 0, \tag{3.25}$$
$$c'_1 \geq 0. \tag{3.26}$$

En outre, si les paramètres de H sont des nombres rationnels, alors on peut aussi avoir par réductions canoniques

$$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{Z}, \tag{3.27}$$
$$c'_1, c'_2, c'_3 \in \mathbb{Z}, \tag{3.28}$$
$$p.g.c.d.(c_1, c_2, c_3) = 1, \tag{3.29}$$
$$p.g.c.d.(c'_1, c'_2, c'_3) = 1. \tag{3.30}$$

Preuve. Dans chacun des cas on choisit les facteurs admissibles universels adéquats. □

La proposition suivante donne les critères de canonicité que l'on obtient en considérant les facteurs V et W.

Proposition 3.3.2 *Les facteurs $V_{\alpha,\gamma}$ sont admissibles pour les hyperbinomiales $H_v = \mathcal{HB}(0, 0, 1; q_1, q_2, q_3)$ et $W_{\beta',\gamma'}$ pour $H_w = \mathcal{HB}(p_1, p_2, p_3; 0, 0, 1)$. On a alors les récurrences*

$$(V_{\alpha,\gamma} H_v) = \mathcal{HB}(\alpha, -\alpha, \gamma; q_1, q_2, q_3), \tag{3.31}$$
$$(W_{\beta',\gamma'} H_w) = \mathcal{HB}(p_1, p_2, p_3; 0, \beta', \gamma'), \tag{3.32}$$

de sorte que les critères (3.25) et (3.26) peuvent être améliorés de façon à avoir

$$c_1 + c_2 > 0 \quad ou \quad c_1 = c_2 = 0, \tag{3.33}$$

$$c'_1 > 0 \quad ou \quad c'_1 = c'_2 = 0. \tag{3.34}$$

3.4 Canonicité pour la Translation

Les opérateurs de translation définis à la première section n'ont pour domaine de définition qu'un sous-ensemble de toutes les hyperbinomiales spéciales.

On rappelle que les opérateurs de translation ont les domaines et images suivants:

$$H \in \mathrm{Dom}\,\tau_g = \mathrm{Im}\,\tau_d \quad \Leftrightarrow \quad h_1 + h_3 = 0, \tag{3.35}$$

$$H \in \mathrm{Dom}\,\tau_h = \mathrm{Im}\,\tau_b \quad \Leftrightarrow \quad h'_1 + h'_2 + h'_3 = 0, \tag{3.36}$$

$$H \in \mathrm{Dom}\,\tau_d = \mathrm{Im}\,\tau_g \quad \Leftrightarrow \quad h_2 = h_3, \tag{3.37}$$

$$H \in \mathrm{Dom}\,\tau_b = \mathrm{Im}\,\tau_h \quad \Leftrightarrow \quad h'_1 + h'_3 = 0. \tag{3.38}$$

où $H = \mathcal{HB}(h_1, h_2, h_3; h'_1, h'_2, h'_3)$.

Dans cette section on étudie la composition de ces opérateurs et leurs domaines de définition. On en déduit une classification des hyperbinomiales dont les classes sont déterminées par l'appartenace à ces domaines.

Exemple 2. Pour les hyperbinomiales classiques on a $s, S \in Dom(\tau_g)$ pour les nombres de Stirling et $A \in Dom(\tau_h)$ pour les nombres eulériens. Par exemple,

$$A = \mathcal{HB}(0, 1, 1; 1, -1, 0), \tag{3.39}$$

et

$$\tau_h A = \mathcal{HB}(0, 1, 0; 1, -1, 1). \tag{3.40}$$

Définition 8. On appelle encore opérateur de translation un opérateur composé de τ_g, τ_h, τ_d et τ_b. On écrit $\ell(\tau)$ pour le nombre d'opérateurs entrant dans la composition de τ et plus spécifiquement $\ell_h(\tau)$ pour le nombre de τ_h dans cette composition.

Définition 9. On écrit τ^2 pour $\tau \circ \tau$, τ^k pour sa k-ième itération et $\mathrm{Dom}^k(\tau)$ pour son domaine de définition. On convient que $H \in \mathrm{Dom}(\tau_2 \circ \tau_1)$ si, et seulement si $H \in \mathrm{Dom}(\tau_1)$ et $\tau_1 H \in \mathrm{Dom}(\tau_2)$, ainsi $\mathrm{Dom}^k(\tau) \subset \mathrm{Dom}^{k-1}(\tau)$ pour $k \geq 1$. Finalement on définit les domaines infinis par $\mathrm{Dom}^\infty(\tau) := \bigcap_{k\geq 1} \mathrm{Dom}^k(\tau)$.

Exemple 3. On donne ici, pour $H = \mathcal{HB}(p_1, p_2, p_3; q_1, q_2, q_2)$ et pour chacun des opérateurs de translation de longueur deux et trois composés de τ_g et τ_h, les conditions sur ses paramètres pour que H appartienne à son domaine et la récurrence hyperbinomiale de τH.

1. Pour $\tau = \tau_g^2$

$$p_3 = -p_1 = p_2 \Rightarrow H \in \mathrm{Dom}(\tau), \tag{3.41}$$
$$(\tau H) = \mathcal{HB}(p_1, -p_1, -p_1; q_1, q_2, q_3 + 2q_2 + 2q_1). \tag{3.42}$$

2. Pour $\tau = \tau_h^2$

$$q_3 = -q_2,\ q_1 = 0 \Rightarrow H \in \mathrm{Dom}(\tau), \tag{3.43}$$
$$(\tau H) = \mathcal{HB}(p_1, p_2, 2p_1 + p_3; 0, q_2, -q_2). \tag{3.44}$$

3. Pour $\tau = \tau_h \circ \tau_g$

$$p_3 = -p_1,\ q_3 = -2q_2 - 2q_1 \Rightarrow H \in \mathrm{Dom}(\tau), \tag{3.45}$$
$$(\tau H) = \mathcal{HB}(p_1, p_2, p_1 + p_2; q_1, q_2, -q_2). \tag{3.46}$$

4. Pour $\tau = \tau_g \circ \tau_h$

$$p_3 = -2p_1,\ q_3 = -q_2 - q_1 \Rightarrow H \in \mathrm{Dom}(\tau), \tag{3.47}$$
$$(\tau H) = \mathcal{HB}(p_1, p_2, p_2; q_1, q_2, q_1). \tag{3.48}$$

5. Pour $\tau = \tau_g^3$

$$p_3 = p_2 = -p_1 \Rightarrow H \in \mathrm{Dom}(\tau), \tag{3.49}$$
$$(\tau H) = \mathcal{HB}(p_1, -p_1, -p_1; q_1, q_2, q_3 + 3q_2 + 3q_1). \tag{3.50}$$

6. Pour $\tau = \tau_h^3$

$$q_3 = -q_2,\ q_1 = 0 \Rightarrow H \in \mathrm{Dom}(\tau), \tag{3.51}$$
$$(\tau H) = \mathcal{HB}(p_1, p_2, 3p_1 + p_3; 0, q_2, -q_2). \tag{3.52}$$

7. Pour $\tau = \tau_g^2 \circ \tau_h$

$$p_3 = 2p_2 = -2p_1,\ q_3 = -q_2 - q_1 \Rightarrow H \in \mathrm{Dom}(\tau), \tag{3.53}$$
$$(\tau H) = \mathcal{HB}(p_1, -p_1, -p_1; q_1, q_2, 2q_1 + q_2). \tag{3.54}$$

8. Pour $\tau = \tau_h^2 \circ \tau_g$

$$p_3 = -p_1,\ q_3 = -2q_2,\ q_1 = 0 \Rightarrow H \in \mathrm{Dom}(\tau), \tag{3.55}$$
$$(\tau H) = \mathcal{HB}(p_1, p_2, 2p_1 + p_2; 0, q_2, -q_2). \tag{3.56}$$

9. Pour $\tau = \tau_g \circ \tau_h^2$

$$q_1 = 0,\ q_3 = -q_2,\ p_3 = -3p_1 \Rightarrow H \in \mathrm{Dom}(\tau), \tag{3.57}$$
$$(\tau H) = \mathcal{HB}(p_1, p_2, -3p_1; 0, q_2, -q_2). \tag{3.58}$$

10. Pour $\tau = \tau_h \circ \tau_g^2$

$$p_3 = p_2 = -p_1,\ q_3 = -3q_2 - 3q_1 \Rightarrow H \in \mathrm{Dom}(\tau), \tag{3.59}$$
$$(\tau H) = \mathcal{HB}(p_1, -p_1, 0; q_1, q_2, -q_2). \tag{3.60}$$

11. Pour $\tau = \tau_g \circ \tau_h \circ \tau_g$

$$p_3 = -p_1,\ p_2 = -2p_1,\ q_3 = -2q_2 - 2q_1 \Rightarrow H \in \mathrm{Dom}(\tau), \tag{3.61}$$
$$(\tau H) = \mathcal{HB}(p_1, p_2, p_2; q_1, q_2, q_1). \tag{3.62}$$

12. Pour $\tau = \tau_h \circ \tau_g \circ \tau_h$

$$p_3 = -2p_1,\ q_2 = -2q_1 = -2q_3 \Rightarrow H \in \mathrm{Dom}(\tau), \tag{3.63}$$
$$(\tau H) = \mathcal{HB}(p_1, p_2, p_1 + p_2; q_1, q_2, -q_2). \tag{3.64}$$

Exemple 4. Lorsque $H \in \{\mathrm{Dom}(\tau_h) \cap \mathrm{Dom}(\tau_g)\}$, alors elle satisfait une récurrence de la forme $\mathcal{HB}(x, y, -x; u, v, -u-v)$ et $H(1,0) = H(1,1) = 0$ de sorte que $H(n,k) = \chi(n = k = 0)$. Par la suite on appelle nulle de telles hyperbinomiales et on désigne cette double suite par N et $\mathcal{N}$ pour l'ensemble des récurrences dont la solution est l'hyperbinomiale nulle.

Remarque 1. On a vu que si $H \in \mathrm{Dom}(\tau_h^2)$, alors $(\tau_h^2 H) \in \mathrm{Dom}(\tau_h)$. Ainsi, lorsque $H \in \mathrm{Dom}(\tau_g \circ \tau_h^2)$ il s'en suit que $\tau_h^2 H \in \{\mathrm{Dom}(\tau_h) \cap \mathrm{Dom}(\tau_g)\}$ est nulle. De même, si $H \in \mathrm{Dom}(\tau_h \circ \tau_g^2)$, alors $(\tau_g^2 H)$ est nulle.

3.4.1 Classes Principales

Essentiellement il y a quatre classes principales que l'on définit et caractérise dans cette section. On les appelle régulière, verticale, diagonale et alternée.

Définition 10. Les hyperbinomiales H telles que $H \notin \mathrm{Dom}(\tau_g)$ et $H \notin \mathrm{Dom}(\tau_h)$ sont appelées hyperbinomiales régulières. Cela revient à dire que $H(1,0) \cdot H(1,1) \neq 0$. On écrit $\mathcal{R}$ pour la classe de toutes les hyperbinomiales régulières.

Exemple 5. Les nombres de Stirling de seconde espèce $S = \mathcal{HB}(0,1,0;0,0,1)$ ne forment pas une hyperbinomiale régulière. Par contre,

$$(\tau_g S) = \mathcal{HB}(0,1,1;0,0,1) \in \mathcal{R}.$$

Définition 11. Si $D \in \mathrm{Dom}^\infty(\tau_g)$ alors elle est appelée hyperbinomiale *diagonale* et son symétrique $V = (\rho D) \in \mathrm{Dom}^\infty(\tau_h)$ une hyperbinomiale *verticale*.

Dans la proposition qui suit on caractérise les hyperbinomiales verticales et diagonales par cinq caractéristiques équivalentes pour chacune de ces classes.

Proposition 3.4.1 *Soit $D = \mathcal{HB}(d_1, d_2, d_3; d'_1, d'_2, d'_3)$ une hyperbinomiale.*

Les cinq énoncés qui suivent sont équivalents et chacun caractérise les hyperbinomiales diagonales :

$$D_1. \quad D \in Dom^\infty(\tau_g); \tag{3.65}$$

$$D_2. \quad D \in Dom(\tau_g^2); \tag{3.66}$$

$$D_3. \quad d_1 + d_2 = d_1 + d_3 = 0; \tag{3.67}$$

$$D_4. \quad D(n, n-1) = 0; \tag{3.68}$$

$$D_5. \quad D(n,k) = \chi(n=k) \prod_{j=1}^{n} \{(d'_1 + d'_2)j + d'_3\}. \tag{3.69}$$

De même pour $V = \mathcal{HB}(v_1, v_2, v_3; v'_1, v'_2, v'_3)$, les cinq énoncés qui suivent sont équivalents et chacun caractérise les hyperbinomiales verticales :

$$V_1. \quad V \in Dom^\infty(\tau_h); \tag{3.70}$$

$$V_2. \quad V \in Dom(\tau_h^2); \tag{3.71}$$

$$V_3. \quad v'_1 = v'_2 + v'_3 = 0; \tag{3.72}$$

$$V_4. \quad V(n,1) = 0; \tag{3.73}$$

$$V_5. \quad V(n,k) = \chi(n=0) \prod_{j=1}^{n} (v_1 j + v_3). \tag{3.74}$$

Preuve. On montre que $D_1 \Leftarrow D_2 \Leftarrow D_3 \Leftarrow D_4 \Leftarrow D_1$ et $D_4 \Leftrightarrow D_5$. Pour la seconde partie il suffit d'utiliser la symétrie.

($D_1 \Leftarrow D_2$) Puisque $\mathrm{Dom}^\infty(\tau_g) = \bigcap_{k \geq 0} \mathrm{Dom}(\tau_g^k)$ par définition, alors pour tout k, $\mathrm{Dom}^\infty(\tau_g) \supseteq \mathrm{Dom}(\tau_g^k)$ et en particulier pour $k = 2$.

($D_2 \Leftarrow D_3$) Se référer à (3.66).

($D_3 \Leftarrow D_4$) Tout d'abord $D(1,0) = d_1 + d_3 = 0$ et si $D(n, n-1) = 0$ pour un n, alors , puisque $d_3 = d_2 = -d_1$, on a

$$D(n+1, n) = [d_1(n+1) - d_1 n - d_1] D(n,n) + [\cdots] D(n, n-1) = 0. \tag{3.75}$$

($D_4 \Leftarrow D_1$) Puisque $D(1,0) = 0$, alors $D \in \mathrm{Dom}(\tau_g)$ et $(\tau_g D)(1,0) = D(2,1) = 0$ d'où $(\tau_g D) \in \mathrm{Dom}(\tau_g)$ ou encore $D \in \mathrm{Dom}(\tau_g^2)$. Pour conclure voir la remarque 3.4.

($D_5 \Leftarrow D_4$) Puisque $\chi(n = k) = 0$ si $k < n$ il s'en suit que $D(n, n-1) = 0$.

($D_4 \Leftarrow D_5$) Si $D(n, n-1) = 0$ pour tout n, alors $D(n,k) = 0$ pour tout $k < n$. □

Exemple 6. On a vu que la double suite identité I de terme général $I(n,k) = \chi(n = k)\chi(n \geq 0)$ est solution de toutes les récurrences hyperbinomiales $\mathcal{HB}(x, -x, -x; y, -y, 1)$. On aurait pu déduire le même résultat de la proposition précédente en remarquant que dans (3.69) on doit avoir $d'_1 + d'_2 = 0$ et $d'_3 = 1$.

Définition 12. On appelle alternée une hyperbinomiale appartenant à l'un des domaines $\mathrm{Dom}^\infty(\tau_h \circ \tau_g)$ ou $\mathrm{Dom}^\infty(\tau_g \circ \tau_h)$

Il n'est pas évident qu'il existe des hyperbinomiales alternées non triviales[2]. Dans ce qui suit on en donne deux exemples.

Exemple 7. Considérons l'hyperbinomiale $Alt = \mathcal{HB}(-1, 2, 1; 1 - 2, 2)$ ainsi que son symétrique $(\rho Alt) = \mathcal{HB}(-1, 2, 2; 1 - 2, 1)$. On voit que l'on a $\tau_g Alt = \rho Alt$, or puisque $\tau_h \rho = \rho \tau_g$ on a aussi

$$\tau_h(\tau_g Alt) = \tau_h(\rho Alt) = \rho(\tau_g Alt) = \rho^2 Alt = Alt, \tag{3.76}$$

de sorte que $Alt \in \mathrm{Dom}^\infty(\tau_h \circ \tau_g)$ et $\rho Alt \in \mathrm{Dom}^\infty(\tau_g \circ \tau_h)$. Pour trouver le terme général de Alt on remarque que $Alt(1,1) = 1$, $Alt(1,0) = 0$ et on a pour $n, k \geq 0$

$$Alt(n+2, k+1) = Alt(n,k) \tag{3.77}$$

de sorte que

$$Alt(n,k) = \chi(\lfloor k = n/2 \rfloor) = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 2k \text{ ou } n = 2k+1, \\ 0, & \text{autrement.} \end{cases} \tag{3.78}$$

On caractérise les hyperbinomiales alternées tout comme on l'a fait pour les hyperbinomiales verticales et diagonales.

Proposition 3.4.2 *Pour $A = \mathcal{HB}(a_1, a_2, a_3; a'_1, a'_2, a'_3)$ les quatre énoncés suivants[3] sont équivalents et chacun caractérise une hyperbinomiale alternée:*

$$A_1. \quad A \in Dom^\infty(\tau_h \circ \tau_g); \tag{3.79}$$

[2] C'est-à-dire non nulle.

[3] Ou leurs équivalents par réflexion.

(3.80) A_2. $A \in Dom(\tau_h \circ \tau_g)^2$;

(3.81) A_3. $a_1 + a_3 = 2a_1 + a_2 = 2a'_1 + a'_2 = a'_2 + a'_3 = 0$;

(3.82) A_4. $A(n,k) = (a_3)^{n-k}(a'_1)^k\chi(\lfloor k = n/2 \rfloor)$.

Preuve. Nous montrons que $A_1 \Leftarrow A_2 \Leftarrow A_3 \Leftarrow A_4 \Leftarrow A_1$.

($A_1 \Leftarrow A_2$) Comme dans la proposition 3.4.1, $\mathrm{Dom}^\infty(\tau_h \circ \tau_g) \subseteq \mathrm{Dom}(\tau_h \circ \tau_g)^2$.

($A_2 \Leftarrow A_3$) Puisque $A \in \mathrm{Dom}(\tau_g \circ \tau_h \circ \tau_g)$, alors, par (3.61), $a_3 = -a_1$, $a_2 = -2a_1$, $a'_3 = -2a'_2 - 2a'_1$ et

$$(\tau_g \circ \tau_h \circ \tau_g H) = \mathcal{HB}(a_1, a_2, a_2; a'_1, a'_2, a'_1) \in \mathrm{Dom}(\tau_h)$$

d'où $2a'_1 + a'_2 = 0$.

($A_3 \Leftarrow A_4$) Par les identités (3.81), $A = \mathcal{HB}(-a_3, 2a_3, a_3; a'_3, -2a'_3, 2a'_3)$ et le terme général de A s'exprime en fonction de celui de *Alt* par simplification de facteur admissible universel.

($A_4 \Leftarrow A_1$) Il suffit de remarquer que les facteurs admissibles universels commutent avec les opérateurs de translation et utiliser l'exemple 3.4.1. □

3.4.2 Classes Éventuelles et Prolongées

Les classes principales $\mathcal{A}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{D}$,$\mathcal{V}$ et $\mathcal{R}$ ne sont pas suffisantes pour recouvrir l'ensemble de toutes les hyperbinomiales possibles. La définition suivante donne une façon naturelle de prolonger ces classes principales.

Définition 13. Soit $\mathcal{C} \in \{\mathcal{A}, \mathcal{N}, \mathcal{D}, \mathcal{V}, \mathcal{R}\}$ l'une des classes principales définies dans la section précédente et soit $H \in \mathcal{HB}$ une hyperbinomiale. On dit que H est *éventuellement* dans $\mathcal{C}$ et on écrit $H \in \mathcal{E}_\mathcal{C}$ si, et seulement s'il existe des opérateurs de translation $\tau_m, \ldots, \tau_1$, avec $\tau_i \in \{\tau_b, \tau_d, \tau_g, \tau_h\}$ pour $1 \leq i \leq m$, tels que

(3.83) $$(\tau_m \circ \cdots \circ \tau_1)H \in \mathcal{C}.$$

On appelle *classe éventuelle* l'une des classes $\mathcal{E}_\mathcal{C}$ et on dénote $O_\mathcal{C}(H)$ pour le nombre minimal d'opérateurs nécessaires à avoir (3.83) que l'on appelle *l'ordre* de H dans $\mathcal{C}$. On convient que $O_\mathcal{C}(H) = 0$ pour $H \in \mathcal{C}$ et $O_\mathcal{C}(H) = \infty$ si $H \notin \mathcal{E}_\mathcal{C}$.

Lorsque τ est un opérateur composé tel que $\ell(\tau) = O_\mathcal{C}(H)$ et que $\tau H \in \mathcal{C}$, alors on dit que τ est un *opérateur minimal de réduction* de H à $\mathcal{C}$.

Remarque 2. On rappelle que $\mathcal{N} = \mathcal{V} \cap \mathcal{D}$ et $\mathcal{R} \cap (\mathcal{V} \cup \mathcal{D}) = \emptyset$, ainsi on a aussi $\mathcal{E}_\mathcal{N} = \mathcal{E}_\mathcal{V} \cap \mathcal{E}_\mathcal{D}$, $\mathcal{E}_\mathcal{R} \cap (\mathcal{E}_\mathcal{V} \cup \mathcal{E}_\mathcal{D}) = \emptyset$ de même que $\mathcal{E}_\mathcal{R} \cap \mathcal{E}_\mathcal{N} = \emptyset$.

Pour la démonstration de la proposition suivante il est aussi utile de rappeler qu'en écrivant $\tau H = C$ on sous-entend que $H \in \mathrm{Dom}(\tau)$ et alors on peut déduire que $C \in \mathrm{Dom}(\tau^{-1})$.

Proposition 3.4.3 *Soit $H \in \mathcal{E}_\mathcal{C}$. Il n'existe qu'un seul et unique opérateur minimal de réduction τ de H à $\mathcal{C}$ et il est uniquement composé de τ_g et τ_h.*

Preuve. On démontre d'abord la proposition dans le cas où $O_{\mathcal{C}} = \ell(\tau) = 1$ en examinant ce qui arrive pour chacune des classes.

- Par définition d'hyperbinomiale régulière, si $\tau H = R \in \mathcal{R}$, alors puisque $R \notin (\mathrm{Dom}(\tau_g)$ et $R \notin (\mathrm{Dom}(\tau_h))$ on a aussi, par la remarque 3.4.2, $\tau \notin \{\tau_g^{-1}, \tau_h^{-1}\} = \{\tau_d, \tau_b\}$.

- Dans le cas où $C = N \in \mathcal{N}$ alors, puisque $\tau_g N = \tau_h N = N$, on doit nécessairement avoir $\tau \in \{\tau_g, \tau_h\}$ car autrement on aurait $H \in N$ ce qui contredit l'hypothèse que $O_{\mathcal{N}}(H) = 1$.

- Si $\tau_d H = D \in \mathcal{D}$, alors, par définition, $D \in \mathrm{Dom}(\tau_g)$ et $\tau_g D = (\tau_g \circ \tau_d)H = H \in \mathcal{D}$ ce qui contredit l'hypothèse que $O_{\mathcal{D}}(H) = 1$. D'autre part, si $\tau_b H = D \in \mathcal{D}$, alors $D \in \mathrm{Dom}(\tau_h)$ d'où $D = N$ et on se ramène au point précédent. Le cas où $\mathcal{C} = \mathcal{V}$ se traite de la même façon.

- Pour le dernier cas il suffit de considérer $\tau H = A \in \mathrm{Dom}^{\infty}(\tau_g \circ \tau_h)$. Si on suppose que $\tau \in \{\tau_d, \tau_h\}$, alors $A = N$ et on revient au deuxième point. Par contre, si on suppose que $\tau \in \{\tau_g, \tau_b\}$, alors $H = \tau^{-1}A = \rho A \in \mathcal{A}$ ce qui est contraire à l'hypothèse que $O_{\mathcal{A}}(H) = 1$. En résumé pour ce point

$$H \in \mathcal{E}_{\mathcal{A}} \Leftrightarrow H \in \mathcal{A}.$$

Lorsque $O_{\mathcal{C}} = r \geq 2$, il existe des opérateurs de translation $\tau_r, \ldots, \tau_1$, tous de longueur 1, tels que $(\tau_r \circ \cdots \circ \tau_1)H = C \in \mathcal{C}$ et, pour ne pas contredire la minimalité de r

$$\forall_{1 \leq j \leq r-1} (\tau_j \circ \cdots \circ \tau_1)H \notin \mathcal{C}. \tag{3.84}$$

Soit $G = (\tau_{r-1} \circ \cdots \circ \tau_1)H$. En prenant $j = r-1$ dans (3.84) on a $G \notin \mathcal{C}$ et $\tau_r G \in \mathcal{C}$ avec $\ell(\tau_r) = 1$ de sorte que $O_{\mathcal{C}}(G) = 1$ ce qui implique que $\tau_r \in \{\tau_g, \tau_h\}$.

En poursuivant, on ne peut pas avoir $\tau_{r-1} = \tau_r^{-1}$ pour ne pas contredire la minimalité de r. Par exemple, si $\tau_r = \tau_g$, alors $\tau_{r-1} \neq \tau_g^{-1} = \tau_d$. Si dans cet exemple on suppose que $\tau_{r-1} = \tau_b$, alors on a $G \in \mathrm{Dom}(\tau_b^{-1}) = \mathrm{Dom}(\tau_h)$ de sorte que $G = N$ et que l'on a la contradiction $O_{\mathcal{N}}(H) \leq 1 \leq r-1$. Pour $\tau_r = \tau_h$ on obtient les mêmes déductions et on poursuit de même pour τ_{r-2}.

Pour montrer l'unicité de l'opérateur minimal de réduction on utilise le même type de raisonnements. Soient $\tau = \tau_r \circ \cdots \circ \tau_1$ et $\tau' = \tau'_r \circ \cdots \circ \tau'_1$ deux opérateurs minimaux de réduction de H à $\mathcal{C}$. Si $\tau \neq \tau'$, alors il existe un plus petit indice $m < r$ tel que $\tau_m \neq \tau'_m$ et $\tau_j = \tau'_j$ pour tout $j < m$. Or, puisque les opérateurs minimaux de réduction sont uniquement composés de τ_g et τ_h il s'en suit que

$$\{\tau_m, \tau'_m\} = \{\tau_g, \tau_h\}$$

et alors

$$(\tau_{m-1} \circ \cdots \circ \tau_1)H = \mathcal{N}$$

et on a la contradiction $H \in \mathcal{E}_{\mathcal{N}}$ avec $O_{\mathcal{N}} < m - 1 \leq r$. □

La proposition précédente justifie la définition suivante.

Définition 14. Soit τ l'opérateur minimal de réduction de H à $\mathcal{C}$. On dénote $I_{\mathcal{C}}(H)$, la multiplicité de τ_g dans τ, et on appelle ce nombre *indice de réduction* de H. On écrit également $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}(R, I)$ pour la classe des hyperbinomiales telles que $R = R_{\mathcal{C}}(H)$ et $I = I_{\mathcal{C}}(H)$ et on dit que $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}(R, I)$ est une *classe prolongée.*

On verra, par le théorème 3.4.5 qu'il existe très peu de classes prolongées non vides.

Exemple 8. Comme on l'a vu au quatrième point de la démonstration de la proposition 3.4.3, $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}(0, 0)$ est la seule classe alternée non vide. En outre, pour reprendre la remarque 3.4.2 on a aussi

$$\mathcal{E}_{\mathcal{N}}(R, I) = \mathcal{E}_{\mathcal{V}}(R, I) \cap \mathcal{E}_{\mathcal{D}}(R, I).$$

Proposition 3.4.4 *Soit $H \in \mathcal{E}_{\mathcal{C}}(R, I)$ et $\tau = \tau_R \circ \cdots \circ \tau_1$ son opérateur minimal de réduction tel que $\tau H = C \in \mathcal{E}_{\mathcal{C}}$. Pour $n \geq R$ on a*

$$H(n, k) = H(R, I)C(n - R, k - I), \tag{3.85}$$

et pour $n \leq R$, $H(n, k)$ est nul sauf pour une valeur $k = k_n$ donnée par

$$k_n = \sum_{j=1}^{n} \chi(\tau_j = \tau_g) = \#\{j \leq n | \tau_j = \tau_g\}. \tag{3.86}$$

Preuve. On rappelle que si $H \in \mathrm{Dom}(\tau_g)$, alors $H(1, 0) = 0$ et

$$H(n, k) = H(1, 1)(\tau_g H)(n - 1, k - 1)$$

et si $H \in \mathrm{Dom}(\tau_h)$, alors $H(1, 1) = 0$ et

$$H(n, k) = H(1, 0)(\tau_h H)(n - 1, k).$$

Il ne reste plus qu'à montrer que $H(n, k_n) \neq 0$. Or, si on suppose que $H(n, k_n) = 0$, alors $H \in \mathcal{E}_{\mathcal{N}}$ avec $R_{\mathcal{N}} < n < R$ ce qui contredit la minimalité de R. □

Remarque 3. Même lorsque $n > R$ on a $H(n, k) = 0$ pour plusieurs valeurs de k. Tout d'abord, comme C est triangulaire, on a pour $H \in \mathcal{E}_{\mathcal{C}}(R, I)$

$$H(n, k) = 0, \text{ si } k < I \text{ ou } k > n - R + I, \tag{3.87}$$

et en particulier $H(n, k) = 0$ si $n > R_{\mathcal{N}}$, si $k \neq I_{\mathcal{V}}$ ou si $k \neq n - I_{\mathcal{D}}$ lorsque respectivement $\mathcal{C} = \mathcal{N}$, $\mathcal{V}$ ou $\mathcal{D}$.

On fait aussi des observations intéressantes en considérant le symétrique ρH. En outre

$$H \in \mathcal{E}_{\mathcal{V}}(R, I) \Leftrightarrow (\rho H) \in \mathcal{E}_{\mathcal{D}}(R, R - I), \tag{3.88}$$

et avec $\mathcal{C} = \mathcal{R}$ ou $\mathcal{N}$ on a aussi

$$H \in \mathcal{E}_{\mathcal{C}}(R, I) \Leftrightarrow (\rho H) \in \mathcal{E}_{\mathcal{C}}(R, R - I) \tag{3.89}$$

Théorème 3.4.5 (Théorème de classification) *Soit $\mathcal{HB}$ l'ensemble de toutes les hyperbinomiales spéciales. On a*

$$\mathcal{HB} = \mathcal{A} \cup \mathcal{E}_{\mathcal{D}} \cup \mathcal{E}_{\mathcal{V}} \cup \mathcal{E}_{\mathcal{R}} \tag{3.90}$$

et si $H \in \mathcal{E}_{\mathcal{C}}$ avec $\mathcal{C} \in \{\mathcal{D}, \mathcal{V}, \mathcal{R}\}$, alors

$$O_{\mathcal{C}}(H) \leq 3. \tag{3.91}$$

Preuve. Supposons que H soit une hyperbinomiale qui ne soit dans aucune des classes $\mathcal{E}_{\mathcal{R}}$, $\mathcal{E}_{\mathcal{D}}$, $\mathcal{E}_{\mathcal{V}}$ et $\mathcal{A}$.

Le fait que $H \notin \mathcal{E}_{\mathcal{R}}$ implique qu'il existe des opérateurs de translation τ, composé de τ_g et τ_h, de longueur quelconque tels que $H \in \mathrm{Dom}(\tau)$ et en particulier avec $\ell(\tau) = 4$. Or, par la proposition 3.4.1, ni τ_h^2, ni τ_g^2 ne peuvent entrer dans la composition de τ sinon H serait éventuellement verticale ou éventuellement diagonale. L'opérateur τ doit donc être composé alternativement de τ_g et τ_h au quel cas H est alternée par la proposition 3.4.2.

Par la suite, pour bien énumérer les classes prolongées possiblement non vides et procéder à leur caractérisation, on introduit les notions de domaines éventuels et prolongés. On écrit $H \in \mathrm{Dome}(\tau)$ si, et seulement si $H \notin \mathrm{Dom}(\tau')$ pour tout opérateur τ' composé de τ_g et τ_h distinct et de même longueur que τ. Par ailleurs, on écrit $H \in \mathrm{Doms}(\tau)$ pour signifier que τH est régulière.

Avec ces notations, le théorème revient à dire que les seules classes prolongées, possiblement non vides, sont les suivantes :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Doms}(Id) = \mathcal{E}_{\mathcal{R}}(0,0) &= \mathcal{R}; && (3.92)\\
\mathrm{Doms}(\tau_h) &= \mathcal{E}_{\mathcal{R}}(1,0); && (3.93)\\
\mathrm{Doms}(\tau_g) &= \mathcal{E}_{\mathcal{R}}(1,1); && (3.94)\\
\mathrm{Doms}(\tau_g \circ \tau_h) \cup \mathrm{Doms}(\tau_h \circ \tau_g) &= \mathcal{E}_{\mathcal{R}}(2,1); && (3.95)\\
\mathrm{Doms}(\tau_h \circ \tau_g \circ \tau_h) &= \mathcal{E}_{\mathcal{R}}(3,1); && (3.96)\\
\mathrm{Doms}(\tau_g \circ \tau_h \circ \tau_g) &= \mathcal{E}_{\mathcal{R}}(3,2); && (3.97)\\
\mathrm{Dome}(\tau_g^2) = \mathcal{E}_{\mathcal{D}}(0,0) &= \mathcal{D}; && (3.98)\\
\mathrm{Dome}(\tau_g^2 \circ \tau_h) &= \mathcal{E}_{\mathcal{D}}(1,0); && (3.99)\\
\mathrm{Dome}(\tau_g^2 \circ \tau_h \circ \tau_g) &= \mathcal{E}_{\mathcal{D}}(2,1); && (3.100)\\
\mathrm{Dome}(\tau_h^2) = \mathcal{E}_{\mathcal{V}}(0,0) &= \mathcal{V}; && (3.101)\\
\mathrm{Dome}(\tau_h^2 \circ \tau_g) &= \mathcal{E}_{\mathcal{V}}(1,1); && (3.102)\\
\mathrm{Dome}(\tau_h^2 \circ \tau_g \circ \tau_h) &= \mathcal{E}_{\mathcal{V}}(2,1); && (3.103)\\
\mathrm{Doms}^2(\tau_g \circ \tau_h) \cup \mathrm{Doms}^2(\tau_h \circ \tau_g) &= \mathcal{A}. && (3.104)
\end{aligned}
$$

Par exemple pour (3.102), si $H \in \mathrm{Dom}(\tau_h^2 \circ \tau_g)$, alors $\tau_g H \in \mathrm{Dom}(\tau_h^2)$ et, par la proposition 3.4.1, on a $\tau_g H \in \mathcal{E}_V$ et la définition de domaine éventuel assure que $H \in \mathcal{E}_V(1,1)$. □

Remarque 4. Bien que l'on puisse énumérer toutes les classes prolongées non vides, on ne dispose pas de caractérisations analogues à celles de la section 3.4.1. Dans ce qui suit, on donne, pour chacune des classes prolongées données dans dans le théorème 3.4.5, des conditions sur les paramètres de $H = \mathcal{HB}(h_1, h_2, h_3; h_1', h_2', h_3')$ pour que $H \in \mathcal{E}_{\mathcal{C}}(r,i)$, l'hyperbinomiale $C \in \mathcal{C}$ telle que $\tau H = C$ et, tout comme le permet la proposition 3.4.4, l'expression du terme de H en fonction de celui de C.

Toutes les informations désirées peuvent être obtenue à l'aide des résultats précédents. D'autre part, on peut toujours simplifier et automatiser cette procédure. À cette fin, on introduit la notation pour les polynômes

$$H_{\tau_g}(n,k) = h_1 n + h_2 k + h_3, \tag{3.105}$$
$$H_{\tau_h}(n,k) = h_1' n + h_2' k + h_3', \tag{3.106}$$

et on rappelle les définitions

$$H \in \mathrm{Dome}(\tau) \Leftrightarrow H \in \mathrm{Dom}(\tau) \quad \text{et} \quad \forall_{\substack{\tau' \neq \tau \\ \ell(\tau')=\ell(\tau)}} H \notin \mathrm{Dom}(\tau') \tag{3.107}$$
$$H \in \mathrm{Doms}(\tau) \Leftrightarrow H \in \mathrm{Dom}(\tau) \quad \text{et} \quad \forall_{\tau' \in \{\tau_g, \tau_h\}} (\tau H) \notin \mathrm{Dom}(\tau') \tag{3.108}$$

où τ et τ' sont des opérateurs de translations composés de τ_g et τ_h. Les conditions d'appartenance à ces domaines peuvent alors s'écrire

$$H \in \mathrm{Dome}(\tau_h) \Leftrightarrow H_{\tau_g}(1,0) \neq 0 \text{ et } H_{\tau_h}(1,1) = 0; \tag{3.109}$$
$$H \in \mathrm{Dome}(\tau_g) \Leftrightarrow H_{\tau_g}(1,0) = 0 \text{ et } H_{\tau_h}(1,1) \neq 0; \tag{3.110}$$
$$H \in \mathrm{Doms}(\tau_h) \Rightarrow (\tau_h H)_{\tau_g}(1,0) \neq 0 \text{ et } (\tau_h H)_{\tau_h}(1,1) \neq 0; \tag{3.111}$$
$$H \in \mathrm{Doms}(\tau_g) \Rightarrow (\tau_g H)_{\tau_g}(1,0) \neq 0 \text{ et } (\tau_g H)_{\tau_h}(1,1) \neq 0; \tag{3.112}$$

puis pour simplifier les conditions (3.111) et (3.112) et permettre l'itération

$$(\tau H)_{\tau_g}(1,0) = H_{\tau_h}(\ell(\tau)+1, \ell_g(\tau)) = h_1 \ell(\tau) + h_2 \ell_g(\tau) + h_1 + h_3, \tag{3.113}$$
$$\begin{aligned}(\tau H)_{\tau_h}(1,1) &= H_{\tau_g}(\ell(\tau)+1, \ell_g(\tau)+1) \\ &= h_1' \ell(\tau) + h_2' \ell_g(\tau) + h_1' + h_2' + h_3',\end{aligned} \tag{3.114}$$

où on rappelle que $l(\tau)$ est la longueur de τ et $\ell_g(\tau)$ la multiplicité de τ_g.

Ainsi (3.109) à (3.112) donne l'ensemble des conditions à satisfaire en considérant aussi que

$$H \in \mathrm{Dome}(\tau) \Leftrightarrow \forall_{1 \leq j < \ell(\tau)} (\tau_j \circ \cdots \circ \tau_1) H \in \mathrm{Dome}(\tau_{j+1}) \tag{3.115}$$

lorsque $\tau = \tau_{l(\tau)} \circ \cdots \tau_2 \circ \tau_1$ et, par la suite, τH satisfait la récurrence

$$(\tau H) = \mathcal{HB}(h_1, h_2, H_{\tau_g}(\ell(\tau), \ell_g(\tau)); h_1', h_2', H_{\tau_h}(\ell(\tau), \ell_g(\tau))) \tag{3.116}$$

et pour $n \geq l(\tau)$:

$$H(n,k) = H(\ell(\tau), \ell_g(\tau)); \quad (\tau H)(n - \ell(\tau), k - \ell_g(\tau)). \tag{3.117}$$

Exemple 9. Effectuons la procédure pour $\mathcal{E}_{\mathcal{R}}(3,2)$. En (3.97) on a vu que

$$H \in \mathcal{E}_{\mathcal{R}}(3,2) \Leftrightarrow H \in \text{Doms}(\tau_g \circ \tau_h \circ \tau_g).$$

Si on suppose que $H = \mathcal{HB}(h_1, h_2, h_3; h'_1, h'_2, h'_3)$, alors on doit résoudre le système

$$\begin{cases} H_{\tau_g}(1,0) = 0 & , \quad H_{\tau_h}(1,1) \neq 0, \\ \tau_g H_{\tau_g}(1,0) \neq 0 & , \quad (\tau_g H)_{\tau_h}(1,1) = 0, \\ (\tau_h \tau_g H)_{\tau_g}(1,0) = 0 & , \quad (\tau_h \tau_g H)_{\tau_h}(1,1) \neq 0, \\ (\tau_g \tau_h \tau_g H)_{\tau_g}(1,0) \neq 0 & , \quad (\tau_g \tau_h \tau_g H)_{\tau_h}(1,1) \neq 0, \end{cases} \tag{3.118}$$

ou encore avec (3.113) et (3.114)

$$\begin{cases} H_{\tau_g}(1,0) = 0 & , \quad H_{\tau_h}(1,1) \neq 0, \\ H_{\tau_g}(2,1) \neq 0 & , \quad H_{\tau_h}(2,2) = 0, \\ H_{\tau_g}(3,1) = 0 & , \quad H_{\tau_h}(3,2) \neq 0, \\ H_{\tau_g}(4,2) \neq 0 & , \quad H_{\tau_h}(4,3) \neq 0, \end{cases} \tag{3.119}$$

et avec les définitions 3.105 et 3.106 cela revient à

$$\begin{cases} h_1 + h_3 = 0 & , \quad h'_1 + h'_2 + h'_3 \neq 0, \\ 2h_1 + h_2 + h_3 \neq 0 & , \quad 2h'_1 + 2h'_2 + h'_3 = 0, \\ 3h_1 + h_2 + h_3 = 0 & , \quad 3h'_1 + 2h'_2 + h'_3 \neq 0, \\ 4h_1 + 2h_2 + h_3 \neq 0 & , \quad 4h'_1 + 3h'_2 + h'_3 \neq 0, \end{cases} \tag{3.120}$$

et ainsi on trouve les conditions d'appartenance à la classe $\mathcal{E}_{\mathcal{R}}(3,2)$

$$h_1 \neq 0, h_2 = -2h_1, h_3 = -h_1, \tag{3.121}$$

$$h'_3 = -2(h'_1 + h'_2), \tag{3.122}$$

$$h'_1, h'_2, h'_3 \neq 0, 2h'_1 + h'_2 \neq 0, \tag{3.123}$$

et $(\tau_g \circ \tau_h \circ \tau_g)H = R \in \mathcal{R}$ avec

$$R = \mathcal{HB}(h_1, -2h_1, -2h_1; h'_1, h'_2, h'_1), \tag{3.124}$$

et pour $n \geq 3$

$$H(n,k) = H(3,2)R(n-3, k-2) \tag{3.125}$$

où

$$H(3,2) = H_{\tau_h}(1,1) \cdot H_{\tau_g}(2,1) \cdot H_{\tau_h}(3,2) = h_1 h'_1 (h'_1 + h'_2). \tag{3.126}$$

En résumé, pour $\tau = (\tau_g \circ \tau_h \circ \tau_g)$, $H = \mathcal{HB}(h_1, h_2, h_3; h'_1, h'_2, h'_3) \in \mathrm{Doms}(\tau) = \mathcal{E}_R(3, 2)$ si, et seulement si

$$(3.127) \qquad \begin{cases} H = \mathcal{HB}(h_1, -2h_1, -h_1; h'_1, h'_2, -2h'_1 - 2h'_2), \\ \tau H = \mathcal{HB}(h_1, -2h_1, -2h_1; h'_1, h'_2, h'_1), \\ H(n,k) = h_1 h'_1 (h'_1 + h'_2)(\tau H)(n-3, k-2), \quad (n \geq 3), \\ h_1 h'_1 h'_2 (h'_1 + h'_2)(2h'_1 + h'_2) \neq 0. \end{cases}$$

De plus, par les remarques 3.4.2 et 3.127, on a, avec $\tau = (\tau_h \circ \tau_g \circ \tau_h)$, $H \in \mathrm{Doms}(\tau) = \mathcal{E}_R(3, 1)$ si, et seulement si

$$(3.128) \qquad \begin{cases} H = \mathcal{HB}(h_1, h_2, -2h_1; h'_1, -2h'_1, h'_1), \\ \tau H = \mathcal{HB}(h_1, h_2, h_1 + h_2; h'_1, -2h'_1, 2h'_1), \\ H(n,k) = -h_1 h'_1 (h_1 + h_2)(\tau H)(n-3, k-1), \quad (n \geq 3), \\ h_1 h'_1 h'_2 (h_1 + h_2)(2h_1 + h_2) \neq 0. \end{cases}$$

Exemple 10. Par (3.95), $\{\mathrm{Doms}(\tau_g \circ \tau_h) \cup \mathrm{Doms}(\tau_h \circ \tau_g)\} = \mathcal{E}_R(2, 1)$. Or, pour $\tau = \tau_h \circ \tau_g$, $H \in \mathrm{Doms}(\tau)$ si, et seulement si

$$(3.129) \qquad \begin{cases} H = \mathcal{HB}(h_1, h_2, -h_1; h'_1, h'_2, -2h'_1 - 2h'_2), \\ \tau H = \mathcal{HB}(h_1, h_2, h_1 + h_2; h'_1, h'_2, -h'_2), \\ H(n,k) = -(h_1 + h_2)(h'_1 + h'_2)(\tau H)(n-2, k-1), \quad (n \geq 2), \\ h'_1 (h_1 + h_2)(2h_1 + h_2) h'_1 (h'_1 + h'_2) \neq 0. \end{cases}$$

et pour $\tau = \tau_g \circ \tau_h$, $H \in \mathrm{Doms}(\tau)$ si, et seulement si

$$(3.130) \qquad \begin{cases} H = \mathcal{HB}(h_1, h_2, -2h_1; h'_1, h'_2, -h'_1 - h'_2), \\ \tau H = \mathcal{HB}(h_1, h_2, h_2; h'_1, h'_2, h'_1), \\ H(n,k) = -h_1 h'_1 (\tau H)(n-2, k-1), \qquad (n \geq 2), \\ h_1 (h_1 + h_2) h'_1 (2h'_1 + h'_2) \neq 0. \end{cases}$$

Pour en finir avec les hyperbinomiales éventuellement régulières, $H \in \mathrm{Doms}(\tau_g) = \mathcal{E}_R(1, 1)$ si, et seulement si

$$(3.131) \qquad \begin{cases} H = \mathcal{HB}(h_1, h_2, -h_1; h'_1, h'_2, h'_3), \\ \tau_g H = \mathcal{HB}(h_1, h_2, h_2; h'_1, h'_2, h'_1 + h'_2 + h'_3), \\ H(n,k) = (h'_1 + h'_2 + h'_3)(\tau_g H)(n-1, k-1), \quad (n \geq 1), \\ (h_1 + h_2)(h'_1 + h'_2 + h'_3)(2h'_1 + 2h'_2 + h'_3) \neq 0. \end{cases}$$

et $H \in \mathrm{Doms}(\tau_h) = \mathcal{E}_R(1, 0)$ si, et seulement si

$$(3.132) \qquad \begin{cases} H = \mathcal{HB}(h_1, h_2, h_3; h'_1, h'_2, -h'_1 - h'_2), \\ \tau_h H = \mathcal{HB}(h_1, h_2, h_1 + h_3; h'_1, h'_2, -h'_2), \\ H(n,k) = (h_1 + h_3)(\tau_h H)(n-1, k), \qquad (n \geq 1), \\ (h_1 + h_3)(2h_1 + h_3) h'_1 \neq 0. \end{cases}$$

Exemple 11. Il reste à caractériser les hyperbinomiales éventuellement verticales et diagonales. Or, on voit que les systèmes d'équations associés aux classes $\mathcal{E}_{\mathcal{V}}(2,1)$ et $\mathcal{E}_{\mathcal{D}}(2,1)$ n'ont pas de solutions, de sorte que ces classes sont vides. Pour $\tau = \tau_g^2 \circ \tau_h$, $H \in \mathrm{Dome}(\tau) = \mathcal{E}_{\mathcal{D}}(1,0)$ si, et seulement si

$$(3.133) \quad \begin{cases} H = \mathcal{HB}(h_1, -h_1, -2h_1; h_1', h_2', -h_1' - h_2'), \\ \tau_h H = \mathcal{HB}(h_1, -h_1, -h_1; h_1', h_2', -h_2'), \\ H(n,k) = -h_1(\tau_h H)(n-1,k), & (n \geq 1), \\ (\tau_h H)(n,k) = \chi(n=k) \prod_{i=1}^{n} [(h_1' + h_2')i - h_2'], \\ h_1 h_1' (2h_1' + h_2') \neq 0. \end{cases}$$

et pour $\mathcal{E}_V(1,1)$ on a, par symétrie un résultat équivalent.

3.5 Résumé des Critères de Canonicité

Pour une hyperbinomiale spéciale H on a, ou bien $H(n,k) = 0$ sauf pour au plus une valeur de k et on peut déterminer a priori son terme général, ou bien H est éventuellement régulière et on peut exprimer son terme général en fonction d'une hyperbinomiale

$$C = \mathcal{HB}(c_1, c_2, c_3; c_1', c_2', c_3')$$

telle que

$$(3.134) \quad c_1 + c_3 \neq 0,$$

$$(3.135) \quad c_1' + c_2' + c_3' \neq 0,$$

et, avec les facteurs admissibles, on peut aussi avoir

$$\begin{aligned} & c_1 + c_3 > 0, \\ & c_1' + c_2' + c_3' > 0, \\ & c_1 + c_2 \neq 0 \text{ ou } (c_1, c_2, c_3) = (0,0,1), \\ & c_1' \neq 0 \text{ ou } (c_1', c_2', c_3') = (0,0,1), \end{aligned}$$

et dans le cas où H a des paramètres rationnels on peut avoir en plus les paramètres c_i, c_i' entiers et

$$(3.136) \quad \mathrm{pgcd}(c_1, c_2, c_3) = 1,$$

$$(3.137) \quad \mathrm{pgcd}(c_1', c_2', c_3') = 1,$$

Finalement, avec les critères de canonicité pour la symétrie, on peut exiger de satisfaire l'une des trois relation

$$(3.138) \quad c_1 + c_3 < c_1' + c_2' + c_3',$$

$$(3.139) \quad c_1 + c_3 = c_1' + c_2' + c_3' \text{ et } c_1 < c_1' + c_2',$$

$$(3.140) \quad c_1 = c_1' + c_2', c_3 = c_3' \text{ et } c_2 \leq -c_2'.$$

Ainsi on appelle *canonique* une hyperbinomiale spéciale satisfaisant à tous ces critères de canonicité.

Exemple 12. Considérons l'échantillon d'hyperbinomiales donné par

$$\mathcal{HB}_2 = \{H = \mathcal{HB}(h_1, h_2, h_1; h_1', h_2', h_3') |\ h_1 + h_2, h_1' + h_2', h_i, h_i' \in \{0, \pm 1, \pm 2\}\}.$$

On compte que $|\mathcal{HB}_2| = 9025$ hyperbinomiales. Or parmi celles-ci très peu sont canoniques. En fait on en dénombre 325 qui suffisent pour exprimer les termes généraux de toutes les hyperbinomiales de $\mathcal{HB}_2$.

Exemple 13. Considérons l'hyperbinomiale $X = \mathcal{HB}(2, -2, 3; 2, -2, 2)$ qui n'est pas canonique pour la symétrie et pour les facteurs.

Pour trouver l'hyperbinomiale canonique en fonction de laquelle le terme général $X(n, k)$ peut s'exprimer il suffit de *canoniser* l'hyperbinomiale X pour chacun des opérateurs. On peut faire ces réductions dans n'importe quel ordre conformément aux règles de composition données au début de chapitre.

On simplifie d'abord X par les facteurs $U_{1,2}$ et $V_{2,3}$:

$$Y := \frac{X}{U_{1,2} V_{2,3}} = \mathcal{HB}(0, 0, 1; 1, -1, 1)$$

et $(\rho Y) = \mathcal{HB}(0, 1, 1; 0, 0, 1)$ est canonique. Par ailleurs,

$$(\tau_g S) = \mathcal{HB}(0, 1, 1; 0, 0, 1)$$

pour S l'hyperbinomiale des nombres de Stirling de seconde espèce, ainsi

$$X(n, k) = 2^k S(n + 1, n - k + 1) \prod_{j=1}^{n-k} (2j + 3).$$

Chapitre 4

FONCTIONS GÉNÉRATRICES

Résumé

Dans ce chapitre on trouve, sous forme close, des fonctions génératrices associées aux doubles suites hyperbinomiales. Pour $H = \mathcal{HB}(p(n);q(n))$ on a une formule pour les polynômes hyperbinomiaux $H_n^\ell(t) := \sum_k H(n,k)t^k$ et pour les hyperbinomiales à coefficients polynomiaux du premier degré $G = \mathcal{HB}(\alpha n + \beta k + \gamma; \beta' k + \gamma')$ on a une formule pour les fonctions génératrices $G_k^c(x) := \sum_n G(n,k)x^n/n!$ et $H(x,t) := \sum_{n,k} G(n,k)t^k x^n/n!$. On utilise ensuite ces fonctions génératrices pour exprimer sous forme close le terme général d'une hyperbinomiale et on montre que pour $B = \mathcal{HB}(\alpha n + \beta k + \gamma; \gamma')$ avec $\gamma' \neq 0$ la suite des polynômes hyperbinomiaux $\{B_n^\ell(t)\}_{n\geq 0}$ est une suite de Sheffer.

Pour l'hyperbinomiale $H = \mathcal{HB}(p_1 n + p_2 k + p_3; q_1 n + q_2 k + q_3)$, la fonction génératrice semi-exponentielle $H(x,t)$ satisfait à l'équation différentielle aux dérivées partielles

$$(\alpha + \beta t)H(x,t) = (1 - p_1 x - q_1 x t)\frac{\partial}{\partial x}H(x,t) - (p_2 + q_2 t)t\frac{\partial}{\partial t}H(x,t),$$

où $\alpha = H(1,0) = p_1 + p_3$ et $\beta = H(1,1) = q_1 + q_2 + q_3$. Cependant cette équation n'est pas toujours facile à résoudre.

4.1 Introduction

Lorsqu'une double suite triangulaire (ou une suite de polynômes) est donnée par une équation aux différences, la méthode des fonctions génératrices est souvent très efficace lors de la recherche du terme général. Nous n'apportons pas d'éléments nouveaux à cette théorie en plein essor mais nous nous contentons d'utiliser ici ses méthodes[1] afin d'obtenir des informations sur les hyperbinomi-

[1]Voir par exemple [COM], [GKP], [JOR], [NIV] et [WIL].

ales.

La procédure de résolution d'une équation aux différences par les fonctions génératrices comporte généralement les étapes suivantes.

1. On doit d'abord choisir une fonction génératrice bien adaptée à la suite qui est l'objet d'étude. En général, pour une suite simple $\{a(n)\}_{n\geq 0}$ on choisit la fonction génératrice ordinaire $\sum_n a(n)t^n$ ou la fonction génératrice exponentielle $\sum_n a(n)t^n/n!$; ce choix étant souvent fait en considération du taux de croissance de la suite. Pour une double suite triangulaire, et en particulier pour une hyperbinomiale H, on considère la fonction génératrice exponentielle
$$H(x,t) := \sum_{n,k\geq 0} H(n,k)t^k x^n/n!,$$
pour la famille des *polynômes hyperbinomiaux*
$$H_n^\ell(t) := \sum_{k\geq 0} H(n,k)t^k,$$
et on considère aussi la suite des *fonctions génératrices de colonne*
$$H_k^c(x) := \sum_{n\geq 0} H(n,k)x^n/n!.$$
Ces trois fonctions génératrices sont évidemment reliées par
$$H(x,t) = \sum_{n\geq 0} H_n^\ell(t)x^n/n! = \sum_{k\geq 0} H_k^c(x)t^k,$$
De sorte que $H(x,t) \in K[t][\![x]\!]$ est une série formelle à coefficients dans l'anneau des polynômes en t à coefficients dans un corps K.
On considère aussi les fonctions génératrices ordinaires
$$\begin{aligned} h_k^c(x) &:= \sum_{n\geq 0} H(n,k)x^n, \\ h(x,t) &:= \sum_{n\geq 0} H_n^\ell(t)x^n = \sum_{k\geq 0} h_k^c(x)t^k, \end{aligned}$$
et la suite $H_n := \sum_{k=0}^n H(n,k)$.

2. Ensuite on doit trouver une équation fonctionnelle (ou différentielle) satisfaite par une fonction génératrice que l'on résoud pour en obtenir une expression sous forme d'un assemblage de fonctions élémentaires. Dans la troisième section on montre comment y parvenir pour les fonctions génératrices $H_k^c(x)$ et $H(x,t)$.

3. Finalement, lorsque l'on dispose d'une forme close pour la fonction génératrice, on peut souvent en trouver le terme général. D'autre part, plusieurs identités combinatoires donnent lieu à des équations liant les fonctions génératrices et réciproquement.

4.2 Formules de Passage

Dans cette section on rappelle les divers types de fonctions génératrices que l'on a définies pour les hyperbinomiale ou encore pour des transformées d'hyperbinomiales. On donne aussi certaines équations fonctionnelles.

a) Rapports élémentaires

Évidemment

$$H_n^\ell(t) = [x^n]h(x,t) = [x^n/n!]H(x,t), \tag{4.1}$$

$$h_k^c(x) = [t^k]h(x,t), \tag{4.2}$$

$$H_k^c(x) = [t^k]H(x,t), \tag{4.3}$$

ce qui est équivalent à

$$h(x,t) := \sum_{n\geq 0} H_n^\ell(t)x^n = \sum_{k\geq 0} h_k^c(x)t^k, \tag{4.4}$$

$$H(x,t) = \sum_{n\geq 0} H_n^\ell(t)x^n/n! = \sum_{k\geq 0} H_k^c(x)t^k. \tag{4.5}$$

b) Rapports par évaluation

Les fonctions génératrices $h(x,t)$ et $H(x,t)$ sont aussi des séries formelles à coefficients dans l'anneau $K[t]$ des polynômes en t. Ainsi l'évaluation du paramètre t ne pose aucun problème de convergence. Ainsi, pour t_0 une constante donnée, on écrit $H(x,t_0)$ pour la série formelle

$$\sum_{n,k} H(n,k)t_0^k x^n$$

et on trouve les rapports

$$h(x,0) = \sum_{n,k} H(n,k)x^n 0^k = \sum_n H(n,0)x^n = h_0^c(x), \tag{4.6}$$

$$H(x,0) = \sum_{n,k} H(n,0)x^n/n! = H_0^c(x), \tag{4.7}$$

$$H_n^\ell(1) = \sum_k H(n,k) = H_n, \tag{4.8}$$

Pour chacune des fonctions génératrices nous indiquons, lorsque cela est possible, des formules de passage de chacune de ces fonctions génératrices pour une hyperbinomiale H vers la fonction génératrice correspondante de ρH la réflexion de H, de H_g et H_d les deux parts de son partage, de $F \odot H$ où F est un facteur admissible pour H et finalement pour le produit matriciel $F \times G$ de deux doubles suites triangulaires.

c) Réflexion

Rappelons que pour $H = \mathcal{HB}(p(n,k);q(n,k))$ son image par réflexion ρH a le terme général $(\rho H)(n,k) = H(n,n-k)$ et est telle que $(\rho H) = \mathcal{HB}(q(n,n-k);p(n,n-k))$.

- Pour la suite des polynômes hyperbinomiaux on trouve, en remplaçant k par $n-k$,

$$\begin{aligned} H_n^\ell(t) &= \sum_k H(n,k)t^k \\ &= \sum_k H(n,n-k)t^{n-k} = t^n(\sigma H)_n^\ell(1/t). \end{aligned} \tag{4.9}$$

- On obtient aussi

$$h(x,t) = (\rho h)(xt,1/t), \tag{4.10}$$

$$H(x,t) = (\rho H)(xt,1/t). \tag{4.11}$$

d) Partage et translation

Tel que vu à la section 1.5, quel que soit $H = \mathcal{HB}(p(n,k);q(n,k))$ une hyperbinomiale, on a le partage en deux parts

$$H(n,k) = \alpha H_g(n-1,k) + \beta H_d(n-1,k-1) + \chi(n=k=0)$$

où H_g et H_d sont les hyperbinomiales

$$\begin{aligned} H_g &= \mathcal{HB}(p(n+1,k);q(n+1,k)), \\ H_d &= \mathcal{HB}(p(n+1,k+1);q(n+1,k+1)), \end{aligned}$$

avec aussi $\alpha := H(1,0) = p(1,0)$ et $\beta := H(1,1) = q(1,1)$.

- Pour les polynômes hyperbinomiaux on trouve

$$H_n^\ell(t) = \alpha(H_g)_{n-1}^\ell(t) + \beta t(H_d)_{n-1}^\ell(t) + \chi(n=0). \tag{4.12}$$

- Pour les fonctions génératrices doubles on a aussi

$$h(x,t) = \alpha x(h_g)(x,t) + \beta xt(h_d)(x,t) + 1, \tag{4.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}H(x,t) = \alpha(H_g)(x,t) + \beta t(H_d)(x,t). \tag{4.14}$$

- Pour la fonction génératrice $h_k^c(x)$ on extrait le coefficient de t^k de (4.13) et ainsi

$$h_k^c(x) = [t^k]h(x,t) \tag{4.15}$$

$$= \alpha x[t^k](h_g)(x,t) + \beta x[t^{k-1}](h_d)(x,t) + [t^k]1 \tag{4.16}$$

$$= \alpha x(h_g)_k^c(x) + \beta x(h_d)_{k-1}^c(x) + \chi(k=0) \tag{4.17}$$

et puisque $[t^k]\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[t^k]$ on peut faire de même avec l'équation (4.14) pour obtenir

$$\frac{\partial}{\partial x} H_k^c(x) = \alpha(H_g)_k^c(x) + \beta(H_d)_{k-1}^c(x). \tag{4.18}$$

e) Facteurs admissibles

Rappelons que les facteurs admissibles universels

$$U_{\alpha,\beta}(n,k) = \alpha^{n-k}\beta^k = \alpha^n(\beta/\alpha)^k, \ (\alpha \neq 0) \tag{4.19}$$

sont des suites telles que, pour toute hyperbinomiale $H = \mathcal{HB}(p(n,k); q(n,k))$, la double suite $(U_{\alpha,\beta}H)$ de terme général

$$(U_{\alpha,\beta}H)(n,k) = U_{\alpha,\beta}(n,k)H(n,k)$$

est telle que $(U_{\alpha,\beta}H) = \mathcal{HB}(\alpha \cdot p(n,k); \beta \cdot q(n,k))$.

Rappelons aussi que les facteurs $W_{\beta,\gamma}$ sont des doubles suites de terme général

$$W_{\beta,\gamma}(n,k) = \prod_{j=1}^{k}(\beta j + \gamma). \tag{4.20}$$

Ils sont tels que, pour toute hyperbinomiale $H = \mathcal{HB}(p(n,k); q(n,k))$, la double suite $(W_{\beta,\gamma}H)$ de terme général

$$(W_{\beta,\gamma}H)(n,k) = W_{\beta,\gamma}(n,k)H(n,k)$$

est solution de $\mathcal{HB}(p(n,k); (\beta k + \gamma)q(n,k))$.

- Le fait que $U_{\alpha,\beta}(n,k)$ soit le produit de deux puissances rend aisé l'établissement des rapports. Si on écrit U pour $U_{\alpha,\beta}$ avec α et $\beta \neq 0$, alors

$$\begin{aligned}
(U \odot h)(x,t) &= h(\alpha x, \beta t/\alpha), && (4.21)\\
(U \odot H)(x,t) &= H(\alpha x, \beta t/\alpha), && (4.22)\\
(U \odot H)_n^\ell(t) &= \alpha^n H_n^\ell(\beta t/\alpha), && (4.23)\\
(U \odot H)_k^c(x) &= (\beta/\alpha)^k H_k^c(\alpha x), && (4.24)\\
(U \odot H)_k^c(x) &= (\beta/\alpha)^k H_k^c(\alpha x). && (4.25)
\end{aligned}$$

- Pour la suite H_n qui est une somme sur k, on a un rapport simple lorsque $\alpha = \beta$. Dans ce cas, si on écrit U pour le facteur admissible $U_{\alpha,\alpha}$, alors on a $(UH)_n = \alpha^n H_n$.

- Si on dénote $W = W_{\beta,\gamma}$, alors, puisque les fonctions génératrices de colonnes sont des sommes sur k, on a pour $H = \mathcal{HB}(p_1 n + p_2 k + p_3; q_3)$

$$\begin{aligned}
(Wh)_k^c(x) &= W(n,k)h_k^c(x), && (4.26)\\
(WH)_k^c(x) &= W(n,k)H_k^c(x). && (4.27)
\end{aligned}$$

f) Produit

Si $H := F \times G$ est un produit de doubles suites triangulaires, c'est-à-dire que $H(n,k) = \sum_i F(n,i)G(i,k)$, alors

$$h(x,t) = \sum_j f_j^c(x) G_j^\ell(t), \tag{4.28}$$

$$H(x,t) = \sum_j F_j^c(x) G_j^\ell(t). \tag{4.29}$$

g) Équations fonctionnelles ou différentielles

Lorsque les coefficients d'une hyperbinomiale sont d'une certaine forme on peut établir une équation fonctionnelle ou différentielle satisfaite par chacune des fonctions génératrices. On énumère ici certaines de ces équations où ϑ_x désigne l'opérateur différentiel $x\frac{d}{dx}$.

- Soient b et b' des constantes et $\{a(n)\}_{n\geq 1}$ et $\{a'(n)\}_{n\geq 1}$ des suites données. Pour $H = \mathcal{HB}(a(n) + b\cdot k; a'(n) + b'\cdot k)$ la suite des polynômes hyperbinomiaux $H_n^\ell(t)$ satisfait, pour $n > 0$, à la récurrence différentielle

  $$L_n(t) = \{a(n) + (a'(n) + b')t + (b + b't)\vartheta_t\}L_{n-1}(t)$$

  avec la valeur initiale $L_0(t) = 1$.

- Soient a et a' des constantes, $\{b(k)\}_{k\geq 0}$ et $\{b'(k)\}_{k\geq 0}$ des suites données et $H = \mathcal{HB}(a\cdot n + b(k); a'\cdot n + b'(k))$ une hyperbinomiale. La suite des fonctions génératrices exponentielles de colonne

  $$H_k^c(x) := \sum_{n\geq 0} H(n,k)\frac{x^n}{n!}$$

  satisfait la récurrence différentielle

  $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}C_k(x) = \{a + b(k) + a\vartheta_x\}C_k(x) + \{a' + b'(k) + a'\vartheta_x\}C_{k-1}(x)$$

  avec la valeur initiale

  $$H_0^c(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{\gamma x}, \text{ si } a = 0, \\ \\ (1-ax)^{-\frac{a+\gamma}{a}}, \text{ si } a \neq 0, \end{cases}$$

  où $\gamma := b(0)$.

- Soit $H = \mathcal{HB}(p_1 n + p_2 k + p_3; q_1 n + q_2 k + q_3)$. La fonction génératrice semi-exponentielle $H(x,t)$ satisfait à l'équation aux dérivées partielles

  $$(\alpha + \beta t)D(x,t) = (1 - p_1 x - q_1 x t)\frac{\partial}{\partial\, x}D(x,t) - (p_2 + q_2 t)t\frac{\partial}{\partial\, t}D(x,t),$$

  où $\alpha = H(1,0) = p_1 + p_3$ et $\beta = H(1,1) = q_1 + q_2 + q_3$.

- Soit $H = \mathcal{HB}(p_1n+p_2k+p_3; q_1n+q_2k+q_3)$ et $h_k^c(x) := \sum_{n\geq 0} H(n,k)x^n$. La fonction génératrice de colonne $h_k^c(x)$ satisfait, pour $k > 0$, à la récurrence différentielle

$$(1-(p_1+p_2k+p_3)x - p_1x\vartheta_x)c_k(x) = ((q_1+q_2k+q_3)x + q_1x\vartheta_x)c_{k-1}(x).$$

4.3 Solutions par Prolongement

Dans cette section on obtient les fonctions génératrices $H_k^c(x)$ et $H(x,t)$ en trouvant d'abord la solution de leurs équations fonctionnelles dans les cas les plus simples et ensuite en prolongeant ces solutions. Notons que plusieurs de ces solutions ont d'abord été trouvées par les méthodes de calcul formel développées dans [BP] et [SZ].

Lemme 4.3.1 (Valeurs initiales) *Soit* $H = \mathcal{HB}(\alpha n + p(k); q(n,k))$ *et soit* $\beta = p(1) - p(0)$, $\gamma = p(0)$ *et* $\psi = q(1,1)$.

- *Pour la suite de fonctions génératrices* $\{H_k^c(x)\}_{k\geq 0}$ *définie par*

$$H_k^c(x) := \sum_{n\geq 0} H(n,k)\frac{x^n}{n!}$$

on a la valeur initiale

$$H_0^c(x) = \begin{cases} e^{\gamma x}, & si\ \alpha = 0, \\ (1-\alpha x)^{-\frac{\alpha+\gamma}{\alpha}}, & si\ \alpha \neq 0. \end{cases} \tag{4.30}$$

- *Si* $\alpha + \gamma = 0$ *et* $\psi \neq 0$, *alors évidemment* $H_0^c(x) = 1$ *et de plus*

$$\frac{1}{\psi}H_1^c(x) = \begin{cases} x, & si\ \alpha = 0\ et\ \beta = 0, \\ \frac{1}{\beta}\left(e^{\beta x} - 1\right), & si\ \alpha = 0\ et\ \beta \neq 0, \\ \frac{-1}{\alpha}\log(1-\alpha x), & si\ \alpha \neq 0\ et\ \beta = 0, \\ \frac{1}{\beta}\left\{(1-\alpha x)^{-\beta/\alpha} - 1\right\}, & si\ \alpha \neq 0\ et\ \beta \neq 0. \end{cases} \tag{4.31}$$

Preuve.

- La série formelle $H_0^c(x)$ satisfait l'équation différentielle ordinaire à variables séparées

$$\frac{\mathrm{d}\,C(x)}{C(x)} = \frac{\alpha+\gamma}{1-\alpha x}\mathrm{d}\,x,\ (C(0) = 1), \tag{4.32}$$

ainsi

$$H_0^c(x) = \exp\left(\int_0^x \frac{\alpha+\gamma}{1-\alpha u}\mathrm{d}\,u\right).$$

- Lorsque $\alpha + \gamma = 0$, alors puisque $H(1,0) = \alpha + \gamma$, on a évidemment $H_0^c(x) = 1$ et $H_1^c(x)$ satisfait l'équation différentielle non-homogène

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} H_1^c(x) = \left(\beta + \alpha x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right) H_1^c(x) + H(1,1). \tag{4.33}$$

Or, plutôt que de résoudre directement cette équation, il est plus simple d'utiliser la proposition 1.5.10 qui donne le rapport entre les fonctions génératrices de H et de H_g et H_d les deux parts de son partage. Rappelons que pour une hyperbinomiale $B = \mathcal{HB}(p(n,k); q(n,k))$, on a le partage en deux parts

$$B(n,k) = B(1,0)B_g(n-1,k) + B(1,1)B_d(n-1,k-1) + \chi(n=k=0)$$

où B_g et B_d sont les hyperbinomiales

$$\begin{aligned} B_g &= \mathcal{HB}(p(n+1,k); q(n+1,k)), \\ B_d &= \mathcal{HB}(p(n+1,k+1); q(n+1,k+1)), \end{aligned}$$

et, par la proposition 1.5.10, on a

$$\frac{d}{d\,x} B_k^c(x) = B(1,0)(B_g)_k^c(x) + B(1,1)(B_d)_{k-1}^c(x). \tag{4.34}$$

Ainsi on a

$$H_1^c(x) = H(1,1) \int_0^x (H_d)_0^c(u) \mathrm{d}\, u, \tag{4.35}$$

où

$$H_d = \mathcal{HB}(\alpha n + p(k+1) + \alpha; q(n+1,k+1))$$

et on calcule $(H_d)_0^c(u)$ avec la première partie du lemme.

□

Lemme 4.3.2 *Pour l'hyperbinomiale* $H = \mathcal{HB}(\alpha n + \beta k - \alpha; 1)$ *on a les fonctions génératrices*

$$\begin{aligned} H_k^c(x) &= \frac{H_1^c(x)^k}{k!}, &(4.36)\\ H(x,t) &= e^{tH_1^c(x)}. &(4.37) \end{aligned}$$

Preuve. Lorsque $k = 0$ les deux membres de (4.36) valent 1 car $H(n,0) = \chi(n = 0)$. Pour $k \geq 1$, $H_k^c(x)$ satisfait à la récurrence différentielle

$$(1 - \alpha x)\frac{d}{d\,x} H_k^c(x) = \beta\, k\, H_k^c(x) + H_{k-1}^c(x), \tag{4.38}$$

et en particulier, en posant $k = 1$, $H_1^c(x)$ satisfait

$$(1-\alpha x)\frac{d}{d\,x}H_1^c(x) = \beta\, H_1^c(x) + 1. \tag{4.39}$$

Pour vérifier (4.36) on doit montrer que son membre droit satisfait l'équation (4.38). Or,

$$\begin{aligned}
(1-\alpha x)\frac{d}{d\,x}\frac{H_1^c(x)^k}{k!} &= (1-\alpha x)\frac{H_1^c(x)^{k-1}}{(k-1)!}\frac{d}{d\,x}H_1^c(x) && (4.40)\\
\text{(par (4.39))} &= \frac{H_1^c(x)^{k-1}}{(k-1)!}\{\beta H_1^c(x)+1\} && (4.41)\\
&= \beta\, k\,\frac{H_1^c(x)^k}{k!} + \frac{H_1^c(x)^{k-1}}{(k-1)!}. && (4.42)
\end{aligned}$$

La démonstration de l'équation (4.37) est alors assez directe :

$$\begin{aligned}
H(x,t) &:= \sum_{k\geq 0} H_k^c(x)t^k\\
&= \sum_{k\geq 0}\frac{\{t\cdot H_1^c(x)\}^k}{k!}\\
&= \mathrm{e}^{t\cdot H_1^c(x)}. && (4.43)
\end{aligned}$$

□

Lemme 4.3.3 *Soit $H = \mathcal{HB}(p(n,k);1)$ et $B = \mathcal{HB}(p(n,k);q(k))$. Pour B on a les fonctions génératrices de colonnes*

$$B_k^c(x) = H_k^c(x)\prod_{j=1}^{k} q(j), \tag{4.44}$$

Preuve. Soit $Q(k) = \prod_{j=1}^{k} q(k)$, avec $Q(0) = 1$. Si on fait le produit de Hadamard de H et Q on obtient[2] B, c'est-à-dire que $B(n,k) = Q(k)H(n,k)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
B_k^c(x) &:= \sum_n B(n,k)\frac{x^n}{n!}\\
&= Q(k)\sum_n H(n,k)\frac{x^n}{n!}\\
&= Q(k)H_k^c(x).
\end{aligned}$$

□

[2]Voir le lemme 2.3.2.

Lemme 4.3.4 *Soient* $H = \mathcal{HB}(\alpha n + p(k) - \alpha - \gamma; q(k))$, *où* $\gamma = p(0)$, *et* $B = \mathcal{HB}(\alpha n + p(k); q(k))$. *Pour* H *et* B *on a les relations entre fonctions génératrices*

$$B_k^c(x) = B_0^c(x) H_k^c(x), \tag{4.45}$$

$$B(x,t) = B_0^c(x) H(x,t). \tag{4.46}$$

Preuve. On remarque d'abord que la formule (4.46) se déduit directement de (4.45)

$$\begin{aligned} B(x,t) &= \sum_k (HB)_k^c(x) t^k \\ &= B_0^c(x) \sum_k H_k^c(x) t^k \\ &= B_0^c(x) H(x,t). \end{aligned} \tag{4.47}$$

Pour démontrer la proposition on montre que les deux membres de l'équation (4.45) satisfont à la même équation différentielle avec les mêmes conditions initiales. Pour les valeurs initiales, on a $B_k^c(0) = \chi(k=0)$ pour le membre gauche de (4.45) et

$$B_k^c(0) H_k^c(0) = \chi(k=0)\chi(k=0) = \chi(k=0)$$

pour le membre droit.

Ensuite $B_k^c(x)$ satisfait l'équation fonctionnelle

$$(1-\alpha x)\frac{d}{d\,x} B_k^c(x) = (\alpha + p(k)) B_k(x) + q(k) B_{k-1}^c(x), \tag{4.48}$$

tandis que $H_k^c(x)$ et $B_0^c(x)$ satisfont respectivement

$$(1-\alpha x)\frac{d}{d\,x} H_k^c(x) = (p(k) - \gamma) H_k^c(x) + q(k) H_{k-1}^c(x), \tag{4.49}$$

$$(1-\alpha x)\frac{d}{d\,x} B_0^c(x) = (\alpha + \gamma) B_0^c(x). \tag{4.50}$$

Or,

$$\begin{aligned} (1-\alpha x)\frac{d}{d\,x}\left(B_0^c(x) H_k^c(x)\right) &= B_0^c(x)(1-\alpha x)\frac{d}{d\,x} H_k^c(x) \\ &\quad + H_k^c(x)(1-\alpha x)\frac{d}{d\,x} B_0^c(x) \end{aligned} \tag{4.51}$$

$$\begin{aligned} &= (\alpha + p(k)) B_0^c(x) H_k^c(x) \\ &\quad + q(k) B_0^c(x) H_{k-1}^c(x), \end{aligned} \tag{4.52}$$

ainsi $B_0^c(x) H_k^c(x)$ satisfait aussi l'équation (4.48). □

Théorème 4.3.5 *Soient $H = \mathcal{HB}(\alpha n+\beta k-\alpha; 1)$, $B = \mathcal{HB}(\alpha n+\beta k+\gamma; \phi k+\psi)$ et $G = \mathcal{HB}(\phi n+\psi; 1)$. Pour B on a la fonction génératrice de colonne*

$$B_k^c(x) = B_0^c(x)\frac{H_1^c(x)^k}{k!}\prod_{j=1}^{k}(\phi j+\psi) \tag{4.53}$$

et la fonction génératrice semi-exponentielle

$$B(x,t) = B_0^c(x)\cdot G_0^c\left(t\cdot H_1^c(x)\right). \tag{4.54}$$

Explicitement, si $Q(k) := \prod_{j=1}^{k}(\phi j+\psi)$, alors la fonction génératrice exponentielle de colonne $B_k^c(x)$ est égale à

$$Q(k)x^k\frac{1}{k!}e^{\gamma x}, \qquad si\ \alpha = 0\ et\ \beta = 0, \tag{4.55}$$

$$Q(k)\frac{1}{\beta^k k!}e^{\gamma x}\left\{e^{\beta x}-1\right\}^k, \qquad si\ \alpha = 0\ et\ \beta \neq 0, \tag{4.56}$$

$$Q(k)(1-\alpha x)^{-\frac{\alpha+\gamma}{\alpha}}\frac{1}{\alpha^k k!}\log^k(1-\alpha x), \qquad si\ \alpha \neq 0\ et\ \beta = 0, \tag{4.57}$$

$$Q(k)(1-\alpha x)^{-\frac{\alpha+\gamma}{\alpha}}\frac{1}{\beta^k k!}\left\{1-(1-\alpha x)^{-\frac{\alpha+\beta}{\alpha}}\right\}^k, \qquad si\ \alpha \neq 0\ et\ \beta \neq 0. \tag{4.58}$$

De plus, les fonctions génératrices $B(x,t)$ sont données par

$$e^{\gamma x}e^{\psi x t}, \qquad si\ \alpha = 0, \phi = 0\ et\ \beta = 0, \tag{4.59}$$

$$e^{\gamma x}(1-\phi x t)^{-\frac{\phi+\psi}{\phi}}, \qquad si\ \alpha = 0, \phi \neq 0\ et\ \beta = 0, \tag{4.60}$$

$$e^{\gamma x}\,exp\,\frac{\phi t}{\beta}\left(e^{\beta x}-1\right), \qquad si\ \alpha = 0,\ \phi = 0\ et\ \beta \neq 0, \tag{4.61}$$

$$e^{\gamma x}\left(1+\frac{\phi t}{\beta}\left(1-e^{\beta x}\right)\right)^{-\frac{\phi+\psi}{\phi}}, \qquad si\ \alpha = 0, \phi \neq 0\ et\ \beta \neq 0, \tag{4.62}$$

$$(1-\alpha x)^{-\frac{\gamma+\alpha}{\alpha}}(1-\alpha x)^{\frac{\psi t}{\alpha}}, \qquad si\ \alpha \neq 0,\ \phi = 0\ et\ \beta = 0, \tag{4.63}$$

$$(1-\alpha x)^{-\frac{\gamma+\alpha}{\alpha}}\left(1-\frac{\phi t}{\alpha}\log(1-\alpha x)\right)^{-\frac{\phi+\psi}{\phi}}, \qquad si\ \alpha \neq 0,\ \phi \neq 0\ et\ \beta = 0, \tag{4.64}$$

$$(1-\alpha x)^{-\frac{\gamma+\alpha}{\alpha}}\,exp\left(\frac{\psi t}{\beta}\left(1-(1-\alpha x)^{-\frac{\alpha+\beta}{\alpha}}\right)\right), \qquad si\ \alpha \neq 0, \phi = 0\ et\ \beta \neq 0, \tag{4.65}$$

$$(1-\alpha x)^{-\frac{\gamma+\alpha}{\alpha}}\left(1+\frac{\phi t}{\beta}(1-\alpha x)^{\frac{\beta}{\alpha}}\right)^{-\frac{\phi+\psi}{\phi}}, \qquad si\ \alpha \neq 0, \phi \neq 0\ et\ \beta \neq 0, \tag{4.66}$$

Preuve. Pour démontrer (4.53) on applique les lemmes 4.3.2, 4.3.3 et 4.3.4.

Pour (4.54), par le lemme précédent on a

$$B(x,t) = B_0^c(x)H'(x,t),$$

où $H' = \mathcal{HB}(\alpha n + \beta k + \gamma; \phi k + \psi)$. Or, puisque

$$Q(k) := \prod_{j=1}^{k} (\phi j + \psi) = G(k, 0),$$

on a

$$\begin{aligned}
H'(x,t) &:= \sum_{k\geq 0} (H')^c_k(x) t^k \\
\text{(par le lemme 4.3.3)} &= \sum_{k\geq 0} Q(k) H^c_k(x) t^k \\
\text{(par le lemme 4.3.2)} &= \sum_{k\geq 0} \frac{H^c_1(x)^k}{k!} t^k \\
&= \sum_{k\geq 0} G(k,0) \frac{\{t \cdot H^c_1(x)\}^k}{k!} \\
&= \sum_{n\geq 0} G(n,0) \frac{\{t \cdot H^c_1(x)\}^n}{n!} \\
&:= G^c_0\left(t H^c_1(x)\right).
\end{aligned}$$

Les autres énoncés sont faciles à obtenir en utilisant les lemmes précédents. □

Exemple 1. Pour l'hyperbinomiale des nombres de Stirling de seconde espèce $S = \mathcal{HB}(k; 1)$ on a

$$S^c_k(x) = \frac{(\mathrm{e}^x - 1)^k}{k!}, \tag{4.67}$$

$$S(x,t) = \mathrm{e}^{t(\mathrm{e}^x - 1)}, \tag{4.68}$$

et en plus

$$S(x,1) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x - 1}, \tag{4.69}$$

donne la fonction génératrice exponentielle des nombres de Bell.

Pour les nombres de Stirling de première espèce sans signe $c = \mathcal{HB}(n-1; 1)$, signés $s = \mathcal{HB}(1-n; 1)$ et pour les nombres de Lah $L = \mathcal{HB}(n+k-1; 1)$ on obtient respectivement

$$c^c_k(x) = \frac{\log^k(1-x)}{k!}, \qquad c(x,t) = (1-x)^{-t}; \tag{4.70}$$

$$s^c_k(x) = \frac{-\log^k(1+x)}{(k-1)!}, \qquad s(x,t) = (1+x)^t; \tag{4.71}$$

$$L^c_k(x) = \frac{x^k}{k!(x-1)^k}, \qquad L(x,t) = \mathrm{e}^{\frac{xt}{1-x}}. \tag{4.72}$$

4.4 Autres Fonctions Génératrices

Pour certaines hyperbinomiales particulières on peut encore trouver la fonction génératrice double $H(x,t)$. Dans ce qui suit on énumère les cas pour lesquels nous avons des résultats explicites et on termine avec des résultats sur deux autres types de fonctions génératrices.

1. Pour les nombres eulériens $A = \mathcal{HB}(k+1; n-k)$, il est bien connu que

   $$A(x,t) = \frac{1-t}{1-te^{x(1-t)}}, \tag{4.73}$$

   et pour Max $= \mathcal{HB}(2k+2; n-2k+1)$ on trouve[3] dans [ENT] et [HAC]

   $$\mathrm{Max}(x,t) = \frac{t-1}{t}\cos^{-2}\left(x\sqrt{t-1} + \arctan\frac{1}{\sqrt{t-1}}\right). \tag{4.74}$$

   On généralise ces deux derniers exemples dans un article à paratre.

2. On peut avoir sous forme close la fonction génératrice $\mathrm{Alt}(x,t)$ pour toute les hyperbinomiales alternées[4]. Par exemple, pour Alt $= \mathcal{HB}(-an+2ak+a; bn-2bk+2b)$ on peut montrer que

   $$\mathrm{Alt}(x,t) = \frac{1-bxt}{1-abx^2t}. \tag{4.75}$$

3. Avec le rapport par réflexion

   $$H(x,t) = (\rho H)(xt, 1/t)$$

   et les résultats de la section précédente on peut déduire la fonction génératrice double des hyperbinomiales de la forme

   $$H = \mathcal{HB}(\phi n - \phi k + \psi; \alpha n + \beta k + \gamma).$$

   Par exemple, pour les coefficients des polynômes de Bessel, Bes $= \mathcal{HB}(1; n+k-1)$ on a $(\rho Bes) = \mathcal{HB}(2n-k+1; 1)$ et

   $$(\rho Bes)(x,t) = (1-2x)^{-1/2}\exp\left(-t + t(1-2x)^{-1/2}\right)$$

   de sorte que

   $$\mathrm{Bes}(x,t) = (1-2xt)^{-1/2}\exp\left(\frac{(1-2xt)^{-1/2}-1}{t}\right).$$

[3] $\mathrm{Max}(n,k)$ est le nombre de permutations de S_n présentant k maximum , un maximum étant un m tel que $\sigma(m-1) < \sigma(m) > \sigma(m+1)$.

[4] Voir la définition 3.4.1.

4. Dans la section 1.2 on a montré que pour l'hyperbinomiale $H = \mathcal{HB}(an + c; bn + d)$ on a les polynômes hyperbinomiaux

$$H_n^\ell(t) = \prod_{j=1}^{n} \{(bj + d)t + (aj + c)\},$$

or

$$H(x,t) = \sum_n H_n^\ell(t) x^n / n!$$

et pour $G = \mathcal{HB}(an + c + (bn + d)t; 1)$ on a $G(n,0) = H_n^\ell(t)$ de sorte que

$$H(x,t) = G_0^c(x),$$

et par les résultats de la section précédente on obtient

$$H(x,t) = (1 - ax - bxt)^{-\frac{(a+bt)+(c+dt)}{a+bt}}.$$

Par exemple on a vu que l'hyperbinomiale multiple $M = \mathcal{HB}(an + bk + c; ran - rbn + rbk + rc)$ a son terme général qui ne dépend pas de b de sorte qu'elle satisfait aussi à la récurrence $\mathcal{HB}(a, 0, c; ra, 0, rc)$, on a alors la fonction génératrice

$$M(x,t) = (1 - ax - raxt)^{-r-1}.$$

5. Soit $G_n(t)(H) := \sum_k H(n-k,k)t^k$ et

$$g_n(H) = \sum_k H(n-k,k). \tag{4.76}$$

Pour $H = \mathcal{HB}(p_1 n + p_2 k + p_3; q_1 n + q_2 k + q_3)$, la fonction génératrice $G_n(t)(H)$ satisfait à la récurrence différentielle

$$\begin{aligned} G_n(t) &= \{(p_1 n + p_3) + (q_2 - q_1)\vartheta_t\} G_{n-1}(t) \\ &\quad + t\{q_1(n-1) + q_2 + q_3 + (q_2 - q_1)\vartheta_t\} G_{n-2}(t) + \chi(n=0), \end{aligned} \tag{4.77}$$

et elle est une récurrence ordinaire lorsque $p_1 = p_2$ et $q_1 = q_2$.

Ainsi, pour $B = \mathcal{HB}(p_1 n + p_1 k + p_3; q_1 n + q_1 k + q_3)$, $G_n(t)(B)$ satisfait la récurrence

$$G_n(t) = (p_1 n + p_3) G_{n-1}(t) + (q_1 n + q_3) t G_{n-2}(t) + \chi(n=0),$$

et, par (4.76), on a aussi

$$g_n(B) = (p_1 n + p_3) g_{n-1}(B) + (q_1 n + q_3') g_{n-2}(B) + \chi(n=0). \tag{4.78}$$

Mentionnons ici que l'on ne dispose pas de méthode générale pour résoudre ce dernier type de récurrences. Toutefois, on peut trouver[5] la solution si elle est hypergéométrique.

Par exemple, pour les binomiaux $B = \mathcal{HB}(1;1)$ la récurrence (4.78) devient

$$g_n(B) = g_{n-1}(B) + g_{n-2}(B) + \chi(n=0) \tag{4.79}$$

qui est aussi satisfaite pour les nombres de Fibonacci $\{F_n\}_{n\geq 0}$ de sorte que l'on retrouve

$$\sum_k \binom{n-k}{k} = F_n, \tag{4.80}$$

et de même

$$G_n(t)(B) = \frac{1}{1-t-t^2}.$$

6. Soit $H = \mathcal{HB}(p_1n+p_2k+p_3; q_1n+q_2k+q_3)$ et $h_k^c(x) := \sum_{n\geq 0} H(n,k)x^n$. La fonction génératrice de colonne $h_k^c(x)$ satisfait, pour $k>0$, à la récurrence différentielle

   $$(1-(p_1+p_2k+p_3)x - p_1x\vartheta_x)h_k^c(x) = ((q_1+q_2k+q_3)x + q_1x\vartheta_x)h_{k-1}^c(x).$$

   Cette récurrence différentielle revient à une récurrence ordinaire si $p_1 = q_1 = 0$. Ainsi, pour $B = \mathcal{HB}(d_2k+d_3; d_2'k+d_3')$, $b_k^c(x)$ satisfait

   $$(1-d_2kx-d_3x)b_k^c(x) = (d_2'k+d_3')xb_{k-1}^c(x) + \chi(k=0). \tag{4.81}$$

   En posant $k=0$ dans (4.81) on trouve la valeur initiale

   $$b_0^c(x) = \frac{1}{1-d_3x}, \tag{4.82}$$

   et pour $k>0$

   $$b_k^c(x) = \frac{(d_2'k+d_3')x}{1-(d_2k+d_3)x} b_{k-1}^c(x), \tag{4.83}$$

   et de là il vient la solution

   $$b_k^c(x) = x^k \prod_{i=1}^k (d_2'i+d_3') \prod_{j=0}^k [1-(d_2j+d_3)x]^{-1}. \tag{4.84}$$

   Par exemple, pour les binomiaux B et les Stirling de seconde espèce H on a respectivement

   $$b_k^c(x) = x^k \prod_{j=0}^k (1-x)^{-1} = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}, \tag{4.85}$$

   $$h_k^c(x) = x^k \prod_{j=0}^k (1-jx)^{-1} = \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)}. \tag{4.86}$$

[5] Voir [PET 90] et [PET 92].

4.5 Détermination de Termes Généraux

Si on connat au moins une fonction génératrice pour une hyperbinomiale H donnée il est souvent possible de déterminer son terme général $H(n,k)$. On donne ici les étapes pour trouver le terme général de la solution de $\mathcal{HB}(\beta k+\gamma;\phi k+\psi)$ à l'aide de la fonction génératrice $H_k^c(x)$. Pour les autres fonctions génératrices trouvées pour d'autres hyperbinomiales il suffit de procéder de la même manière.

Rappelons que pour $H=\mathcal{HB}(\beta k+\gamma;\phi k+\psi)$ on a

$$\begin{aligned} H_k^c(x) &:= \sum_{n\geq 0} H(n,k)\frac{x^n}{n!} \\ &= \begin{cases} Q(k)\frac{x^k}{k!}\mathrm{e}^{\gamma x}, \text{ si } \beta=0, \\ \\ \frac{Q(k)\mathrm{e}^{\gamma x}}{k!}\left\{\frac{\mathrm{e}^{\beta x}-1}{\beta}\right\}^k, \text{ si } \beta\neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

où $Q(k)=\prod_{j=1}^k(\phi j+\psi)$.

Pour trouver $H(n,k)$ il suffit d'identifier le coefficient de $x^n/n!$ dans $H_k^c(x)$. Ainsi, lorsque $\beta=0$ on a

$$\begin{aligned} H(n,k) &= Q(k)\left[\frac{x^n}{n!}\right]\frac{x^k}{k!}\mathrm{e}^{\gamma x} \\ &= \frac{n!Q(k)}{k!}[x^{n-k}]\mathrm{e}^{\gamma x} \\ &= \gamma^{n-k}\binom{n}{k}\prod_{j=1}^k(\phi j+\psi). \end{aligned}$$

Lorsque $\beta\neq 0$ on trouve que

$$H(n,k)=\prod_{j=1}^k(\phi j+\psi)\cdot\sum_{j=0}^k\frac{(-1)^{k-j}}{j!(k-j)!}\frac{1}{\beta^k}\left(\beta j+\gamma\right)^n.$$

On aurait aussi pu utiliser la fonction génératrice ordinaire de colonne $h_k^c(x)$ qui a, dans ce cas, une forme close qui s'exprime sous forme d'une fonction rationnelle en x. À partir de là il aurait suffit de développer cette fonction rationnelle en fraction partielle tout comme dans l'exemple donné par [WIL] pour les nombres de Stirling de seconde espèce.

Exemple 2. Soit $H=\mathcal{HB}(k+2;1)$. Dans cet exemple on donne quatre façons de trouver et d'exprimer le terme général $H(n,k)$.

Tout d'abord, par la formule générale donnée à la section 1.6, on a

$$H(n,k)=\sum_A\prod_{j=1}^{n-k}(\alpha_j+j+2),$$

la somme étant faite sur tout les ensembles $A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-k}\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ avec $\alpha_j < \alpha_{j+1}$.

En faisant le partage[6] de H en deux parts on trouve que pour $n, k \geq 0$

$$H(n,k) = S(n+2, k+2) - S(n+1, k+2),$$

où S désigne les nombres de Stirling de seconde espèce.

Par ailleurs, par un produit[7] convenablement choisi on obtient

$$H(n,k) = \sum_j 2^{n-j} \binom{n}{j} S(j,k).$$

Finalement avec les fonctions génératrices on a

$$H(n,k) = \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^{k-j}(2+j)^n}{j!(k-j)!}.$$

4.6 Suites de Sheffer

Bien souvent, lorsque l'on recherche des exemples d'hyperbinomiales, il vaudra mieux regarder du côté des suites de polynômes $\{p_n(t)\}_{n\geq 0}$ avec $\deg p_n = n$ que l'on comparera avec les suites de polynômes hyperbinomiaux via leurs fonctions génératrices exponentielles.

Dans cette section on considère la famille des suites de polynômes de Sheffer[8] qui fournit, comme cas particuliers, plusieurs cas de polynômes hyperbinomiaux.

Définition 1. On dit qu'une suite de polynômes $\{s_n(t)\}_{n\geq 0}$ est *suite de Sheffer* si, et seulement si sa fonction génératrice est de la forme

$$\sum_{n\geq 0} s_n(t)\frac{x^n}{n!} = A(x)\mathrm{e}^{tB(x)},$$

où $A(x)$ est une série formelle possèdant un inverse pour la multiplication et $B(x)$ une série formelle possèdant un inverse pour la composition que l'on désigne respectivement par $1/A(x)$ et $\overline{B}(x)$, c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} A(x) &= A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots, (A_0 \neq 0), \\ B(x) &= B_1x + B_2x^2 + \cdots, (B_1 \neq 0). \end{aligned}$$

[6] Voir la section 1.5.
[7] Voir la section 1.1.
[8] Voir [MR], [ROM], [RR], [SHE 39] ou [SHE 45].

Proposition 4.6.1 *Soit $H = \mathcal{HB}(p_1n+p_2k+p_3; q_1n+q_2k+q_3)$ une hyperbinomiale à coefficients polynomiaux du premier degré avec $H(1,1) \neq 0$. La suite des polynômes hyperbinomiaux $\{H_n^\ell(t)\}_{n\geq 0}$ est une suite de Sheffer si, et seulement si*

$$q_1 = q_2 = 0. \tag{4.87}$$

Preuve. Par les résultats de la section 4.2 on a vu que pour $H = \mathcal{HB}(p_1n + p_2k + p_3; q_3)$ on a la fonction génératrice

$$H(x,t) = H_0^c(x)\exp(tG_1^c(x))$$

où $G = \mathcal{HB}(p_1n + p_2k - p_1; q_3)$ de sorte que la condition (4.87) est suffisante.

Si on suppose que

$$H(x,t) := A(x)\exp(tB(x)) = \sum_{k\geq 0} A(x)t^kB^k(x)/k!,$$

alors

$$H_k^c(x) := [t^k]H(x,t) = \frac{A(x)B^k(x)}{k!},$$

de sorte qu'il est nécessaire que $A(x) = H_0^c(x)$ et $B(x) = \frac{H_1^c(x)}{H_0^c(x)}$ ou encore

$$H(x,t) = H_0^c(x)\exp\left(t\frac{H_1^c(x)}{H_0^c(x)}\right). \tag{4.88}$$

Par ailleurs, pour $H = \mathcal{HB}(p_1n+p_2k+p_3; q_1n+q_2k+q_3)$ la fonction génératrice $H(x,t)$ doit satisfaire à l'équation différentielle

$$(H(1,0) + H(1,1)t)D(x,t) = (1 - p_1x - q_1xt)\frac{\partial}{\partial x}D(x,t) - (p_2 + q_2t)t\frac{\partial}{\partial t}D(x,t).$$

Ainsi, en remplaçant le membre droit de (4.88) dans l'équation différentielle précédente on obtient, après simplification et identification du coefficient de t^2, la condition nécessaire

$$q_1x^2\{H_1^c(x)\frac{\delta}{\delta x}H_0^c(x) - H_0^c(x)\frac{\delta}{\delta x}H_1^c(x)\} = q_2H_0^c(x)H_1^c(x),$$

et en identifiant le coefficient de x dans cette équation on obtient $q_2H(1,1) = 0$ d'où la condition $q_2 = 0$ puis en prenant celui de x^2 on doit aussi avoir $q_1 = 0$. □

Bibliographie

[BP] F. Bergeron et S. Plouffe. *Computing the Generating Function of a Series Given its First Terms*. Rapport de recherche no.185, Université du Québec à Montréal, 17 juin 1992.

[CAR 33] L. Carlitz. *On abelian fields*. Trans. Amer. Math. Soc, **35** (1933), 122-136.

[CAR 65] L. Carlitz. *The coefficients in an asymptotic expansion*. Proc. Amer. Math. Soc, **16** (1965), 248–252.

[CAR 68] L. Carlitz. *The coefficients in an asymptotic expansion and certain related numbers*. Duke Math. J., **35** (1968), 83–90.

[CAR 71] L. Carlitz. *Note on the number of Jordan and Ward*. Duke Math. J., **38** (1971), 783–790.

[CAR 78a] L. Carlitz. *Generalized Stirling and related numbers*. Riv. Univ. Parma, **4** (1978), 79–99.

[CAR 78b] L. Carlitz. *Stirling Pairs*. Rend. Sem. Math. Univ. Padova, **59** (197), 19–44.

[CAR 79] L. Carlitz. *Degenerate Stirling, Bernouilli and Eulerian numbers*. Utilitas Math., **15** (1979), 51–88.

[CAR 80a] L. Carlitz. *Weighted Stirling numbers of the first and second kind I*. Fib. Quat., **18** (1980), 147–162.

[CAR 80b] L. Carlitz. *Weighted Stirling numbers of the first and second kind II*. Fib. Quat., **18** (1980), 242–257.

[CS] L. Carlitz et R. A. Scoville. *Generalized Eulerian numbers: Combinatorial applications*. J. Reine Ang. Math., **265** (1974), 110–137.

[CHK] A. M. Chak. *A class of polynomials and a generalization of Stirling numbers*. Duke Math. J., **23** (1956), 45–55.

[CHR 77] C. A. Charalambides. *A new kind of numbers appearing in the n-fold convolution of truncated binomial and negative binomial distributions*. Siam J. Appl. Math., **33** (1977), 279–288.

[CHR 79] C. A. Charalambides. *Some properties and applications of the difference of the genralized factorials*. Siam J. Appl. Math., **36** (1979), 273–280.

[CHR 82] C. A. Charalambides. *On the enumeration of certain compositions and related sequences of numbers*. Fib. Quat., **21** (1982), 132–146.

[CK] C. A. Charalambides et M. Koutras. *On the differences of the generalized factorials at an arbitrary point and their combinatorial applications*. Discrete Math., **47** (1983), 183–201.

[COM] L. Comtet. *Advanced Combinatorics: The art of Finite and Infinite Expansions*. D.Reidel Publishing Company, 1974.

[dML] A. de Médicis et P. Leroux. *A unified combinatorial approach for q-(and p,q-)Stirling numbers*. J. of Statistical Planning and Inference, **34** (1992).

[DWY] P. S. Dwyer. *The calculation of moments with use of cumulative totals*. Ann. Math. Stat., **9**, (1938), 288–304.

[ENT] R. C. Entringer. *Enumeration of Permutations of* $(1, \ldots, n)$ *by Number of Maxima*. Preprint.

[EXT] H. Exton. *Multiple Hypergeometric Functions and Applications.* Ellis Horwood Series of Math. and Its Appl., 1976.

[FS] D. Foata et M. -P. Shutzenberger. *Théorie Géométrique des Polynômes Eulériens*. Lecture notes in Math., Vol. **138**, Spinger Verlag, Berlin, 1970.

[GKP] R. L. Graham, D. E. Knuth et O. Patashnik. *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science.* Addison-Wesley, 1989.

[GS] I. Gessel et R. P. Stanley. *Stirling Polynomials.* J. of Combinatorial Theory, series A, **24** (1978), 24–33.

[GUE] A. O. Guelfond *Calcul des Différences Finies*. Dunod, Paris, 1963.

[HAC] R. Hachem. *Finding Une étude combinatoire des moments et des coefficients de linéarisation des polyômes orthogonaux de type Sheffer*. Mémoire de matrise, Université du Québec à Montréal, Février 1992.

[HOR] J. Horn. *Ueber die Convergenz der Hypergeometrische Reihen Zweier und Dreier Veranderlichen.* Math. Ann., **34**, (1889), 544–600.

[HOW] F. T. Howard. *Degenerate weighted Stirling numbers.* Discrete Math., **57**, (1985), 45–58.

[JOR] C. Jordan. *Calculus of Finite Difference.* Chelsea Publishing Company, 1960.

[KOU 82] M. Koutras. *Non-central Stirling numbers and applications.* Discrete Math., **42**, (1982), 73–89.

[KOU 94] M. Koutras. *Eulerian numbers associated with sequences of polynomials.* Fib. Quat., **32**, (1994), 44–57.

[LOT] M. Lothaire. *Combinatorics on Words.* Encyclopedia Math. Appl., Vol. **17**, Addison Wesley, Reading, MA, 1983.

[MAN 91] R. Mantaci. *Statistiques Eulériennes sur les Groupes de Permutation.* Thèse de doctorat, Université Paris 7, juillet 1991.

[MAN 93] R. Mantaci. *Binomial Coefficients and Anti-exceedances of Even Permutations: A Combinatorial Proof.* J. of Combinatorial Theory, series A, **63** (1993), 330–337.

[MIL 77] S. Milne. *Restricted Growth Functions and Incidence Relations of the Lattice of Partitions of an n-Set.* Advances in Mathematics, **26** (1977), 290–305.

[MIL 81] S. Milne. *Inversion Properties of Triangular Arrays.* Analysis, **1** (1981), 1–7.

[MR] R. Mullin et G.C. Rota. *On the foundation of combinatorial theory III: Theory of combinatorial enumerations.* dans Graph Theory and its Applications (B.Harris, ed.), Academic Press. New-York, 1970.

[NIV] I. Niven. *Formal Power Series.* Amer. Math. Monthly **76** (1969), 871–889.

[PET 90] M. Petkovšek. *Finding Closed-Form Solutions of Difference Equations by Symbolic Methods.* Thèse de doctorat, Université Carnegie Mellon, Septembre 1990.

[PET 92] M. Petkovšek. *Hypergeometric Solutions of Linear Recurrences with Polynomial Coefficients.* Journal of Symbolic Computation, **14** (1992), 243–264.

[RIO] J. Riordan. *Combinatorial Identities.* Wiley, New-York, 1968.

[ROM] S. Roman. *The Umbral Calculus.* Academic Press, 1984.

[RR] S. Roman et G. C. Rota. *The umbral calculus.* Adv. in Math., **27** (1978), p.95–128.

[SHE 39] I. M. Sheffer. *Some properties of polynomial sets of type zero*. Duke Math.J., **5** (1939), 590–622.

[SHE 45] I. M. Sheffer. *Note on Appell polynomials*. Bull. Amer. Math. Soc., **51** (1945), 739–744.

[SZ] B. Salvy et P. Zimmerman. *GFUN: A Maple Package for Generating Functions*.

[VER] L. Verde-Star. *Divided Differences and Combinatorial Identities*. Studies in Applied Mathematics, **85**, (1991), no. 3, 215–242.

[WAR] M. Ward. *The representation of Stirling's numbers and Related Numbers*. Amer. J. Math., **56**, (1934), 87–95.

[WIL] H. S. Wilf. *Generatingfunctionnology*. Academic Press, Inc., Boston, 1990.

[WZ] H. S. Wilf et D. Zeilberger. *Toward computerized proof of identities*. Bull. of the AMS, **23** no. 1 (1990), 77–83.

[ZEI 90a] D. Zeilberger. *A Holonomic Systems Approach to Special Functions Identities*. J. Computationnal and Applied Math., **32**, (1990), no. 3, 321–368.

[ZEI 90b] D. Zeilberger. *A fast algorithm for proving hypergeometric identities*. Discrete Math., **80** (1990), 207–211.