

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

THÈSE  
PRÉSENTÉE  
COMME EXIGENCE PARTIELLE  
DU DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES

par  
ANNE DE MÉDICIS

ASPECTS COMBINATOIRES DES NOMBRES DE STIRLING,  
DES POLYNÔMES ORTHOGONAUX DE SHEFFER  
ET DE LEURS  $q$ -ANALOGUES

JUILLET 1992

## REMERCIEMENTS

Je tiens d'abord à remercier mon directeur Pierre Leroux, tant pour ses qualités mathématiques que ses qualités personnelles, en particulier sa patience, sa compréhension et son sens de l'humour.

Je voudrais également remercier mon co-directeur Xavier G. Viennot, qui m'éblouira toujours par sa science mathématique et générale.

I wish to thank Dennis Stanton for his kind assistance in the preparation of Chapter 3.

Je voudrais remercier le CRSNG, le FCAR, la Coopération France-Québec et le PAFFAC pour leur support financier, sans lequel tout ceci (et spécialement le jour de l'an à Paris) n'aurait pas été possible.

Je voudrais remercier l'équipe de Bordeaux, l'équipe de Montréal, l'équipe de Bordeaux à Montréal, et l'équipe de Montréal à Bordeaux. Plus particulièrement, dans le désordre le plus complet, Antoine, dont le magnétisme suffit à démagnétiser les côtes, Jean-Marc et Dominique, qui m'ont accueillie avec tellement de gentillesse et qui ne m'ont jamais imposé d'autres taxes que celle sur les muffins, Marie-Hélène Bruyères et son coeur d'or, Mireille, qui a rendu célèbre le mot "Massawippi" dans toute la francophonie, Alexis, le célèbre avaleur de muffins et pirate de la route émérite au volant de son Alexis-mobile, Malika et Rabia, pour le service de support moral 24 heures, Roberto, qui est responsable de la pénurie des vidéos de Walt Disney à la Baie, Kathleen, pour les rigolades et les bougonnages genre "Toi têteux tasse-toé!", Claudia, avec qui "tout va pour le mieux dans le meilleur des mondes", et Yves, à qui je n'aurais jamais dû apprendre le mot "blague", ou en tous cas, à qui on aurait

jamais dû parler des produits tensoriels. Il y a aussi tout ces gens à qui je voudrais dire tout plein de choses gentilles: Sheila, Guy, Jean- $\Phi$ , Fofie, Samira, Ivan, Laurent, Jean-Paul (l'homme qui parlait plus vite que son ombre), Michel Mendès-France, Henriette, Serge et Manu.

Mille mercis à Pierre et Guillaume, pour le support informatique, et à David Lytle qui a sué sang et eau pour trouver les mots justes dans les parties anglaises de cette thèse Thérèse.

Merci aussi à mes éternels amis pour le support postal et moral, (par ordre alphabétique pour ne pas faire de jaloux!!!): Bob (mon prof-poule), Caroline, Céline, François, Ghislaine, Hansie, Hélène (dont les goûts esthétiques sont discutables, surtout en ce qui concerne Maria et Toni), Josiane, Line, Line et Christian, Serge (ma vipère préférée), Sylvie et Vanessa.

Finalement, je voudrais remercier ma famille: François, à qui je dédie la formule (2.1.1), Étienne, qui m'a fait voir qu'il n'y avait pas que les maths dans la vie, il y a aussi la médecine, et mes parents, qui aimeraient bien me convaincre du contraire...

Cette thèse est dédiée à la mémoire de mon cher BonPapa Feytmans.

## RÉSUMÉ

Ce travail se divise en quatre parties.

Dans le premier chapitre, nous proposons une approche combinatoire unifiée des nombres de Stirling de première et de deuxième espèces, en termes de *tableaux 0-1*. Un tableau 0-1 consiste essentiellement en un remplissage des cases d'un diagramme de Ferrers avec des "0" et des "1", en exigeant qu'il y ait exactement un "1" dans chaque colonne. Les paramètres *nombre d'inversions* et *nombre de non-inversions*, égaux au nombre de "0" apparaissant en dessous (respectivement au-dessus) des "1" dans les tableaux 0-1, permettent d'obtenir des modèles combinatoires des  $q$ -nombres de Stirling ainsi qu'un  $p, q$ -analogue de ces nombres, en considérant la distribution conjointe des inversions et des non-inversions.

L'objet du premier chapitre est de montrer que les tableaux 0-1 constituent un outil combinatoire à la fois naturel et précieux pour l'étude des nombres de Stirling des deux espèces, ainsi que de leurs  $q$  et  $p, q$ -analogues. Pour ce faire, nous exhibons plusieurs identités sur ces polynômes (certaines nouvelles, d'autres déjà connues) et nous les démontrons combinatoirement à l'aide de cette interprétation. Il se trouve que dans la plupart des cas, les démonstrations sont remarquablement simples et élégantes, et mettent bien en valeur la dualité qui existe entre les nombres de Stirling de première et de deuxième espèces.

Le chapitre 2 est consacré à des généralisations des nombres de Stirling, suggérées par le modèle combinatoire des tableaux 0-1.

La première généralisation consiste à restreindre les longueurs de colonnes admises dans les diagrammes de Ferrers, et à remplacer le  $p, q$ -comptage du remplissage de colonnes par une pondération sur les colonnes. Les familles obtenues sont appelées  $\mathcal{A}$ -*nombres de Stirling*, et sont aussi générales que les fonctions symétriques élémentaires et homogènes. Le cas particulier des *nombres de Stirling  $a, d$ -progressifs*, où les longueurs des colonnes sont restreintes à une progression arithmétique  $\{a + id\}_{i \geq 0}$ , permet d'obtenir plusieurs familles de nombres et de polynômes connues, et vaut la peine d'être étudié plus en détails. Nous lui consacrons une section du chapitre 2.

La seconde généralisation consiste à remplacer les tableaux 0-1 par des *tableaux 0-1 faibles*, remplissages de diagrammes de Ferrers avec des "0" et des "1", de telle sorte qu'il y ait *au plus* un "1" par colonne. Les familles de polynômes obtenues, appelées *nombres de Stirling partiels*, apparaissent naturellement dans le  $p, q$ -analogue de formules de convolution de W. Chen [Ch] et L. Verde-Star [VS], présentées dans le chapitre 1. De plus, le modèle combinatoire de tableaux 0-1 faibles, enrichi de colorations, apparaît comme modèle combinatoire alternatif pour les nombres de Stirling  $a, d$ -progressifs, et s'avère utile dans les démonstrations combinatoires de certaines identités sur ces nombres.

Dans le chapitre 2 donc, nous relevons les identités du chapitre 1 au niveau des différentes généralisations considérées. Un modèle combinatoire des nombres de Stirling partiels (respectivement  $a, d$ -progressifs) en termes de permutations (colorées) à cycles marqués et de partitions partielles (colorées) est introduit, généralisant les modèles combinatoires classiques en termes de permutations et de partitions ensemblistes des nombres de Stirling usuels et de leurs  $q$  et  $p, q$ -analogues. Nous considérons également les propriétés de  $p, q$ -concavité logarithmique des différentes familles de polynômes obtenues.

Le chapitre 3 traite de certains aspects combinatoires des polynômes orthogonaux de Charlier et de leurs  $q$ -analogues, dont les moments sont respectivement les nombres et les  $q$ -nombres de Stirling de deuxième espèce, soient

$$\nu_n^{(a)} = \sum_{k=0}^n S(n, k) a^k, \quad \text{et} \quad \nu_{n,q}^{(a)} = \sum_{k=0}^n S_q[n, k] a^k.$$

Nous démontrons principalement de manière totalement combinatoire, en utilisant des involutions préservant les pondérations mais inversant les signes, l'orthogonalité des polynômes de Charlier et de leurs  $q$ -analogues. Nous établissons plus généralement la série génératrice des coefficients de linéarisation des polynômes de Charlier, ainsi que quelques résultats partiels et conjectures sur les coefficients de linéarisation des  $q$ -polynômes de Charlier. Nous utilisons pour ce faire des interprétations combinatoires des classes de polynômes considérées en termes de permutations partielles pondérées, et des interprétations de leurs moments en termes de partitions ensemblistes,  $q$ -comptées selon les paramètres *nombre d'inversions* ( $\text{inv}(\pi)$ ) ou *nombre de non-fermetures* ( $rs(\pi)$ ).

Finalement, le chapitre 4 fournit une démonstration bijective, utilisant les chemins de Motzkin valués (cf Françon et Viennot [FrVi], Flajolet [Fla], et Viennot [Vi1]), du fait que les  $q$ -polynômes de Laguerre, notés  $L_{n,q}^{(\alpha)}(x)$ , dont les moments sont

$$\mu_{n,q}^{(\alpha)} = (\alpha + 1)(\alpha + 1 + q) \dots (\alpha + 1 + q + \dots + q^{n-1}),$$

satisfont la récurrence linéaire à trois termes

$$L_{n+1,q}^{(\alpha)}(x) = (x - q^n([n]_q + \alpha + [n+1]_q))L_{n,q}^{(\alpha)}(x) - q^{2n-1}[n]_q(\alpha + [n]_q)L_{n-1,q}^{(\alpha)}(x),$$

avec conditions initiales  $L_{0,q}^{(\alpha)}(x) = 1$  et  $L_{1,q}^{(\alpha)}(x) = x - \alpha - 1$ .

Selon la théorie combinatoire des polynômes orthogonaux généraux développée par X.G. Viennot [Vi1], ce résultat repose sur le fait qu'une certaine statistique "*lag*" sur les histoires de Laguerre est *Mahonienne*, c'est-à-dire qu'elle a même distribution que les inversions ou que l'indice majeur sur les permutations.

Pour montrer ceci, nous utilisons une bijection de D. Foata et D. Zeilberger [FoZ3] entre les permutations de l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n\}$  et les histoires de Laguerre de longueur  $n$ . Nous rappelons d'abord la très ingénieuse construction

bijective, définie directement par D. Foata et D. Zeilberger, en la décomposant en quatre étapes. Nous montrons ensuite comment la statistique “*lag*” sur les histoires de Laguerre, correspondant aux coefficients de la récurrence linéaire à trois termes ci-dessus est transportée, via cette bijection, sur une statistique dont il n’est pas évident à priori que ce soit exactement le nombre d’inversions des permutations. Nous obtenons également de nouvelles statistiques sur les permutations et les partitions ensemblistes, ayant même distribution que le paramètre “nombre d’inversions” sur ces objets, via une seconde bijection classique entre permutations et histoires de Laguerre, due à J. Françon et X.G. Viennot [FrVi].

Nous terminons en esquissant une théorie combinatoire générale des  $q$ -analogues des cinq classes de polynômes orthogonaux de Sheffer, soient les  $q$ -polynômes d’Hermite, de Charlier, de Laguerre, de Meixner et de Meixner-Pollačzek.

## TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS .....	ii
RÉSUMÉ .....	iv
TABLE DES MATIÈRES .....	vii
LISTE DES TABLEAUX .....	x
LISTE DES FIGURES .....	xi
NOTATIONS DES ENSEMBLES .....	xii
INTRODUCTION .....	1
CHAPITRE 1: UNE APPROCHE COMBINATOIRE DES $q$ - (ET $p, q$ -)NOMBRES DE STIRLING .....	13
1.1 Introduction .....	13
1.2 Récurrences et formules de base .....	19
1.3 Orthogonalité et preuves involutives apparentées .....	32
1.4 Identités faisant intervenir des coefficients $q$ -binomiaux et quelques identités reliées .....	37
1.5 Problèmes ouverts .....	47
CHAPITRE 2: GÉNÉRALISATIONS DES NOMBRES DE STIRLING ET $p, q$ -ANALOGUES .....	48
2.1 Introduction .....	48
2.2 Relèvement d'identités au niveau des $\mathcal{A}$ -tableaux .....	56
2.3 Identités relatives aux tableaux 0-1 faibles .....	67
2.4 Identités relatives aux tableaux 0-1 dont les longueurs des colonnes sont restreintes à une progression arithmétique .....	83
2.5 Concavité logarithmique et problèmes ouverts .....	94

CHAPITRE 3: ASPECTS COMBINATOIRES DES POLYNÔMES DE CHARLIER ET DE LEURS $q$ -ANALOGUES.....	101
3.1 Introduction.....	101
3.2 Démonstration combinatoire de l'orthogonalité des polynômes de Charlier et coefficients de linéarisation .....	110
3.3 Propriétés classiques des polynômes de Charlier .....	123
3.4 Démonstration combinatoire de l'orthogonalité des $q$ -polynômes de Charlier et coefficients de linéarisation .....	127
3.5 Propriétés des $q$ -polynômes de Charlier .....	149
3.6 Conjectures et résultats partiels sur les coefficients de linéarisation des $q$ -polynômes de Charlier .....	155
CHAPITRE 4: MOMENTS DES $q$ -POLYNÔMES DE LAGUERRE ET LA BIJECTION DE FOATA-ZEILBERGER.....	162
4.1 Introduction.....	162
4.2 Involutions, histoires d'Hermite et $q$ -analogues des polynômes d'Hermite .....	174
4.3 Une nouvelle définition des inversions d'une permutation.....	185
4.4 Histoires de Laguerre subdivisées et tassement.....	192
4.5 La bijection de Foata-Zeilberger et les moments des $q$ -polynômes de Laguerre .....	202
4.6 Rappel sur la bijection Françon-Viennot et une nouvelle statistique mahonnienne.....	213
4.7 Les $q$ -polynômes de Charlier.....	222
4.8 Remarques finales et extensions aux $q$ -analogues des cinq classes de polynômes orthogonaux de Sheffer .....	228

BIBLIOGRAPHIE .....	235
APPENDICE A: $q$ -POLYNÔMES DE CHARLIER POUR $n \leq 6$ .....	243
APPENDICE B: COEFFICIENTS DE LINÉARISATION POUR UN PRODUIT DE TROIS $q$ -POLYNÔMES DE CHARLIER .....	246
APPENDICE C: COEFFICIENTS DE LINÉARISATION POUR UN PRODUIT DE QUATRE $q$ -POLYNÔMES DE CHARLIER .....	255
APPENDICE D: COEFFICIENTS DE LINÉARISATION POUR UN PRODUIT DE CINQ $q$ -POLYNÔMES DE CHARLIER .....	270
INDEX .....	276

## LISTE DES TABLEAUX

TABLEAU I : $\mathfrak{A}$ -nombres de Stirling pour $a_i$ progression arithmétique.....	53
TABLEAU II : $q$ -polynômes de Charlier.....	244–245
TABLEAU III : Coefficients de linéarisation pour un produit de trois $q$ -polynômes de Charlier.....	247–254
TABLEAU IV : Coefficients de linéarisation pour un produit de quatre $q$ -polynômes de Charlier.....	256–269
TABLEAU V : Coefficients de linéarisation pour un produit de cinq $q$ -polynômes de Charlier.....	271–275

## LISTE DES FIGURES

FIGURE 0.1:	tableau 0-1 $\varphi$ .....	3
FIGURE 1.1:	tableau 0-1 $\varphi$ .....	14
FIGURE 1.2:	inversions et non-inversions d'un tableau 0-1 .....	14
FIGURE 1.3:	correspondance entre matrices 0-1 et tableaux 0-1.....	17
FIGURE 1.4:	décomposition des tableaux 0-1 pour l'identité (1.2.10) .....	23
FIGURE 1.5:	décomposition des tableaux 0-1 pour l'identité (1.2.12) .....	24
FIGURE 1.6:	involution sur des couples de $q$ -tableaux pour l'identité (1.4.9) .....	42
FIGURE 1.7:	décomposition des tableaux 0-1 pour l'identité (1.4.18) .....	46
FIGURE 2.1:	tableau 0-1 faible $\psi$ .....	67
FIGURE 2.2:	tableau 0-1 faible $\psi \in Td_f(5, 5, 2)$ .....	73
FIGURE 2.3:	construction d'une matrice à partir d'un tableau 0-1 faible ...	74
FIGURE 2.4:	décomposition des tableaux 0-1 faibles pour l'identité (2.3.35) .....	80
FIGURE 2.5:	correspondance entre les ensembles $T_{fc}(h, r)$ et $T^{a,d}(h, r)$ ....	87
FIGURE 4.1:	un chemin de Motzkin coloré .....	164
FIGURE 4.2:	représentation graphique de $\tau = (1, 4)(2, 7)(3, 10)(5, 6)(8, 9)$ .....	175
FIGURE 4.3:	une histoire d'Hermite $h = (w; (p_1, \dots, p_{10}))$ .....	177
FIGURE 4.4:	les bijection $\varphi_{gd}$ et $\varphi_{dg}$ .....	178
FIGURE 4.5:	le choix $p_i$ dans $\varphi_{dg}$ .....	183
FIGURE 4.6:	construction de $\tau' \in INV[n + 1]$ à partir de $\tau \in INV[n]$ ....	184
FIGURE 4.7:	représentation graphique d'une permutation $\sigma$ .....	186
FIGURE 4.8:	cas (a) du lemme 4.3.1.....	188
FIGURE 4.9:	sous-cas (b.1) du lemme 4.3.1 .....	189
FIGURE 4.10:	sous-cas (b.2) du lemme 4.3.1.....	190
FIGURE 4.11:	sous-cas (b.3) du lemme 4.3.1.....	190
FIGURE 4.12:	sous-cas (b.4) du lemme 4.3.1.....	191
FIGURE 4.13:	chemin de Dyck .....	195
FIGURE 4.14:	la bijection $\Theta$ appliquée à la figure 4.13.....	195
FIGURE 4.15:	la bijection $\Theta^+$ appliquée à la figure 4.13 .....	196
FIGURE 4.16:	redistribution des $p_i$ significatifs dans une histoire de Laguerre subdivisée .....	201
FIGURE 4.17:	la bijection $\Theta h$ appliquée à $h_s$ de la figure 4.16 .....	201
FIGURE 4.18:	chemin $w_{exc}$ .....	203
FIGURE 4.19:	chemin $w_{nex}$ .....	204
FIGURE 4.20:	la bijection $HLs$ appliquée aux histoires d'Hermite des figures 4.18 et 4.19.....	205
FIGURE 4.21:	correspondance des $q$ -pondérations.....	210
FIGURE 4.22:	histoire de Laguerre $h$ .....	216
FIGURE 4.23:	la statistique $lag$ .....	222
FIGURE 4.24:	représentation graphique de la partition $\pi = \{1, 7\}\{2\}\{3, 5, 9\}\{4\}\{6, 8\}$ .....	225
FIGURE 4.25:	représentation graphique de $\sigma^{(\pi)}$ associé à la partition $\pi$ de la figure 4.24.....	225
FIGURE 4.26:	correspondance des $q$ -pondérations le long de la bijection $\tilde{\Psi}_{FZ}$ .....	228

## NOTATIONS DES ENSEMBLES

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\},$$

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\},$$

$GF(q)$  = le corps à  $q$  éléments,

$\mathbb{N}[q]$  = les polynômes en  $q$  à coefficients dans  $\mathbb{N}$ ,

$\mathbb{N}[p, q]$  = les polynômes en  $p$  et en  $q$  à coefficients dans  $\mathbb{N}$ ,

$$[[n]] = \begin{cases} \emptyset & \text{si } n = 0 \\ \{1, 2, \dots, n\} & \text{si } n \in \mathbb{N}^*, \end{cases}$$

$Fix(\varphi; E) = Fix(\varphi)$  = l'ensemble des points fixes d'une application

$$\varphi : E \longrightarrow E,$$

$\mathfrak{S}_n$  = les permutations de  $[[n]]$ ,

$\mathfrak{S}(n, k)$  = les permutations de  $[[n]]$  en  $k$  cycles disjoints,

$\mathfrak{S}(n, l, k)$  = les permutations sur  $[[n]]$  en  $k$  cycles dont  $l$  sont marqués,

$Supp(\sigma)$  = le support de la permutation  $\sigma$ ,

$CYCLE(\sigma)$  = ensemble formé des cycles de la permutation  $\sigma$ ,

$CYCLE(\underline{\sigma}) = \bigcup_{i=1}^k CYCLE(\sigma_i)$ , où  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$  sont des permutations.

$C(A_n)$  = les permutations partielles  $(E, \sigma)$  sur l'ensemble  $A_n$ ,

$C(A_n, k)$  = les permutations partielles  $(E, \sigma)$  sur l'ensemble  $A_n$ , telles que  $\sigma$  se décompose en  $k$  cycles disjoints,

$INV[n]$  = ensemble des involutions sans points fixes sur  $\llbracket n \rrbracket$ ,

$\mathcal{P}(A_n)$  = les partitions de l'ensemble  $A_n$ ,

$L(m(\pi)) = \{i \mid m_i \text{ est la première occurrence de l'entier } j, 1 \leq j \leq k, \text{ en lisant le mot } m(\pi) \text{ de gauche à droite} \}$

$R(m(\pi)) = \{i \mid m_i \text{ est la première occurrence de l'entier } j, 1 \leq j \leq k, \text{ en lisant le mot } m(\pi) \text{ de droite à gauche} \}$

$Supp(\pi_i) = \bigcup_{c \in \pi_i} Supp(c)$ , où  $\pi_i$  désigne un bloc d'une partition  $\pi$  sur l'ensemble  $CYCLE(\underline{\sigma})$ ,

$\mathcal{PP}(n, l, k)$  = les partitions partielles  $(E; \pi)$  de  $\llbracket n \rrbracket$  en  $k$  blocs telles que  $|E| = l$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{LC}(\underline{n}) &= \mathcal{LC}(n_1, n_2, \dots, n_k) \\ &= \left\{ ((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi) = ((E_1, \sigma_1), (E_2, \sigma_2), \dots, (E_k, \sigma_k); \pi) \mid \right. \\ &\quad \left. (E_i, \sigma_i) \in C(\{i\} \times \llbracket n_i \rrbracket), \text{ et } \pi \text{ est une partition} \right. \\ &\quad \left. \text{de l'ensemble } CYCLE(\underline{\sigma}) = \bigcup_{i=1}^k CYCLE(\sigma_i) \right\}. \end{aligned}$$

$P(h, r) = \{\lambda \mid \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \text{ est un partage dont le diagramme de Ferrers est inscrit dans un rectangle de base } h \text{ et de hauteur } r\}$ ,

$Pd(h, r) = \{\lambda \mid \lambda \in P(h, r) \text{ et toutes les colonnes du diagramme de Ferrers de forme } \lambda \text{ sont de longueurs distinctes} \}$ ,

$T(h, r) = \{\varphi = (\lambda, f) \mid \varphi \text{ est un tableau 0-1, } \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \text{ possède au plus } h \text{ parts (non nulles) et } \lambda_1 = r\},$

$Td(h, r) = \{\varphi = (\lambda, f) \mid \varphi \in T(h, r) \text{ et le diagramme de Ferrers de } \lambda \text{ contient des colonnes de longueurs deux à deux distinctes}\},$

$C(n) = \{\varphi = (\lambda, f) \mid \varphi \text{ est un tableau 0-1 et le diagramme de Ferrers de } \lambda \text{ a la forme d'une colonne de longueur } n \},$

$T^{\geq m}(h, r) = \{\varphi = (\lambda, f) \mid \varphi \in T(h + m, r) \text{ et les colonnes de } \varphi \text{ sont de longueurs supérieures ou égales à } m\},$

$Td^{\geq m}(h, r) = \{\varphi = (\lambda, f) \mid \varphi \in Td(h + m, r) \text{ et les colonnes de } \varphi \text{ sont de longueurs supérieures ou égales à } m\},$

$T^{a,d}(h, r) = \{\varphi = (\lambda, f) \mid \varphi \in T(a + hd, r) \text{ et dont les longueurs des colonnes font partie de l'ensemble } \{a, a + d, a + 2d, \dots, a + hd\}\},$

$Td^{a,d}(h, r) = \{\varphi = (\lambda, f) \mid \varphi \in T^{a,d}(h, r) \text{ et le diagramme de Ferrers de } \lambda \text{ contient des colonnes de longueurs deux à deux distinctes}\},$

$F_q(h, r) = \{\rho = (\lambda, f) \mid \psi \text{ est un } q\text{-tableau et } \lambda \in P(h, r)\},$

$Fd_q(h, r) = \{\rho = (\lambda, f) \mid \psi \text{ est un } q\text{-tableau et } \lambda \in Pd(h, r)\},$

$F_q^*(h, r) = \{\rho = (\lambda, f) \mid \psi \in F_q(h, r) \text{ et aucune colonne du diagramme de Ferrers de forme } \lambda \text{ n'est remplie exclusivement de "0"}\},$

$Fd_q^*(h, r) = \{\rho = (\lambda, f) \mid \psi \in Fd_q(h, r) \text{ et aucune colonne du diagramme de Ferrers de forme } \lambda \text{ n'est remplie exclusivement de "0"}\},$

$T^{\mathcal{A}}(h, r) = \{\phi \mid \phi \text{ est un } \mathcal{A}\text{-tableau, contenant } r \text{ colonnes dont les longueurs sont prises dans le multi-ensemble } \{a_0, a_1, \dots, a_h\}\},$

$Td^{\mathcal{A}}(h, r) = \{\phi \mid \phi \in T^{\mathcal{A}}(h, r) \text{ et } \phi \text{ possède des colonnes de longueurs deux à deux distinctes}\},$

$T_f(h, r) = \{\psi = (\lambda, l, f) \mid \psi \text{ est un tableau 0-1 faible, } \lambda \text{ possède au plus } h \text{ parts (non nulles) et } l = r\},$

$Td_f(h, r) = \{\psi = (\lambda, l, f) \mid \psi \in T_f(h, r) \text{ et } \psi \text{ possède des colonnes de longueurs deux à deux distinctes}\},$

$T_f(h, r, s) = \{\psi = (\lambda, l, f) \mid \psi \in T_f(h, r) \text{ et } \psi \text{ contient } s \text{ colonnes remplies de "0"}\},$

$Td_f(h, r, s) = \{\psi = (\lambda, l, f) \mid \psi \in Td_f(h, r) \text{ et } \psi \text{ contient } s \text{ colonnes remplies de "0"}\},$

$T_{fc}(h, r) = \{(\psi, \gamma) \mid (\psi, \gamma) \text{ est un tableau 0-1 faible coloré tel que } \psi \text{ est dans l'ensemble } T_f(h, r)\},$

$Td_{fc}(h, r) = \{(\psi, \gamma) \mid (\psi, \gamma) \text{ est un tableau 0-1 faible coloré tel que } \psi \text{ est dans l'ensemble } Td_f(h, r)\},$

## INTRODUCTION

L'étude des  $q$ -analogues de suites de nombres ou de polynômes classiques est un domaine de recherche en pleine évolution. De nombreux articles paraissent chaque année dans la littérature à ce sujet, dont le premier fut écrit par F.W. Jackson [Ja] en 1910.

La propriété des  $q$ -analogues la plus intéressante du point de vue combinatoire est la suivante: si une suite  $\{a_k(q)\}_{k \geq 0}$  de polynômes à coefficients entiers positifs en la variable  $q$  est un  $q$ -analogue d'une suite combinatoire d'entiers positifs  $\{a_k\}_{k \geq 0}$ , alors  $a_k(1) = a_k$ , pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

Ainsi, on définit habituellement le  $q$ -analogue des entiers naturels par

$$[n]_q = \begin{cases} \frac{1-q^n}{1-q} = 1 + q + \dots + q^{n-1}, & \text{si } n \geq 1, \\ 0, & \text{si } n = 0. \end{cases} \quad (0.1)$$

L'approche qu'utilisent les combinatoriciens aux  $q$ -analogues consiste à trouver un paramètre  $par(a)$  sur des objets  $a \in A_n$ , où  $|A_n| = a_n$ , de telle sorte que

$$|A_n|_q = \sum_{a \in A_n} q^{par(a)} = a_n(q). \quad (0.2)$$

Par exemple, en choisissant  $par(k) = k-1$  comme statistique sur les entiers  $k \in \llbracket n \rrbracket = \{1, 2, \dots, n\}$ , on obtient une interprétation combinatoire de la suite de  $q$ -analogues des entiers naturels  $\{[n]_q\}_{n \geq 0}$ .

Dans ce travail, nous nous intéresserons plus particulièrement aux  $q$ -analogues des nombres de Stirling de première espèce (sans signes), notés  $c_q[n, k]$ , et de deuxième espèce, notés  $S_q[n, k]$ , introduits par H.W. Gould [Gou] en 1961. Ces suites de polynômes satisfont les récurrences suivantes:

$$c_q[n+1, k+1] = c_q[n, k] + [n]_q c_q[n, k+1], \quad (0.3)$$

$$S_q[n+1, k+1] = S_q[n, k] + [k+1]_q S_q[n, k+1], \quad (0.4)$$

avec conditions initiales  $c_q[n, 0] = \delta_{n,0} = S_q[n, 0]$ , et  $c_q[0, k] = \delta_{0,k} = S_q[0, k]$ .

Dans le premier chapitre, nous proposons une approche combinatoire unifiée des nombres de Stirling de première et de deuxième espèces, en termes de *tableaux 0-1*. Un *tableau 0-1* consiste en un couple  $\varphi = (\lambda, f)$ , où  $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k)$  est un partage d'un entier  $m = |\lambda|$ , et  $f = (f_{ij})_{1 \leq j \leq \lambda_i}$  est un "remplissage" des cellules du diagramme de Ferrers de forme  $\lambda$  correspondant avec des "0" et des "1", de telle sorte qu'il y ait exactement un "1" dans chaque colonne.

Par exemple, la figure 0.1 illustre le tableau 0-1  $\varphi = (\lambda, f)$ , où  $\lambda = (8, 7, 6, 2)$  et  $f_{15} = f_{17} = f_{18} = f_{21} = f_{23} = f_{32} = f_{34} = f_{36} = 1$ ,  $f_{ij} = 0$  ailleurs ( $1 \leq j \leq \lambda_i$ ).

0	0	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0	0	
0	1	0	1	0	1		
0	0						

FIGURE 0.1: tableau 0-1  $\varphi$ 

Les paramètres *nombre d'inversions*,  $\text{inv}(\varphi)$ , et *nombre de non-inversions*,  $\text{nin}(\varphi)$ , égaux respectivement au nombre de "0" apparaissant en dessous (respectivement au-dessus) des "1" dans  $\varphi$ , permettent d'obtenir des modèles combinatoires des  $q$ -nombres de Stirling, de même qu'un  $p, q$ -analogue de ces nombres, en considérant la distribution conjointe des inversions (variable  $q$ ) et des non-inversions (variable  $p$ ).

Plus exactement, si  $T(h, r)$  désigne l'ensemble de tous les tableaux 0-1  $(\lambda, f)$  tels que le nombre de parts non nulles de  $\lambda$  est au plus égal à  $h$ , et que la première part de  $\lambda$  est exactement égale à  $r$ , pour  $h \geq 0$ ,  $r \geq 0$  (au point de vue graphique, un tableau 0-1 dans l'ensemble  $T(h, r)$  possède exactement  $r$  colonnes de longueurs (non nulles) plus petites ou égales à  $h$ ), et si  $Td(k, r)$  désigne le sous-ensemble de  $T(k, r)$  contenant les tableaux 0-1 dont les longueurs des colonnes sont deux à deux distinctes, alors

$$c_q[n, k] = \sum_{\varphi \in Td(n-1, n-k)} q^{\text{inv}(\varphi)}, \quad (0.5)$$

$$S_q[n, k] = \sum_{\varphi \in T(k, n-k)} q^{\text{inv}(\varphi)}; \quad (0.6)$$

$$c_{p,q}[n, k] = \sum_{\varphi \in Td(n-1, n-k)} p^{\text{nin}(\varphi)} q^{\text{inv}(\varphi)}, \quad (0.7)$$

$$\text{et } S_{p,q}[n, k] = \sum_{\varphi \in T(k, n-k)} p^{\text{nin}(\varphi)} q^{\text{inv}(\varphi)}. \quad (0.8)$$

Les tableaux 0-1 ont été introduits par P. Leroux dans [Le3], pour établir un résultat de  $q$ -log concavité conjecturé par L. Butler [But2] pour les nombres de Stirling de deuxième espèce. M. Wachs and D. White [WaWh] ont été les premiers à introduire les  $p, q$ -nombres de Stirling de deuxième espèce comme polynôme générateur de la distribution conjointe des statistiques d'inversions et de non-inversions des fonctions à croissance restreinte. D'autres statistiques et d'autres modèles combinatoires existent pour les  $q$ -nombres de Stirling des deux espèces, notamment pour les  $q$ -nombres de Stirling de première espèce, le modèle classique en termes d'inversions sur les permutations, et pour les  $q$ -nombres de Stirling de deuxième espèce, des modèles en termes d'inversions, de non-inversions ou d'une statistique " $rs$ " sur les partitions ensemblistes ou sur les fonctions à croissance restreinte (cf Milne [Mi1] et Wachs et White [WaWh]), de même qu'un traitement combinatoire utilisant des espaces vectoriels de dimension finie sur le corps  $GF(q)$  de cardinalité  $q$  (cf Milne [Mi2]). Mentionnons également les modèles combinatoires en termes de placements de tours sur des diagrammes de Ferrers, qui ont été considérés par Garsia et Remmel [GaR2], Remmel et Wachs [ReWa], Sagan [Sa4], et Wachs et White [WaWh].

L'objet du premier chapitre est de montrer que les tableaux 0-1 constituent un outil combinatoire à la fois naturel et précieux pour l'étude des nombres de Stirling des deux espèces, ainsi que de leurs  $q$  et  $p, q$ -analogues. Pour ce faire, nous exhibons plusieurs identités sur ces polynômes (certaines nouvelles, d'autres déjà connues) et nous les démontrons combinatoirement à l'aide de cette interprétation. Il se trouve que dans la plupart des cas, les démonstrations sont remarquablement simples et élégantes, et mettent bien en valeur la dualité qui existe entre les nombres de Stirling de première et de deuxième espèces. Notre contribution en terme de nouvelles identités consiste

en les formules (1.2.11), (1.2.14) à (1.2.17), (1.2.26), (1.2.28) à (1.2.30), (1.3.9), (1.3.11), (1.4.6), (1.4.8) à (1.4.10), (1.4.17), (1.4.18) et (1.5.3).

Revenons brièvement sur le modèle combinatoire classique des  $q$ -nombres de Stirling de première espèce. Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , une permutation de l'ensemble  $[[n]] = \{1, 2, \dots, n\}$ , on dira que  $\sigma$  est *écrite sous forme standard de produit de cycles disjoints* si  $\sigma$  est écrite sous forme de produit de cycles disjoints, chaque cycle débutant par son minimum et les cycles étant ordonnés selon l'ordre croissant des minima de cycles. La notation  $m(\sigma)$  désignera le mot obtenu en effaçant les parenthèses dans l'écriture de  $\sigma$  sous forme standard de produit de cycles disjoints, et  $cyc(\sigma)$  désignera le nombre de cycles disjoints que possède  $\sigma$ . Alors,

$$\sum_{k=0}^n c_q[n, k] x^k = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} q^{\text{inv}(\sigma)} x^{\text{cyc}(\sigma)}, \quad (0.9)$$

où  $\text{inv}(\sigma) = \text{inv}(m(\sigma))$  désigne le nombre d'inversions dans le mot  $m(\sigma) = m_1 m_2 \dots m_n$ , i.e. le nombre de couples  $(i, j)$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ , tels que  $m_i > m_j$ .

Or toute permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  s'exprime également *sous forme de mot*,  $\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\dots\sigma(n)$ , et il est naturel de considérer la statistique "nombre d'inversions du mot  $\sigma$ ", notée  $\text{inv}(\sigma)$ , sur le groupe symétrique. La distribution de ce paramètre est bien connue (cf Foata [Fo]), c'est

$$[n]_q! = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} q^{\text{inv}(\sigma)}, \quad (0.10)$$

$$\text{où } [n]_q! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ [1]_q [2]_q \dots [n]_q & \text{si } n \geq 1. \end{cases} \quad (0.11)$$

On appelle ce genre de statistique, *statistique Mahonienne*, en l'honneur du Major P.A. MacMahon [MM], qui a montré que les statistiques "indice majeur"

et “nombre d’inversions” ont même distribution sur le groupe symétrique et sur toute classe de réarrangements d’un mot.

Les deux types de nombres d’inversions sur les permutations,  $\text{inv}(\sigma)$  et  $\text{inv}(\sigma)$ , sont utilisés dans ce travail. Nous indiquerons toujours clairement de quel type d’inversions il s’agit, mais disons qu’en gros, les statistiques d’inversions qui apparaissent dans les trois premiers chapitres sont celles relatives aux nombres de Stirling de première espèce, alors que dans le chapitre 4, il est plutôt question de la statistique  $\text{inv}(\sigma)$  Mahonienne.

Le chapitre 2 est consacré à des généralisations des nombres de Stirling, suggérées par le modèle combinatoire des tableaux 0-1.

La première généralisation consiste à restreindre les longueurs de colonnes admises dans les tableaux 0-1 et à remplacer le  $p, q$ -comptage du remplissage de colonnes par une pondération sur les colonnes. Plus exactement, si  $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, w)$ , où  $\mathcal{A} = (a_i)_{i \geq 0}$  désigne une suite croissante d’entiers non-négatifs (les longueurs de colonnes admises), et  $w : \mathbb{N} \rightarrow K$  désigne une fonction de  $\mathbb{N}$  à valeurs dans un anneau  $K$  (le poids des colonnes selon leur longueur), on définit un  $\mathcal{A}$ -tableau comme une liste  $\phi$  des colonnes  $c$  du diagramme de Ferrers d’un partage d’entier  $\lambda$  (par ordre décroissant de longueur) dont les longueurs  $|c|$  apparaissent dans la suite  $\mathcal{A}$ , et on pose

$$w_{\mathfrak{A}}(\phi) = \prod_{c \in \phi} w(|c|). \quad (0.12)$$

Pour simplifier l’écriture, nous noterons  $w_i := w(a_i)$ . Nous définissons alors les  $\mathfrak{A}$ -nombres de Stirling

$$c^{\mathfrak{A}}(n, k) := \sum_{\phi \in Td\mathcal{A}(n-1, n-k)} w_{\mathfrak{A}}(\phi), \quad (0.13)$$

$$\text{et } S^{\mathcal{A}}(n, k) := \sum_{\phi \in T^{\mathcal{A}}(k, n-k)} w_{\mathcal{A}}(\phi), \quad (0.14)$$

où  $T^{\mathcal{A}}(h, r)$  désigne l'ensemble des  $\mathcal{A}$ -tableaux possédant exactement  $r$  colonnes dont les longueurs sont prises dans le multi-ensemble  $\{a_0, a_1, \dots, a_h\}$ , et  $Td^{\mathcal{A}}(h, r)$  désigne le sous-ensemble de  $T^{\mathcal{A}}(h, r)$  contenant les  $\mathcal{A}$ -tableaux possédant des colonnes de longueurs  $a_i$  deux à deux distinctes.

Les  $\mathcal{A}$ -nombres de Stirling sont aussi généraux que les fonctions symétriques élémentaires et homogènes. Plusieurs familles de nombres ou de polynômes classiques apparaissent comme cas particulier, notamment les  $p, q$ -nombres de Stirling des deux espèces, des formules de dénombrement des partages d'entiers dont le diagramme de Ferrers est contenu dans un rectangle (cf Andrews [An]), et le nombre de sous-espaces vectoriels (respectivement affines) de dimension  $k$  d'un espace vectoriel (respectivement affine) de dimension  $n$ .

Le cas particulier des *nombres de Stirling  $a, d$ -progressifs*, où les longueurs des colonnes sont restreintes à une progression arithmétique  $\mathcal{A} = \{a + id\}_{i \geq 0}$ , permet aussi d'obtenir plusieurs familles de nombres et de polynômes connues, et nous les étudions plus à fond. Parmi ces familles, mentionnons les coefficients binomiaux, le nombre de sous-treillis booléens  $P(k)$  du treillis booléen  $P(n)$  (cf Voigt [Vo]), le nombre de partitions partielles (colorées) sur  $n$  éléments, le nombre de permutations (colorées) sur  $n$  éléments avec  $k$  cycles non marqués, les nombres de Stirling non-centrés (cf Koutras [Kou]), et les nombres de Whitney des treillis de Dowling (cf Dowling [Dow] et Leroux [Le1]).

La seconde généralisation consiste à remplacer les tableaux 0-1 par des *tableaux 0-1 faibles*, remplissages de diagrammes de Ferrers avec des "0" et des "1", de telle sorte qu'il y ait *au plus* un "1" par colonne. Les familles

de polynômes obtenues, appelées *nombres de Stirling partiels*, apparaissent naturellement dans le  $p, q$ -analogue de formules de convolution de W. Chen [Ch] et L. Verde-Star [VS], présentées dans le chapitre 1. De plus, le modèle de tableaux 0-1 faibles, enrichi de colorations, apparait comme modèle combinatoire alternatif aux  $\mathcal{A}$ -tableaux pour les nombres de Stirling  $a, d$ -progressifs, et s'avère utile dans les démonstrations combinatoires de certaines identités sur ces familles.

Dans le chapitre 2 donc, nous étudions les généralisations présentées ci-dessus en relevant les identités du chapitre 1 à ces différents niveaux de généralités. Un modèle combinatoire des nombres de Stirling partiels (respectivement  $a, d$ -progressifs) en termes de permutations (colorées) à cycles marqués, et de partitions partielles (colorées) est introduit, généralisant les modèles combinatoires classiques en termes de permutations et de partitions ensemblistes des nombres de Stirling usuels et de leurs  $q$  et  $p, q$ -analogues. Nous considérons également les propriétés de  $p, q$ -concavité logarithmique des différentes familles de polynômes obtenues.

Un des intérêts de ces généralisations est de mettre en valeur les différents aspects combinatoires de l'approche des tableaux 0-1. Cela permet aussi de voir jusqu'à quel point les propriétés des ( $q$  et  $p, q$ -)nombres de Stirling peuvent s'étendre ou non à un contexte plus général.

L'un des problèmes auxquels on se heurte lorsqu'on s'intéresse aux  $q$ -analogues est qu'en général, il n'existe pas qu'un seul bon  $q$ -analogue possible d'un objet donné. Certaines propriétés de ce dernier se généralisent à un  $q$ -analogue mais pas à un autre. Dans ce sens, on ne peut pas dire qu'il existe nécessairement de  $q$ -analogues "naturels".

Une illustration de ceci est fournie par les polynômes orthogonaux de Charlier. Les polynômes de Charlier  $\{C_n^{(a)}(x)\}_{n \geq 0}$  forment la classe de polynômes orthogonaux par rapport à la suite de moments  $\{\nu_n^{(a)}\}_{n \geq 0}$ , donnée par

$$\nu_n^{(a)} = \sum_{k=0}^n S(n, k) a^k, \quad (0.15)$$

où  $S(n, k)$  désigne les nombres de Stirling de deuxième espèce. Dans le chapitre 3, nous considérons la classe de polynômes  $\{C_{n,q}^{(a)}(x)\}_{n \geq 0}$  orthogonaux par rapport à la suite de moments  $\{\nu_{n,q}^{(a)}\}_{n \geq 0}$ , donnée par

$$\nu_{n,q}^{(a)} = \sum_{k=0}^n S_q[n, k] a^k, \quad (0.16)$$

où  $S_q[n, k]$  désigne les  $q$ -nombres de Stirling de deuxième espèce définis par (0.6).

Notons que ce  $q$ -analogue des polynômes de Charlier n'est pas le  $q$ -analogue classique que l'on retrouve dans la littérature (cf Hahn [Ha], Milne [Mi2], et Andrews et Askey [AA]), mais plutôt une version normalisée des polynômes d'Al Salam-Carlitz (cf Al Salam et Carlitz [AC], et Chihara [Chi]). Néanmoins, ce  $q$ -analogue est "naturel", puisque nous utilisons un  $q$ -analogue naturel des moments pour l'obtenir. Cependant, comme on le verra dans le chapitre 3, les coefficients de linéarisation de ces  $q$ -polynômes ne sont pas des polynômes à coefficients positifs, comme le sont les coefficients de linéarisation des polynômes de Charlier ou de leur  $q$ -analogue classique. On a donc perdu cette propriété des polynômes en passant au  $q$ -analogue  $C_{n,q}^{(a)}(x)$ .

Depuis les vingt-cinq dernières années, plusieurs mathématiciens se sont intéressés au problème de trouver des interprétations combinatoires pour les coefficients de linéarisation des classes de polynômes orthogonaux classiques, et

notamment pour les cinq classes de polynômes orthogonaux de Sheffer. Citons à ce sujet les travaux de Even et Gillis [EG], Askey et Ismail [AI], Jackson [Jac], Carlitz [Ca3], et de Sainte-Catherine et Viennot [dSCV] pour les coefficients de linéarisation des polynômes de Laguerre  $L_n^{(0)}(x)$ , Foata et Zeilberger [FoZ1] et Gessel [Ge2] pour les polynômes de Laguerre généraux  $L_n^{(\alpha)}(x)$ , Godsil [God], Azor, Gillis et Victor [AGV] pour les polynômes d’Hermite, et plus récemment, Ismail et Stanton (non publié) et Zeng [Zen2] pour les polynômes de Charlier, et Zeng [Zen2, Zen3] pour les polynômes de Meixner et Meixner-Pollačzek.

Le chapitre 3 traite de certains aspects combinatoires des polynômes de Charlier et de leurs  $q$ -analogues. Nous démontrons principalement de manière totalement combinatoire, en utilisant des involutions préservant les poids mais inversant les signes, l’orthogonalité des polynômes de Charlier et de leurs  $q$ -analogues. Nous établissons plus généralement la série génératrice des coefficients de linéarisation des polynômes de Charlier, ainsi que quelques résultats partiels et conjectures sur les coefficients de linéarisation des  $q$ -polynômes de Charlier. Nous utilisons pour ce faire des interprétations combinatoires de ces classes de polynômes en termes de permutations partielles pondérées, et des interprétations de leurs moments en termes de partitions ensemblistes,  $q$ -comptées selon le paramètre *nombre d’inversions* ( $\text{inv}(\pi)$ ) ou *nombre de non-fermetures* ( $\text{rs}(\pi)$ ).

Enfin, le chapitre 4 fournit une démonstration bijective, utilisant les chemins de Motzkin valués (cf Françon et Viennot [FrVi], Flajolet [Fla], et Viennot [Vi1]), du fait que les  $q$ -polynômes de Laguerre, notés  $L_{n,q}^{(\alpha)}(x)$ , dont les moments sont

$$\mu_{n,q}^{(\alpha)} = (\alpha + 1)(\alpha + 1 + q) \dots (\alpha + 1 + q + \dots + q^{n-1}), \quad (0.17)$$

satisfont la récurrence linéaire à trois termes

$$L_{n+1,q}^{(\alpha)}(x) = (x - q^n([n]_q + \alpha + [n+1]_q))L_{n,q}^{(\alpha)}(x) - q^{2n-1}[n]_q(\alpha + [n]_q)L_{n-1,q}^{(\alpha)}(x), \quad (0.18)$$

avec conditions initiales  $L_{0,q}^{(\alpha)}(x) = 1$  et  $L_{1,q}^{(\alpha)}(x) = x - \alpha - 1$ .

Selon la théorie combinatoire des polynômes orthogonaux généraux développée par X.G. Viennot [Vil], ce résultat repose sur le fait qu'une certaine statistique "*lag*" sur les histoires de Laguerre est Mahonienne.

Pour montrer ceci, nous utilisons une bijection de D. Foata et D. Zeilberger [FoZ3] entre les permutations de l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n\}$  et les histoires de Laguerre de longueur  $n$ . Nous rappelons d'abord la très ingénieuse construction bijective définie directement par D. Foata et D. Zeilberger, en la décomposant en quatre étapes. Un premier avantage de ce découpage est d'ordre pédagogique pour ce que nous voulons démontrer. Un second avantage est de souligner que les deuxième et quatrième étapes de la construction reposent en fait sur des bijections ou constructions déjà connues, intervenant dans d'autres théories relatives aux polynômes orthogonaux, ce qui permet d'inscrire la bijection Foata-Zeilberger comme le chaînon manquant d'une véritable théorie combinatoire unifiée des polynômes orthogonaux.

Nous montrons ensuite comment la statistique "*lag*" sur les histoires de Laguerre, correspondant aux coefficients de la récurrence linéaire à trois termes (0.18) est transportée, via cette bijection, sur une statistique dont il n'est pas évident à priori que ce soit exactement le nombre d'inversions (Mahoniennes) des permutations. Nous obtenons également de nouvelles statistiques sur les permutations et les partitions ensemblistes, ayant même distribution que le paramètre "nombre d'inversions" sur ces objets, en transportant le paramètre

“*lag*” le long d’une seconde bijection classique entre permutations et histoires de Laguerre, due à J. Françon et X.G. Viennot [FrVi].

Remarquons que la classe de polynômes  $\{L_{n,q}^{(a)}(x)\}_{n \geq 0}$ , n’est pas le  $q$ -analogue des polynômes de Laguerre que les analystes considèrent habituellement. Ils apparaissent cependant dans la littérature comme cas particulier des polynômes “*little  $q$ -Jacobi*”  $p_n(x, a, b; q)$  (cf Gasper et Rahman [GR]).

Nous terminons en esquissant une théorie combinatoire générale des  $q$ -analogues des cinq classes de polynômes orthogonaux de Sheffer, soient les  $q$ -polynômes d’Hermite, de Charlier, de Laguerre, de Meixner et de Meixner-Pollačzek.

Les chapitre 1 et 2 ont été écrits en collaboration avec P. Leroux et sont parus en partie dans [dML1] et [dML2], le chapitre 4 a été écrit en collaboration avec X.G. Viennot, et le chapitre 3 fait l’objet de travaux communs avec D. Stanton et D. White pour publication future.

## CHAPITRE 1

### UNE APPROCHE COMBINATOIRE DES $q$ -(ET $p, q$ -)NOMBRES DE STIRLING

#### 1.1 INTRODUCTION

Un *tableau 0-1* consiste en un couple  $\varphi = (\lambda, f)$ , où  $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k)$  est un partage d'un entier  $m = |\lambda|$  et  $f = (f_{ij})_{1 \leq j \leq \lambda_i}$  est un "remplissage" des cellules du diagramme de Ferrers de forme  $\lambda$  correspondant avec des "0" et des "1", de telle sorte qu'il y ait exactement un "1" dans chaque colonne.

Par exemple, la figure 1.1 illustre le tableau 0-1  $\varphi = (\lambda, f)$ , où  $\lambda = (8, 7, 6, 2)$  et  $f_{15} = f_{17} = f_{18} = f_{21} = f_{23} = f_{32} = f_{34} = f_{36} = 1$ ,  $f_{ij} = 0$  ailleurs ( $1 \leq j \leq \lambda_i$ ).

Nous définissons deux statistiques sur ces objets: d'abord, le *nombre d'inversions* de  $\varphi$ , noté  $\text{inv}(\varphi)$ , qui est égal au nombre de "0" en dessous d'un

0	0	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0	0	
0	1	0	1	0	1		
0	0						

FIGURE 1.1: tableau 0-1  $\varphi$ 

“1” dans  $\varphi$  (les étoiles dans la figure 1.2); et le *nombre de non-inversions* de  $\varphi$ , noté  $\text{nin}(\varphi)$ , qui est égal au nombre de “0” au-dessus d’un “1” dans  $\varphi$  (les signes plus dans la figure 1.2).

+	+	+	+	1	+	1	1
1	+	1	+	*	+	*	
*	1	*	1	*	1		
*	*						

FIGURE 1.2: inversions et non-inversions d’un tableau 0-1

Nous définissons ensuite les  $q$  et  $p, q$ -*nombre de Stirling de deuxième espèce* comme étant respectivement les polynômes

$$S_q[n, k] := \sum_{\varphi \in T(k, n-k)} q^{\text{inv}(\varphi)}, \quad (1.1.1)$$

et

$$S_{p,q}[n, k] := \sum_{\varphi \in T(k, n-k)} p^{\text{nin}(\varphi)} q^{\text{inv}(\varphi)}, \quad (1.1.2)$$

où  $T(h, r)$  désigne l’ensemble de tous les tableaux 0-1  $(\lambda, f)$  tels que le nombre de parts non nulles de  $\lambda$  est au plus égal à  $h$ , et que la première part de  $\lambda$  est

exactement égale à  $r$ , pour  $h \geq 0$ ,  $r \geq 0$ . Par convention, il y a un tableau 0-1, noté  $\varphi = \emptyset$ , dans l'ensemble  $T(h, 0)$ , avec  $\text{nin}(\emptyset) = \text{inv}(\emptyset) = 0$ , le tableau 0-1 vide, pour  $h \geq 0$ , mais l'ensemble  $T(0, r) = \emptyset$ , pour  $r > 0$ . Au point de vue graphique, un tableau 0-1 dans l'ensemble  $T(h, r)$  possède exactement  $r$  colonnes de longueurs (non nulles) plus petites ou égales à  $h$ .

De même, nous définissons les  $q$  et  $p, q$ -nombres de Stirling de première espèce (sans signe) comme étant respectivement les polynômes

$$c_q[n, k] := \sum_{\varphi \in Td(n-1, n-k)} q^{\text{inv}(\varphi)}, \quad (1.1.3)$$

et

$$c_{p,q}[n, k] := \sum_{\varphi \in Td(n-1, n-k)} p^{\text{nin}(\varphi)} q^{\text{inv}(\varphi)}, \quad (1.1.4)$$

où  $Td(k, r)$  désigne le sous-ensemble de  $T(k, r)$  contenant les tableaux 0-1 dont les longueurs des colonnes sont deux à deux distinctes, avec les mêmes conventions. Plus formellement,  $Td(h, r)$  est le sous-ensemble de  $T(h, r)$  contenant les tableaux 0-1  $(\lambda, f)$  pour lesquels le partage conjugué  $\lambda'$  de  $\lambda$  possède des parts toutes distinctes.

Nous dirons que  $S_q[n, k]$  (resp.  $S_{p,q}[n, k]$ ) est un  $q$ -comptage (resp.  $p, q$ -comptage) de l'ensemble  $T(k, n - k)$  et nous écrirons  $S_q[n, k] = |T(k, n - k)|_q$  (resp.  $S_{p,q}[n, k] = |T(k, n - k)|_{p,q}$ ). De même, pour les nombres de Stirling de première espèce,  $c_q[n, k] = |Td(n - 1, n - k)|_q$  et  $c_{p,q}[n, k] = |Td(n - 1, n - k)|_{p,q}$ .

**REMARQUE 1.1.1:** Il découle de la définition et d'une involution simple sur les colonnes des tableaux 0-1 que les polynômes  $c_{p,q}[n, k]$  et  $S_{p,q}[n, k]$  sont symétriques dans les variables  $p$  et  $q$ , i.e.

$$c_{p,q}[n, k] = c_{q,p}[n, k], \quad (1.1.5)$$

$$S_{p,q}[n, k] = S_{q,p}[n, k]. \quad (1.1.6)$$

De plus, en posant  $p = 1$  dans les  $p, q$ -nombres de Stirling, nous obtenons les  $q$ -nombres de Stirling, i.e.

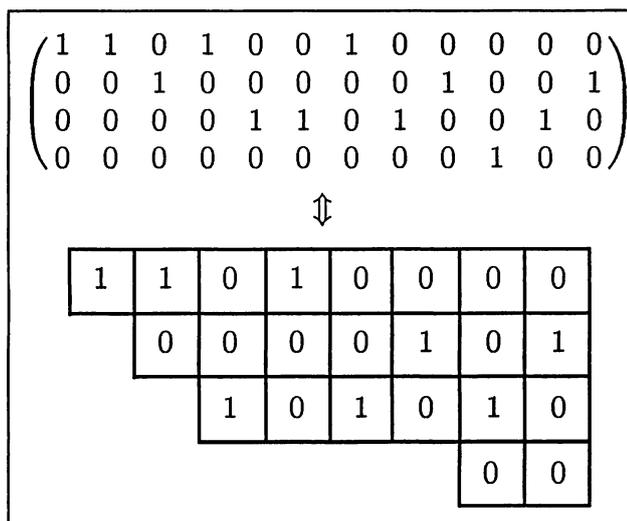
$$c_{1,q}[n, k] = c_{q,1}[n, k] = c_q[n, k], \quad (1.1.7)$$

$$S_{1,q}[n, k] = S_{q,1}[n, k] = S_q[n, k]. \quad (1.1.8)$$

Par conséquent, toute démonstration ou formule utilisant les  $p, q$ -nombres de Stirling des deux espèces se spécialise aux  $q$ -nombres de Stirling en omettant, au choix, la statistique d'inversions ou la statistique de non-inversions.

Mentionnons que les tableaux 0-1 ont été introduits par P. Leroux dans [Le3], pour établir un résultat de  $q$ -log concavité conjecturé par L. Butler [But2] pour les nombres de Stirling de deuxième espèce. Ils sont inspirés de certaines matrices réduites, représentations de *fonctions à croissance restreinte*, encodant des partitions d'ensembles. Plus précisément, nous disons qu'une matrice de format  $k \times n$  sur un corps  $\mathcal{K}$  est *réduite* si elle est ligne-réduite échelonnée, de rang  $k$ . Nous définissons une *matrice 0-1* comme étant une matrice réduite telle que tous ses éléments sont des "0" ou des "1", avec exactement un "1" dans chaque colonne. Il existe une correspondance naturelle entre les matrices 0-1 et les tableaux 0-1: un tableau 0-1 dans  $T(k, n - k)$  (dans le troisième quadrant!) est obtenu à partir d'une matrice 0-1 de format  $k \times n$  en enlevant toutes les colonnes pivot ainsi que les "0" qui se trouvent à gauche des "1" des colonnes pivot (voir la figure 1.3). De plus, les statistiques spéciales d'inversions et de non-inversions, définies sur les fonctions à croissance restreinte par S.C. Milne dans [Mil], correspondent exactement aux nombres d'inversions et de non-inversions des tableaux 0-1, donnés plus haut. Remarquons que cette correspondance induit une correspondance entre les tableaux 0-1 et le

modèle classique de partitions d'ensembles pour les nombres de Stirling de deuxième espèce. On peut, de la même manière, construire une bijection entre les tableaux 0-1 dont les longueurs des colonnes sont distinctes, et les permutations ayant un nombre fixé de cycles, le modèle combinatoire classique des nombres de Stirling de première espèce. On obtient, par transport le long de la bijection, de nouvelles statistiques d'inversions et de non-inversions sur les permutations. Notons que la statistique d'inversions ainsi obtenue est différente de la statistique classique d'inversions sur les permutations.



**FIGURE 1.3:** correspondance entre matrices 0-1 et tableaux 0-1

M. Wachs and D. White [WaWh] ont été les premiers à introduire les  $p, q$ -nombres de Stirling de deuxième espèce comme polynôme générateur de la distribution conjointe des statistiques d'inversions et de non-inversions des fonctions à croissance restreinte. D'autres statistiques et d'autres modèles combinatoires ont également été considérés, notamment les placements de tours sur des diagrammes de Ferrers (voir Garsia et Remmel [GaR2], Remmel et Wachs [ReWa], Sagan [Sa4], Wachs et White [WaWh]). Un traitement combinatoire

des  $q$ -nombres de Stirling de deuxième espèce, utilisant des espaces vectoriels de dimension finie sur le corps  $GF(q)$  de cardinalité  $q$ , se trouve dans Milne [Mi2].

Puisque les définitions et les notations varient pour les  $p, q$ -nombres de Stirling, on peut utiliser comme définitions alternatives les relations de récurrence qu'ils satisfont (voir (1.2.3) et (1.2.4) ci-dessous) ou leur expression en termes de fonctions symétriques ((1.2.5) et (1.2.6)), comme l'a d'ailleurs fait H. Gould originellement pour  $p = 1$  dans [Gou].

L'objet de ce chapitre est de montrer que les tableaux 0-1 constituent un outil combinatoire à la fois naturel et précieux pour l'étude des nombres de Stirling des deux espèces, ainsi que de leurs  $q$  et  $p, q$ -analogues. Pour ce faire, nous exhibons plusieurs identités sur ces polynômes (certaines nouvelles, d'autres déjà connues) et nous les démontrons combinatoirement à l'aide de cette interprétation. Il se trouve que dans la plupart des cas, les démonstrations sont remarquablement simples et élégantes.

Nous avons divisé les résultats en trois groupes: §2, récurrences et identités de base; §3, orthogonalité et preuves involutives apparentées; §4, identités faisant intervenir des coefficients  $q$ -binomiaux et quelques identités reliées. Nous terminerons avec quelques problèmes ouverts. Notre contribution en terme de nouvelles identités consiste en les formules (1.2.11), (1.2.14) à (1.2.17), (1.2.26), (1.2.28) à (1.2.30), (1.3.9), (1.3.11), (1.4.6), (1.4.8) à (1.4.10), (1.4.17), (1.4.18) et (1.5.3). Nous pensons, de plus, que les modèles combinatoires et les constructions que nous introduisons enrichiront la littérature et donneront lieu à d'autres développements dans le domaine.

## 1.2 RÉCURRENCES ET FORMULES DE BASE

Le  $p, q$ -analogue usuel des nombres naturels est donné par

$$[0]_{p,q} = 0,$$

et

$$[n]_{p,q} = \frac{p^n - q^n}{p - q} = p^{n-1} + p^{n-2}q + \dots + q^{n-1}, \quad \text{pour } n \geq 1. \quad (1.2.1)$$

Il sera utile de les considérer comme fonctions génératrices de tableaux 0-1 possédant seulement une colonne:

**LEMME 1.2.1:** *Soit  $C(n)$  l'ensemble de tous les tableaux 0-1  $\varphi = (\lambda, f)$  tels que le partage  $\lambda$  est égal à  $\lambda = (1^n) = (1, 1, \dots, 1)$  ( $n$  fois). Alors*

$$|C(n)|_{p,q} = [n]_{p,q}. \quad (1.2.2)$$

### DÉMONSTRATION:

Il suffit de constater que si  $\varphi \in C(n)$  et si le "1" est dans la  $i$ -ième position de la colonne ( $1 \leq i \leq n$ ), alors  $\text{inv}(\varphi) = n - i$  et  $\text{nin}(\varphi) = i - 1$ . Par conséquent,

$$\begin{aligned} |C(n)|_{p,q} &= \sum_{\varphi \in C(n)} p^{\text{nin}(\varphi)} q^{\text{inv}(\varphi)} \\ &= \sum_{i=1}^n p^{i-1} q^{n-i} = [n]_{p,q}. \quad \square \end{aligned}$$

Puisque les  $p, q$ -nombres de Stirling de première et de deuxième espèces ont tous les deux été définis en termes de tableaux 0-1, il n'est pas étonnant que

leurs propriétés apparaissent par paires, et aient des démonstrations similaires. Un premier exemple de ceci est leur récurrence de base.

**PROPOSITION 1.2.2:**

$$c_{p,q}[n, k] = c_{p,q}[n - 1, k - 1] + [n - 1]_{p,q}c_{p,q}[n - 1, k], \quad (1.2.3)$$

si  $n \geq 1$ , avec conditions initiales  $c_{p,q}[0, k] = \delta_{0,k}$ .

$$S_{p,q}[n, k] = S_{p,q}[n - 1, k - 1] + [k]_{p,q}S_{p,q}[n - 1, k], \quad (1.2.4)$$

si  $n \geq 1$ , avec conditions initiales  $S_{p,q}[0, k] = \delta_{0,k}$ .

**DÉMONSTRATION:**

Désignons par  $\tilde{T}(h, r)$  (respectivement  $\tilde{T}d(h, r)$ ) le sous-ensemble de  $T(h, r)$  (resp.  $Td(h, r)$ ) contenant tous les tableaux 0-1 dont la colonne la plus longue est de longueur exactement égale à  $h$ . Alors

$$Td(n - 1, n - k) = Td(n - 2, n - k) \cup \tilde{T}d(n - 1, n - k).$$

De plus,

$$|\tilde{T}d(n - 1, n - k)|_{p,q} = |C(n - 1)|_{p,q}|Td(n - 2, n - k - 1)|_{p,q}$$

(Séparer la plus longue colonne du reste du tableau 0-1 et passer au  $p, q$ -comptage).

On obtient alors la récurrence (1.2.3), puisque

$$\begin{aligned} c_{p,q}[n, k] &= |Td(n - 1, n - k)|_{p,q}, \\ &= |Td(n - 2, n - k)|_{p,q} + |\tilde{T}d(n - 1, n - k)|_{p,q}, \\ &= |Td(n - 2, n - k)|_{p,q} + |C(n - 1)|_{p,q}|Td(n - 2, n - k - 1)|_{p,q}, \\ &= c_{p,q}[n - 1, k - 1] + [n - 1]_{p,q}c_{p,q}[n - 1, k]. \end{aligned}$$

De même, on a

$$T(k, n - k) = T(k - 1, n - k) \cup \tilde{T}(k, n - k),$$

et

$$|\tilde{T}(k, n - k)|_{p,q} = |C(k) \times T(k, n - k - 1)|_{p,q},$$

ce qui donne (1.2.4).  $\square$

Les identités suivantes deviennent évidentes lorsqu'elles sont interprétées en termes de tableaux 0-1.

**PROPOSITION 1.2.3:** *Les  $p, q$ -nombres de Stirling satisfont les relations suivantes:*

a) *(fonctions symétriques)*

$$\begin{aligned} c_{p,q}[n, k] &= e_{n-k}([1]_{p,q}, [2]_{p,q}, \dots, [n-1]_{p,q}), \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n-k} \leq n-1} [i_1]_{p,q} [i_2]_{p,q} \dots [i_{n-k}]_{p,q}, \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

$$\begin{aligned} S_{p,q}[n, k] &= h_{n-k}([1]_{p,q}, [2]_{p,q}, \dots, [k]_{p,q}), \\ &= \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_{n-k} \leq k} [i_1]_{p,q} [i_2]_{p,q} \dots [i_{n-k}]_{p,q}; \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

b) *(fonctions génératrices)* Pour  $n > 0$ ,

$$\sum_{r \geq 0} c_{p,q}[n, r] y^{n-r} x^r = x(x + [1]_{p,q}y)(x + [2]_{p,q}y) \dots (x + [n-1]_{p,q}y), \quad (1.2.7)$$

pour  $k \geq 0$ ,

$$\sum_{r \geq 0} S_{p,q}[k+r, k] x^r = \frac{1}{1 - [1]_{p,q}x} \frac{1}{1 - [2]_{p,q}x} \dots \frac{1}{1 - [k]_{p,q}x}, \quad (1.2.8)$$

de plus,

$$x^n = \sum_{k=0}^n S_{p,q}[n, k] x(x - [1]_{p,q}) \dots (x - [k - 1]_{p,q}); \quad (1.2.9)$$

c) (autres récurrences)

$$c_{p,q}[n + 1, k + 1] = \sum_{j=k}^n [n]_{p,q} [n - 1]_{p,q} \dots [j + 1]_{p,q} c_{p,q}[j, k], \quad (1.2.10)$$

$$S_{p,q}[n + 1, k + 1] = \sum_{j=k}^n [k + 1]_{p,q}^{n-j} S_{p,q}[j, k]. \quad (1.2.11)$$

### DÉMONSTRATION:

a) Construire tous les tableaux 0-1 dans  $Td(n - 1, n - k)$  pour (1.2.5) ou dans  $T(k, n - k)$  pour (1.2.6) en choisissant leurs colonnes (les “ $i_j$ ” représentent les longueurs des colonnes).

b) Découle facilement de (a). L’identité (1.2.9) se démontre par induction sur  $n$ , en utilisant la récurrence (1.2.4).

c) (1.2.11). Tout tableau 0-1 dans  $T(k + 1, n - k)$  possède exactement  $n - j$  colonnes de longueur  $(k + 1)$  pour un entier  $j$  uniquement déterminé ( $k \leq j \leq n$ ). Les  $j - k$  autres colonnes sont de longueurs plus petites ou égales à  $k$ . C’est ce que l’identité (1.2.11) exprime.

(1.2.10). Dans ce cas-ci, les  $n - j$  premières colonnes des tableaux 0-1 dans  $Td(n, n - k)$  forment un “escalier” maximal, partant de la longueur  $n$  jusqu’à la longueur  $j + 1$ . Voir la figure 1.4.  $\square$

Voici des  $q$ -analogues d’autres récurrences de base pour les nombres de Stirling (Comtet [Co2], chap.5, [6f] and [3c]).

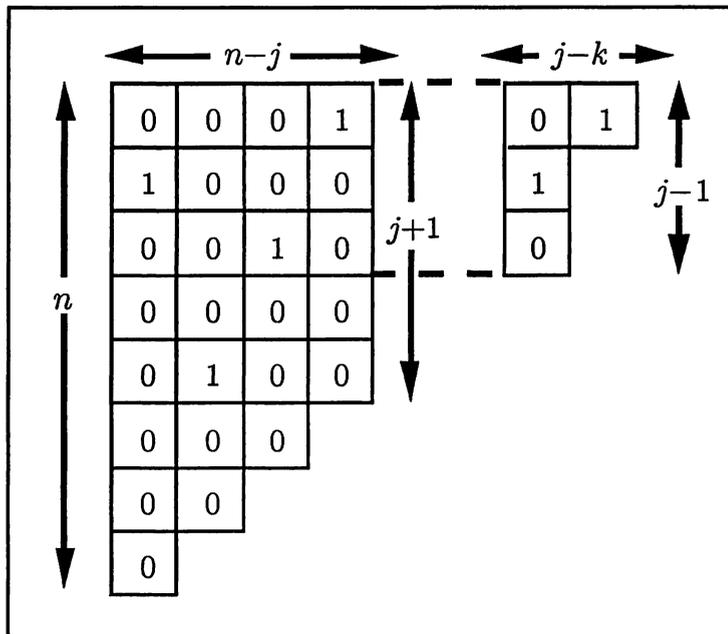


FIGURE 1.4: décomposition des tableaux 0-1 pour l'identité (1.2.10)

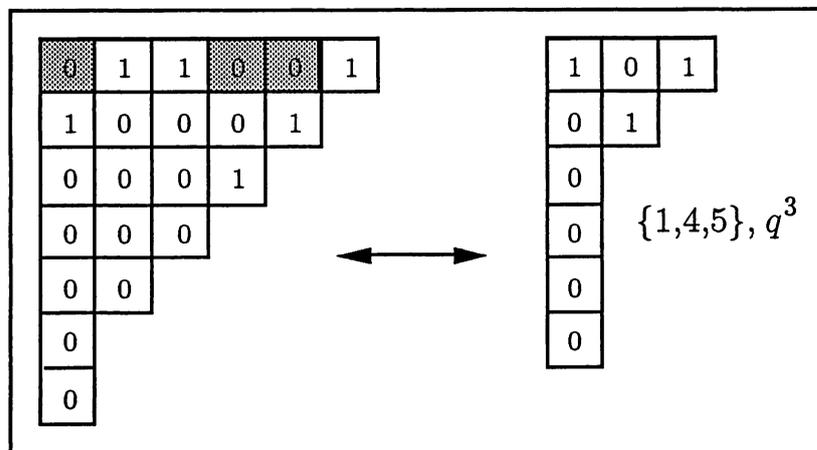
PROPOSITION 1.2.4:

$$c_q[n+1, k+1] = \sum_{j=k}^n \binom{j}{k} q^{n-j} c_q[n, j], \quad (1.2.12)$$

$$S_q[n+1, k+1] = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} q^{m-k} S_q[m, k] \quad [Me1, Sun]. \quad (1.2.13)$$

DÉMONSTRATION:

Pour (1.2.12), soient  $n \geq k$  et  $\varphi$  un tableau 0-1 dans l'ensemble  $Td(n, n-k)$ . Considérons toutes les colonnes de  $\varphi$  qui ne contribuent pas au nombre de non-inversions de  $\varphi$ , c'est-à-dire toutes les colonnes dans lesquelles le "1" est dans la première ligne. Il y a exactement  $j - k$  telles colonnes, pour un certain  $j$  dépendant de  $\varphi$  ( $k \leq j \leq n$ ).



**FIGURE 1.5:** décomposition des tableaux 0-1 pour l'identité (1.2.12)

On peut extraire ces colonnes, en prenant note de leurs longueurs, sans perte d'information. Si  $\varphi'$  désigne le tableau 0-1 restant après cette opération, alors  $\varphi'$  fait partie de l'ensemble  $Td(n, n - j)$ , c'est-à-dire que  $\varphi'$  contient  $n - j$  colonnes (de longueurs distinctes) et les  $j - k$  longueurs des colonnes enlevées constituent un sous-ensemble des  $j$  longueurs de colonnes n'apparaissant pas dans  $\varphi'$  (voir figure 1.5). C'est ce qui donne le coefficient binomial  $\binom{j}{k}$ . De plus, toutes les colonnes de  $\varphi'$  commencent avec un "0". Si nous enlevons la première ligne de "0", nous obtenons un tableau 0-1 général dans  $Td(n - 1, n - j)$  et un facteur de  $q^{n-j}$  peut être utilisé pour compabiliser les non-inversions perdues.

Il est clair que cette transformation est inversible et ainsi,

$$\begin{aligned}
 c_q[n + 1, k + 1] &= |Td(n, n - k)|_{q,1}, \\
 &= \sum_{j=k}^n \binom{j}{k} q^{n-j} |Td(n - 1, n - j)|_{q,1}, \\
 &= \sum_{j=k}^n \binom{j}{k} q^{n-j} c_q[n, j].
 \end{aligned}$$

La démonstration de (1.2.13) est similaire, sauf que l'encodage des colonnes enlevées est plus délicat, à cause des répétitions de longueurs possibles. En fait, il est plus facile dans ce cas de travailler avec les matrices 0-1. En effet, le coefficient binomial  $\binom{n}{m}$  apparaissant dans (1.2.13) représente alors le choix des  $n - m$  colonnes de la matrice 0-1 de format  $(k + 1) \times (n + 1)$ , à part la première, qui auront un "1" comme première coordonnée. Les détails sont laissés au lecteur.  $\square$

**THÉORÈME 1.2.5:** *Les  $q$ -nombres de Stirling satisfont les formules de convolution suivantes:*

$$c_q[m + n, k] = \sum_{i+j \geq k} \left\{ \binom{m+k-i-j}{k-i}_q q^{n(i+j-k)} [n]_q^{m-j} c_q[n, i] c_q[m, m+k-i-j] \right\}, \quad (1.2.14)$$

$$S_q[m + n, k] = \sum_{i+j \geq k} \binom{m}{j} q^{i(i+j-k)} [i]_q^{m-j} S_q[n, i] S_q[j, k-i]; \quad (1.2.15)$$

$$c_q[n + 1, k + l + 1] = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-l-i} \left\{ \binom{l+j}{j}_q q^{(i+1)(n-l-i-j)} [i+1]_q^j c_q[i, k] c_q[n-i, l+j] \right\}, \quad (1.2.16)$$

$$\text{et } S_q[n + 1, k + l + 1] = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-l-i} \left\{ \binom{n-i}{j}_q q^{(k+1)(n-l-i-j)} [k+1]_q^j S_q[i, k] S_q[n-i-j, l] \right\}. \quad (1.2.17)$$

Remarquons que lorsqu'on considère le cas particulier  $n = 1$  dans les identités (1.2.14) et (1.2.15), ou  $k = 0$  dans les identités (1.2.16) et (1.2.17), on obtient les identités (1.2.12) et (1.2.13) de la proposition 1.2.4.

Pour démontrer ce théorème, nous aurons besoin du lemme suivant.

**LEMME 1.2.6:** *Notons  $T^{\geq m}(h, r)$  (respectivement  $Td^{\geq m}(h, r)$ ), le sous-ensemble de  $T(h + m, r)$  (resp.  $Td(h + m, r)$ ) contenant les tableaux 0-1 dont les longueurs des colonnes sont au moins égales à  $m$ , alors*

$$|Td^{\geq m}(n - 1, n - k)|_q = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{k+i}{i} q^{m(n-k-i)} [m]_q^i c_q[n, k+i], \quad (1.2.18)$$

$$|T^{\geq m}(k, n - k)|_q = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n}{i} q^{m(n-k-i)} [m]_q^i S_q[n - i, k]. \quad (1.2.19)$$

### DÉMONSTRATION:

Nous utiliserons ici la statistique de non-inversions des tableaux 0-1. Soit  $\varphi \in Td^{\geq m}(n - 1, n - k)$ . Il y a exactement  $i$  colonnes de  $\varphi$  pour lesquelles le "1" se trouve dans les  $m$  premières lignes (facteur  $[m]_q^i$  dans le membre de droite de (1.2.18)), pour un certain  $i$  dépendant de  $\varphi$ . Soit  $\{a_1, a_2, \dots, a_i\}$ , l'ensemble des longueurs de ces  $i$  colonnes. On peut éliminer les  $m$  premières lignes des  $n - k - i$  colonnes restantes, obtenant ainsi un tableau 0-1  $\varphi'$  dans l'ensemble  $Td(n - 1, n - k - i)$  (facteur  $c_q[n, k + i]$  dans (1.2.18)). Remarquons qu'on a perdu ce faisant  $m(n - k - i)$  non-inversions (facteur  $q^{m(n-k-i)}$ ). Connaissant l'ensemble  $\{a_1, \dots, a_i\}$  et le tableau 0-1  $\varphi'$ , il est clair qu'on peut reconstituer la forme de  $\varphi$ . Pour ce faire, l'ensemble  $\{a_1 - m, a_2 - m, \dots, a_i - m\}$  doit néanmoins constituer un sous-ensemble des  $k + i$  longueurs de colonne n'apparaissant pas

dans  $\varphi'$ , incluant la longueur 0 et étant plus petites ou égales à  $n - 1$  (ce qui explique le facteur  $\binom{k+i}{i}$  du membre de droite de (1.2.18)).

L'identité (1.2.19) se démontre de façon similaire.  $\square$

### DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.2.5:

Les identités (1.2.14) à (1.2.17) sont des conséquences du lemme 1.2.6 et des égalités ensemblistes respectives:

$$Td(m+n-1, m+n-k) = \bigcup_{i=0}^n Td(n-1, n-i) \times Td^{\geq n}(m-1, m-k+i), \quad (1.2.20)$$

$$T(k, m+n-k) = \bigcup_{i=0}^n T(i, n-i) \times T^{\geq i}(k-i, m-k+i), \quad (1.2.21)$$

$$Td(n, n-k-l) = \bigcup_{i=0}^n Td(i-1, i-k) \times Td^{\geq i+1}(n-i-1, n-l-i), \quad (1.2.22)$$

$$T(k+l+1, n-k-l) = \bigcup_{i=0}^n T(k, i-k) \times T^{\geq k+1}(l, n-l-i). \quad (1.2.23)$$

Les identités (1.2.20) et (1.2.23) sont évidentes: si  $\varphi \in Td(m+n-1, m+n-k)$  (resp.  $\varphi \in T(k+l+1, n-k-l)$ ), on considère d'un côté le tableau 0-1 formé par les colonnes de longueurs inférieures ou égales à  $n-1$  pour (1.2.20) (respectivement à  $k$  pour (1.2.23)), et de l'autre, le tableau 0-1 formé par les colonnes dont les longueurs sont strictement supérieures à  $n-1$  (resp.  $k$ ).

Par contre, les identités (1.2.21) et (1.2.22) nécessitent quelques clarifications. Pour (1.2.21), si  $\varphi \in T(k, m + n - k)$ , on trouve l'unique entier  $i$  qui satisfait les inégalités suivantes:

$$\begin{aligned} (i - 1) + |\varphi|_1 + |\varphi|_2 + \dots + |\varphi|_{i-1} &< n \\ &\leq i + |\varphi|_1 + |\varphi|_2 + \dots + |\varphi|_i, \end{aligned} \quad (1.2.24)$$

où  $|\varphi|_j$  désigne le nombre de colonnes de longueur  $j$  dans  $\varphi$ . On décompose alors  $\varphi$  en deux tableaux 0-1  $(\varphi_1, \varphi_2)$ , comme suit:  $\varphi_1$  est formé des  $n - i$  colonnes de droite de  $\varphi$ , qui sont de longueurs plus petites ou égales à  $i$ , et  $\varphi_2$  est formé des  $m + i - k$  colonnes restantes, qui sont de longueurs supérieures ou égales à  $i$ .

De même, pour (1.2.22), Si  $\varphi \in Td(n, n - k - l)$ , on trouve l'unique entier  $i$  qui satisfait

$$\begin{aligned} i - |\varphi|_1 - |\varphi|_2 - \dots - |\varphi|_{i-1} &= k \\ &< (i + 1) - |\varphi|_1 - |\varphi|_2 - \dots - |\varphi|_i. \end{aligned} \quad (1.2.25)$$

$\varphi$  est alors décomposé selon le même principe que (1.2.21). Remarquons cependant que pour que (1.2.25) soit vérifiée, on doit nécessairement avoir  $|\varphi|_i = 0$ .

Le  $q$ -comptage des ensembles (1.2.20) à (1.2.23) donne les identités (1.2.14) à (1.2.17). Les détails sont laissés au lecteur.  $\square$

**COROLLAIRE 1.2.7:** *En posant  $q = 1$  dans les identités du théorème 1.2.5, on obtient les formules suivantes:*

$$c(m + n, k) = \sum_{i+j \geq k} \binom{m + k - i - j}{k - i} n^{m-j} c(n, i) c(m, m + k - i - j), \quad (1.2.26)$$

$$S(m+n, k) = \sum_{i+j \geq k} \binom{m}{j} i^{m-j} S(n, i) S(j, k-i); \quad [Ch, VS] \quad (1.2.27)$$

$$c(n+1, k+l+1) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-l-i} \binom{l+j}{j} (i+1)^j c(i, k) c(n-i, l+j), \quad (1.2.28)$$

$$\text{et } S(n+1, k+l+1) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-l-i} \binom{n-i}{j} (k+1)^j S(i, k) S(n-i-j, l). \quad [VS] \quad (1.2.29)$$

**REMARQUE 1.2.8:** Les identités (1.2.27) (formule de convolution de W. Chen [Ch]) et (1.2.29) se démontrent aisément à l'aide du modèle combinatoire en termes de partitions ensemblistes des nombres de Stirling de deuxième espèce. En effet, il est bien connu que  $S(n, k)$  compte le nombre de partitions  $\pi$  en  $k$  blocs de l'ensemble  $\llbracket n \rrbracket = \{1, 2, \dots, n\}$ . Nous dirons qu'une telle partition est *écrite sous forme standard* si, dans l'écriture de  $\pi$ , les éléments de chacun de ses blocs apparaissent par ordre croissant, et les blocs apparaissent par ordre croissant de leurs minima.

Dans le premier cas, il suffit de décomposer les partitions en  $k$  blocs de l'ensemble  $\llbracket m+n \rrbracket$ , écrites sous forme standard, en prenant d'un côté les  $i$  blocs contenant les éléments de l'ensemble  $\llbracket n \rrbracket$  (correspondant au facteur  $\binom{m}{j} i^{m-j} S(n, i)$  dans la sommation (1.2.27)), et de l'autre, les  $k-i$  blocs restant (correspondant au facteur  $S(j, k-i)$  dans (1.2.27)). De même, pour l'égalité (1.2.29), les partitions en  $k+l+1$  blocs de l'ensemble  $\llbracket n+1 \rrbracket$ , écrites sous forme standard, sont séparées en deux parties: les  $k+1$  premiers blocs, le minimum du  $(k+1)$ -ième bloc étant égal à  $i+1$  (cette partie correspond au facteur  $\binom{n-i}{j} (k+1)^j S(i, k)$  dans la sommation (1.2.29)), et les  $l$  derniers blocs (correspondant au facteur  $S(n-i-j, l)$  dans (1.2.29)).

C'est cependant la démonstration combinatoire en termes de tableaux 0-1 de ces identités qui nous a permis d'en trouver un  $q$ -analogue ainsi qu'une formule correspondante pour les ( $q$ -)nombres de Stirling de première espèce, formules qui étaient jusqu'alors inédites. Le lecteur trouvera des  $p, q$ -analogues de ces identités dans le prochain chapitre (proposition 2.3.10), ceux-ci faisant intervenir une généralisation des nombres de Stirling, les nombres de Stirling partiels. La version la plus générale de ces identités, en termes de  $\mathfrak{A}$ -nombres de Stirling, se trouve à la proposition 2.2.10 du chapitre suivant. On verra en particulier que la formule de convolution de Chen avait déjà été donnée par L. Verde-Star [VS], dans le contexte plus général des nombres de Stirling  $a, d$ -progressifs de deuxième espèce (voir chapitre 2).

**PROPOSITION 1.2.9:**

$$(n - k)S_{p,q}[n, k] = \sum_{j=0}^{n-k-1} S_{p,q}[n - 1 - j, k]([1]_{p,q}^{j+1} + \dots + [k]_{p,q}^{j+1}). \quad (1.2.30)$$

**DÉMONSTRATION:**

Nous comptons les tableaux 0-1 dans  $T(k, n - k)$  qui ont une colonne pointée. Pour obtenir le membre de droite de l'identité (1.2.30), il suffit d'extraire la colonne pointée ainsi que toutes les colonnes de même longueur qui se trouvent à sa gauche; il y en a exactement  $j$ ,  $0 \leq j \leq n - k - 1$ , et le tableau 0-1 restant possède  $n - k - (j + 1)$  colonnes de longueurs plus petites ou égales à  $k$ .  $\square$

Finalement, nous exhibons deux séries génératrices doubles pour les  $q$ -nombres de Stirling. La première, due à I. Gessel [Ge1], peut être facilement déduite de la relation de récurrence (1.2.3) ou du théorème  $q$ -binomial. La

seconde est due à A. Garsia et J.B. Remmel [GaR3]. Nous donnons également le développement en fractions continues de type Jacobi et de type Stieljes des  $q$ -nombres de Stirling de deuxième espèce. Ces résultats découlent aisément d'un théorème sur les polynômes orthogonaux appliqué aux  $q$ -analogues des polynômes de Charlier (cf Viennot [Vi1]), dont les moments sont les  $q$ -nombres de Stirling.

**PROPOSITION 1.2.10:**

$$\sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} c_q[n, k] u^k \frac{x^n}{[n]_q!} = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1 - q^k x}{1 - (1 + (1 - q)u)q^k x}, \quad [Ge1](1.2.31)$$

$$\text{où } [n]_q! = \begin{cases} [1]_q [2]_q \cdots [n]_q & \text{si } n \geq 1, \\ 1 & \text{si } n = 0; \end{cases}$$

$$\sum_{n, k \geq 0} \sum_{k=0}^n q^{\binom{k}{2}} S_q[n, k] \frac{u^k}{n!} x^n = \left( \sum_{m \geq 0} (-1)^m q^{\binom{m}{2}} \frac{u^m}{[m]_q!} \right) \left( \sum_{m \geq 0} e^{[m]_q x} \frac{u^m}{[m]_q!} \right), \quad [GaR3] \quad (1.2.32)$$

$$\sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^n S_q[n, k] a^k t^n = \frac{1}{1 - at - \frac{at^2}{1 - (aq^k + [k]_q)t - \frac{aq^k [k+1]_q t^2}{\ddots}}}, \quad (1.2.33)$$

$$\sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^n S_q[n, k] a^k t^n = \frac{1}{1 - \frac{at}{1 - \frac{at^2}{1 - \frac{aq^{k-1}t}{1 - \frac{[k]_q t}{\ddots}}}}}. \quad (1.2.34)$$

### 1.3 ORTHOGONALITÉ ET PREUVES INVOLUTIVES APPARENTÉES

Les nombres de Stirling ordinaires de première espèce (avec signes)

$$s(n, k) = (-1)^{n-k} c(n, k),$$

sont orthogonaux aux nombres de Stirling de deuxième espèce, en ce sens que les matrices  $(s(n, k))_{n,k}$  et  $(S(n, k))_{n,k}$  sont l'inverse l'une de l'autre.

La même chose est vraie pour les  $q$  et  $p, q$ -analogues, c'est-à-dire que si l'on définit

$$s_q[n, k] := (-1)^{n-k} c_q[n, k], \quad (1.3.1)$$

$$s_{p,q}[n, k] := (-1)^{n-k} c_{p,q}[n, k], \quad (1.3.2)$$

alors

$$\sum_{k=l}^n s_q[n, k] S_q[k, l] = \delta_{n,l}, \quad (1.3.3)$$

et

$$\sum_{k=l}^n S_q[n, k] s_q[k, l] = \delta_{n,l}, \quad (1.3.4)$$

et de même pour les  $p, q$ -analogues. Cette propriété est algébriquement triviale si l'on considère les fonctions génératrices des  $p, q$ -nombres de Stirling des deux espèces (prendre l'identité (1.2.7) avec la substitution  $x = 1$  et  $y = -x$  et la comparer à (1.2.8), ou encore prendre l'identité (1.2.7) avec la substitution  $y = -1$  et la comparer à (1.2.9)). G.X. Viennot [Vi1] a donné une jolie démonstration combinatoire de l'orthogonalité pour les polynômes orthogonaux généraux. Dans le même esprit, nous avons recherché une démonstration combinatoire de ces formules. Celle-ci s'avère très simple dans le contexte des tableaux 0-1.

**PROPOSITION 1.3.1:** *Les relations d'orthogonalité suivantes peuvent être déduites d'involutions préservant les poids mais inversant les signes, sur des paires de tableaux 0-1 appropriées:*

$$\sum_{k=m}^n (-1)^{n-k} c_{p,q}[n, k] S_{p,q}[k, m] = \delta_{n,m}, \quad (1.3.5)$$

$$\sum_{k=m}^n S_{p,q}[n, k] (-1)^{k-m} c_{p,q}[k, m] = \delta_{n,m}. \quad (1.3.6)$$

**DÉMONSTRATION:**

(1.3.6). Si  $n = m$ , la somme se réduit à un seul terme,

$$S_{p,q}[n, n] (-1)^0 c_{p,q}[m, m] = 1.$$

Supposons maintenant que  $n > m$ . Alors le membre de gauche de (1.3.6) est égal au poids total de l'ensemble

$$E = \bigcup_{k=m}^n T(k, n-k) \times Td(k-1, k-m),$$

où le poids de  $(\varphi_1, \varphi_2) \in E$  est défini par

$$w(\varphi_1, \varphi_2) = (-1)^{k-m} |\varphi_1|_{p,q} |\varphi_2|_{p,q}.$$

Nous allons montrer que  $w(E) = \sum_{(\varphi_1, \varphi_2) \in E} w(\varphi_1, \varphi_2) = 0$ , en construisant une involution  $\Psi$  sur  $E$ , sans points fixes, conservant les poids (en valeur absolue) mais inversant leurs signes, c'est-à-dire une involution telle que si  $\Psi(\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi'_1, \varphi'_2)$ , alors

$$w(\varphi_1, \varphi_2) = -w(\varphi'_1, \varphi'_2).$$

Pour ce faire, une manière naturelle de procéder est de choisir une colonne dans un des tableaux 0-1 et de la transférer dans l'autre tableau 0-1. Ainsi, le nombre total d'inversions et de non-inversions est préservé, mais le signe global est changé puisque le nombre de colonnes du second tableau 0-1 est modifié d'une unité.

Soit donc  $(\varphi_1, \varphi_2) \in E$  et considérons les longueurs  $l_1$  et  $l_2$  des plus longues colonnes de  $\varphi_1$  (notée  $c_1$ ) et de  $\varphi_2$  (notée  $c_2$ ) respectivement.

Si  $l_2 \geq l_1$ , nous définissons  $\Psi(\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi'_1, \varphi'_2)$  où  $\varphi'_2$  est obtenu de  $\varphi_2$  en enlevant la colonne  $c_2$  et  $\varphi'_1$  est obtenu en adjoignant la colonne  $c_2$  à la gauche de  $\varphi_1$ .

Si  $l_2 < l_1$ , nous définissons  $\Psi(\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi'_1, \varphi'_2)$  où  $\varphi'_1$  est obtenu de  $\varphi_1$  en enlevant la colonne  $c_1$  et  $\varphi'_2$  est obtenu en adjoignant la colonne  $c_1$  à la gauche de  $\varphi_2$ . Puisque  $l_1 > l_2$ ,  $\varphi'_2$  possède encore des colonnes de longueurs distinctes.

Les détails de la démonstration que  $\Psi$  est une involution bien définie sont laissés au lecteur.

La démonstration de (1.3.5) est similaire à celle de (1.3.6), sauf qu'on doit considérer les colonnes les plus courtes des tableaux 0-1 plutôt que les colonnes les plus longues.  $\square$

Donc le principe général de ces involutions est le suivant: étant donnée une paire de tableaux 0-1 dans laquelle le second tableau 0-1 doit posséder des colonnes de longueurs distinctes, on détermine un critère de longueur pour choisir une colonne, et on l'échange d'un tableau 0-1 à l'autre, avec la règle supplémentaire que si cette longueur de colonne apparaît dans les deux tableaux

0-1 à la fois, la colonne sera enlevée du tableau dont les colonnes sont obligatoirement de longueurs distinctes.

Un principe semblable est souvent utilisé pour donner des démonstrations involutives d'identités sur les partages d'entiers (voir par exemple le livre de D. Stanton et D. White [StWh], chapitre 4, exercices 11-14). Nous appliquons maintenant cette méthode pour obtenir un certain nombre d'autres résultats. Les deux formules suivantes sont des  $p, q$ -analogues des identités [5.6g] et [5.3e] de Comtet [Co2].

**PROPOSITION 1.3.2:**

$$c_{p,q}[n, k] = \sum_{j=k}^n (-1)^{j-k} [n]_{p,q}^{j-k} c_{p,q}[n+1, j+1], \quad (1.3.7)$$

$$S_{p,q}[n, k] = \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j [k+1]_{p,q} [k+2]_{p,q} \dots [k+j]_{p,q} S_{p,q}[n+1, k+j+1]. \quad (1.3.8)$$

**DÉMONSTRATION:**

Pour (1.3.7), nous travaillons sur des couples  $(\varphi_1, \varphi_2)$  de tableaux 0-1 tels que la forme de  $\varphi_1$  est un rectangle de dimensions  $n \times (j-k)$ , et  $\varphi_2$  est un tableau 0-1 à colonnes de longueurs distinctes contenant  $n-j$  colonnes de longueurs plus petites ou égales à  $n$ . Le poids  $w$  de ces couples est  $w(\varphi_1, \varphi_2) = (-1)^{j-k} |\varphi_1|_{p,q} |\varphi_2|_{p,q}$ .

Naturellement, nous construisons une involution préservant les poids et inversant les signes qui échange des colonnes de longueur  $n$ . L'ensemble des points fixes consistera en les couples pour lesquels cette opération ne peut pas être effectuée, à savoir les couples dans lesquels aucune colonne de longueur  $n$

n'apparait. Cela arrive exactement lorsque  $j = k$ ,  $\varphi_1 = \emptyset$  et  $\varphi_2$  contient  $n - k$  colonnes de longueurs distinctes, plus petites ou égales à  $n - 1$ . Par conséquent, le poids total des points fixes est

$$\sum_{\varphi \in Td(n-1, n-k)} (-1)^{|\emptyset|_{p,q} |\varphi|_{p,q}} = c_{p,q}[n, k].$$

D'autre part, pour (1.3.8),  $\varphi_1$  doit avoir la forme de "l'escalier" de poids  $[k+1]_{p,q}[k+2]_{p,q} \dots [k+j]_{p,q}$ . L'involution élimine la dernière "marche" de longueur  $k+j$  de l'escalier, ou ajoute une nouvelle "marche" de longueur  $k+j+1$  à l'escalier. Les points fixes correspondent à un escalier vide ( $j = 0$ ) et un tableau 0-1 contenant  $n - k$  colonnes de longueurs plus petites ou égales à  $k$ .  $\square$

**REMARQUE 1.3.3:** Notons que (1.3.8) est algébriquement équivalent à (1.2.10), par le biais d'une double inversion matricielle. De plus, une simple inversion matricielle permet d'obtenir la jolie formule suivante:

$$[k+1]_{p,q}[k+2]_{p,q} \dots [n]_{p,q} = \sum_{j=k}^n (-1)^{j-k} c_{p,q}[n+1, j+1] S_{p,q}[j, k]. \quad (1.3.9)$$

**PROPOSITION 1.3.4:** Soit  $n \geq 2$ . Alors on a

$$\sum_{k=2}^n (-1)^k q^{k-2} [k-2]_q! S_q[n, k] = n - 1, \quad [Me2] \quad (1.3.10)$$

$$\sum_{k=2}^n (1 - [2]_{p,q})(1 - [3]_{p,q}) \dots (1 - [k-1]_{p,q}) S_{p,q}[n, k] = n - 1. \quad (1.3.11)$$

**DÉMONSTRATION:**

(1.3.11): Même genre d'involution. Les points fixes sont les couples  $(\varphi_1, \varphi_2)$  où  $\varphi_1$  est le tableau 0-1 vide et  $\varphi_2$  contient  $n - k$  colonnes de longueur 1,  $2 \leq k \leq n$ .

(1.3.10): Observons que (1.3.10) est un cas particulier de (1.3.11) pour  $p = 1$ . Cependant, une démonstration combinatoire directe peut être construite par le lecteur qui le désire.  $\square$

#### 1.4 IDENTITÉS FAISANT INTERVENIR DES COEFFICIENTS $q$ -BINOMIAUX ET QUELQUES IDENTITÉS RELIÉES

Les coefficients  $q$ -binomiaux sont les polynômes en  $q$  définis par

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{cases} \frac{[n]_q!}{[k]_q! [n-k]_q!} & \text{si } 0 \leq k \leq n, \\ 0 & \text{si } k < 0 \text{ ou } k > n. \end{cases} \quad (1.4.1)$$

Ils possèdent trois interprétations combinatoires principales. Premièrement,  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$  compte le nombre de sous-espaces de dimension  $k$  d'un espace vectoriel de dimension  $n$  sur le corps  $GF(q)$  de cardinalité  $q$ . Ces sous-espaces sont en bijection avec les matrices réduites de format  $k \times n$  sur  $GF(q)$ . Deuxièmement,  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$   $q$ -compte les mots formés de  $n - k$  lettres "0" et de  $k$  lettres "1", selon leur nombre d'inversions. Et troisièmement,  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$  compte le nombre de partages  $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 0)$  dont le diagramme de Ferrers est inscrit dans un rectangle de dimensions  $k \times (n - k)$ , selon leur poids  $|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$ , c'est-à-dire

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \sum_{\lambda \in P(k, n-k)} q^{|\lambda|}, \quad (1.4.2)$$

où  $P(k, n - k)$  désigne l'ensemble des tels partages. Nous noterons  $Pd(h, r)$  l'ensemble des partages  $\lambda \in P(h, r)$  tels que toutes les colonnes du diagramme de Ferrers de forme  $\lambda$  soient de longueurs distinctes. On pourrait aussi considérer que  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$  compte le nombre de  $q$ -tableaux  $\rho = (\lambda, f) \in F_q(k, n - k)$ , c'est-à-dire les paires  $(\lambda, f)$  où  $\lambda$  est un partage dans l'ensemble  $P(k, n - k)$  et

$f$  est un remplissage des cellules du diagramme de Ferrers correspondant avec les éléments de l'ensemble  $\{0, 1, 2, \dots, q-1\}$ ,  $q \in \mathbb{N}^*$ , i.e.

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = |F_q(k, n-k)|. \quad (1.4.3)$$

Observons que les  $q$ -tableaux dans  $F_q(k, n-k)$  sont obtenus des matrices réduites de format  $k \times n$  sur  $GF(q)$  en enlevant les colonnes pivot et les "0" inutiles, selon la méthode décrite dans la section 1.1 pour les tableaux 0-1 (figure 1.3) (cf Nijenhuis, Solow et Wilf [NSW], Pòlya [Po]). Un partage  $\lambda \in P(k, n-k)$  possède au plus  $n-k$  colonnes de longueurs plus petites ou égales à  $k$ . Nous considérerons plutôt que  $\lambda$  contient exactement  $n-k$  colonnes de longueurs plus petites ou égales à  $k$  et possiblement égales à zéro, avec la convention qu'une colonne de longueur zéro est "remplie" de "0".  $Fd_q(k, r)$  désignera le sous-ensemble de  $F_q(k, r)$  contenant seulement les  $q$ -tableaux avec des colonnes de longueurs distinctes. Il est clair que

$$q^{\binom{n-k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = |Fd_q(n-1, n-k)|. \quad (1.4.4)$$

Dans les identités faisant intervenir les coefficients  $q$ -binomiaux et les  $q$ -nombres de Stirling, des produits de la forme  $(q-1)^{n-k} S_q[n, k]$  et  $(q-1)^{n-k} c_q[n, k]$  apparaissent fréquemment. On peut donner une interprétation combinatoire de ces expressions, en termes de matrices réduites spéciales ou de  $q$ -tableaux. En effet,  $(q-1)^{n-k} S_q[n, k]$  compte le nombre de matrices réduites de format  $k \times n$  sur le corps  $GF(q)$ , telles qu'aucune colonne ne soit entièrement nulle. Alternativement,  $(q-1)^{n-k} S_q[n, k]$  (respectivement  $(q-1)^{n-k} c_q[n, k]$ ) compte le nombre de  $q$ -tableaux de forme  $\lambda \in P(k, n-k)$  (respectivement  $Pd(n-1, n-k)$ ) tels qu'aucune colonne ne soit uniquement remplie de "0". Ceci peut être vu en multipliant chacune des  $n-k$  colonnes,

de longueur  $m$  disons, d'un tableau 0-1 par le facteur " $q - 1$ ", obtenant ainsi  $[m]_q(q-1) = q^m - 1$ , qui est interprété comme un " $q$ -remplissage" de la colonne, en excluant le cas où la colonne est remplie exclusivement de "0". Nous notons l'ensemble de tels  $q$ -tableaux  $F_q^*(k, n - k)$  (resp.  $Fd_q^*(k, n - k)$ ). Les deux interprétations nous seront utiles.

La toute première définition des  $q$ -nombres de Stirling de deuxième espèce a été donnée en 1933 par L. Carlitz [Ca1], par le biais de la formule suivante, spécifiant leurs liens avec les coefficients  $q$ -binomiaux:

**THÉORÈME 1.4.1:**

$$\left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_q = \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} (q-1)^{j-k} S_q[j, k]. \quad [Ca1] \quad (1.4.5)$$

En appliquant diverses inversions de Möbius à (1.4.5), nous obtenons cinq identités équivalentes.

**PROPOSITION 1.4.2:**

$$q^{\binom{n-s}{2}} \left[ \begin{matrix} n \\ s \end{matrix} \right]_q = \sum_{j=s}^n \binom{j}{s} (q-1)^{n-j} c_q[n, j], \quad (1.4.6)$$

$$(q-1)^{n-s} S_q[n, s] = \sum_{j=s}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \left[ \begin{matrix} j \\ s \end{matrix} \right]_q, \quad [Ca1] \quad (1.4.7)$$

$$(q-1)^{n-s} c_q[n, s] = \sum_{j=s}^n (-1)^{j-s} \binom{j}{s} q^{\binom{n-j}{2}} \left[ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right]_q, \quad (1.4.8)$$

$$\binom{n}{s} = \sum_{j=s}^n (-1)^{j-s} (q-1)^{j-s} c_q[j, s] \left[ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right]_q, \quad (1.4.9)$$

$$\binom{n}{s} = \sum_{j=s}^n q^{\binom{j-s}{2}} \left[ \begin{matrix} j \\ s \end{matrix} \right]_q (-1)^{n-j} (q-1)^{n-j} S_q[n, j]. \quad (1.4.10)$$

**DÉMONSTRATION:**

Nous donnons un bref aperçu des démonstrations de ces identités.

Tout d'abord, les démonstrations combinatoires de (1.4.5) et (1.4.6) sont très semblables à celles des identités (1.2.13) et (1.2.12), sauf qu'au lieu de tableaux 0-1 et de matrices 0-1, il faut utiliser des  $q$ -tableaux et des matrices réduites, au lieu de faire un  $q$ -comptage, on doit calculer les cardinalités, et plutôt que de considérer les colonnes avec un "1" dans la première ligne, on doit considérer les colonnes remplies de "0". Ainsi, une démonstration de (1.4.5) se ferait comme suit: pour construire une matrice réduite de format  $k \times n$  sur  $GF(q)$ , il suffit de choisir les  $j$  positions des colonnes non nulles, et d'y insérer une matrice réduite de format  $k \times j$ , dont toutes les colonnes sont non nulles. Une démonstration similaire de (1.4.5), en termes d'espaces vectoriels particuliers, a été donnée par S.C. Milne [Mi2].

Maintenant, pour (1.4.7), on doit considérer des matrices réduites de format  $s \times n$  sur  $GF(q)$ , telles que  $n - j$  colonnes non pivot ne sont pas encore remplies d'éléments de  $GF(q)$ , avec pondération  $(-1)^{n-j}$  (cela correspond au membre de droite de (1.4.7)). Nous construisons ensuite une involution sur ces objets, inversant les signes des pondérations, en cherchant la colonne la plus à gauche qui est soit nulle, soit "vide", et en la changeant en une colonne respectivement vide ou nulle. Les points fixes consistent alors en matrices réduites de format  $s \times n$ , sans colonnes vides et sans colonnes nulles, correspondant donc au terme  $(q - 1)^{n-s} S_q[n, s]$ .

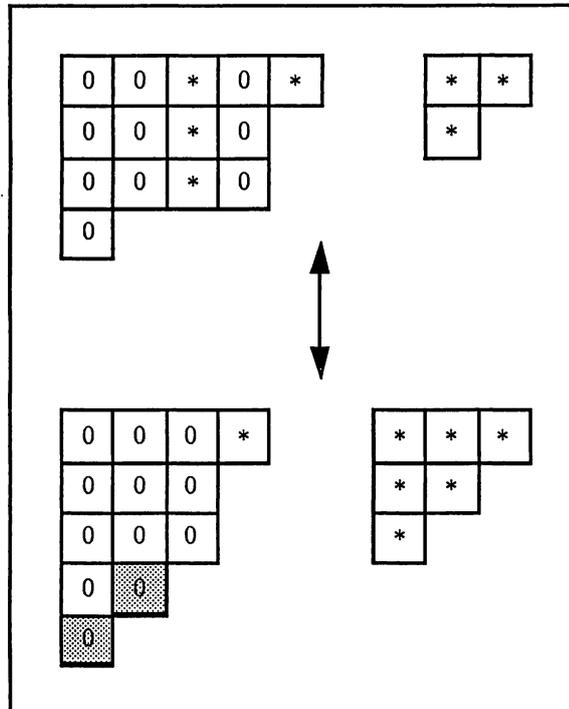
La démonstration combinatoire de l'identité (1.4.8) est semblable à la précédente, sauf que nous considérons les  $q$ -tableaux  $\rho$  presque dans  $Fd_q(n - 1, n - s)$ , avec la différence que  $j - s$  colonnes de  $\rho$  ne sont pas remplies, et avec

une pondération  $(-1)^{j-s}$ ,  $s \leq j \leq n$ . En appliquant la même involution que ci-dessus, nous obtiendrons des points fixes de la forme  $\rho \in Fd_q^*(n-1, n-s)$ , correspondant au membre de gauche de (1.4.8).

Des démonstrations involutives de l'identité (1.4.7) (avec ou sans prédivi-  
sion par le facteur  $(q-1)^{n-s}$ ), utilisant des fonctions à croissance restreintes,  
ont été trouvées par D. White [Wh].

Les démonstrations combinatoires de (1.4.9) et (1.4.10) ressemblent beau-  
coup aux démonstrations involutives de la section 1.3. Dans les deux cas, nous  
avons des paires de  $q$ -tableaux, l'un d'eux ayant des colonnes de longueurs dis-  
tinctes, et aussi l'un d'eux possédant seulement des colonnes non nulles, avec  
la pondération  $(-1)$  exposant le nombre de colonnes de ce  $q$ -tableau.

Essentiellement, l'involution inversant le signe de la pondération, déplaçant  
la colonne non nulle la plus longue, la plus à gauche, d'un  $q$ -tableau à l'autre  
fera l'affaire, avec la modification mineure suivante. Soit  $\rho$  le  $q$ -tableau pou-  
vant contenir des colonnes nulles.  $\rho$  contient un certain nombre de colonnes  
remplies de "0" à gauche de la première colonne non nulle, y compris peut-être  
des colonnes de mêmes longueurs que celle-ci. Pour tenir compte de la position  
à laquelle il faut réinsérer la colonne non nulle dans  $\rho$ , pour (1.4.9) (respec-  
tivement pour (1.4.10)), on ajoute (resp. enlève) une cellule contenant un "0"  
à chacune des colonnes nulles à l'extrême-gauche de  $\rho$  si, lorsqu'on applique  
l'involution, une colonne non nulle de longueur maximum doit être extraite de  
 $\rho$  et, dans le cas contraire, on enlève (resp. ajoute) une cellule à chacune des  
colonnes remplies de "0" dont la longueur est strictement plus grande (resp.  
plus grande ou égale) que celle de la colonne ajoutée.



**FIGURE 1.6:** involution sur des couples de  $q$ -tableaux pour l'identité (1.4.9)

Comme on considère ici des cardinalités d'ensembles et non des  $q$ -comptages, on peut ajouter des cases de "0" aux  $q$ -tableaux, sans problème de pondération. Les points fixes consistent en les couples de  $q$ -tableaux pour lesquels l'un des  $q$ -tableaux est vide, et l'autre ne contient que des "0" dans son remplissage. Ces manipulations sont illustrées dans la figure 1.6, pour l'identité (1.4.9). Les colonnes remplies d'étoiles représentent les colonnes non nulles des  $q$ -tableaux. Les détails sont laissés au lecteur.  $\square$

Considérons maintenant une autre formule trouvée par L. Carlitz [Ca2] en 1948, qui donne lieu à plusieurs généralisations.

**THÉORÈME 1.4.3:**

$$[m]_q^n = \sum_{k=0}^n q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_q [k]_q! S_q[n, k]. \quad [Ca2] \quad (1.4.11)$$

**DÉMONSTRATION:**

Puisque

$$(q-1)^k q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_q [k]_q! = (q^m - 1)(q^m - q) \dots (q^m - q^{k-1}),$$

en multipliant les deux membres de (1.4.11) par  $(q-1)^n$ , on obtient

$$(q-1)^n [m]_q^n = \sum_{k=0}^n (q^m - 1)(q^m - q) \dots (q^m - q^{k-1}) (q-1)^{n-k} S_q[n, k]. \quad (1.4.12)$$

La démonstration que nous donnons de cette identité est la première jusqu'à présent dans ce chapitre qui utilise les propriétés vectorielles des matrices sur  $GF(q)$ , méthodologie couramment utilisée dans l'étude des  $q$ -analogues (cf Goldman et Rota [GoRo], Milne [Mi4]).

Selon nos remarques antérieures,  $(q-1)^n [m]_q^n$  compte le nombre de matrices  $A = (a_{i,j})$  de format  $m \times n$  sur  $GF(q)$ , et dont les colonnes sont non nulles.  $A$  peut être écrite uniquement comme un produit de deux matrices  $B \cdot C$  telles que  $B$  est une matrice de format  $m \times k$ , contenant les colonnes linéairement indépendantes de gauche à droite de la matrice  $A$ , et  $C$  est une matrice de format  $k \times n$ , contenant les scalaires uniquement déterminés, extraits de l'expression de chaque colonne de  $A$  comme combinaison linéaire des colonnes de  $B$ . Étant donné le choix de  $B$ , la matrice  $C$  est clairement réduite et puisque  $A$  ne possède pas de colonnes nulles, la matrice  $C$  non plus. Par conséquent, pour compter le nombre total de matrices de format  $m \times n$  dont les colonnes sont

toutes non nulles, nous comptons le nombre de décompositions  $B \cdot C$  possibles. Nous dénombrons, pour chaque  $k$ ,  $0 \leq k \leq n$ ,  $(q^m - 1)(q^m - q) \dots (q^m - q^{k-1})$  matrices  $B$  différentes, et  $(q-1)^{n-k} S_q[n, k]$  matrices  $C$  différentes, ce qui donne le membre de droite de (1.4.12).  $\square$

On pourrait se demander que deviendrait l'identité (1.4.12) si l'on omettait la condition des colonnes non nulles. Il n'est pas difficile de voir que cette identité devient alors l'identité bien connue

$$(q^m)^n = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (q^m - 1)(q^m - q) \dots (q^m - q^{k-1}), \quad (1.4.13)$$

dont on peut donner une démonstration similaire.

De plus, l'identité (1.4.11) peut être écrite sous la forme

$$[m]_q^n = \sum_{k=0}^n q^{\frac{k(k-1)}{2}} [m]_q [m-1]_q \dots [m-k+1]_q S_q[n, k], \quad (1.4.14)$$

et la démonstration combinatoire de A. Garsia et J.B. Remmel, utilisant des configurations de tours sur des diagrammes de Ferrers ayant une forme d'escalier, peut être transcrite dans le langage des tableaux 0-1. Pour plus de détails, le lecteur est référé à Garsia et Remmel [GaR2]. La même observation s'applique au  $q$ -analogue de l'identité de Frobenius:

**PROPOSITION 1.4.4:**

$$\sum_{m \geq 0} [m]_q^n x^m = \sum_{k=0}^n \frac{q^{\binom{k}{2}} S_q[n, k] [k]_q! x^k}{(1-x)(1-xq) \dots (1-xq^k)}. \quad [GaR2] \quad (1.4.15)$$

Il existe au moins deux  $p, q$ -analogues de l'identité (1.4.14):

**PROPOSITION 1.4.5:**

$$[m]_{p,q}^n = \sum_{k=0}^n [m]_{p,q} ([m]_{p,q} - [1]_{p,q}) \cdots ([m]_{p,q} - [k-1]_{p,q}) S_{p,q}[n, k], \quad [ReWa] \quad (1.4.16)$$

$$[m]_{p,q}^n = \sum_{k=0}^n p^{\binom{k}{2}} q^{(m-1)(n-k)} [m]_{p,q} \cdots [m-k+1]_{p,q} S_{q,1}[n, k]. \quad (1.4.17)$$

**DÉMONSTRATION:**

L'identité (1.4.16) est en fait équivalente à l'orthogonalité. L'identité (1.4.17) de son côté, peut être obtenue à partir de (1.4.14), en remplaçant  $q$  par  $p/q$ .  $\square$

Une fois de plus, la dualité entre les  $q$ -nombres de Stirling de première et deuxième espèces, appliquée à l'identité (1.4.17), donne une formule équivalente que voici:

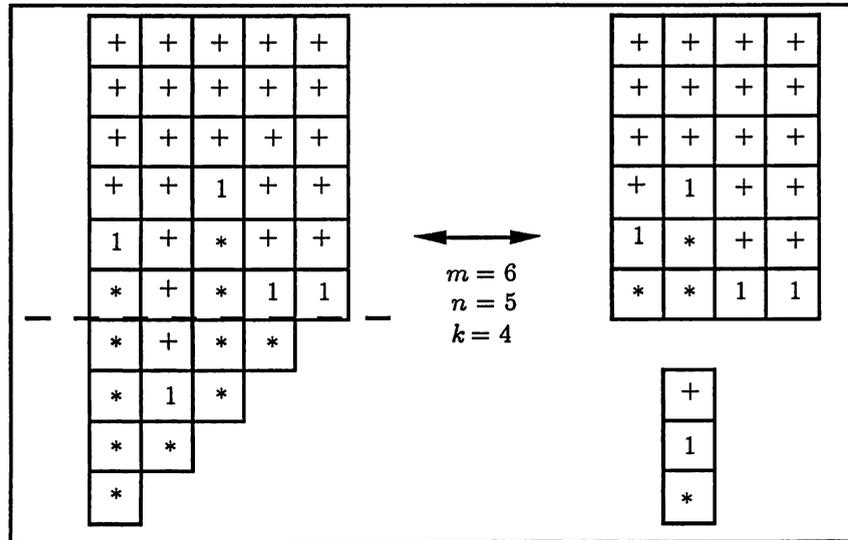
**PROPOSITION 1.4.6:** *Pour  $m \geq 0$ ,  $n \geq 0$ , on a*

$$[m]_{p,q} [m+1]_{p,q} \cdots [m+n-1]_{p,q} = \sum_{k=0}^n [m]_{p,q}^k p^{m(n-k)} q^{\binom{n}{2} - (n-k)} c_{q,1}[n, k]. \quad (1.4.18)$$

**DÉMONSTRATION:**

Nous donnons une démonstration de (1.4.18) qui montre la saveur de la méthodologie des configurations de tours. En fait, pour les nombres de Stirling de première espèce, les placements de tours sont équivalents aux tableaux 0-1.

Le membre de gauche de (1.4.18) compte les tableaux 0-1 dont les longueurs des colonnes vont en diminuant de  $m+n-1$  à  $m$ . Un tel tableau peut être



**FIGURE 1.7:** décomposition des tableaux 0-1 pour l'identité (1.4.18)

découpé en deux parties, un rectangle de format  $m \times n$  et un escalier de longueur  $n - 1$ . Soit  $k$  le nombre de “1” dans le rectangle. En extrayant les colonnes contenant des “1” dans les deux parties, nous obtenons une paire de tableaux 0-1  $(\varphi_1, \varphi_2) \in C(m)^k \times Td(n - 1, n - k)$  (la notation  $C(m)$  a été introduite dans la proposition 1.2.1). Voir la figure 1.7.

Ce faisant, le nombre de non-inversions perdues dans le rectangle est  $m(n - k)$ , et le nombre d'inversions qui étaient contenues dans l'escalier est égal à

$$\begin{aligned} & \text{taille de l'escalier} - \# \text{ “1” dans l'escalier} - \# \text{ signes “+” dans l'escalier} \\ &= \binom{n}{2} - (n - k) - \text{nin}(\varphi_2). \end{aligned}$$

En remettant tout en place, on obtient (1.4.18). □

## 1.5 PROBLÈMES OUVERTS

Nous mentionnons brièvement quelques problèmes ouverts.

Certaines formules de base semblent résister farouchement aux  $q$  ou aux  $p, q$ -analogues. Un exemple de ceci est:

$$c(n, k) = \frac{n!}{k!} \sum_{n_1 + \dots + n_k = n; n_i > 0} \frac{1}{n_1 n_2 \dots n_k}, \quad (1.5.1)$$

et

$$S(n, k) = \frac{n!}{k!} \sum_{n_1 + \dots + n_k = n; n_i > 0} \frac{1}{n_1! n_2! \dots n_k!}. \quad (1.5.2)$$

Cependant, il n'existe pas de façons systématiques de trouver de tels  $q$ -analogues. Un autre exemple est donné par des formules qui ne semblent pas avoir de  $p, q$ -analogues (par exemple (1.2.12), (1.2.13), (1.4.5)–(1.4.10)).

Un autre type de problème est de trouver des démonstrations combinatoires à des  $q$ -analogues. Par exemple, en prenant la dérivée logarithmique par rapport à  $u$  de (1.2.31), on obtient le  $q$ -analogue

$$m c_q[n, m] = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q [n-k-1]_q! (1-q)^{m-j-1} \binom{n-k-1}{m-j-1} c_q[k, j], \quad (1.5.3)$$

de l'identité

$$m c(n, m) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (n-k-1)! c(k, m-1), \quad [\text{Co2}, [5.6d]] \quad (1.5.4)$$

mais la question subsiste d'en trouver une démonstration combinatoire. Il est à noter que la démonstration combinatoire connue de (1.5.4) se fait dans le contexte des permutations, et s'exprime mal en termes de tableaux 0-1.

## CHAPITRE 2

### GÉNÉRALISATIONS DES NOMBRES DE STIRLING ET $p, q$ -ANALOGUES

#### 2.1 INTRODUCTION

L'étude combinatoire des tableaux 0-1 a permis des développements intéressants dans la théorie des  $q$ -analogues des nombres de Stirling classiques. Ces tableaux ont notamment servi à établir une conjecture de L. Butler sur la  $q$ -concavité logarithmique des  $q$ -nombres de Stirling (voir Butler [But2] et Leroux [Le3]). De plus, nous avons présenté dans le chapitre précédent une étude systématique des  $q$  et  $p, q$ -analogues d'identités faisant intervenir les nombres de Stirling des deux espèces, à l'aide de calculs algébriques et/ou combinatoires. Nous avons ainsi obtenu de manière bijective un certain nombre d'identités remarquables.

Dans le présent chapitre, nous considérons deux généralisations des nombres de Stirling, suggérées par l'approche combinatoire des tableaux 0-1.

La première généralisation consiste à restreindre les longueurs de colonnes admises et à remplacer le  $p, q$ -comptage du remplissage de colonnes par une pondération sur les colonnes. Plus exactement, si  $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, w)$ , où  $\mathcal{A} = (a_i)_{i \geq 0}$  désigne une suite croissante d'entiers non-négatifs (les longueurs de colonnes admises), et  $w : \mathbb{N} \rightarrow K$  désigne une fonction de  $\mathbb{N}$  à valeurs dans un anneau  $K$  (le poids des colonnes selon leur longueur), on définit un  $\mathcal{A}$ -tableau comme une liste  $\phi$  des colonnes  $c$  du diagramme de Ferrers d'un partage d'entier  $\lambda$  (par ordre décroissant de longueur) dont les longueurs  $|c|$  apparaissent dans la suite  $\mathcal{A}$ , et on pose

$$w_{\mathfrak{A}}(\phi) = \prod_{c \in \phi} w(|c|). \quad (2.1.1)$$

Par convention,  $\phi$  peut contenir un nombre fini de colonnes de longueur nulle si zéro fait partie de la suite  $\mathcal{A}$ . De plus, si dans la suite  $\mathcal{A}$ , il existe un indice  $i$  pour lequel  $a_i = a_{i+1}$ , nous convenons qu'une colonne de longueur  $a_i$  peut être différenciée d'une colonne de longueur  $a_{i+1}$ . Les colonnes de longueur  $a_{i+1}$  apparaissent avant les colonnes de longueur  $a_i$  dans la liste  $\phi$ .

Pour simplifier l'écriture, nous noterons  $w_i := w(a_i)$ . Nous définissons alors les  $\mathfrak{A}$ -nombres de Stirling

$$c^{\mathfrak{A}}(n, k) := \sum_{\phi \in Td^{\mathcal{A}}(n-1, n-k)} w_{\mathfrak{A}}(\phi), \quad (2.1.2)$$

$$\text{et } S^{\mathfrak{A}}(n, k) := \sum_{\phi \in T^{\mathcal{A}}(k, n-k)} w_{\mathfrak{A}}(\phi), \quad (2.1.3)$$

où  $T^{\mathcal{A}}(h, r)$  désigne l'ensemble des  $\mathcal{A}$ -tableaux possédant exactement  $r$  colonnes dont les longueurs sont prises dans le multi-ensemble  $\{a_0, a_1, \dots, a_h\}$ , et

$Td^{\mathcal{A}}(h, r)$  désigne le sous-ensemble de  $T^{\mathcal{A}}(h, r)$  contenant les  $\mathcal{A}$ -tableaux possédant des colonnes de longueurs  $a_i$  deux à deux distinctes.

Tout comme pour les  $p, q$ -nombres de Stirling, en considérant la longueur maximum possible des colonnes des  $\mathcal{A}$ -tableaux ainsi que leur format, on obtient les récurrences suivantes:

$$c^{\mathfrak{A}}(n, k) = c^{\mathfrak{A}}(n-1, k-1) + w_{n-1}c^{\mathfrak{A}}(n-1, k), \quad (2.1.4)$$

$$\text{et } S^{\mathfrak{A}}(n, k) = S^{\mathfrak{A}}(n-1, k-1) + w_k S^{\mathfrak{A}}(n-1, k), \quad (2.1.5)$$

avec conditions initiales  $c^{\mathfrak{A}}(0, k) = \delta_{0,k} = S^{\mathfrak{A}}(0, k)$ ,  $c^{\mathfrak{A}}(n, 0) = w_0 w_1 \dots w_{n-1}$  et  $S^{\mathfrak{A}}(n, 0) = w_0^n$ .

Plusieurs familles de nombres ou de polynômes classiques apparaissent comme cas particulier des  $\mathfrak{A}$ -nombres de Stirling. En voici un aperçu en spécifiant les valeurs de  $a_i$  et de  $w(i)$  correspondantes.

Tout d'abord, on retombe naturellement sur les  $p, q$ -nombres de Stirling des deux espèces en considérant  $a_i = i$  et  $w(i) = [i]_{p,q}$ .

Remarquons que si l'on choisit  $a_i = i$ , les  $\mathcal{A}$ -tableaux  $\phi \in T^{\mathcal{A}}(h, r)$  considérés (ou  $\phi' \in Td^{\mathcal{A}}(h, r)$  respectivement) se ramènent à des partages en  $r$  parts possiblement nulles (distinctes pour  $\phi'$ ) de longueurs plus petites ou égales à  $h$ . Ainsi, si l'on pondère chaque colonne de longueur  $i$  par le monôme  $q^i$  (choix  $w(i) = q^i$ ), nous obtenons les formules de dénombrement classiques des partages d'entier dont le diagramme de Ferrers est contenu dans un rectangle (cf Andrews [An]):  $c^{\mathfrak{A}}(n, k) = q^{\binom{n-k}{2}} [n]_q$  et  $S^{\mathfrak{A}}(n, k) = [n]_q$ , où  $[n]_q$  désigne les coefficients  $q$ -binomiaux. De plus, si  $q$  est égal à une puissance d'un nombre premier  $p$ , l'ensemble  $T^{\mathcal{A}}(k, n-k)$  est en bijection avec l'ensembles des matrices de dimension  $k \times n$  sur le corps à  $q$  éléments  $GF(q)$ , ligne-réduites

échelonnées et de plein rang (cf Leroux [Le2]).  $S^{\mathfrak{A}}(n, k)$  dénombre donc les sous-espaces vectoriels de dimension  $k$  d'un espace vectoriel de dimension  $n$  sur le corps  $GF(q)$ . Si  $q$  est égal à un entier, les mêmes familles de polynômes sont obtenues en prenant  $a_i = q^i$  et  $w(i) = i$ .

Si une pondération  $w^*$  est obtenue d'une autre pondération  $w$  par multiplication par une constante  $a$ , i.e.  $w^*(i) = a \cdot w(i) \forall i \in \mathbb{N}$ , alors (voir proposition 2.2.8)

$$c^{(\mathcal{A}, w^*)}(n, k) = a^{n-k} c^{(\mathcal{A}, w)}(n, k), \quad \text{et} \quad S^{(\mathcal{A}, w^*)}(n, k) = a^{n-k} S^{(\mathcal{A}, w)}(n, k). \quad (2.1.6)$$

En particulier, les choix  $a_i = i$  et  $w(i) = q^{i+1}$  donnent les familles de polynômes  $c^{\mathfrak{A}}(n, k) = q^{\binom{n-k+1}{2}} [n]_q$  et  $S^{\mathfrak{A}}(n, k) = q^{n-k} [n]_q$ . Si  $q$  est égal à une puissance de nombre premier,  $S^{\mathfrak{A}}(n, k)$  dénombre alors les sous-espaces affines de dimension  $k$  d'un espace affine de dimension  $n$  sur  $GF(q)$  (cf Voigt [Vo]).

De même, puisque les choix  $a_i = i$  et  $w(i) = [i]_q = (q^i - 1)/(q - 1)$  produisent les  $q$ -nombres de Stirling des deux espèces, en considérant la pondération  $w^*(i) = (q^i - 1)$ , nous obtenons  $c^{(\mathcal{A}, w^*)}(n, k) = (q - 1)^{n-k} c_q[n, k]$  et  $S^{(\mathcal{A}, w^*)}(n, k) = (q - 1)^{n-k} S_q[n, k]$ . Ces familles de polynômes s'interprètent combinatoirement en termes de  $q$ -tableaux particuliers lorsque  $q$  est un entier. Les  $q$ -tableaux sont des paires  $(\lambda, f)$  où  $\lambda$  est un partage d'entier et  $f$  est un remplissage du diagramme de Ferrers correspondant avec des éléments de l'ensemble  $\{0, 1, 2, \dots, q - 1\}$ . Pour plus de détails, se référer à la section 4 du chapitre 1.

Le cas où  $a_i = a + id$ ,  $a, d \in \mathbb{N}$ , est une progression arithmétique donne lieu à plusieurs cas particuliers remarquables et nous y dédions la section 2.4. Dans cette section, nous considérons le cas particulier des tableaux 0-1

dont les longueurs des colonnes sont restreintes à une progression arithmétique  $\{a + id\}_{i \geq 0}$ , pour des entiers  $a$  et  $d$  fixés. Nous obtenons ainsi deux familles de polynômes  $(c_{p,q}^{a,d}[n, k])_{n, k \geq 0}$  et  $(S_{p,q}^{a,d}[n, k])_{n, k \geq 0}$ , que nous appellerons les  $p, q$ -nombres de Stirling  $a, d$ -progressifs. Ces familles s'expriment également combinatoirement en termes de *tableaux 0-1 faibles colorés*, remplissages de diagrammes de Ferrers avec des "0" et des "1", en exigeant qu'il y ait *au plus* un "1" dans chaque colonne et en attribuant une "couleur" à chaque colonne. Nous obtenons un certain nombre d'identités dérivées de ces deux modèles combinatoires, poursuivant des travaux entamés par J.B. Remmel et M. Wachs [ReWa]. Cette généralisation des nombres de Stirling, pour  $p = q = 1$ , a été également étudiée par A. Ruciński et B. Voigt [RV] qui ont montré que si  $a + d > 0$ , les nombres  $S_{1,1}^{a,d}(n, k)$  satisfont un théorème de limite locale, ainsi que par L. Verde-Star [VS] (voir proposition 2.3).

Le tableau I présente quelques familles de nombres ou de polynômes obtenues en considérant des progressions arithmétiques particulières. Dans ce tableau,  $P(n)$  désigne le treillis booléen des sous-ensembles d'un ensemble à  $n$  éléments,  $\alpha$  désigne la cardinalité d'un groupe fini pour les nombres de Whitney des treillis de Dowling (cf Dowling [Dow] et Leroux [Le1]), et  $c_{(\alpha)}(n, k)$  et  $S_{(\alpha)}(n, k)$  désignent les nombres de Stirling non-centrés de première et deuxième espèces (cf Koutras [Kou]), introduits dans le prochain paragraphe.

Les nombres de Stirling de première espèce avec signe, notés  $s(n, k)$ , étant égaux à  $(-1)^{n-k}c(n, k)$ , et les nombres de Stirling de seconde espèce  $S(n, k)$  peuvent être définis comme les familles de nombres telles que

$$t(t-1) \dots (t-n+1) = \sum_{k=0}^n s(n, k)t^k \quad (2.1.7)$$

TABLEAU I :  $\mathfrak{A}$ -nombres de Stirling pour  $a_i$  progression arithmétique

$a_i$	$w(i)$	$c^{\mathfrak{A}}(n, k)$	$S^{\mathfrak{A}}(n, k)$
$a + id$	$[i]_{p,q}$	$c_{p,q}^{a,d}[n, k]$	$S_{p,q}^{a,d}[n, k]$
$0 + i \cdot 1$	$[i]_{p,q}$	$c_{p,q}[n, k]$	$S_{p,q}[n, k]$
$1 + i \cdot 0$	$[i]_{p,q}$	$\binom{n}{k}$	$\binom{n}{k}$
$1 + i \cdot 1$	$i$	$\sum_{m=k}^n \binom{m}{k} c(n, m)$ permutations sur $n$ éléments avec $k$ cycles non marqués.	$S(n + 1, k + 1)$ partitions partielles sur $n$ éléments.
$2 + i \cdot 1$	$i$		nombre de sous- treillis $P(k)$ dans $P(n)$ , [Vo].
$a + i \cdot 1$	$i$	$\sum_m \binom{m}{k} a^{m-k} c(n, m)$ permutations sur $n$ éléments avec $m - k$ cycles marqués pondérés par $a$ , $k \leq m \leq n$ .	$\sum_m \binom{n}{m} a^{n-m} S(m, k)$ partitions partielles sur $n$ éléments, $a$ comptant le nombre d'éléments non dans la partition.
$1 + i\alpha$	$i$	nombres de Whitney de première sorte des treillis de Dowling.	nombres de Whitney de deuxième sorte des treillis de Dowling.
$0 + i \cdot 1$	$-a + i$	$c_{(a)}(n, k)$ , [Kou].	$S_{(a)}(n, k)$ , [Kou].

$$\text{et } t^n = \sum_{k=0}^n S(n, k)t(t-1)\dots(t-k+1). \quad (2.1.8)$$

Par analogie, si  $a$  désigne un nombre réel, M. Koutras [Kou] définit les *nombre de Stirling non-centrés de première espèce avec signe*, notés  $s_{(a)}(n, k) = (-1)^{n-k}c_{(a)}(n, k)$ , et les *nombre de Stirling non-centrés de seconde espèce*, notés  $S_{(a)}(n, k)$ , comme étant les familles de nombres satisfaisant

$$t(t-1)\dots(t-n+1) = \sum_{k=0}^n s_{(a)}(n, k)(t-a)^k \quad (2.1.9)$$

$$\text{et } (t-a)^n = \sum_{k=0}^n S_{(a)}(n, k)t(t-1)\dots(t-k+1). \quad (2.1.10)$$

Nous reparlerons des polynômes de Stirling non-centrés dans la section 2.2. De plus, nous traiterons des interprétations combinatoires de certains cas particuliers de progressions arithmétiques pour les nombres de Stirling  $a, d$ -progressifs, en termes de permutations à cycles marqués, de partitions partielles et de sous-treillis booléens, dans la section 2.4.

Le cas le plus général des  $\mathfrak{A}$ -nombres de Stirling, dans lequel on considère  $a_i$  et  $w(i)$  quelconques, donne les familles  $c^{\mathfrak{A}}(n, k) = e_{n-k}(w_0, w_1, \dots, w_{n-1})$  et  $S^{\mathfrak{A}}(n, k) = h_{n-k}(w_0, w_1, \dots, w_k)$ , où  $w_i = w(a_i)$  et  $e_n(x_1, x_2, \dots, x_k)$  et  $h_n(x_1, x_2, \dots, x_k)$  désignent respectivement les fonctions symétriques élémentaires et homogènes de degré  $n$  en  $k$  variables. Des cas particuliers intéressants de ces familles de nombres sont donnés par les nombres de Whitney des treillis supersolubles (cf Stanley [Sta1, Sta2], Damiani, D'Antona et Regonati [DDR]).

Ainsi les familles  $(c^{\mathfrak{A}}(n, k))_{n, k}$  et  $(S^{\mathfrak{A}}(n, k))_{n, k}$  sont aussi générales que les fonctions symétriques élémentaires et homogènes. Elles possèdent donc toutes sortes de propriétés combinatoires héritées des fonctions symétriques,

telles par exemple certaines propriétés de concavité logarithmique (cf Habsieger [Hab], Sagan [Sa1, Sa2, Sa3]). Dans la section suivante, nous allons exhiber les relèvements des identités du chapitre précédent à ce niveau de généralisation. Nous prolongeons ainsi les travaux de L. Comtet [Co1], E. Damiani, O. D'Antona et F. Regonati [DDR], M. Koutras [Kou], A. Ruciński et B. Voigt [RV], L. Verde-Star [VS], et B. Voigt [Vo].

Dans un deuxième temps, nous étudions une généralisation des nombres de Stirling utilisant des tableaux 0-1 faibles. Nous définissons combinatoirement des familles de polynômes, les  $p, q$ -nombres de Stirling partiels, notés  $(\mathcal{P}c_{p,q}[n, m, k])$  et  $(\mathcal{P}S_{p,q}[n, m, k])$ , à l'aide de ces tableaux ayant un nombre fixé  $n - m$  de colonnes remplies de "0". Lorsque le nombre de colonnes remplies de "0" n'est pas fixé, les familles de polynômes correspondantes,  $\mathcal{P}c_{p,q}[n, k] = \sum_{m=k}^n \mathcal{P}c_{p,q}[n, m, k]$  et  $\mathcal{P}S_{p,q}[n, k] = \sum_{m=k}^n \mathcal{P}S_{p,q}[n, m, k]$ , forment un cas particulier des  $\mathfrak{A}$ -nombres de Stirling, pour  $a_i = i$  et  $w(i) = p^i + [i]_{p,q}$ .

Les  $p, q$ -nombres de Stirling partiels correspondent, en terme des modèles combinatoires classiques des nombres de Stirling, à un  $p, q$ -comptage de permutations à cycles marqués pour les nombres de première espèce, et à un  $p, q$ -comptage de partitions partielles pour les nombres de deuxième espèce. C'est d'ailleurs de là que provient leur nom. Dans la section 2.3, nous généralisons aux tableaux 0-1 faibles des bijections classiques entre certains tableaux 0-1 et les permutations ou les partitions. Nous présentons ensuite une étude systématique des identités faisant intervenir ces familles de polynômes.

Ces polynômes apparaissent en particulier dans le  $p, q$ -analogue des formules de convolution du corollaire 1.2.7 du chapitre 1. Remarquons également

que le modèle combinatoire des  $p, q$ -nombres de Stirling partiels resurgit naturellement, enrichi de colorations, comme modèle combinatoire alternatif des  $p, q$ -nombres de Stirling  $a, d$ -progressifs. À notre sens, ceci constitue une motivation supplémentaire à l'étude des  $p, q$ -nombres de Stirling partiels.

Nous terminons ce chapitre avec une discussion des propriétés de concavité logarithmique des nouvelles suites de polynômes introduites.

## 2.2 RELÈVEMENT D'IDENTITÉS AU NIVEAU DES A-TABLEAUX

Dans cette section, nous donnons les propriétés fondamentales des  $\mathfrak{A}$ -nombres de Stirling qui, avec les formules de récurrences (2.1.4) et (2.1.5), relèvent les identités du chapitre 1. Comme les démonstrations combinatoires sont assez similaires, les démonstrations de cette section seront abrégées.

**PROPOSITION 2.2.1:** *Les familles  $(c^{\mathfrak{A}}(n, k))_{n, k}$  et  $(S^{\mathfrak{A}}(n, k))_{n, k}$  définies par les identités (2.1.2) et (2.1.3) vérifient les identités qui suivent:*

a) *fonctions symétriques*

$$\begin{aligned} c^{\mathfrak{A}}(n, k) &= e_{n-k}(w_0, w_1, w_2, \dots, w_{n-1}) \\ &= \sum_{0 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_{n-k} \leq n-1} w_{i_0} w_{i_1} \dots w_{i_{n-k}}, \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

$$\begin{aligned} S^{\mathfrak{A}}(n, k) &= h_{n-k}(w_0, w_1, w_2, \dots, w_k) \\ &= \sum_{0 \leq i_0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_{n-k} \leq k} w_{i_0} w_{i_1} \dots w_{i_{n-k}}; \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

b) *fonctions génératrices: pour  $n \geq 0$ ,*

$$\sum_{r \geq 0} c^{\mathcal{A}}(n, r) y^{n-r} x^r = (x + w_0 y) (x + w_1 y) \dots (x + w_{n-1} y), \quad (2.2.3)$$

*pour  $k \geq 0$ ,*

$$\sum_{r \geq 0} S^{\mathcal{A}}(k + r, k) x^r = \frac{1}{(1 - w_0 x)} \frac{1}{(1 - w_1 x)} \dots \frac{1}{(1 - w_k x)}, \quad (2.2.4)$$

$$x^n = \sum_{k=0}^n S^{\mathcal{A}}(n, k) (x - w_0) (x - w_1) \dots (x - w_{k-1}); \quad (2.2.5)$$

c) *réurrences*

$$c^{\mathcal{A}}(n + 1, k + 1) = \sum_{j=k}^n w_n w_{n-1} \dots w_{j+1} c^{\mathcal{A}}(j, k), \quad (2.2.6)$$

$$S^{\mathcal{A}}(n + 1, k + 1) = \sum_{j=k}^n w_{k+1}^{n-j} S^{\mathcal{A}}(j, k). \quad (2.2.7)$$

### DÉMONSTRATION:

- (a) Construire tous les  $\mathcal{A}$ -tableaux dans  $Td^{\mathcal{A}}(n-1, n-k)$  pour (2.2.1), ou dans  $T^{\mathcal{A}}(k, n-k)$  pour (2.2.2), en choisissant leurs colonnes (les  $w_{i_j}$  représentent les pondérations des colonnes selon leurs longueurs  $a_{i_j}$ ).
- (b) Les identités (2.2.3) et (2.2.4) découlent immédiatement de (a). L'identité (2.2.5) se démontre par induction sur  $n$ , en utilisant la récurrence (2.1.5).
- (c) Démonstration combinatoire analogue à celle de (1.2.10) et (1.2.11) dans le chapitre précédent: trouver l'escalier ou le rectangle maximum.  $\square$

**PROPOSITION 2.2.2:** Soit  $\mathcal{A} = (a_i)_{i \geq 0}$ . Nous noterons  $\delta_j \mathcal{A}$  la suite obtenue en éliminant le terme  $a_j$  dans la suite  $\mathcal{A}$ , et  $\delta_j \mathfrak{A} = (\delta_j \mathcal{A}, w)$ . Alors pour  $n$  et  $k$  fixés, les  $\mathfrak{A}$ -nombres de Stirling vérifient les identités:

$$(n-k)c^{\mathfrak{A}}(n, k) = \sum_{j=0}^{n-1} w_j c^{\delta_j \mathfrak{A}}(n-1, k), \quad (2.2.8)$$

$$(n-k)S^{\mathfrak{A}}(n, k) = \sum_{j=0}^{n-k-1} S^{\mathfrak{A}}(n-1-j, k) \left( w_0^{j+1} + w_1^{j+1} + \dots + w_k^{j+1} \right). \quad (2.2.9)$$

**DÉMONSTRATION:**

Pour (2.2.8), nous comptons avec pondération les  $\mathcal{A}$ -tableaux dans  $Td^{\mathcal{A}}(n-1, n-k)$  dont une colonne est pointée. Le membre de droite de (2.2.8) est obtenu en isolant la colonne pointée de longueur  $a_j$ , et en considérant le  $\mathcal{A}$ -tableau restant qui appartient à l'ensemble  $Td^{\delta_j \mathcal{A}}(n-2, n-k-1)$ .

De même, pour (2.2.9), nous comptons avec pondération les  $\mathcal{A}$ -tableaux dans  $T^{\mathcal{A}}(k, n-k)$  dont une colonne est pointée. Pour obtenir le membre de droite de (2.2.9), il suffit d'isoler la colonne pointée ainsi que toutes les colonnes de même longueur se trouvant à sa gauche; il y en a exactement  $j$ ,  $0 \leq j \leq n-k-1$ , et le  $\mathcal{A}$ -tableau restant possède  $n-k-(j+1)$  colonnes dont les longueurs sont dans le multi-ensemble  $\{a_0, a_1, \dots, a_k\}$ .  $\square$

**PROPOSITION 2.2.3:** (Orthogonalité)

Si  $s^{\mathfrak{A}}(n, k) := (-1)^{n-k} c^{\mathfrak{A}}(n, k)$ , alors les deux matrices  $\left( S^{\mathfrak{A}}(n, k) \right)_{n, k}$  et  $\left( s^{\mathfrak{A}}(n, k) \right)_{n, k}$  sont l'inverse l'une de l'autre. En particulier,

$$\sum_{k=m}^n (-1)^{n-k} c^{\mathfrak{A}}(n, k) S^{\mathfrak{A}}(k, m) = \delta_{n, m}, \quad (2.2.10)$$

$$\sum_{k=m}^n S^{\mathfrak{A}}(n, k)(-1)^{k-m} c^{\mathfrak{A}}(k, m) = \delta_{n,m}. \quad (2.2.11)$$

**DÉMONSTRATION:**

C'est algébriquement trivial si l'on considère les fonctions génératrices (comparer l'identité (2.2.3) avec les substitutions  $x := 1$  et  $y := -x$  et l'identité (2.2.4), ou encore comparer l'identité (2.2.3) avec la substitution  $y := -1$  et l'identité (2.2.5)).

Il existe aussi une jolie preuve combinatoire involutive des identités (2.2.10) et (2.2.11) consistant à déplacer une colonne de longueur minimum (resp. de longueur maximum pour (2.2.11)) à l'intérieur de paires de  $\mathcal{A}$ -tableaux dans les ensembles  $Td^{\mathcal{A}}(n-1, n-k) \times T^{\mathcal{A}}(m, k-m)$  (resp.  $T^{\mathcal{A}}(k, n-k) \times Td^{\mathcal{A}}(k-1, k-m)$ ),  $m \leq k \leq n$ . Voir la démonstration de la proposition 1.3.1 du chapitre 1 pour plus de détails.  $\square$

**PROPOSITION 2.2.4:** *On a:*

$$c^{\mathfrak{A}}(n, k) = \sum_{j=k}^n (-1)^{j-k} w_n^{j-k} c^{\mathfrak{A}}(n+1, j+1), \quad (2.2.12)$$

$$S^{\mathfrak{A}}(n, k) = \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j w_{k+1} w_{k+2} \dots w_{k+j} S^{\mathfrak{A}}(n+1, k+j+1), \quad (2.2.13)$$

$$\sum_{k=2}^n (1-w_1)(1-w_2) \dots (1-w_{k-1}) S^{\mathfrak{A}}(n, k) = 1 + w_0 + \dots + w_0^{n-2}. \quad (2.2.14)$$

**DÉMONSTRATION:**

Même genre de preuves involutives que la proposition précédente et que les propositions 1.3.2 et 1.3.4 du chapitre 1.  $\square$

Le relèvement de certaines identités dépend parfois de la pondération  $w$  choisie. C'est le cas des identités (1.2.12), (1.2.13), et (1.4.5) à (1.4.10) dans le chapitre précédent. Il arrive souvent que la pondération  $w$  ait la forme d'une somme canonique finie d'éléments de  $K$ . Pour faciliter les démonstrations combinatoires, on peut dans ce cas distribuer les différents termes de la pondération sur les  $\mathcal{A}$ -tableaux  $\phi$ , en attribuant à chaque colonne un seul terme de la somme correspondant à sa longueur plutôt que la somme entière. On dira alors que  $\phi$  est un  $\mathcal{A}$ -tableau  $w$ -distribué. On retrouve d'ailleurs ainsi l'interprétation combinatoire en termes de tableaux 0-1 des  $p, q$ -nombres de Stirling des deux espèces, obtenus en considérant  $a_i = i$  et  $w(i) = [i]_{p,q}$ . En effet, plutôt que d'attribuer à une colonne de longueur  $i$  un poids unique de la forme  $[i]_{p,q} = p^{i-1} + p^{i-2}q + \dots + q^{i-1}$ , on lui attribue un seul monôme  $p^j q^{i-j-1}$  dans  $[i]_{p,q}$ , ce qui correspond au nombre d'inversions (et de non-inversions) pour le compteur  $q$  (resp.  $p$ ) d'une colonne de longueur  $i$  ayant un "1" en  $(j+1)$ -ième position.

**PROPOSITION 2.2.5:** (*relèvement des formules (1.2.12) et (1.2.13)*)

*Si la pondération de  $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, w)$  est de la forme*

$$w(a_i) = w_0 + w_0 z + w_0 z^2 + \dots + w_0 z^{i-1} = w_0 [i]_z \in \mathbb{N}[w_0, z],$$

*alors*

$$c^{\mathfrak{A}}(n+1, k+1) = \sum_{j=k}^n \binom{j}{k} w_0^{j-k} z^{n-j} c^{\mathfrak{A}}(n, j), \quad (2.2.15)$$

$$S^{\mathfrak{A}}(n+1, k+1) = \sum_{m=k}^n \binom{n}{m} w_0^{n-m} z^{m-k} S^{\mathfrak{A}}(m, k). \quad (2.2.16)$$

**DÉMONSTRATION:**

On peut supposer sans perte de généralité que  $a_i = i$ .

Alors pour (2.2.15), soit  $n \geq k$  et  $\phi$  un  $\mathcal{A}$ -tableau  $w$ -distribué dans  $Td^{\mathcal{A}}(n, n - k)$ . Considérons toutes les colonnes de  $\phi$  qui ont poids " $w_0$ ". Il y en a exactement  $j - k$ , pour un certain  $j$  dépendant de  $\phi$  ( $k \leq j \leq n$ ). On peut enlever ces colonnes, en prenant note de leurs longueurs, sans perte d'information, obtenant un facteur " $w_0^{j-k}$ ". Si  $\phi'$  désigne le  $\mathcal{A}$ -tableau obtenu après cette opération, alors  $\phi'$  est dans  $Td^{\mathcal{A}}(n, n - j)$ , c'est-à-dire  $\phi'$  contient  $n - j$  colonnes (de longueurs distinctes plus petites ou égales à  $n$ ) et les longueurs des  $j - k$  colonnes extraites constituent un sous-ensemble des  $j$  longueurs de colonnes n'apparaissant pas dans  $\phi'$ . De plus, chaque colonne de  $\phi'$  de longueur  $i$  possède une pondération " $w_0 z^l$ ",  $1 \leq l \leq i - 1$ . Si l'on remplace chaque colonne de longueur  $i$  par une colonne de longueur  $i - 1$  et qu'on enlève un facteur  $z$  à sa pondération, on obtient un  $\mathcal{A}$ -tableau  $w$ -pondéré général dans  $Td^{\mathcal{A}}(n - 1, n - j)$  et un facteur " $z^{n-j}$ ".

Il est facile de voir que cette transformation est réversible; on obtient ainsi l'identité (2.2.15). L'identité (2.2.16) s'obtient d'une manière similaire.  $\square$

A l'origine, les  $q$ -nombres de Stirling de deuxième espèce ont été introduits par L. Carlitz [Ca1] comme étant la famille de polynômes  $S_q[n, k]$  vérifiant l'identité suivante:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} (q-1)^{j-k} S_q[j, k]. \quad (2.2.17)$$

**THÉORÈME 2.2.6:** (*relèvement des formules de Carlitz*)

Soit  $\mathcal{A}$  une suite croissante d'entiers non-négatifs, et  $w : \mathbb{N} \rightarrow K$  et  $w^* : \mathbb{N} \rightarrow K$  deux fonctions dans un anneau  $K$  telles que  $w(i) = w_0 + w^*(i)$ ,  $\forall i \in \mathbb{N}$ . Si  $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, w)$ ,  $\mathfrak{A}^* = (\mathcal{A}, w^*)$  et  $\mathfrak{A}_0 = (\mathcal{A}, w_0)$ , où  $w_0$  désigne la fonction constante égale à  $w_0$ , alors

$$S^{\mathfrak{A}}(n, k) = \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} w_0^{n-j} S^{\mathfrak{A}^*}(j, k). \quad (2.2.18)$$

De plus, les identités suivantes, obtenues en appliquant diverses inversions, sont équivalentes à (2.2.18).

$$c^{\mathfrak{A}}(n, s) = \sum_{j=s}^n \binom{j}{s} w_0^{j-s} c^{\mathfrak{A}^*}(n, j); \quad (2.2.19)$$

$$S^{\mathfrak{A}^*}(n, s) = \sum_{j=s}^n (-w_0)^{n-j} \binom{n}{j} S^{\mathfrak{A}}(j, s); \quad (2.2.20)$$

$$c^{\mathfrak{A}^*}(n, s) = \sum_{j=s}^n (-w_0)^{j-s} \binom{j}{s} c^{\mathfrak{A}}(n, j); \quad (2.2.21)$$

$$S^{\mathfrak{A}_0}(n, s) = \sum_{j=s}^n (-1)^{j-s} c^{\mathfrak{A}^*}(j, s) S^{\mathfrak{A}}(n, j); \quad (2.2.22)$$

$$c^{\mathfrak{A}_0}(n, s) = \sum_{j=s}^n (-1)^{n-j} c^{\mathfrak{A}}(j, s) S^{\mathfrak{A}^*}(n, j). \quad (2.2.23)$$

**DÉMONSTRATION:**

Nous nous trouvons dans un cas où  $w$  (dans le couple  $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, w)$ ) est une somme canonique de deux termes, nous pouvons donc parler de  $\mathcal{A}$ -tableaux  $w$ -distribués. Ainsi, pour ces  $\mathcal{A}$ -tableaux, une colonne de longueur  $a_i$  aura comme possibilité de pondération soit " $w_0$ " soit " $w^*(a_i)$ ".

Pour démontrer les identités (2.2.18) et (2.2.19), il suffit essentiellement de choisir les colonnes des  $\mathcal{A}$ -tableaux  $w$ -distribués dont la pondération est différente de  $w_0$ .

Pour (2.2.20) et (2.2.21), le membre de droite compte des  $\mathcal{A}$ -tableaux  $w$ -distribués dont certaines colonnes de poids  $w_0$  sont distinguées et contribuent à la pondération par un facteur de  $(-1)$ . On peut construire sur ces tableaux une involution conservant les poids mais inversant les signes et ayant comme points fixes les  $\mathcal{A}$ -tableaux  $w$ -distribués dont aucune colonne n'est de poids  $w_0$ . Il suffit, pour ce faire, de "changer le statut" de la colonne de poids  $w_0$  la plus à gauche du  $\mathcal{A}$ -tableau  $w$ -distribué. On obtient ainsi le membre de gauche de ces identités.

Pour les identités (2.2.22) et (2.2.23), des involutions conservant les poids mais inversant le signe du même genre que celles pour l'orthogonalité font l'affaire.  $\square$

Le cas particulier où  $a_i = i$ ,  $w_0 = 1$  et  $w^*(i) = q^i - 1$  redonne l'identité de Carlitz ainsi que ses proches parents (cf chapitre 1, (1.4.5) à (1.4.10)).

**REMARQUE 2.2.7:** En effectuant le changement de variable  $x = t - a$  dans les identités (2.1.9) et (2.1.10) de la section 2.1, définissant les nombres de Stirling non-centrés (cf Koutras [Kou]), on obtient les formules

$$(x + a)(x + a - 1) \dots (x + a - n + 1) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} c_{(a)}(n, k) x^k \quad (2.2.24)$$

$$\text{et } x^n = \sum_{k=0}^n S_{(a)}(n, k) (x + a)(x + a - 1) \dots (x + a - k + 1). \quad (2.2.25)$$

En les comparant aux identités (2.2.3) et (2.2.5) de la proposition 2.2.1, on en déduit que  $c_{(a)}(n, k) = c^{\mathfrak{A}}(n, k)$  et  $S_{(a)}(n, k) = S^{\mathfrak{A}}(n, k)$ , pour  $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, w)$ , où

$\mathcal{A} = (i)_{i \geq 0}$ , et  $w(i) = -a + i$ . Les identités (2.2.18) et (2.2.19) nous permettent alors d'exprimer les nombres de Stirling non-centrés en termes des nombres de Stirling usuels, à savoir

$$c_{(a)}(n, s) = \sum_{j=s}^n \binom{j}{s} (-a)^{j-s} c(n, j), \quad (2.2.26)$$

$$S_{(a)}(n, k) = \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} (-a)^{n-j} S(j, k). \quad (2.2.27)$$

Le théorème 2.2.6 traite essentiellement des interactions entre  $\mathfrak{A}$ -nombres de Stirling dont les pondérations diffèrent par une constante additive. La proposition suivante montre ce qui se passe lorsque les pondérations diffèrent par une constante multiplicative.

**PROPOSITION 2.2.8:** *Soit  $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, w)$  où  $w : \mathbb{N} \rightarrow K$  et soit  $a \in K$ . Notons  $aw$  l'application de  $\mathbb{N}$  dans l'anneau  $K$  obtenue par multiplication de  $w$  par la constante  $a$ . Alors,*

$$c^{(\mathcal{A}, aw)}(n, k) = a^{n-k} c^{(\mathcal{A}, w)}(n, k), \quad (2.2.28)$$

$$S^{(\mathcal{A}, aw)}(n, k) = a^{n-k} S^{(\mathcal{A}, w)}(n, k). \quad (2.2.29)$$

### DÉMONSTRATION:

Il suffit de remarquer que pour tout  $\mathcal{A}$ -tableau  $\phi$  possédant  $k$  colonnes, la pondération  $(aw)_{(\mathcal{A}, aw)}(\phi)$  de  $\phi$  est liée à la pondération  $w_{\mathfrak{A}}(\phi) = w_{(\mathcal{A}, w)}(\phi)$  par la relation suivante:

$$(aw)_{(\mathcal{A}, aw)}(\phi) = a^k \cdot w_{(\mathcal{A}, w)}(\phi). \quad \square$$

**REMARQUE 2.2.9:** Remarquons que le résultat précédent peut prendre une forme plus générale: soient  $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, w)$  et  $\mathfrak{B} = (\mathcal{B}, v)$  tels que  $\mathcal{A} = (a_i)_{i \geq 0}$  et  $\mathcal{B} = (b_i)_{i \geq 0}$  sont des suites croissantes d'entiers non-négatifs et  $w$  et  $v$  sont des applications de  $\mathbb{N}$  dans  $K$ . Si pour tout  $i \geq 0$ ,

$$v(b_i) = a \cdot w(a_i),$$

alors

$$c^{\mathfrak{B}}(n, k) = a^{n-k} c^{\mathfrak{A}}(n, k), \quad (2.2.30)$$

$$S^{\mathfrak{B}}(n, k) = a^{n-k} S^{\mathfrak{A}}(n, k). \quad (2.2.31)$$

**THÉORÈME 2.2.10:** (*formules de convolution*)

Soit  $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, w)$  où  $\mathcal{A} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ . Désignons par  $\delta\mathcal{A}$  la suite  $(a_1, a_2, \dots)$  et, plus généralement, par  $\delta^n\mathcal{A} = \delta(\delta^{n-1}\mathcal{A})$  la suite  $(a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots)$ . De plus, notons  $\delta^n\mathfrak{A} = (\delta^n\mathcal{A}, w)$ . Alors

$$c^{\mathfrak{A}}(m+j, n) = \sum_{k=0}^n c^{\mathfrak{A}}(m, k) c^{\delta^m\mathfrak{A}}(j, n-k), \quad (2.2.32)$$

$$S^{\mathfrak{A}}(m+j, n) = \sum_{k=0}^n S^{\mathfrak{A}}(m, k) S^{\delta^k\mathfrak{A}}(j, n-k). \quad ((5.18) \text{ de [VS]}) (2.2.33)$$

De même,

$$c^{\mathfrak{A}}(n+1, m+j+1) = \sum_{k=0}^n c^{\mathfrak{A}}(k, m) c^{\delta^{k+1}\mathfrak{A}}(n-k, j), \quad (2.2.34)$$

$$S^{\mathfrak{A}}(n+1, m+j+1) = \sum_{k=0}^n S^{\mathfrak{A}}(k, m) S^{\delta^{m+1}\mathfrak{A}}(n-k, j). \quad ((5.19) \text{ de [VS]})$$

(2.2.35)

### DÉMONSTRATION:

Pour démontrer combinatoirement ces formules, il suffit de sectionner stratégiquement les  $\mathcal{A}$ -tableaux en deux parties.

Ainsi, pour l'identité (2.2.32) (resp. (2.2.35)) par exemple, on sépare les colonnes des  $\mathcal{A}$ -tableaux de l'ensemble  $Td^{\mathcal{A}}(m+j-1, m+j-n)$  (resp.  $T^{\mathcal{A}}(m+j+1, n-m-j)$ ) pour former un  $\mathcal{A}$ -tableau dont les longueurs de colonnes font partie du multi-ensemble  $\{a_0, a_1, \dots, a_{m-1}\}$  (resp.  $\{a_0, a_1, \dots, a_m\}$ ), et un autre  $\mathcal{A}$ -tableau dont les longueurs des colonnes font partie du multi-ensemble  $\{a_m, a_{m+1}, \dots, a_{m+j-1}\}$  (resp.  $\{a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_{m+j+1}\}$  pour (2.2.35)), où, comme toujours,  $\mathcal{A} = (a_i)_{i \geq 0}$ .

Pour les identités (2.2.33) et (2.2.34), si  $\phi \in T^{\mathcal{A}}(n, m+j-n)$  (respectivement  $\phi' \in Td^{\mathcal{A}}(n, n-m-j)$ ), on doit d'abord déterminer l'unique entier  $k_0$ ,  $0 \leq k_0 \leq n$  (resp.  $k_1$ ,  $m \leq k_1 \leq n$ ), pour lequel

$$\begin{aligned} (k_0 - 1) + |\phi|_0 + |\phi|_1 + \dots + |\phi|_{k_0-1} &< m \\ &\leq k_0 + |\phi|_0 + |\phi|_1 + \dots + |\phi|_{k_0} \end{aligned} \quad (2.2.36)$$

(respectivement

$$\begin{aligned} k_1 - |\phi'|_0 - |\phi'|_1 - \dots - |\phi'|_{k_1-1} &= m \\ &< (k_1 + 1) + |\phi'|_0 + |\phi'|_1 + \dots + |\phi'|_{k_1}, \end{aligned} \quad (2.2.37)$$

où  $|\phi|_i$  désigne le nombre de colonnes de longueur  $a_i$  dans  $\phi$ . Remarquons que pour que (2.2.37) soit satisfaite, puisque  $\phi'$  possède des colonnes de longueurs deux à deux distinctes, on doit nécessairement avoir  $|\phi'|_{k_1} = 0$ .

Le  $\mathcal{A}$ -tableau  $\phi$  (respectivement  $\phi'$ ) est alors divisé en un  $\mathcal{A}$ -tableau contenant les  $m - k_0$  dernières colonnes de  $\phi$  (resp.  $k_1 - m$  dernières colonnes

de  $\phi'$ ), prenant leurs longueurs dans le multi-ensemble  $\{a_0, a_1, \dots, a_{k_0}\}$  (resp.  $\{a_0, a_1, \dots, a_{k_1-1}\}$ ), et le  $\mathcal{A}$ -tableau restant, dont les colonnes ont des longueurs dans le multi-ensemble  $\{a_{k_0}, a_{k_0+1}, \dots, a_n\}$  (resp.  $\{a_{k_1+1}, a_{k_1+2}, \dots, a_n\}$ ).  $\square$

Ces identités sont des relèvements des formules de convolution (1.2.14) à (1.2.17) du chapitre précédent, lorsque  $a_i = i$  et  $w(i) = [i]_q$ . Le lemme 1.2.6 permet d'exprimer les familles  $c^{\delta^i \mathcal{A}}(n, k)$  et  $S^{\delta^i \mathcal{A}}(n, k)$  en termes des familles  $c_q[n, k] = c^{\mathcal{A}}(n, k)$  et  $S_q[n, k] = S^{\mathcal{A}}(n, k)$ .

### 2.3 IDENTITÉS RELATIVES AUX TABLEAUX 0-1 FAIBLES

**DÉFINITIONS 2.3.1:** Un *tableau 0-1 faible*  $\psi$  est la donnée d'un triplet  $\psi = (\lambda, l, f)$  où  $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k)$  désigne un partage d'un entier  $m$ ,  $l$  est un entier supérieur ou égal à  $\lambda_1$ , et  $f = (f_{ij})_{1 \leq j \leq \lambda_i}$  est un "remplissage" des cellules du diagramme de Ferrers de  $\lambda$  avec des "0" et des "1", de telle sorte qu'il y ait *au plus* un "1" par colonne. On considérera par convention que  $\psi$  possède  $l$  colonnes dont  $l - \lambda_1$  sont de longueur nulle et sont remplies de zéros.

Par exemple, la figure 2.1 représente le tableau 0-1 faible  $\psi = (\lambda, l, f)$  où  $\lambda = (5, 4, 2, 2)$ ,  $l = 6$  et  $f_{13} = f_{24} = f_{32} = 1$ ,  $f_{ij} = 0$  ailleurs ( $1 \leq j \leq \lambda_i$ ).

0	0	1	0	0	
0	0	0	1		
0	1				
0	0				

FIGURE 2.1: tableau 0-1 faible  $\psi$

Le *nombre d'inversions* de  $\psi$ , noté  $\text{inv}(\psi)$ , est égal au nombre de “0” se trouvant en dessous d’un “1” dans la représentation graphique de  $\psi$ . Le *nombre de non-inversions* de  $\psi$ , noté  $\text{nin}(\psi)$ , est égal au nombre de “0” se trouvant au-dessus d’un “1” dans la représentation graphique de  $\psi$ , plus le nombre de “0” dans les colonnes remplies de “0”. Dans l’exemple précédent,  $\text{inv}(\psi) = 2$  et  $\text{nin}(\psi) = 8$ .

Nous noterons  $T_f(h, r)$  (resp.  $T_f(h, r, s)$ ), l’ensemble des tableaux 0-1 faibles possédant  $r$  colonnes de longueurs plus petites ou égales à  $h$  (et possédant exactement  $s$  colonnes remplies de “0”, resp.) et  $Td_f(h, r)$  (respectivement  $Td_f(h, r, s)$ ), le sous-ensemble de  $T_f(h, r)$  (resp.  $T_f(h, r, s)$ ) contenant les tableaux 0-1 faibles dont les longueurs des colonnes sont deux à deux distinctes.

**DÉFINITIONS 2.3.2:** Les  $p, q$ -*nombre*s de Stirling partiels sont donnés par:

$$\mathcal{P}c_{p,q}[n, m, k] := \sum_{\psi \in Td_f(n-1, n-k, n-m)} p^{\text{nin}(\psi)} q^{\text{inv}(\psi)}; \quad (2.3.1)$$

$$\mathcal{P}S_{p,q}[n, m, k] := \sum_{\psi \in T_f(k, n-k, n-m)} p^{\text{nin}(\psi)} q^{\text{inv}(\psi)}; \quad (2.3.2)$$

$$\mathcal{P}c_{p,q}[n, k] := \sum_{\psi \in Td_f(n-1, n-k)} p^{\text{nin}(\psi)} q^{\text{inv}(\psi)}; \quad (2.3.3)$$

$$\mathcal{P}S_{p,q}[n, k] := \sum_{\psi \in T_f(k, n-k)} p^{\text{nin}(\psi)} q^{\text{inv}(\psi)}. \quad (2.3.4)$$

Remarquons que ces polynômes ne sont pas symétriques en  $p$  et  $q$ .

Tout comme les nombres de Stirling classiques, les nombres de Stirling partiels ont une interprétation combinatoire en termes de permutations et de partitions ou, plus exactement, en termes de *permutations à cycles marqués* et de *partitions partielles*. Pour passer au  $p, q$ -analogue, nous aurons besoin de définir des notions d’inversions et de non-inversions sur ces objets.

**DÉFINITIONS 2.3.3:** Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}(n, l, k)$  une permutation sur l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n\} = \llbracket n \rrbracket$ , possédant  $k$  cycles dont  $l$  sont marqués. On dira que  $\sigma$  est écrite *sous forme standard de produit de cycles* si  $\sigma$  est écrite comme produit de cycles disjoints, chaque cycle débutant par son minimum, et les cycles étant ordonnés par ordre croissant de leurs minima. Nous noterons  $w(\sigma)$  le mot obtenu en effaçant les parenthèses dans l'écriture de  $\sigma$  sous forme standard de produit de cycles. Le minimum de chaque cycle est appelé *chef de cycle*. Pour indiquer qu'un cycle est marqué, nous soulignerons son chef de cycle. Ainsi par exemple,  $\sigma = (1, 9, 3, 5)(\underline{2}, 7)(\underline{4})(6, 10, 8) \in \mathfrak{S}(10, 2, 4)$  est écrite sous forme standard de produit de cycles, les cycles  $(\underline{2}, 7)$  et  $(\underline{4})$  sont marqués, les chefs de cycles sont respectivement 1, 2, 4 et 6, et  $w(\sigma) = 1\ 9\ 3\ 5\ \underline{2}\ 7\ \underline{4}\ 6\ 10\ 8$ .

Le nombre d'inversions d'un entier  $i \in \llbracket n \rrbracket$  dans une permutation à cycles marqués  $\sigma \in \mathfrak{S}(n, l, k)$ , noté  $\text{inv}_\sigma(i)$ , se calcule de la manière suivante:  $\text{inv}_\sigma(i)$  est égal au nombre de couples  $(i, j)$  tels que  $j$  se trouve à droite de  $i$  dans  $w(\sigma)$ , mais  $1 \leq j < i$ . Le nombre d'inversions d'une permutation à cycles marqués  $\sigma \in \mathfrak{S}(n, l, k)$ , noté  $\text{inv}(\sigma)$ , est égal à

$$\text{inv}(\sigma) = \sum_{i \in \llbracket n \rrbracket} \text{inv}_\sigma(i). \quad (2.3.5)$$

Le nombre de non-inversions d'une permutation à cycles marqués  $\sigma \in \mathfrak{S}(n, l, k)$ , noté  $\text{nin}(\sigma)$ , est égal à

$$\text{nin}(\sigma) = \sum_i (i - 2 - \text{inv}_\sigma(i)) + \sum_j (j - 1). \quad (2.3.6)$$

où la première sommation parcourt tous les entiers  $i \in \llbracket n \rrbracket$  qui ne sont pas chefs de cycles, et la seconde sommation, les chefs des cycles marqués.

Le nombre de non-inversions de  $\sigma \in \mathfrak{S}(n, l, k)$  peut également s'exprimer en termes de couples  $(i, j)$  tels que  $j$  se trouve à gauche de  $i$  dans  $w(\sigma)$  et

$1 \leq j < i$ . Mais cette statistique est en réalité la traduction pure et simple de la statistique de non-inversions des tableaux 0-1 faibles, via une bijection que nous exhibons dans la démonstration de la proposition 2.3.5.

Par exemple, pour  $\sigma = (1, 9, 3, 5)(2, 7)(\underline{4})(6, 10, 8)$ , on calcule  $\text{inv}(\sigma) = 13$  et  $\text{nin}(\sigma) = 17 + 4 = 21$ .

**DÉFINITIONS 2.3.4:** Une *partition partielle*  $(E; \pi) \in \mathcal{PP}(n, l, k)$  de  $\llbracket n \rrbracket$  est la donnée d'un couple  $(E; \pi)$  tel que  $E$  est un sous-ensemble de  $\llbracket n \rrbracket = \{1, 2, \dots, n\}$  de cardinalité  $l$ , et  $\pi = \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k$ , est une partition en  $k$  blocs de l'ensemble  $\llbracket n \rrbracket - E$ . On dira que  $(E; \pi)$  est *écrite sous forme standard* si les éléments de l'ensemble  $E$  sont ordonnés par ordre croissant, chaque bloc de la partition  $\pi$  est ordonné par ordre croissant de ses éléments, et les blocs sont ordonnés par ordre croissant de leurs minima. Les minima de blocs, respectivement  $a_1, a_2, \dots, a_k$ , seront appelés *chefs de blocs*. Par exemple  $(E; \pi) \in \mathcal{PP}(10, 2, 3)$ , telle que  $E = \{5, 9\}$  et  $\pi = \{1, 3, 7\}, \{2, 6, 10\}, \{4, 8\} = \pi_1, \pi_2, \pi_3$ , est écrite sous forme standard et les chefs de blocs de  $\pi$  sont égaux à  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$  et  $a_3 = 4$ .

Le *nombre d'inversions d'un entier*  $i \in \llbracket n \rrbracket - E$  dans la partition  $\pi$ , noté  $\text{inv}_\pi(i)$ , se calcule de la manière suivante: si  $i$  fait partie du  $j$ -ième bloc  $\pi_j$  de  $\pi$  écrite sous forme standard,  $\text{inv}_\pi(i)$  est égal au nombre de chefs de blocs  $a_m$ ,  $j < m \leq k$ , tels que  $a_m < i$ . Le *nombre d'inversions d'une partition partielle*  $(E; \pi) \in \mathcal{PP}(n, l, k)$ , noté  $\text{inv}(E; \pi)$ , est égal à

$$\text{inv}(E; \pi) = \sum_{i \in \llbracket n \rrbracket - E} \text{inv}_\pi(i). \quad (2.3.7)$$

De plus, le nombre de non-inversions d'un entier  $i \in \llbracket n \rrbracket$  d'une partition partielle  $(E; \pi)$ , noté  $\text{nin}_\pi(i)$ , est égal à

$$\text{nin}_\pi(i) = \begin{cases} |\{a_j \mid a_j < i\}| & \text{si } i \in E, \\ |\{a_j \mid 1 \leq j < k \text{ et } a_j < i\}| & \text{si } i \text{ est dans le } k\text{-ième bloc de } \pi \\ & \text{et } i \text{ n'est pas chef de bloc,} \\ 0 & \text{si } i \text{ est un chef de bloc,} \end{cases} \quad (2.3.8)$$

où  $a_1, \dots, a_k$  désignent les chefs de blocs  $\pi_1, \dots, \pi_k$  de  $\pi$  écrite sous forme standard.

Le nombre de non-inversions d'une partition partielle  $(E; \pi) \in \mathcal{PP}(n, l, k)$ , noté  $\text{nin}(E; \pi)$ , est égal à

$$\begin{aligned} \text{nin}(E; \pi) &= \sum_{i \in \llbracket n \rrbracket} \text{nin}_\pi(i), \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} i (|\pi_{i+1}| - 1) + \sum_{j \in E} \text{nin}_\pi(j), \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

où  $|\pi_i|$  désigne la cardinalité du  $i$ -ième bloc de la partition partielle, écrite sous forme standard.

Encore une fois, ce paramètre n'est qu'une traduction du paramètre nombre de non-inversions sur les tableaux 0-1 faibles, via une bijection qui sera donnée plus loin.

Par exemple, pour  $(E; \pi) = (\{5, 9\}; \{1, 3, 7\}, \{2, 6, 10\}, \{4, 8\})$ , on calcule  $\text{inv}(E; \pi) = 5$  et  $\text{nin}(E; \pi) = 4 + 6 = 10$ .

**PROPOSITION 2.3.5:** (*modèle combinatoire alternatif*)

*Avec les notations et les définitions précédentes,*

$$P_{C_{p,q}}[n, m, k] = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(n, n-m, n-m+k)} p^{\text{nin}(\sigma)} q^{\text{inv}(\sigma)}, \quad (2.3.10)$$

$$PS_{p,q}[n, m, k] = \sum_{(E;\pi) \in \mathcal{PP}(n, n-m, k)} p^{\text{nin}(E;\pi)} q^{\text{inv}(E;\pi)}. \quad (2.3.11)$$

### DÉMONSTRATION:

Pour l'égalité (2.3.10), il suffit de construire une bijection  $\Phi$  entre les tableaux 0-1 faibles  $\psi \in Td_f(n-1, n-k, n-m)$  et les permutations à cycles marqués  $\sigma \in \mathfrak{S}(n, n-m, n-m+k)$ , préservant le nombre d'inversions et de non-inversions. Cette bijection nous est inspirée par la formule de récurrence (2.3.15) ou encore (2.3.21). Soit donc  $\psi \in Td_f(n-1, n-k, n-m)$ . On construit par induction une suite de permutations à cycles marqués  $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n$  telle que  $\sigma_i$  a pour support l'ensemble  $\llbracket i \rrbracket$ . L'image de  $\psi$  par  $\Phi$  sera égale à  $\Phi(\psi) = \sigma_n$ . Nous débutons donc avec  $\sigma_0$  égale à la permutation vide. Supposons qu'on ait calculé  $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Alors  $\sigma_i$  est obtenue à partir de  $\sigma_{i-1}$  de la manière suivante:

- i) si  $\psi$  ne contient pas de colonne de longueur  $i-1$ ,  $\sigma_i$  coïncide avec  $\sigma_{i-1}$  sur l'ensemble  $\llbracket i-1 \rrbracket$ , et l'entier  $i$  forme un nouveau cycle non marqué, de longueur 1, dans  $\sigma_i$ ;
- ii) si  $\psi$  contient une colonne de longueur  $i-1$  remplie de "0",  $\sigma_i$  coïncide avec  $\sigma_{i-1}$  sur  $\llbracket i-1 \rrbracket$ , et l'entier  $i$  forme un nouveau cycle marqué, de longueur 1, dans  $\sigma_i$ ;
- iii) si  $\psi$  contient une colonne de longueur  $i-1$  avec un "1" dans la  $j$ -ième cellule (lue de haut en bas),  $1 \leq j \leq i-1$ , alors  $\sigma_i$  est obtenue de  $\sigma_{i-1}$  en insérant l'entier  $i$  comme image de la  $j$ -ième lettre de  $w(\sigma_{i-1})$ . On prend alors comme image de  $i$  l'image qu'avait cette lettre dans  $\sigma_{i-1}$ , et le reste de  $\sigma_i$  est identique à  $\sigma_{i-1}$ .

0	0	0	1	
0	0	0		
0	1			
1	0			
0				

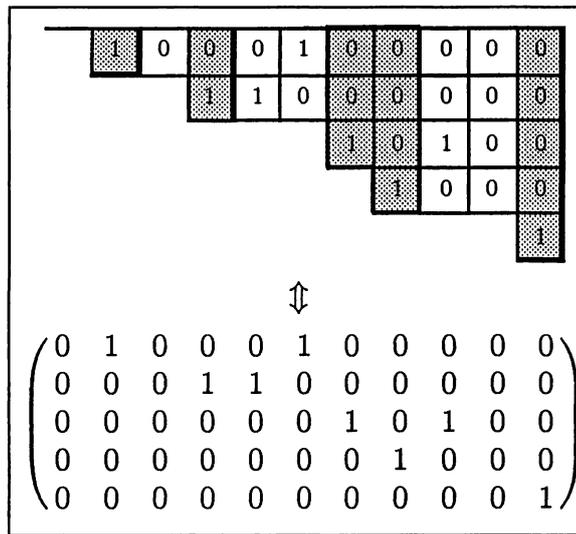
FIGURE 2.2: tableau 0-1 faible  
 $\psi \in Td_f(5, 5, 2)$

Par exemple, pour  $\psi \in Td_f(5, 5, 2)$  donnée par la figure 2.2,  $\sigma_0 = \emptyset$ ,  $\sigma_1 = (\underline{1})$ ,  $\sigma_2 = (\underline{1}, 2)$ ,  $\sigma_3 = (\underline{1}, 2)(\underline{3})$ ,  $\sigma_4 = (\underline{1}, 2)(\underline{3})(4)$ ,  $\sigma_5 = (\underline{1}, 2)(\underline{3}, 5)(4)$ , et  $\Phi(\psi) = \sigma_6 = (\underline{1}, 2)(\underline{3}, 5, 6)(4)$ .

Nous laissons le soin au lecteur de montrer que  $\Phi$  est une bijection entre les ensembles  $Td_f(n-1, n-k, n-m)$  et  $\mathfrak{S}(n, n-m, n-m+k)$ , telle que  $\text{inv}(\psi) = \text{inv}(\Phi(\psi))$  et  $\text{nin}(\psi) = \text{nin}(\Phi(\psi))$ .

Pour (2.3.11), nous devons construire une bijection  $\Omega$  entre les ensembles  $T_f(k, n-k, n-m)$  et  $\mathcal{PP}(n, n-m, k)$ . Cette bijection nous est indiquée par la formule de récurrence (2.3.16) ou encore (2.3.22). Soit donc  $\psi \in T_f(k, n-k, n-m)$ . Transposons  $\psi$  dans le troisième quadrant (les colonnes apparaissent par ordre croissant plutôt que par ordre décroissant de longueur). Pour  $1 \leq i \leq k$ , ajoutons une colonne de longueur  $i$ , contenant un “1” en dernière position, à gauche de toutes les colonnes (dans  $\psi$  transposée) qui sont de longueurs supérieures ou égales à  $i$ . Complétons ensuite chaque colonne par des cellules contenant des “0”, de sorte qu’elles atteignent la longueur  $k$ . Nous obtenons ainsi une matrice  $k \times n$  avec au plus un “1” par colonne (ces manipulations sont illustrées dans la figure 2.3 à partir du tableau 0-1 faible de la figure 2.1). C’est la représentation ligne à colonne de la fonction à croissance restreinte associée

à la partitions partielle  $\Omega(\psi) = (E; \pi)$  (cf Milne [Mil]). Plus exactement, si la  $i$ -ième colonne de la matrice obtenue ne contient que des "0",  $i \in E$ , et si la  $i$ -ième colonne contient un "1" dans la  $j$ -ième ligne, alors  $i$  se trouve dans le  $j$ -ième bloc de la partition  $\pi$  écrite sous forme standard. Par exemple, pour le tableau 0-1 faible  $\psi \in T_f(5, 6, 3)$  de la figure 2.1, on obtient la matrice de la figure 2.3, et  $\Omega(\psi) = (E; \pi) = (\{1, 3, 10\}; \{2, 6\}, \{4, 5\}, \{7, 9\}, \{8\}, \{11\}) \in \mathcal{PP}(11, 3, 5)$ .



**FIGURE 2.3:** construction d'une matrice à partir d'un tableau 0-1 faible

Nous laissons cette fois encore le soin au lecteur de démontrer que  $\Omega$  est une bijection entre les ensembles  $T_f(k, n - k, n - m)$  et  $\mathcal{PP}(n, n - m, k)$ , telle que  $\text{inv}(\psi) = \text{inv}(\Omega(\psi))$  et  $\text{nin}(\psi) = \text{nin}(\Omega(\psi))$ .  $\square$

Nous présentons maintenant des identités sur les  $p, q$ -nombres de Stirling partiels.

**PROPOSITION 2.3.6:** *On a:*

a) *liens et cas particuliers.*

$$\mathcal{P}c_{p,q}[n, k] = \sum_{m=k}^n \mathcal{P}c_{p,q}[n, m, k], \quad (2.3.12)$$

$$\mathcal{P}S_{p,q}[n, k] = \sum_{m=k}^n \mathcal{P}S_{p,q}[n, m, k], \quad (2.3.13)$$

$$\mathcal{P}c_{p,q}[n, k] = c^{(\mathcal{A}, w)}(n, k) \text{ et } \mathcal{P}S_{p,q}[n, k] = S^{(\mathcal{A}, w)}(n, k) \quad (2.3.14)$$

$$\text{où } \mathcal{A} = (i)_{i \geq 0} \text{ et } w(i) = p^i + [i]_{p,q};$$

b) *réurrences.*

$$\mathcal{P}c_{p,q}[n+1, k] = \mathcal{P}c_{p,q}[n, k-1] + (p^n + [n]_{p,q})\mathcal{P}c_{p,q}[n, k], \quad (2.3.15)$$

$$\mathcal{P}S_{p,q}[n+1, k] = \mathcal{P}S_{p,q}[n, k-1] + (p^k + [k]_{p,q})\mathcal{P}S_{p,q}[n, k], \quad (2.3.16)$$

avec conditions initiales  $\mathcal{P}c_{p,q}[n, k] = 0 = \mathcal{P}S_{p,q}[n, k]$  si  $k > n$ ,  $\mathcal{P}c_{p,q}[n, 0] = (p + [1]_{p,q})(p^2 + [2]_{p,q}) \dots (p^{n-1} + [n-1]_{p,q})$ ,  $\mathcal{P}S_{p,q}[n, 0] = 1$  et  $\mathcal{P}c_{p,q}[0, k] = \delta_{0,k} = \mathcal{P}S_{p,q}[0, k]$ .

**DÉMONSTRATION:**

a) (2.3.12) et (2.3.13) découlent de la définition de  $\mathcal{P}c_{p,q}[n, k]$  et  $\mathcal{P}S_{p,q}[n, k]$  par rapport à celle de  $\mathcal{P}c_{p,q}[n, m, k]$  et de  $\mathcal{P}S_{p,q}[n, m, k]$ .

Pour (2.3.14), comparer par exemple les récurrences (2.3.15) et (2.3.16) données en (b) avec les formules (2.1.4) et (2.1.5).

b) Pour démontrer ces récurrences, il suffit de considérer la longueur maximum possible des colonnes des tableaux 0-1 faibles dans les ensembles

$Td_f(n, n - k + 1)$  et  $T_f(k, n - k + 1)$  respectivement (i.e. si  $\psi \in T_f(k, n - k + 1)$  par exemple, soit sa colonne de longueur maximum est de longueur  $k$ , soit elle est de longueur strictement plus petite).  $\square$

Les suites  $(\mathcal{P}c_{p,q}[n, k])$  et  $(\mathcal{P}S_{p,q}[n, k])$  étant des cas particuliers des suites  $(c^{\mathcal{A}}(n, k))$  et  $(S^{\mathcal{A}}(n, k))$ , toutes les identités de la section précédente s'y appliquent. Ce n'est en revanche pas le cas des suites  $(\mathcal{P}c_{p,q}[n, m, k])$  et  $(\mathcal{P}S_{p,q}[n, m, k])$ , pour lesquelles une analyse plus détaillée est nécessaire.

**PROPOSITION 2.3.7:** *On a:*

a) *liens et cas particuliers.*

$$\mathcal{P}c_{p,q}[n, n, k] = c_{p,q}[n, k] \text{ et } \mathcal{P}c_{p,q}[n, k, k] = p^{\binom{n-k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_p, \quad (2.3.17)$$

$$\mathcal{P}S_{p,q}[n, n, k] = S_{p,q}[n, k] \text{ et } \mathcal{P}S_{p,q}[n, k, k] = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_p, \quad (2.3.18)$$

$$\mathcal{P}c_{1,q}[n, m, k] = \binom{n-m+k}{k} c_q[n, n-m+k], \quad (2.3.19)$$

$$\mathcal{P}S_{1,q}[n, m, k] = \binom{n}{m} S_q[m, k]; \quad (2.3.20)$$

b) *réurrences.*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}c_{p,q}[n+1, m+1, k] = & \mathcal{P}c_{p,q}[n, m, k-1] + p^n \mathcal{P}c_{p,q}[n, m+1, k] + \\ & [n]_{p,q} \mathcal{P}c_{p,q}[n, m, k], \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}S_{p,q}[n+1, m+1, k] = & \mathcal{P}S_{p,q}[n, m, k-1] + p^k \mathcal{P}S_{p,q}[n, m+1, k] \\ & + [k]_{p,q} \mathcal{P}S_{p,q}[n, m, k], \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

*avec conditions initiales*

$$\mathcal{P}c_{p,q}[n, m, k] = 0 = \mathcal{P}S_{p,q}[n, m, k] \text{ si } m > n \text{ ou si } k > m,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}c_{p,q}[0, m, k] &= \delta_{0,k} \delta_{0,m}, \quad \mathcal{P}S_{p,q}[0, m, k] = \delta_{0,k} \delta_{0,m}, \\ \mathcal{P}c_{p,q}[n, 0, k] &= p^{\binom{n}{2}} \delta_{k,0}, \quad \mathcal{P}S_{p,q}[n, 0, k] = \delta_{0,k}, \\ \text{et } \mathcal{P}c_{p,q}[n, m, 0] &= p^{\binom{n}{2}-m} c_{1,q/p}[n, n-m], \quad \mathcal{P}S_{p,q}[n, m, 0] = \delta_{m,0}; \end{aligned}$$

c) séries génératrices. Pour  $n > 0$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{r \geq 0} \sum_{m \geq 0} \mathcal{P}c_{p,q}[n, m, r] x^r y^{m-r} z^{n-m} & \quad (2.3.23) \\ &= (x+z)(x+pz + [1]_{p,q}y) \dots (x+p^{n-1}z + [n-1]_{p,q}y), \end{aligned}$$

pour  $k \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{r \geq 0} \sum_{l \geq 0} \mathcal{P}S_{p,q}[k+r, k+l, k] x^l y^{r-l} & \quad (2.3.24) \\ &= \frac{1}{(1-y)} \frac{1}{(1-py - [1]_{p,q}x)} \frac{1}{(1-p^2y - [2]_{p,q}x)} \dots \frac{1}{(1-p^k y - [k]_{p,q}x)}. \end{aligned}$$

### DÉMONSTRATION:

a) Lorsque  $n = m$ , toutes les colonnes contiennent un "1" et les polynômes  $\mathcal{P}c_{p,q}[n, n, k]$  et  $\mathcal{P}S_{p,q}[n, n, k]$  comptent des tableaux 0-1 normaux.

Lorsque  $m = k$ , les tableaux 0-1 faibles considérés ne contiennent que des cases remplies avec des "0" et comptant chacune pour  $p$ , qui correspondent à l'interprétation combinatoire des coefficients  $q$ -binomiaux en terme de partages d'entiers.

Les identité (2.3.19) et (2.3.20) deviennent triviales avec les modèles combinatoires alternatifs de la proposition 2.3.5. En effet,  $\mathcal{P}c_{1,q}[n, m, k]$  compte (selon le nombre d'inversions) les permutations de  $[[n]]$  avec  $n - m + k$  cycles (facteur  $c_q[n, n - m + k]$  du membre de droite de (2.3.19)), dont  $n - m$  sont marqués ( on a  $\binom{n-m+k}{n-m}$  façons de les choisir parmi les  $n - m + k$  cycles des

permutations). De même,  $\mathcal{PS}_{1,q}[n, m, k]$  compte (selon le nombre d'inversions), les partitions partielles  $(E; \pi)$  de l'ensemble  $\llbracket n \rrbracket$  telles que  $|E| = n - m$  (il y a  $\binom{n}{m}$  façons de choisir un tel sous-ensemble  $E$ ) et  $\pi$  possède  $k$  blocs (facteur  $S_q[m, k]$  du membre de droite de (2.3.20)).

b) Même raisonnement que (b) de la proposition précédente. Remarquons que  $\mathcal{P}c_{p,q}[n, m, 0]$  compte avec pondération les tableaux 0-1 faibles  $\psi \in Td_f(n-1, n, n-m)$ , donc les "escaliers" allant de la hauteur  $n-1$  à 0, possédant  $m$  colonnes avec des "1". Le nombre d'inversions de tels tableaux est égal au nombre d'inversions du tableau 0-1  $\varphi \in Td(n-1, m)$  obtenu en considérant seulement les colonnes contenant des "1" dans  $\psi$ , tandis que le nombre de non-inversions du tableau  $\psi$  est égal à

$$\begin{aligned} \# \text{ cases dans l'escalier} - \# \text{ de "1" dans le tableau} - \text{inv}(\varphi) \\ = \binom{n}{2} - m - \text{inv}(\varphi). \end{aligned}$$

D'où  $\mathcal{P}c_{p,q}[n, m, 0] = p^{\binom{n}{2}-m} c_{1,q/p}[n, n-m]$ .

c) Découle de la définition combinatoire. □

En plus de (2.3.19) et (2.3.20), les nombres de Stirling partiels possèdent d'autres expressions en termes des  $q$ -nombres de Stirling usuels lorsque  $p = 1$ .

**PROPOSITION 2.3.8:** *On a:*

$$\mathcal{P}c_{1,q}[n+1, k+1] = \sum_{j=k}^n \left[ \binom{j+1}{k+1} + \binom{j}{k} \right] 2^{j-k-1} q^{n-j} c_q[n, j], \quad (2.3.25)$$

$$\mathcal{PS}_{1,q}[n+1, k+1] = \sum_{j=0}^n \left[ \sum_{i=0}^{n-j} \binom{n-i}{j} 2^{n-j-i} \right] q^{j-k} S_q[j, k], \quad (2.3.26)$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}c_{1,q}[n+1, m+1, k+1] & (2.3.27) \\ & = \sum_{j=k}^n \left[ \binom{j}{k} \binom{j-k}{n-m} + \binom{j}{k+1} \binom{j-k-1}{n-m-1} \right] q^{n-j} c_q[n, j], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}S_{1,q}[n+1, m+1, k+1] \\ & = \sum_{j=0}^n \left[ \sum_{i=0}^{n-j} \binom{n-i}{j} \binom{n-j-i}{n-m-i} \right] q^{j-k} S_q[j, k]. \quad (2.3.28) \end{aligned}$$

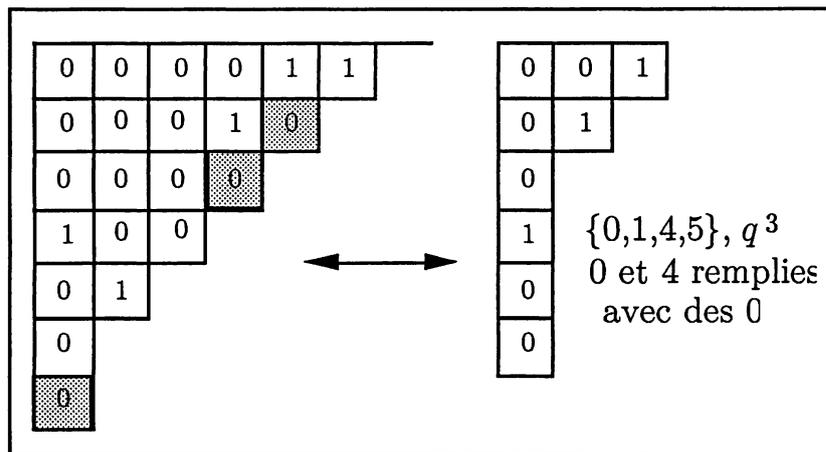
### DÉMONSTRATION:

Le principe de démonstration de ces formules est le même que celui des identités (2.2.15) et (2.2.16). Dans ce qui suit, nous démontrons (2.3.25) transformée à l'aide de l'identité

$$2^{j-k-1} \left[ \binom{j+1}{k+1} + \binom{j}{k} \right] = 2^{j-k-1} \binom{j}{j-k-1} + 2^{j-k} \binom{j}{j-k}.$$

Si  $\psi \in Td_f(n, k)$ , ôtons-lui ses colonnes qui ne causent aucune inversion: il y en a exactement  $j - k$  pour un certain  $j$ ,  $k \leq j \leq n$ . D'un côté, comme on a enlevé en particulier toutes les colonnes remplies de "0", il reste un tableau 0-1 usuel  $\varphi$  dont chaque colonne compte au moins pour une inversion. En lui enlevant une case à l'extrémité inférieure de chaque colonne, on obtient un tableau 0-1 général  $\varphi'$  dans l'ensemble  $Td(n-1, n-j)$ , ce qui explique dans le membre de droite de (2.3.25) le facteur  $q^{n-j} c_q[n, j]$ , rajusté pour tenir compte des inversions perdues. De l'autre côté, les  $j - k$  colonnes extraites de  $\psi$  prenaient des longueurs dans les  $n - (n - j) = j$  éléments de  $\llbracket n \rrbracket$  n'apparaissant pas comme longueurs de colonnes dans  $\varphi$  (puisque les colonnes de  $\psi$  sont de longueurs deux à deux distinctes), plus éventuellement la longueur zéro. De plus, les colonnes qui ne contribuent pas au nombre d'inversions d'un tableau 0-1 faible sont de deux types, soit elles ne contiennent que des "0", soit elles

contiennent un "1" positionné dans la case inférieure de la colonne. Cependant lorsqu'une colonne est de longueur nulle, elle ne peut être que du premier type, ce qui nous donne donc deux sous-cas: si les colonnes extraites de  $\psi$  sont toutes de longueurs non nulles, elles forment un sous-ensemble à  $j - k$  éléments d'un ensemble de  $j$  longueurs possibles, et chacune d'entre elles a le choix de deux configurations, ce qui donne le facteur  $2^{j-k} \binom{j}{j-k}$ . De même, si l'une des colonnes extraites de  $\psi$  est de longueur nulle, les autres forment un sous-ensemble à  $j - k - 1$  éléments des mêmes  $j$  longueurs possibles, avec toujours deux possibilités de configurations, ce qui donne le terme  $2^{j-k-1} \binom{j}{j-k-1}$ .



**FIGURE 2.4:** décomposition des tableaux 0-1 faibles pour l'identité (2.3.25)

Des raisonnements similaires montrent (2.3.26) à (2.3.28). □

Lorsque  $p = q = 1$ , le modèle alternatif en termes de permutations à cycles marqués et partitions partielles des nombres de Stirling partiels, développé dans la proposition 2.3.5, permet de démontrer aisément la proposition suivante.

**PROPOSITION 2.3.9:** (*séries génératrices*)

On a:

$$\sum_{n,m,k \geq 0} P_{c_{1,1}}[n, n-m, k] a^m u^k \frac{x^n}{n!} = (1-x)^{-(a+u)}, \quad (2.3.29)$$

$$\sum_{n,m,k \geq 0} P_{S_{1,1}}[n, n-m, k] a^m u^k \frac{x^n}{n!} = e^{ax} e^{u(e^x-1)}, \quad (2.3.30)$$

$$\sum_{n,k \geq 0} P_{c_{1,1}}[n, k] u^k \frac{x^n}{n!} = (1-x)^{-(1+u)}, \quad (2.3.31)$$

$$\sum_{n,k \geq 0} P_{S_{1,1}}[n, k] u^k \frac{x^n}{n!} = e^x e^{u(e^x-1)}. \quad (2.3.32)$$

**DÉMONSTRATION:**

Il est bien connu que la série génératrice des permutations selon le nombre de cycles (pondérés par  $u$ ) est

$$\sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} c(n, k) u^k \frac{x^n}{n!} = \left( \frac{1}{1-x} \right)^u. \quad (2.3.33)$$

L'identité (2.3.29) est obtenue en constatant qu'une permutation à cycles marqués se décompose naturellement en deux permutations, l'une contenant les cycles marqués (pondérés par  $a$ ), et l'autre les cycles non marqués (pondérés par  $u$ ).

L'identité (2.3.30) exprime le fait qu'une partition partielle  $(E; \pi)$  est constituée d'un ensemble  $E$  (dont les éléments sont pondérés par  $a$ ) et d'une partition  $\pi$ , qui est un ensemble de blocs non vides (avec  $u$  compteur de blocs).

Les identités (2.3.31) et (2.3.32) découlent des formules (2.3.12), (2.3.13), (2.3.29) et (2.3.30). □

**PROPOSITION 2.3.10:** (*formules de convolution*)

On a:

$$c_{p,q}[m+n, k] = \sum_{i+j \geq k} p^{n(i+j-k)} [n]_{p,q}^{m-j} c_{p,q}[n, i] \mathcal{P}c_{q,p}[m, j, k-i], \quad (2.3.34)$$

$$S_{p,q}[m+n, k] = \sum_{i+j \geq k} p^{i(i+j-k)} [i]_{p,q}^{m-j} S_{p,q}[n, i] \mathcal{P}S_{q,p}[m, j, k-i]. \quad (2.3.35)$$

$$c_{p,q}[n+1, m+j+1] = \sum_{k=0}^n \sum_{i=j}^{n-k} p^{(k+1)(i-j)} [k+1]_{p,q}^{n-k-i} c_{p,q}[k, m] \mathcal{P}c_{q,p}[n-k, i, j], \quad (2.3.36)$$

$$S_{p,q}[n+1, m+j+1] = \sum_{k=0}^n \sum_{i=j}^{n-k} p^{(m+1)(i-j)} [m+1]_{p,q}^{n-k-i} S_{p,q}[k, m] \mathcal{P}S_{q,p}[n-k, i, j]. \quad (2.3.37)$$

**DÉMONSTRATION:**

Les identité (2.3.34) à (2.3.37) sont des cas particuliers des identités (2.2.32) à (2.2.35) du théorème 2.2.10 de la section précédente, pour  $\mathcal{A} = (i)_{i \geq 0}$  et  $w(i) = [i]_{p,q}$ . Dans ce cas,  $c^{\mathcal{A}}(n, k) = c_{p,q}[n, k]$ ,  $S^{\mathcal{A}}(n, k) = S_{p,q}[n, k]$ ,

$$c^{\delta^m \mathcal{A}}(n, k) = \sum_{i=k}^n p^{m(i-k)} [m]_{p,q}^{n-i} \mathcal{P}c_{q,p}[n, i, k], \quad (2.3.38)$$

$$S^{\delta^m \mathcal{A}}(n, k) = \sum_{i=k}^n p^{m(i-k)} [m]_{p,q}^{n-i} \mathcal{P}S_{q,p}[n, i, k]. \quad (2.3.39)$$

En effet, les polynômes  $c^{\delta^m \mathcal{A}}(n, k)$  et  $S^{\delta^m \mathcal{A}}(n, k)$  sont des  $p, q$ -comptages des ensembles de tableaux 0-1  $Td^{\geq m}(n-1, n-k)$  et  $T^{\geq m}(k, n-k)$  respectivement (ces notations ont été introduites dans le lemme 1.2.6 du chapitre 1). Ce sont des tableaux 0-1 dont les longueurs des colonnes sont au moins égales à  $m$ . On peut les décomposer en un tableau 0-1 faible rectangulaire  $\psi_1$  (de

format  $m \times (n - k)$ ), surmonté d'un tableau 0-1 faible  $\psi_2 \in Td(n - 1, n - k)$  (ou  $\psi_2 \in T(k, n - k)$  respectivement), tels que les colonnes de  $\psi_1$  contenant un "1" correspondent aux colonnes de  $\psi_2$  n'en contenant pas, et vice-versa. Les formules (2.3.38) et (2.3.39) sont obtenues en les énumérant selon le nombre d'inversions et de non-inversions. Les détails sont laissés au lecteur.  $\square$

Notons que les identités (2.3.34) à (2.3.37) sont des  $p,q$ -analogues des identités (1.2.14) à (1.2.17) du théorème 1.2.5 du chapitre 1.

## 2.4 IDENTITÉS RELATIVES AUX TABLEAUX 0-1 DONT LES LONGUEURS DES COLONNES SONT RESTREINTES À UNE PROGRESSION ARITHMÉTIQUE

Dans cette section, nous nous intéressons aux  $\mathcal{A}$ -tableaux pour lesquels  $w(a_i)$  prend comme valeur  $[a + id]_{p,q}$ ,  $a, d \in \mathbb{N}$ , le  $p, q$ -analogue d'une progression arithmétique. Ce résultat peut être réalisé de deux façons différentes.

La première possibilité,  $\mathcal{A}_{pa} = (a + id)_{i \geq 0}$  et  $w_{pa} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}[p, q]$  telle que  $w_{pa}(k) = [k]_{p,q}$ , correspond combinatoirement au  $p, q$ -comptage de tableaux 0-1 dont les longueurs des colonnes appartiennent à la progression arithmétique  $\{a + id\}_{i \geq 0}$ . Plus exactement, supposons  $a$  et  $d \in \mathbb{N}$  fixés. Notons  $T^{a,d}(h, r)$  (resp.  $Td^{a,d}(h, r)$ ) le sous-ensemble de  $T(a + hd, r)$  (resp.  $Td(a + hd, r)$ ) contenant les tableaux 0-1 dont les longueurs des colonnes font partie de l'ensemble  $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a + hd\}$ . Par convention, si  $a = 0$ , comme un tableau 0-1 ne peut contenir de colonnes de longueur nulle, les longueurs de colonnes permises feront partie de l'ensemble  $\{d, 2d, \dots, hd\}$ . Le cas où  $d = 0$  est un petit peu plus problématique. Dans ce cas, les tableaux 0-1 sont dégénérés et ne possèdent que des colonnes de longueur  $a$ . On doit alors considérer que les longueurs des

colonnes font partie du multi-ensemble  $\{a, a + 1 \cdot 0, a + 2 \cdot 0, \dots, a + h \cdot 0\} = \{a^{(0)}, a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(h)}\}$ , et distinguer les différentes longueurs  $a + i \cdot 0 = a^{(i)}$ . On peut le faire par exemple en attribuant la couleur  $i$  aux colonnes de longueur  $a^{(i)}$ . Évidemment, si une colonne ayant hérité d'une couleur  $i$ , se trouve à gauche d'une colonne de couleur  $j$ , dans le diagramme de Ferrers correspondant au tableau 0-1, alors  $i \geq j$ . De plus, les longueurs  $a^{(i)}$  sont considérées comme distinctes pour les tableaux 0-1 dans les ensembles  $Td^{a,0}(h, r)$ .

On a donc

$$c(\mathcal{A}_{pa, w_{pa}})(n, k) = \sum_{\varphi \in Td^{a,d}(n-1, n-k)} p^{\text{nin}(\varphi)} q^{\text{inv}(\varphi)}, \quad (2.4.1)$$

et

$$S(\mathcal{A}_{pa, w_{pa}})(n, k) = \sum_{\varphi \in T^{a,d}(k, n-k)} p^{\text{nin}(\varphi)} q^{\text{inv}(\varphi)}. \quad (2.4.2)$$

La deuxième possibilité est  $\mathfrak{A}_{fc} = (\mathcal{A}_{fc}, w_{fc})$ , où  $\mathcal{A}_{fc} = (i)_{i \geq 0}$  et

$$w_{fc}(k) = [a + kd]_{p,q} = p^{kd} [a]_{p,q} + q^a [d]_{p,q} [k]_{p^d, q^d}. \quad (2.4.3)$$

En décomposant la pondération de cette façon, nous obtenons un modèle combinatoire en terme de  $p, q$ -comptage de tableaux 0-1 faibles colorés.

**DÉFINITION 2.4.1:** Un *tableau 0-1 faible coloré* consiste en un couple  $(\psi, \gamma)$  où  $\psi = (\lambda, l, f)$  est un tableau 0-1 faible, et  $\gamma : C_\lambda \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, a + d - 1\}$  est un "coloriage" des colonnes  $c$  de  $\psi$  avec des couleurs  $\gamma(c)$ , satisfaisant les conditions suivantes:

- i) si  $c$  est remplie de "0", on a  $0 \leq \gamma(c) \leq a - 1$ , et
- ii) si le remplissage de  $c$  contient un "1", alors  $a \leq \gamma(c) \leq a + d - 1$ .

Par convention, si  $a = 0$  alors le tableau 0-1 faible  $\psi$  ne possède pas de colonnes remplies de “0”, et si  $d = 0$ , il ne contient aucune colonne avec un “1”.

Nous noterons  $T_{fc}(h, r)$  (resp.  $Td_{fc}(h, r)$ ) l'ensemble des tableaux 0-1 faibles colorés  $(\psi, \gamma)$  avec  $\psi \in T_f(h, r)$  (resp.  $\psi \in Td_f(h, r)$ ). Les notations  $T_f(h, r)$  et  $Td_f(h, r)$  ont été introduites au début de la section 2.3.

**DÉFINITION 2.4.2:** Soit  $(\psi, \gamma)$  un tableau 0-1 faible coloré. Le  $p, q$ -poids  $w_{p,q}(\gamma)$  du coloriage  $\gamma$  est donné par l'expression suivante:

$$w_{p,q}(\gamma) = \prod_{c \in C_\lambda} w_p(c)w_q(c), \quad (2.4.4)$$

où  $C_\lambda$  désigne l'ensemble des colonnes (de longueurs possiblement nulles) du tableau 0-1 faible  $\psi = (\lambda, l, f)$ ,

$$w_p(c) = \begin{cases} p^{a-1-\gamma(c)} & \text{si } c \text{ est remplie de "0",} \\ p^{a+d-1-\gamma(c)} & \text{si } c \text{ contient un "1";} \end{cases} \quad (2.4.5)$$

et

$$w_q(c) = q^{\gamma(c)}. \quad (2.4.6)$$

Par exemple, si  $a = 2$ ,  $d = 3$ , et  $\psi$  est le tableau 0-1 faible de la figure 2.1, alors un coloriage possible  $\gamma$  de  $\psi$  serait  $\gamma(c_1) = 0$ ,  $\gamma(c_2) = 4$ ,  $\gamma(c_3) = 4$ ,  $\gamma(c_4) = 2$ ,  $\gamma(c_5) = 1$ , et  $\gamma(c_6) = 1$ , où  $c_1, c_2, \dots, c_6$  désignent les colonnes de  $\psi$  de gauche à droite, et le  $p, q$ -poids de  $\gamma$  est égal à  $w_{p,q}(\psi, \gamma) = p^{1+0+0+2+0+0}q^{0+4+4+2+1+1} = p^3q^{12}$ .

**PROPOSITION 2.4.3:** Avec les notations précédentes,

$$c(\mathcal{A}_{fc, w_{fc}})(n, k) = \sum_{(\psi, \gamma) \in Td_{fc}(n-1, n-k)} p^{d \times \text{nin}(\psi)} q^{d \times \text{inv}(\psi)} w_{p,q}(\gamma), \quad (2.4.7)$$

et

$$S(\mathcal{A}_{f_c, w_{f_c}})(n, k) = \sum_{(\psi, \gamma) \in T_{f_c}(k, n-k)} p^{d \times \text{nin}(\psi)} q^{d \times \text{inv}(\psi)} w_{p,q}(\gamma). \quad (2.4.8)$$

### DÉMONSTRATION:

Il suffit de constater que dans

$$w_{f_c}(k) = [a + kd]_{p,q} = p^{kd} [a]_{p,q} + q^a [d]_{p,q} [k]_{p^d, q^d},$$

les facteurs “ $p^{kd}$ ” et “ $[k]_{p^d, q^d}$ ” correspondent à  $d$  fois le nombre d’inversions et de non-inversions des tableaux 0-1 faibles, et les facteurs “ $[a]_{p,q}$ ” et “ $q^a [d]_{p,q}$ ” au  $p, q$ -poids de la coloration.  $\square$

Il existe une bijection naturelle préservant les  $p, q$ -poids entre les tableaux 0-1 dont les longueurs des colonnes prennent des valeurs dans une progression arithmétique et les tableaux 0-1 faibles colorés. Soit  $(\psi, \gamma) = ((\lambda, l, f), \gamma) \in T_{f_c}(h, r)$  (resp.  $Td_{f_c}(h, r)$ ). On associe à  $(\psi, \gamma)$  un tableau 0-1  $\varphi = (\lambda', f')$  dans l’ensemble  $T^{a,d}(h, r)$  (resp.  $Td^{a,d}(h, r)$ ) de la manière suivante: chaque colonne  $c_j$  de  $\psi$  de longueur  $i$  est remplacée par une colonne de longueur  $a + id$ .

- i) si la colonne initiale était remplie de “0” et colorée de couleur  $\gamma(c_j) = m$ ,  $0 \leq m \leq a - 1$ , on met un “1” dans la ligne  $id + a - m$  (i.e.  $f'_{id+a-m,j} = 1$ ) de la nouvelle colonne, et
- ii) si la colonne initiale avait un “1” en position  $h$ ,  $1 \leq h \leq i$ , et était colorée de couleur  $\gamma(c_j) = m$ ,  $a \leq m \leq a + d - 1$ , on met un “1” dans la ligne  $hd + a - m$  (i.e.  $f'_{hd+a-m,j} = 1$ ).

Par exemple, si  $a = 2$ ,  $d = 3$ ,  $h = 5$ ,  $r = 6$ , la figure 2.5 illustre la correspondance. Remarquons que dans ce cas, on a bien  $w_{p,q}(\gamma)p^{d \times \text{nin}(\psi)}q^{d \times \text{inv}(\psi)} = p^3q^{12}p^{3 \times 8}q^{3 \times 2} = p^{27}q^{18} = p^{\text{nin}(\varphi)}q^{\text{inv}(\varphi)}$ . Les détails sont laissés au lecteur.

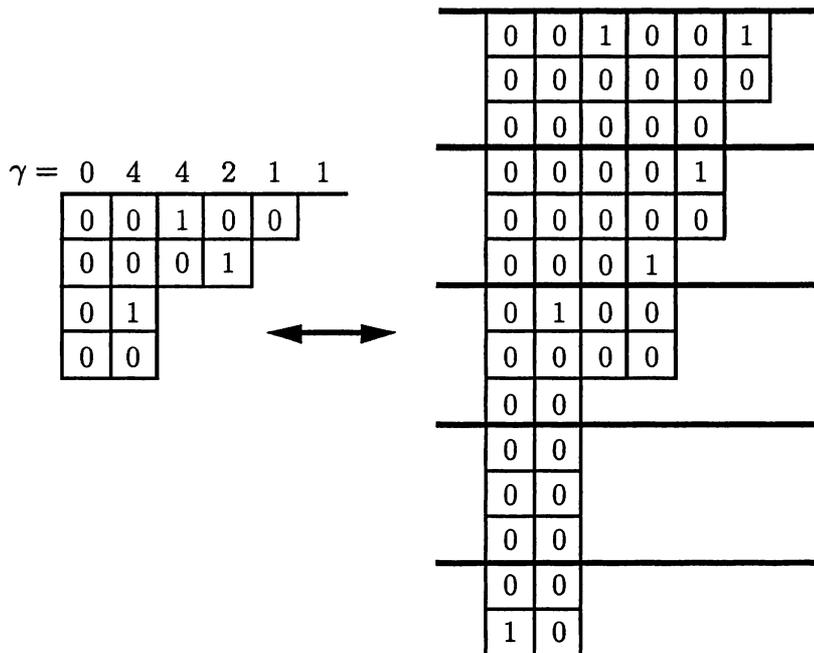


FIGURE 2.5: correspondance entre les ensembles  $T_{fc}(h, r)$  et  $T^{a,d}(h, r)$

Posons

$$\begin{aligned} c_{p,q}^{a,d}[n, k] &= c(\mathcal{A}_{pa, w_{pa}})(n, k) \\ &= c(\mathcal{A}_{fc, w_{fc}})(n, k), \end{aligned} \tag{2.4.9}$$

et

$$\begin{aligned} S_{p,q}^{a,d}[n, k] &= S(\mathcal{A}_{pa, w_{pa}})(n, k) \\ &= S(\mathcal{A}_{fc, w_{fc}})(n, k). \end{aligned} \tag{2.4.10}$$

Nous appellerons ces polynômes les  $p, q$ -nombres de Stirling  $a, d$ -progressifs de première et deuxième espèce. Tout comme les  $p, q$ -nombres de Stirling partiels, en utilisant les bijections introduites dans la démonstration de la proposition 2.3.5, entre tableaux 0-1 faibles et permutations à cycles marqués ou partitions partielles, nous pouvons trouver des modèles combinatoires en termes de ces objets, enrichis d'une certaine coloration, pour les  $p, q$ -nombres de Stirling  $a, d$ -progressifs.

Sans entrer dans les détails techniques, il est intéressant d'étudier l'effet du premier terme  $a$ , et de la différence  $d$ , de la progression arithmétique choisie, sur les modèles combinatoires de ces familles de nombres lorsque  $p = q = 1$ .

D'une part, le paramètre  $d$  attribue des couleurs aux éléments non chefs de cycles des permutations à cycles marqués (pour la famille  $(c_{1,1}^{a,d}[n, k])$ ), et aux éléments des partitions partielles  $(E; \pi)$ , non chefs de blocs mais faisant effectivement partie de la partition  $\pi$  (pour la famille  $(S_{1,1}^{a,d}[n, k])$ ). Forcer  $d$  à être égal à zéro oblige les cycles des permutations à être de longueur un, et force les blocs des partitions partielles à être des singletons.

D'autre part, le passage du cas  $a = 0$  au cas  $a = 1$  correspond, pour les nombres de Stirling  $a, d$ -progressifs de première espèce, à la possibilité de marquer des cycles, tandis que pour les nombres de Stirling  $a, d$ -progressifs de deuxième espèce, cela correspond au passage du modèle des partitions usuelles au modèle des partitions partielles. Lorsque  $a$  prend une valeur strictement supérieure à un, on attribue de plus des couleurs  $i$ ,  $0 \leq i \leq a - 1$ , aux cycles marqués et de même pour les éléments de  $E$ , le sous-ensemble de  $[n]$  contenant les éléments ne faisant pas partie de la partition  $\pi$ .

À la lumière de ces remarques, l'exemple de B. Voigt [Vo] du tableau I, affirmant que les sous-treillis booléens  $P(k)$  du treillis  $P(n)$  des sous-ensembles d'un ensemble à  $n$  éléments ordonnés par inclusion, sont dénombrés par  $S_{1,1}^{2,1}[n, k]$ , devient tout-à-fait clair. En effet, pour obtenir un sous-treillis booléen  $P(k)$  de  $P(n)$ , il suffit de déterminer les  $k$  atomes du sous-treillis: leur intersection commune ainsi que toutes leurs unions possibles constituent le sous-treillis total. Le choix des  $k$  atomes peut s'effectuer comme suit: commencer par prendre les atomes comme étant égaux respectivement aux  $k$  blocs d'une partition partielle  $(E; \pi)$  de l'ensemble à  $n$  éléments. Ensuite, les éléments de  $E$  (qui ne font pas partie de la partition) ont deux choix possibles: soit ils appartiennent à tous les atomes, soit ils n'appartiennent à aucun atome.

Dans ce qui suit, nous présentons des identités sur les familles  $c_{p,q}^{a,d}[n, k]$  et  $S_{p,q}^{a,d}[n, k]$ . Selon le contexte, nous utiliserons l'une ou l'autre des interprétations combinatoires (tableaux 0-1 avec restrictions sur les longueurs des colonnes ou tableaux 0-1 faibles colorés) pour démontrer les identités.

#### PROPOSITION 2.4.4:

a) *cas particuliers*

$$c_{p,q}^{0,d}[n, k] = [d]_{p,q}^{n-k} c_{p^d, q^d}[n, k], \quad (2.4.11)$$

$$S_{p,q}^{0,d}[n, k] = [d]_{p,q}^{n-k} S_{p^d, q^d}[n, k]. \quad (2.4.12)$$

$$\text{En particulier, } c_{p,q}^{0,1}[n, k] = c_{p,q}[n, k] \text{ et } S_{p,q}^{0,1}[n, k] = S_{p,q}[n, k]. \quad (2.4.13)$$

$$c_{p,q}^{a,0}[n, k] = [a]_{p,q}^{n-k} \binom{n}{k}, \quad (2.4.14)$$

$$S_{p,q}^{a,0}[n, k] = [a]_{p,q}^{n-k} \binom{n}{k}. \quad (2.4.15)$$

$$\text{En particulier, } c_{p,q}^{1,0}[n, k] = \binom{n}{k} = S_{p,q}^{1,0}[n, k]. \quad (2.4.16)$$

$$c_{p,q}^{1,1} = \sum_{m=k}^n q^{m-k} \mathcal{P}_{c_{p,q}}[n, m, k], \quad (2.4.17)$$

$$S_{p,q}^{1,1} = \sum_{m=k}^n q^{m-k} \mathcal{P}_{S_{p,q}}[n, m, k]. \quad (2.4.18)$$

b) *q-analogues de formules de Voigt [Vo]*

$$c_{1,q}^{a,d}[n, j] = \sum_{k=j}^n \binom{k}{j} [a]_q^{k-j} q^{a(n-k)} c_{1,q}^{0,d}[n, k], \quad (2.4.19)$$

$$S_{1,q}^{a,d}[n, j] = \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n}{k} [a]_q^k q^{a(n-k-j)} S_{1,q}^{0,d}[n-k, j]. \quad (2.4.20)$$

c) *liens avec les q-nombres de Stirling*

$$c_{1,q}^{a,d}[n, j] = \sum_{k=j}^n \binom{k}{j} [a]_q^{k-j} (q^a [d]_q)^{n-k} c_{q^a}[n, k], \quad (2.4.21)$$

$$\text{et } S_{1,q}^{a,d}[n, j] = \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n}{k} [a]_q^k (q^a [d]_q)^{n-k-j} S_{q^a}[n-k, j]. \quad (2.4.22)$$

### DÉMONSTRATION:

a) Pour les valeurs  $a = 0$  et  $d = 1$ , quel que soit le modèle combinatoire choisi, il se réduit au  $p, q$ -comptage usuel des tableaux 0-1 dans l'ensemble  $Td(n-1, n-k)$  pour  $c_{p,q}^{0,1}[n, k]$  et dans l'ensemble  $T(k, n-k)$  pour  $S_{p,q}^{0,1}[n, k]$ , selon le nombre d'inversions et de non-inversions.

Les formules (2.4.11) à (2.4.16) se démontrent simplement à l'aide des deux modèles combinatoires; nous choisirons celui en terme de tableaux 0-1 faibles colorés.

Le choix  $a = 0$  supprime tous les tableaux 0-1 faibles contenant des colonnes remplies de “0” (puisqu’il n’y a aucune “couleur” pour les colorer). Il reste donc des tableaux 0-1 dont chaque colonne a une couleur entre 0 et  $d - 1$ . Pour un tableau 0-1  $\varphi$  fixé, le  $p, q$ -poids de toutes les colorations possibles est  $[d]_{p,q}^{nc(\varphi)}$  où  $nc(\varphi)$  désigne le nombre de colonnes de  $\varphi$ . Finalement, puisque chaque inversion et non-inversion compte  $d$  fois, on obtient (2.4.11) et (2.4.12).

Le choix  $d = 0$  supprime tous les tableaux 0-1 faibles contenant des colonnes avec un “1”. Si l’on considère les colonnes des tableaux 0-1 faibles  $\psi = (\lambda, l, f)$  qui forment les parts du partage conjugué  $\lambda'$  de  $\lambda$ , il reste donc des partages en  $n - k$  parts distinctes de longueurs inférieures ou égales à  $n - 1$  pour  $c_{p,q}^{a,0}[n, k]$  (resp. en  $n - k$  parts de longueurs inférieures ou égales à  $k$  pour  $S_{p,q}^{a,0}[n, k]$ ), dont chacune possède une couleur entre 0 et  $a - 1$ . Pour un tel partage  $\lambda'$  fixé, le  $p, q$ -poids de toutes les colorations possibles est  $[a]_{p,q}^{n-k}$ . Puisqu’il y a  $\binom{n}{k}$  tels partages, on obtient (2.4.14) et (2.4.15).

Avec le choix  $a = 1$  et  $d = 1$ , chaque colonne n’a qu’une seule coloration permise, soit 0 si elle est remplie de “0”, ou 1 si elle contient un “1”. Si  $(\psi, \gamma)$  désigne un tableau 0-1 faible coloré dans un tel cas, on trouve aisément  $w_{p,q}(\gamma) = q^j$ , où  $j$  désigne le nombre de colonnes de  $\psi$  contenant un “1”. Finalement, puisque les  $p, q$ -nombres de Stirling partiels  $\mathcal{P}c_{p,q}[n, m, k]$  et  $\mathcal{P}S_{p,q}[n, m, k]$  comptent des tableaux 0-1 faibles possédant  $n - k$  colonnes dont exactement  $n - m$  sont remplies de “0”, selon le nombre d’inversions et de non-inversions, on obtient les identités (2.4.17) et (2.4.18).

b) Il s’agit d’isoler la contribution du paramètre  $a$  dans  $c_{1,q}^{a,d}[n, j]$  et  $S_{1,q}^{a,d}[n, j]$ . Dans le modèle en terme de tableaux 0-1 faibles colorés, cela signifie séparer les colonnes remplies de “0” du reste du tableau, tout en se rappelant leurs

longueurs et leurs positions (même démarche que pour (2.2.13) et (2.2.14) ou (2.3.18) à (2.3.21) par exemple). On isole ensuite le  $q$ -poids dû à leur coloration (facteur “[ $a$ ] $_q$ ” pour chaque colonne remplie de “0”) ainsi que la contribution “[ $q^a$ ” pour le  $q$ -poids de la coloration de chacune des colonnes contenant un “1”.

c) (2.4.21) découle de (2.4.19) et (2.4.11) et (2.4.22) découle de (2.4.20) et (2.4.12).  $\square$

**REMARQUE 2.4.5:** Les nombres de Stirling  $a, d$ -progressifs étant des cas particuliers des  $\mathfrak{A}$ -nombres de Stirling, un certain nombre de résultats de la section 2.2 s’y appliquent. Notons en particulier les formules de convolution suivantes, corollaire du théorème 2.2.10:

$$c_{p,q}^{a,d}[m+j, n] = \sum_{k=0}^n c_{p,q}^{a,d}[m, k] c_{p,q}^{a+md, d}[j, n-k], \quad (2.4.23)$$

$$S_{p,q}^{a,d}[m+j, n] = \sum_{k=0}^n S_{p,q}^{a,d}[m, k] S_{p,q}^{a+kd, d}[j, n-k], \quad ((6.24) \text{ de [VS]})$$

$$(2.4.24)$$

$$c_{p,q}^{a,d}[n+1, m+j+1] = \sum_{k=0}^n c_{p,q}^{a,d}[k, m] c_{p,q}^{a+(k+1)d, d}[n-k, j], \quad (2.4.25)$$

$$S_{p,q}^{a,d}[n+1, m+j+1] = \sum_{k=0}^n S_{p,q}^{a,d}[k, m] S_{p,q}^{a+(m+1)d, d}[n-k, j]. \quad ((6.25) \text{ de [VS]})$$

$$(2.4.26)$$

**PROPOSITION 2.4.6:** (*analogue de la proposition 2.2.5*)

$$c_{q,1}^{a,d}[n+1, k+1] = \sum_{i=0}^1 [a]_{q,1}^i \sum_{j=k}^{n-i} \binom{j+i}{j-k} [d]_{q,1}^{j-k} q^{d(n-i-j)} c_{q,1}^{a,d}[n, j+i], \quad (2.4.27)$$

$$S_{q,1}^{a,d}[n+1, k+1] = \sum_{i=0}^{n-k} [a]_{q,1}^i \sum_{m=k}^{n-i} \binom{n-i}{m} [d]_{q,1}^{n-m-i} q^{d(m-k)} S_{q,1}^{a,d}[m, k]. \quad (2.4.28)$$

**DÉMONSTRATION:**

Même principe de démonstration que la proposition 2.2.5. Avec le modèle des tableaux 0-1 dont les longueurs des colonnes font partie de la progression arithmétique  $\{a + id\}_{i \geq 0}$ , on enlève les colonnes de longueur  $a$  et les colonnes de longueur  $a + jd$ ,  $j \geq 1$  dont le "1" se trouve dans les  $d$  premières lignes. Les détails sont laissés au lecteur.  $\square$

**PROPOSITION 2.4.7:** *(Séries génératrices)*

a) *(J.B. Remmel et M. Wachs [ReWa])*

$$\sum_{n,k \geq 0} c_{1,1}^{a,d}[n,k] u^k \frac{x^n}{n!} = (1 - dx)^{-\frac{(a+u)}{d}}, \quad (2.4.29)$$

$$\sum_{n,k \geq 0} S_{1,1}^{a,d}[n,k] u^k \frac{x^n}{n!} = e^{ax} e^{u \left( \frac{e^{dx} - 1}{d} \right)}. \quad (2.4.30)$$

b) *(généralisation du cas  $a = 0$ ,  $d = 1$  calculé par I. Gessel [Ge1])*

$$\sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} c_{1,q}^{a,d}[n,k] u^k \frac{x^n}{[n]_{q^d}!} = \frac{(q^a [d]_q x; q^d)_\infty}{((q^a [d]_q + (1 - q^d)([a]_q + u)) x; q^d)_\infty}, \quad (2.4.31)$$

$$\text{où } (p; q)_\infty = \prod_{i=0}^{\infty} (1 - pq^i).$$

**DÉMONSTRATION:**

a) Ces séries génératrices deviennent triviales avec les modèles combinatoires de permutations colorées à cycles marqués et de partitions partielles colorées. Remarquons que lorsque  $p = q = 1$ , on peut même considérer  $a$  et  $d$  comme des paramètres plutôt que des couleurs. Les détails sont laissés au lecteur.

b) La formule (2.4.31) est obtenue par manipulations algébriques de  $q$ -séries.

Soit

$$F(u, t) = \sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} c_{1,q}^{a,d}[n, k] u^k \frac{t^n}{(q^d; q^d)_n}, \quad (2.4.32)$$

où  $(a; q)_n = (1 - a)(1 - aq) \dots (1 - aq^{n-1})$ . D'un côté,

$$G(u, t) = \sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} c_{1,q}^{a,d}[n, k] u^k \frac{t^{n-1}}{(q^d; q^d)_{n-1}} \quad (2.4.33)$$

$$= \frac{1}{t} (F(u, t) - F(u, q^d t)). \quad (2.4.34)$$

Et de l'autre côté, en remplaçant  $c_{1,q}^{a,d}[n, k]$  dans (2.4.33) par le membre de droite de la récurrence de base

$$c_{1,q}^{a,d}[n, k] = c_{1,q}^{a,d}[n-1, k-1] + [a + (n-1)d]_{1,q} c_{1,q}^{a,d}[n-1, k],$$

nous obtenons

$$G(u, t) = [a]_q F(u, t) + q^a \frac{[d]_q}{(1 - q^d)} (F(u, t) - F(u, q^d t)) + u F(u, t). \quad (2.4.35)$$

En utilisant (2.4.34) et (2.4.35), nous trouvons l'équation fonctionnelle

$$F(u, t) = \frac{\left(1 - \frac{q^d [d]_q t}{(1 - q^d)}\right)}{\left(1 - [a]_q t - \frac{q^a [d]_q t}{(1 - q^d)} - ut\right)} F(u, q^d t). \quad (2.4.36)$$

Et finalement, en itérant puis en remplaçant  $t$  par  $(1 - q^d)x$ , on trouve la série génératrice (2.4.31).  $\square$

**REMARQUE 2.4.8:** On pourrait se demander s'il existe des identités faisant intervenir en même temps deux familles différentes de nombres de Stirling  $a, d$ -progressifs, i.e. deux familles provenant de progressions arithmétiques

différentes  $\{a_0 + id_0\}_{i \geq 0}$  et  $\{a_1 + id_1\}_{i \geq 0}$ . Les seuls résultats positifs que nous avons trouvés dans ce sens sont des cas particuliers du théorème 2.2.6 de la section 2.2, donnant des formules reliant des nombres de Stirling  $a, d$ -progressifs ayant même somme  $d_0 = d_1$ , avec  $p = q = 1$ , ainsi que les formules de convolution (2.4.23) à (2.4.26).

## 2.5 CONCAVITÉ LOGARITHMIQUE ET PROBLÈMES OUVERTS

Soient  $f(p, q)$  et  $g(p, q) \in \mathbb{N}[p, q]$  des polynômes en  $p$  et  $q$ . Définissons la relation d'ordre  $\leq_{p,q}$  par:

$$f(p, q) \leq_{p,q} g(p, q) \iff g(p, q) - f(p, q) \in \mathbb{N}[p, q].$$

**DÉFINITION 2.5.1:** Une suite  $(a_k(p, q))_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}[p, q]$  est dite  $p, q$ -log concave (resp. *fortement*  $p, q$ -log concave) si et seulement si

$$a_{k-1}(p, q)a_{k+1}(p, q) \leq_{p,q} a_k^2(p, q) \quad \forall k \geq 1. \quad (2.5.1)$$

$$(\text{resp. } a_{k-1}(p, q)a_{l+1}(p, q) \leq_{p,q} a_k(p, q)a_l(p, q) \quad \forall l \geq k \geq 1.) \quad (2.5.2)$$

Plusieurs mathématiciens se sont intéressés récemment aux propriétés d'unimodalité et de ( $q$ - et  $p, q$ -)concavité logarithmique des coefficients binomiaux et des nombres de Stirling ainsi que de leurs  $q$  et  $p, q$ -analogues (voir Brenti [Br], Butler [But1, But2], de Médicis [dM], Habsieger [Hab], Leroux [Le3], O'Hara [OH], Sagan [Sa1, Sa2, Sa3], Stanley [Sta3], Zeilberger [Ze], etc.). Ces propriétés sont souvent faciles à constater mais difficiles à démontrer.

Dans cette section, nous donnons des résultats de  $p, q$ -concavité logarithmique pour les suites de polynômes que nous avons introduites dans les sections précédentes de ce chapitre, c'est-à-dire les  $\mathfrak{A}$ -nombres de Stirling, les  $p, q$ -nombres de Stirling partiels et les  $p, q$ -nombres de Stirling  $a, d$ -progressifs.

Tout d'abord, comme nous l'avons déjà fait remarquer, les  $\mathfrak{A}$ -nombres de Stirling sont aussi généraux que les fonctions symétriques élémentaires et homogènes. Ils satisfont donc les mêmes propriétés de  $p, q$ -concavité logarithmique que ces fonctions, à savoir:

**THÉORÈME 2.5.2:** *Soit  $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, w)$  où  $\mathcal{A} = (a_i)_{i \geq 0} \subseteq \mathbb{N}$  et  $w : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}[p, q]$ ,  $\mathbb{N}[p, q]$  désignant l'ensemble des polynômes en  $p$  et  $q$  à coefficients dans  $\mathbb{N}$ , alors*

a) *les suites  $(c^{\mathfrak{A}}(n, k))_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(S^{\mathfrak{A}}(n, k))_{n \in \mathbb{N}}$  sont fortement  $p, q$ -log concaves;*

b) *si de plus, la suite  $(w_i)_{i \geq 0}$  où  $w_i = w(a_i)$  est fortement  $p, q$ -log concave, alors les suites  $(c^{\mathfrak{A}}(n, n - k))_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(S^{\mathfrak{A}}(n, n - k))_{n \in \mathbb{N}}$  sont fortement  $p, q$ -log concaves;*

c) *si la suite  $(w_i)_{i \geq 1}$  est définie par*

$$w_n = bq^{n-1} + c[n-1]_{p,q} \quad \forall n \geq 1, \quad (2.5.3)$$

*pour  $b, c \in \mathbb{N}[p, q]$  tels que  $c \geq_{p,q} b$ , ou  $c = 0$  et  $b$  est arbitraire, alors la suite  $(S^{\mathfrak{A}}(n, k))_{k \in \mathbb{N}}$  est fortement  $p, q$ -log concave;*

d) *si pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , il existe  $g_i \in \mathbb{N}[p, q]$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $w_{n+i} \leq_{p,q} g_i w_n$ , alors pour  $n \geq m \geq 0$  et  $k \in \mathbb{N}$ , on a*

$$c^{\mathfrak{A}}(m-1, k)c^{\mathfrak{A}}(n+1, k) \leq_{p,q} g_{n-m+1}c^{\mathfrak{A}}(m, k)c^{\mathfrak{A}}(n, k). \quad (2.5.4)$$

**DÉMONSTRATION:**

Voir par exemple Sagan [Sa1, Sa2] et Stanley [Sta3], ou le chapitre 5 de de médis [dM] pour (a), (b) et (c), et Habsieger [Hab] pour la partie (d).  $\square$

**COROLLAIRE 2.5.3:**

a) *Les suites de  $p, q$ -nombres de Stirling partiels suivantes sont fortement  $p, q$ -log concaves:  $(\mathcal{P}c_{p,q}[n, k])_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(\mathcal{P}S_{p,q}[n, k])_{n \in \mathbb{N}}$ . La suite  $(\mathcal{P}c_{p,q}[n, k])_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas  $p, q$ -log concave si  $d \neq 0$ . Par contre, si  $n_2 \geq n_1$ ,*

$$\mathcal{P}c_{p,q}[n_1 - 1, k] \mathcal{P}c_{p,q}[n_2 + 1, k] \leq_{p,q} (p + q + 1)^{n_2 - n_1 + 1} \mathcal{P}c_{p,q}[n_1, k] \mathcal{P}c_{p,q}[n_2, k]. \quad (2.5.5)$$

b) *Les suites de  $p, q$ -nombres de Stirling  $a, d$ -progressifs suivantes sont fortement  $p, q$ -log concaves:  $(c_{p,q}^{a,d}[n, k])_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $(S_{p,q}^{a,d}[n, k])_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(c_{p,q}^{a,d}[n, n - k])_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(S_{p,q}^{a,d}[n, n - k])_{n \in \mathbb{N}}$ . La suite  $(c_{p,q}^{a,d}[n, k])_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas  $p, q$ -log concave. Par contre, si  $n_2 \geq n_1$ ,*

$$c_{p,q}^{a,d}[n_1 - 1, k] c_{p,q}^{a,d}[n_2 + 1, k] \leq_{p,q} (p + q)^{d(n_2 - n_1 + 1)} c_{p,q}^{a,d}[n_1, k] c_{p,q}^{a,d}[n_2, k]. \quad (2.5.6)$$

**DÉMONSTRATION:**

Ces propriétés découlent du théorème précédent et des identités (2.3.13), (2.4.9) et (2.4.10), exprimant les  $p, q$ -nombres de Stirling partiels ou  $a, d$ -progressifs comme cas particuliers de  $\mathfrak{A}$ -nombres de Stirling. L'identité

$$\begin{aligned} \mathcal{P}c_{p,q}[3, 2] \mathcal{P}c_{p,q}[3, 2] - \mathcal{P}c_{p,q}[4, 2] \mathcal{P}c_{p,q}[2, 2] &= 3 + 5p + 2q + 3p^2 + pq \\ &\quad - q^2 - p^3 - p^2q - 3pq^2 - q^3 - 2p^4 - 2p^3q - p^2q^2 - p^5, \end{aligned}$$

montre que la suite  $(\mathcal{P}c_{p,q}[n, k])_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas  $p, q$ -log concave. Et finalement, puisque le degré en  $q$  du polynôme  $c_{p,q}^{a,d}[2, 2] c_{p,q}^{a,d}[4, 2]$  est égal à  $(2a + 5d - 2)$ ,

alors que celui du polynôme  $c_{p,q}^{a,d}[3, 2]c_{p,q}^{a,d}[3, 2]$  est égal à  $(2a + 4d - 2)$ , la suite  $(c_{p,q}^{a,d}[n, k])_{n \in \mathbb{N}}$  ne peut pas être  $p, q$ -log concave.  $\square$

**THÉORÈME 2.5.4:** *La suite de  $p, q$ -nombres de Stirling  $a, d$ -progressifs  $(S_{p,q}^{a,d}[n, k])_{k \in \mathbb{N}}$  est fortement  $p, q$ -log concave. Par contre, les suites  $(\mathcal{P}c_{p,q}[n, n - k])_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\mathcal{P}S_{p,q}[n, n - k])_{n \in \mathbb{N}}$  ne sont pas  $p, q$ -log concaves.*

### DÉMONSTRATION:

Nous utilisons une adaptation de l'élégante preuve injective de la  $p, q$ -concavité logarithmique en  $k$  des  $p, q$ -nombres de Stirling de deuxième espèce de P. Leroux [Le3].

Pour démontrer la  $p, q$ -inégalité

$$S_{p,q}^{a,d}[n, k - 1]S_{p,q}^{a,d}[n, l + 1] \leq_{p,q} S_{p,q}^{a,d}[n, k]S_{p,q}^{a,d}[n, l], \quad (2.5.7)$$

avec  $n \geq l \geq k$ , il suffit de construire une injection de l'ensemble  $T^{a,d}(k - 1, n - k + 1) \times T^{a,d}(l + 1, n - l - 1)$  vers l'ensemble  $T^{a,d}(k, n - k) \times T^{a,d}(l, n - l)$ , conservant les statistiques d'inversions et de non-inversions.

La démonstration décrite par P. Leroux consistait en l'application successive de deux involutions,  $Arm(A_{l-k+1})$  et  $Leg(L_{l-k+1})$ , introduites par L. Butler [But2] sur les partages, et adaptées aux tableaux 0-1 par P. Leroux.

L'involution  $Arm$ , qui agit sur des couples de tableaux 0-1, a pour effet d'échanger les "bras" (un certain nombre de colonnes de droite des tableaux 0-1) des deux tableaux, alors que l'involution  $Leg$  échange les "jambes" (un certain nombre de lignes inférieures des tableaux 0-1) des deux tableaux. De plus, P. Leroux a introduit une notion de *paire de colonnes intouchables* qui lui sert dans la définition de  $Leg$ .

Si à ces paires de colonnes intouchables, on ajoute les paires de colonnes telles qu'au moins une des colonnes soit de longueur  $a$ , alors la fonction  $L_{d(l-k+1)} \circ A_{l-k+1}$ , appliquée à l'ensemble  $T^{a,d}(k-1, n-k+1) \times T^{a,d}(l+1, n-l-1)$ , est l'injection cherchée.

Le lecteur est référé à l'article [Le3] ou au chapitre 3 de [dM] pour plus de détails sur les involutions *Arm* et *Leg*.

Ensuite,

$$\mathcal{P}c_{p,q}[2, 1]\mathcal{P}c_{p,q}[2, 1] - \mathcal{P}c_{p,q}[3, 2]\mathcal{P}c_{p,q}[1, 0] = 3 + p - 2p^2 - p^3 - pq - 2q,$$

et

$$\mathcal{P}S_{p,q}[3, 2]\mathcal{P}S_{p,q}[3, 2] - \mathcal{P}S_{p,q}[4, 3]\mathcal{P}S_{p,q}[2, 1] = 2p + 2p^2 + 2q + pq + p^2q - q^2 - pq^2,$$

montrent que les suites  $(\mathcal{P}c_{p,q}[n, n-k])_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\mathcal{P}S_{p,q}[n, n-k])_{n \in \mathbb{N}}$  ne sont pas  $p, q$ -log concaves.  $\square$

L'involution *Leg* ne se généralise pas aux tableaux 0-1 faibles. De plus, l'involution *Arm*, adaptée aux couples de tableaux 0-1 faibles, ne conserve pas nécessairement le nombre de colonnes remplies de "0" dans chacun des tableaux 0-1 faibles. Ces applications ne nous fournissent donc pas de démonstrations combinatoires de la  $p, q$ -concavité logarithmique des suites de  $p, q$ -nombres de Stirling partiels suivantes. Nous avons testé ces propriétés, pour certaines valeurs de  $n, m$  et  $k$ , à l'aide du logiciel MAPLE.

**CONJECTURES 2.5.5:** les suites  $(\mathcal{P}c_{p,q}[n, m, k])_{k \in \mathbb{N}}$ ,

$(\mathcal{P}c_{p,q}[n, m, k])_{m \in \mathbb{N}}$ ,  $(\mathcal{P}S_{p,q}[n, m, k])_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $(\mathcal{P}S_{p,q}[n, m, k])_{m \in \mathbb{N}}$ ,

$(\mathcal{P}S_{p,q}[n, m, k])_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\mathcal{P}S_{p,q}[n, k])_{k \in \mathbb{N}}$  sont fortement  $p, q$ -log concaves.

*De plus, si  $n_2 \geq n_1$ , on a*

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}_{p,q}[n_1 - 1, m, k] \mathcal{P}_{p,q}[n_2 + 1, m, k] \\ & \leq_{p,q} (p + q)^{n_2 - n_1 + 1} \mathcal{P}_{p,q}[n_1, m, k] \mathcal{P}_{p,q}[n_2, m, k]. \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

## CHAPITRE 3

### ASPECTS COMBINATOIRES DES POLYNÔMES DE CHARLIER ET DE LEURS $q$ -ANALOGUES

#### 3.1 INTRODUCTION

**DÉFINITION 3.1.1:** Une suite  $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$  de polynômes est dite *suite de polynômes orthogonaux* par rapport à une fonctionnelle linéaire  $\mathcal{L}$  si et seulement si, pour tout entiers  $m$  et  $n \geq 0$ , on a

i)  $P_n(x)$  est un polynôme de degré  $n$ , et

ii)

$$\mathcal{L}(P_n(x)P_m(x)) \begin{cases} = 0 & \text{si } n \neq m, \\ \neq 0 & \text{si } n = m. \end{cases} \quad (3.1.1)$$

Rappelons qu'une fonctionnelle linéaire  $\mathcal{L}$  est uniquement déterminée par la suite des moments  $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ ,

$$\mu_n = \mathcal{L}(x^n), \quad (3.1.2)$$

dans lequel  $\mu_n$  est appelé *moment d'ordre  $n$* .

De même, il est bien connu que toute suite de polynômes orthogonaux unitaires  $\{P_n(x)\}$  satisfait une récurrence linéaire à trois termes de la forme

$$P_{n+1}(x) = (x - b_n)P_n(x) - \lambda_n P_{n-1}(x), \quad (3.1.3)$$

pour  $n \geq 1$ , avec les conditions initiales  $P_0(x) = 1$  et  $P_1(x) = x - b_0$ , où  $\{b_n\}_{n \geq 0}$  et  $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$  sont des suites de scalaires à valeurs dans un anneau  $A$ .

Les *polynômes de Charlier*  $C_n^{(a)}(x)$  forment la classe de polynômes orthogonaux par rapport à la suite de moments  $\{\nu_n^{(a)}\}_{n \geq 0}$  donnée par

$$\nu_n^{(a)} = \sum_{k=0}^n S(n, k) a^k, \quad (3.1.4)$$

où  $S(n, k)$  désigne les nombres de Stirling de deuxième espèce, satisfaisant la récurrence

$$S(n+1, k+1) = S(n, k) + (k+1)S(n, k+1), \quad (3.1.5)$$

avec conditions initiales  $S(n, 0) = \delta_{n,0}$  et  $S(0, k) = \delta_{0,k}$ .

Notons  $\mathcal{L}^{(a)}$  la fonctionnelle linéaire associée à cette suite de moments.

Le premier objet de ce chapitre est de démontrer de manière involutive que les polynômes de Charlier satisfont la récurrence linéaire à trois termes (3.1.3) pour les coefficients

$$b_k = a + k \quad \text{et} \quad \lambda_k = a \cdot k. \quad (3.1.6)$$

Pour ce faire, il suffit de montrer que les polynômes unitaires  $P_n^{(a)}(x)$  définis par cette récurrence satisfont la relation d'orthogonalité

$$\mathcal{L}^{(a)} \left( P_n^{(a)}(x) P_m^{(a)}(x) \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m, \\ b_n \neq 0 & \text{si } n = m. \end{cases} \quad (3.1.7)$$

où  $b_n = a^n n!$ .

Plus généralement, nous montrerons que la série génératrice des *coefficients de linéarisation*  $\mathcal{L}^{(a)} \left( C_{n_1}^{(a)}(x) C_{n_2}^{(a)}(x) \dots C_{n_k}^{(a)}(x) \right)$  des polynômes de Charlier est donnée par

$$\begin{aligned} \sum_{\underline{n}} \mathcal{L}^{(a)} \left( C_{n_1}^{(a)}(x) C_{n_2}^{(a)}(x) \dots C_{n_k}^{(a)}(x) \right) \frac{x_1^{n_1}}{n_1!} \frac{x_2^{n_2}}{n_2!} \dots \frac{x_k^{n_k}}{n_k!} \\ = \exp(a \cdot e_2(x_1, \dots, x_k) + a \cdot e_3(x_1, \dots, x_k) + \dots + a \cdot e_k(x_1, \dots, x_k)), \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

où la somme parcourt tous les  $k$ -uplets  $\underline{n} = (n_1, n_2, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k$  et  $e_n(x_1, x_2, \dots, x_k)$  désigne la fonction symétrique élémentaire de degré  $n$  en  $k$  variables.

Par le terme “démonstration involutive”, nous entendons une démonstration utilisant des involutions  $\varphi : E \rightarrow E$  sur un ensemble  $w$ -pondéré  $E$ , conservant les poids mais inversant les signes, i.e. telles que si  $e \in E$  et  $e$  ne fait pas partie des points fixes  $Fix(\varphi; E) = Fix(\varphi)$  de l'involution,

$$w(e) = -w(\varphi(e)). \quad (3.1.9)$$

On a alors clairement la propriété

$$|E|_w = |Fix(\varphi; E)|_w, \quad (3.1.10)$$

où

$$|E|_w = \sum_{e \in E} w(e). \quad (3.1.11)$$

Pour démontrer l'identité (3.1.8), nous allons d'abord interpréter combinatoirement les polynômes  $C_n^{(a)}(x)$  en termes de permutations partielles pondérées. Une *permutation partielle* sur un ensemble  $A_n$  de cardinalité  $n$  consiste en un couple  $(E, \sigma)$  tel que  $\sigma$  est une permutation sur un sous-ensemble  $Supp(\sigma)$  de  $A_n$  (possiblement vide), et  $E = A_n \setminus Supp(\sigma)$ . Notons  $cyc(\sigma)$  le nombre de cycles de  $\sigma$ , écrite sous forme de produit de cycles disjoints. Notons également  $C(A_n)$  l'ensemble des permutations partielles sur l'ensemble  $A_n$ , et  $C(A_n, k)$  le sous-ensemble de  $C(A_n)$  contenant les permutations partielles  $(E, \sigma)$  telles que  $cyc(\sigma) = k$ .

Nous montrerons plus particulièrement que si l'on pondère les permutations partielles  $(E, \sigma) \in C(A_n, k)$  par

$$w(E, \sigma) = (-1)^{n-k} a^{|E|}, \quad (3.1.12)$$

alors le coefficient  $b_{n,k}$  de  $x^k$  dans  $C_n^{(a)}(x) = \sum_{k=0}^n b_{n,k} x^k$  est égal à

$$b_{n,k} = \sum_{(E, \sigma) \in C(A_n, k)} w(E, \sigma). \quad (3.1.13)$$

Nous interpréterons ensuite l'expression

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}^{(a)} \left( C_{n_1}^{(a)}(x) C_{n_2}^{(a)}(x) \dots C_{n_k}^{(a)}(x) \right) \\ &= \sum_{l_1=0}^{n_1} \sum_{l_2=0}^{n_2} \dots \sum_{l_k=0}^{n_k} b_{n_1, l_1} b_{n_2, l_2} \dots b_{n_k, l_k} \nu_{l_1+l_2+\dots+l_k}^{(a)} \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

combinatoirement, en utilisant une interprétation des moments  $\nu_n^{(a)}$  en termes de partitions ensemblistes.

Nous y appliquerons alors successivement deux involutions  $\varphi$  et  $\psi$ , conservant les poids mais inversant les signes, telles que  $Fix(\varphi \circ \psi)$  se ramène à un

ensemble de partitions  $\pi$  spéciales sur l'ensemble  $\bigcup_{i=1}^k \{i\} \times \llbracket n_i \rrbracket$ , pour lesquelles la pondération  $w$  est un “ $a$ -comptage” du nombre de blocs des partitions, et dont il sera évident que la série génératrice exponentielle multivariée est égale au membre de droite de (3.1.8).

Le modèle combinatoire des polynômes de Charlier, ainsi que la démonstration involutive de la série génératrice (3.1.8) ( et en particulier de l'orthogonalité de ces polynômes) forment la section 3.2 de ce chapitre.

Dans les vingt-cinq dernières années, plusieurs mathématiciens se sont intéressés au problème de trouver des interprétations combinatoires pour les coefficients de linéarisation des classes de polynômes orthogonaux classiques, et notamment pour les cinq classes de polynômes orthogonaux de Sheffer. Citons à ce sujet les travaux de Even et Gillis [EG], Askey et Ismail [AI], Jackson [Jac], Carlitz [Ca3], et de Sainte-Catherine et Viennot [dSCV] pour les coefficients de linéarisation des polynômes de Laguerre  $L_n^{(0)}(x)$ , Foata et Zeilberger [FoZ1] et Gessel [Ge2] pour les polynômes de Laguerre généraux  $L_n^{(\alpha)}(x)$ , Godsil [God], Azor, Gillis et Victor [AGV] pour les polynômes d'Hermite, et plus récemment, Ismail et Stanton (non publié) et Zeng [Zen2] pour les polynômes de Charlier, et Zeng [Zen2, Zen3] pour les polynômes de Meixner et Meixner-Pollačzek. Les approches de ces différents auteurs varient, mais on peut cependant distinguer trois méthodes plus souvent utilisées.

La première consiste à calculer analytiquement la série génératrice des coefficients de linéarisation de la classe de polynômes orthogonaux et à montrer ensuite que celle-ci est égale à la série génératrice du modèle combinatoire proposé (cf par exemple, Askey et Ismail [AI], Foata et Zeilberger [FoZ1] et Zeng [Zen2, Zen3]).

Une deuxième approche repose sur la théorie des “rook polynomials” et a été utilisée pour la première fois par Jackson [Jac] pour les polynômes de Laguerre  $L_n^{(0)}$ . Une interprétation similaire des coefficients de linéarisation des polynômes d’Hermite en termes de polynômes de couplage a été trouvée par Godsil [God]. Plus récemment, I. Gessel [Ge2] a introduit une généralisation commune des polynômes de couplage et des “rook polynomials”, donnant entre autres de nouvelles démonstrations des interprétations combinatoires des coefficients de linéarisation des polynômes d’Hermite, de Laguerre généraux et de Charlier.

Enfin, la troisième principale méthode est la méthode involutive que nous avons décrite plus haut et que nous appliquerons dans ce chapitre. Elle a été utilisée notamment par Foata et Zeilberger [FoZ1, FoZ2], de Sainte-Catherine et Viennot [dSCV], et Ismail, Stanton et Viennot [ISV].

L’intérêt des interprétations combinatoires des coefficients de linéarisation réside dans le fait qu’elles permettent de montrer facilement la non négativité des coefficients de linéarisation, le cas échéant. Elles permettent également de trouver dans certains cas des formules closes pour la fonctionnelle linéaire appliquée au produit d’un nombre fixé de polynômes. Ismail, Stanton et Viennot [ISV] ont ainsi trouvé une formule explicite pour l’intégrale d’un produit de quatre polynômes de  $q$ -Hermite continus, ce qui leur a servi à évaluer une intégrale d’Askey-Wilson.

Dans la section 3.4, nous introduisons un  $q$ -analogue des polynômes de Charlier: nous noterons  $\{C_{n,q}^{(a)}\}$  la classe de polynômes orthogonaux par rapport à la suite de moments

$$\nu_{n,q}^{(a)} = \sum_{k=0}^n S_q[n, k] a^k, \quad (3.1.15)$$

où  $S_q[n, k]$  désigne les  $q$ -nombres de Stirling de deuxième espèce, satisfaisant la récurrence

$$S_q[n + 1, k + 1] = S_q[n, k] + [k + 1]_q S_q[n, k + 1], \quad (3.1.16)$$

avec conditions initiales  $S_q[n, 0] = \delta_{n,0}$  et  $S_q[0, k] = \delta_{0,k}$ , et où  $[k]_q = (q^k - 1)/(q - 1)$ .

Nous noterons  $\mathcal{L}_q^{(a)}$  la fonctionnelle linéaire associée à cette suite de moments.

Ce  $q$ -analogue des polynômes de Charlier n'est pas le  $q$ -analogue classique que l'on retrouve dans la littérature (cf Hahn [Ha], Milne [Mi2], et Andrews et Askey [AA]), mais plutôt une renormalisation des polynômes d'Al Salam-Carlitz (cf Al Salam et Carlitz [AC], et Chihara [Chi]).

Les coefficients de la récurrence linéaire à trois termes (3.1.3) associée à ces polynômes sont

$$b_{k,q} = q^k a + [k]_q \quad \text{et} \quad \lambda_{k,q} = a q^{k-1} [k]_q. \quad (3.1.17)$$

En effet, en vertu de la théorie combinatoire des polynômes orthogonaux généraux développée par X.G. Viennot [Vi1], les moments des polynômes orthogonaux peuvent s'exprimer en termes de certains chemins dans le plan  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  (chemins de Motzkin), dont les pas élémentaires sont pondérés par les coefficients  $b_k$  et  $\lambda_k$  de la récurrence linéaire à trois termes (3.1.3) (cf Flajolet [Fla] et Viennot [Vi1]). Pour les polynômes de Charlier, il existe une bijection directe, due à J. Françon et X.G. Viennot [FrVi], entre les "histoires de Charlier" (ayant même pondération globale que les chemins de Motzkin pondérés) et les partitions ensemblistes. En transportant les  $q$ -pondérations correspondant aux coefficients  $b_{k,q}$  et  $\lambda_{k,q}$  donnés en (3.1.17) le long de cette bijection, on obtient

un nouveau paramètre appelé  $rs$  sur les partitions, dont il n'est pas évident qu'il ait la même distribution que les inversions sur les partitions. Nous devons à M. Wachs et D. White [WaWh], suite à une question posée par D. Stanton, une très jolie démonstration combinatoire de ceci, ce qui établit le fait que les moments  $\nu_{n,q}^{(a)}$  donnés en (3.1.15) correspondent bien aux coefficients  $b_{k,q}$  et  $\lambda_{k,q}$  de (3.1.17).

On peut interpréter combinatoirement les  $q$ -polynômes de Charlier  $C_{n,q}^{(a)}(x)$  de manière similaire aux polynômes  $C_n^{(a)}(x)$ , en considérant les permutations partielles sur l'ensemble  $[[n]]$  et en leur ajoutant le  $q$ -poids suivant: soit  $(E, \sigma) \in C([[n]])$ , alors on pose

$$w_q(E, \sigma) = q^{\text{inv}(\sigma)} \cdot \prod_{i \in E} q^{i-1}, \quad (3.1.18)$$

où  $\text{inv}(\sigma)$  est égal au nombre d'inversions du mot obtenu de  $\sigma$  en enlevant les parenthèses dans l'écriture standard de  $\sigma$  sous forme de produit de cycles disjoints.

Plus exactement,

$$C_{n,q}^{(a)}(x) = \sum_{(E, \sigma) \in C([[n]])} w(E, \sigma) w_q(E, \sigma) x^{\text{cyc}(\sigma)}, \quad (3.1.19)$$

où  $w(E, \sigma)$  a été défini en (3.1.12) et  $\text{cyc}(\sigma)$  désigne le nombre de cycles de la permutation  $\sigma$ .

Le lecteur trouvera dans les appendices A à D la liste des six premiers polynômes  $C_{n,q}^{(a)}(x)$ , ainsi que des tableaux contenant plusieurs valeurs des coefficients de linéarisation d'un produit de trois, quatre ou cinq  $q$ -polynômes de Charlier.

Dans la section 3.4, nous exhiberons des " $q$ -analogues"  $\psi_q$  et  $\varphi_q$  des involutions inversant les signes mais conservant les poids  $\psi$  et  $\varphi$  de la section 3.2,

permettant de démontrer la relation d'orthogonalité suivante des  $q$ -polynômes de Charlier:

$$\mathcal{L}_q^{(a)} \left( C_{n,q}^{(a)}(x) C_{m,q}^{(a)}(x) \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m, \\ a^n q^{\binom{n}{2}} [n]_q! & \text{si } n = m. \end{cases} \quad (3.1.20)$$

Ces involutions ne permettent cependant pas d'obtenir une interprétation combinatoire optimale des coefficients de linéarisation généraux de ces polynômes. Ceux-ci sont des polynômes en  $a$  et  $q$  à coefficients entiers, pas nécessairement positifs, comme on peut le voir dans les tableaux des appendices B, C et D. Les points fixes  $Fix(\varphi_q \circ \psi_q)$  peuvent encore s'éliminer entre eux, c'est-à-dire qu'il doit être possible de trouver une autre involution  $\vartheta$  inversant les signes mais conservant les poids sur  $Fix(\varphi_q \circ \psi_q)$ , telle que si  $e_1$  et  $e_2$  sont deux points fixes de  $\vartheta$ , la pondération de  $e_1$  n'est jamais égale à l'inverse additif de la pondération de  $e_2$ . Quoiqu'il en soit, on sait au moins expérimentalement que l'ensemble optimal de points fixes  $Fix(\vartheta; Fix(\varphi_q \circ \psi_q))$  ne peut pas contenir l'ensemble des points fixes  $Fix(\varphi \circ \psi)$  trouvé dans la section 3.2.

Par contre, les involutions  $\psi_q$  et  $\varphi_q$  permettent de montrer certaines propriétés algébriques des coefficients de linéarisation et d'expliquer notamment tous les zéros apparaissant dans les tableaux des annexes B à D. On montrera en particulier dans la section 3.4 que si  $0 \leq n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_k$ , le coefficient de linéarisation  $\mathcal{L}_q^{(a)} \left( C_{n_1,q}^{(a)}(x) C_{n_2,q}^{(a)}(x) \dots C_{n_k,q}^{(a)}(x) \right)$ , en tant que polynôme en la variable  $a$ , est un polynôme de degré  $n_1 + n_2 + \dots + n_{k-1}$  dans lequel la plus petite puissance de  $a$  qui apparaisse est égale à  $n_k$ . Nous présenterons également dans la section 3.6 des résultats partiels à propos de la conjecture que nous avons émise que le coefficient de  $a^{n_k}$  dans  $\mathcal{L}_q^{(a)} \left( C_{n_1,q}^{(a)}(x) C_{n_2,q}^{(a)}(x) \dots C_{n_k,q}^{(a)}(x) \right)$ ,  $0 \leq n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_k$ , est toujours un polynôme en  $q$  à coefficients entiers positifs.

Dans la section 3.3, nous rappelons les propriétés fondamentales des polynômes de Charlier et nous les redémontrons de manière combinatoire. De plus, dans la section 3.5, nous énonçons les  $q$ -analogues de ces résultats pour les  $q$ -polynômes de Charlier et nous les démontrons, autant que possible combinatoirement. Parmi ces résultats, mentionnons entre autres la série génératrice des polynômes, une formule explicite pour les polynômes, ainsi que des équations aux différences finies satisfaites par ceux-ci.

### 3.2 DÉMONSTRATION COMBINATOIRE DE L'ORTHOGONALITÉ DES POLYNÔMES DE CHARLIER ET COEFFICIENTS DE LINÉARISATION

Soit  $\{C_n^{(a)}(x)\}$  la suite de polynômes orthogonaux définie par la récurrence linéaire à trois termes (3.1.3) pour les coefficients  $b_k$  et  $\lambda_k$  donnés en (3.1.6). Nous allons, dans un premier temps, établir l'interprétation combinatoire de ces polynômes en terme des permutations partielles.

Supposons que l'ensemble  $A_n$ , de cardinalité  $n$ , soit totalement ordonné. Nous dirons qu'une permutation partielle  $(E, \sigma) \in C(A_n)$  est écrite *sous forme standard*, si l'ensemble  $E$  est écrit selon l'ordre *décroissant* de ses éléments et si, dans l'écriture de  $\sigma$  sous forme de produit de cycles disjoints, les cycles apparaissent par ordre croissant de leurs minima, chaque cycle commençant par son minimum. Par exemple,  $(E, \sigma) = (\{6, 4, 3\}, (1, 5, 9, 2)(7, 8)) \in C(\llbracket 9 \rrbracket)$  est écrite sous forme standard. Nous avons choisi cette notation spécialement parce que la pondération  $w_q$ , définie en (3.1.18), est alors exactement égale au nombre d'inversions du mot obtenu en effaçant les parenthèses et accolades de la permutation partielle  $(E, \sigma)$  écrite sous cette forme.

**PROPOSITION 3.2.1:** *La suite de polynômes  $\{C_n^{(a)}(x)\}$  satisfait*

$$C_n^{(a)}(x) = \sum_{(E,\sigma) \in C(A_n)} w(E, \sigma) x^{\text{cyc}(\sigma)}, \quad (3.2.1)$$

$$= |C(A_n)|_{w,x}, \quad (3.2.2)$$

où  $\text{cyc}(\sigma)$  désigne le nombre de cycles de la permutation  $\sigma$ , et  $w(E, \sigma)$  a été défini en (3.1.12) par

$$w(E, \sigma) = (-1)^{n-\text{cyc}(\sigma)} a^{|E|}. \quad (3.2.3)$$

### DÉMONSTRATION:

Nous allons montrer que le membre de droite de (3.2.1) satisfait la même récurrence linéaire à trois termes que  $C_n^{(a)}(x)$ , à savoir

$$C_{n+1}^{(a)}(x) = (x - a - n)C_n^{(a)}(x) - anC_{n-1}^{(a)}(x), \quad (3.2.4)$$

avec les conditions initiales  $C_0^{(a)}(x) = 1$  et  $C_1^{(a)}(x) = x - a$ .

On peut supposer sans perte de généralité que  $A_n = \llbracket n \rrbracket = \{1, 2, \dots, n\}$ .

Pour  $n = 0$ ,  $\llbracket 0 \rrbracket = \emptyset$  et l'ensemble  $C(\emptyset)$  ne contient que la permutation partielle vide  $(E, \sigma) = (\emptyset, \emptyset)$ , dont la pondération  $w(\emptyset, \emptyset) x^{\text{cyc}(\emptyset)} = (-1)^{0-0} a^{|\emptyset|} x^0 = 1 = C_0^{(a)}(x)$ .

De même, pour  $n = 1$ , on a

$$\begin{aligned} \sum_{(E,\sigma) \in C(\llbracket 1 \rrbracket)} w(E, \sigma) x^{\text{cyc}(\sigma)} &= w(\emptyset, (1)) x^{\text{cyc}(\emptyset, (1))} + w(\{1\}, \emptyset) x^{\text{cyc}(\{1\}, \emptyset)}, \\ &= (-1)^{1-1} a^{|\emptyset|} x^1 + (-1)^{1-0} a^{|\{1\}|} x^0, \\ &= x - a = C_1^{(a)}(x). \end{aligned}$$

En général, pour construire les permutations partielles sur l'ensemble  $\llbracket n + 1 \rrbracket$ , il suffit d'insérer l'entier  $(n + 1)$  de toutes les façons possible dans les permutations partielles de l'ensemble  $\llbracket n \rrbracket$ . Il y a trois possibilités:

- 1)  $(n + 1)$  forme un nouveau cycle de la permutation partielle. Par exemple, la permutation partielle  $(E, \sigma) = (\{6, 4, 3\}, (1, 5, 9, 2)(7, 8)) \in C(\llbracket 9 \rrbracket)$  devient, après insertion,  $(E', \sigma') = (\{6, 4, 3\}, (1, 5, 9, 2)(7, 8)(10)) \in C(\llbracket 10 \rrbracket)$ . Il est clair qu'alors

$$\begin{aligned} w(E', \sigma') x^{cyc(E', \sigma')} &= (-1)^{n+1-(cyc(\sigma)+1)} a^{|E|} x^{cyc(\sigma)+1}, \\ &= x \cdot w(E, \sigma) x^{cyc(E, \sigma)}. \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

- 2)  $(n + 1)$  ne fait pas partie de la permutation elle-même. Par exemple, la permutation partielle  $(E, \sigma) = (\{6, 4, 3\}, (1, 5, 9, 2)(7, 8)) \in C(\llbracket 9 \rrbracket)$  devient, après insertion,  $(E', \sigma') = (\{10, 6, 4, 3\}, (1, 5, 9, 2)(7, 8)) \in C(\llbracket 10 \rrbracket)$ . Il est alors clair que

$$\begin{aligned} w(E', \sigma') x^{cyc(E', \sigma')} &= (-1)^{n+1-cyc(\sigma)} a^{|E|+1} x^{cyc(\sigma)}, \\ &= -a \cdot w(E, \sigma) x^{cyc(E, \sigma)}. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

- 3)  $(n + 1)$  s'insère dans la permutation sans créer de nouveau cycle. Par exemple, la permutation partielle  $(E, \sigma) = (\{6, 4, 3\}, (1, 5, 9, 2)(7, 8)) \in C(\llbracket 9 \rrbracket)$  devient, après insertion,  $(E', \sigma') = (\{6, 4, 3\}, (1, 5, 9, 2)(7, 10, 8)) \in C(\llbracket 10 \rrbracket)$ .

Pour dénombrer la  $w$ -contribution de ce type de permutations partielles dans  $C(\llbracket n + 1 \rrbracket)$ , nous allons compter plus de structures qu'il n'y en a réellement, et nous ajouterons ensuite un terme correctif pour enlever les structures "illégalés" qui sont comptées en trop.

Pour que  $(n + 1)$  fasse partie de la permutation sans créer de nouveaux cycles, il suffit de l'ajouter immédiatement après l'un des  $n$  éléments déjà placés dans  $(E, \sigma)$ , dont il devient alors l'image. Dans l'exemple ci-dessus, on a choisi de placer 10 immédiatement après 7.

Cependant, si par malheur, dans  $(E, \sigma)$ , l'entier  $(n + 1)$  se trouve ajouté immédiatement après un élément de  $\llbracket n \rrbracket$  faisant partie de l'ensemble  $E$ , on se retrouve avec une structure "illégale". Par exemple, si on avait choisi d'ajouter 10 après l'entier 4 dans la permutation partielle  $(E, \sigma)$  donnée ci-dessus, on aurait obtenu la structure illégale  $(E', \sigma') = (\{6, (4, 10), 3\}, (1, 5, 9, 2)(7, 8))$ . Remarquons que du point de vue de la pondération, on ne considère pas que 10 fasse partie de l'ensemble  $E'$  ni que  $(4, 10)$  compte pour un cycle de  $(E', \sigma')$ , donc dans ce cas  $|E'| = 3$ ,  $\text{cyc}(\sigma') = 2$ , et  $w(E', \sigma') = (-1)^{10-2} a^3 x^2 = a^3 x^2$ .

Il est clair que pour toutes ces structures, qu'elles soient "légal" ou non,

$$\begin{aligned} w(E', \sigma') x^{\text{cyc}(E', \sigma')} &= (-1)^{n+1-\text{cyc}(\sigma)} a^{|E|} x^{\text{cyc}(\sigma)}, \\ &= -w(E, \sigma) x^{\text{cyc}(E, \sigma)}, \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

et il existe  $n$  façons différentes d'ajouter l'entier  $(n + 1)$  à une permutation partielle donnée  $(E, \sigma) \in C(\llbracket n \rrbracket)$ .

Reconstruisons d'une autre manière toutes les structures illégales que nous avons introduites ci-haut.

En partant avec une structure "légal" de permutation partielle  $(\tilde{E}, \tilde{\sigma})$  sur  $\llbracket n - 1 \rrbracket$ , par exemple  $(\tilde{E}, \tilde{\sigma}) = (\{5, 3\}, (1, 4, 8, 2)(6, 7)) \in C(\llbracket 8 \rrbracket)$ , on choisit la pré-image  $k \in \llbracket n \rrbracket$  de  $(n + 1)$ , par exemple 4. Dans  $(\tilde{E}, \tilde{\sigma})$ , on ajoute 1 à tous les entiers  $i \geq k$  et on insère  $(k, n + 1)$  dans la partie correspondant à  $\tilde{E}$  dans l'écriture standard de  $(\tilde{E}, \tilde{\sigma})$ , de telle sorte que  $k$  respecte l'ordre décroissant

des autres nombres dans l'écriture de cet ensemble, ce qui donne dans l'exemple  $(E', \sigma') = (\{6, (4, 10), 3\}, (1, 5, 9, 2)(7, 8))$ .

Il est clair que toutes les structures illégales peuvent être construites de manière unique par ce procédé, que

$$\begin{aligned} w(E', \sigma') x^{cyc(E', \sigma')} &= (-1)^{(n-1)+2-cyc(\tilde{\sigma})} a^{|\tilde{E}|+1} x^{cyc(\tilde{\sigma})}, \\ &= a \cdot w(\tilde{E}, \tilde{\sigma}) x^{cyc(\tilde{E}, \tilde{\sigma})}, \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

et qu'il y a  $n$  façons différentes de choisir la pré-image  $k \in \llbracket n \rrbracket$  de  $(n+1)$ , donc d'ajouter l'entier  $(n+1)$  à une permutation partielle donnée  $(\tilde{E}, \tilde{\sigma}) \in C(\llbracket n-1 \rrbracket)$ .

En remettant tout en place, on trouve

$$\begin{aligned} |C(\llbracket n+1 \rrbracket)|_{w,x} &= x \cdot |C(\llbracket n \rrbracket)|_{w,x} - a \cdot |C(\llbracket n \rrbracket)|_{w,x} \\ &\quad + \left( -n \cdot |C(\llbracket n \rrbracket)|_{w,x} - an \cdot |C(\llbracket n-1 \rrbracket)|_{w,x} \right), \\ &= (x - a - n) \cdot |C(\llbracket n \rrbracket)|_{w,x} - an \cdot |C(\llbracket n-1 \rrbracket)|_{w,x}, \end{aligned}$$

qui est bien la même récurrence que celle de la suite  $\{C_n^{(a)}(x)\}$  (formule (3.2.4)).

□

Si  $A_n$  désigne un ensemble de cardinalité  $n$ , nous noterons  $\mathcal{P}(A_n)$  l'ensemble des partitions de l'ensemble  $A_n$ . Soit  $\pi \in \mathcal{P}(A_n)$ . Notons  $b(\pi)$  le nombre de blocs de la partition  $\pi$ .

Alors il est bien connu que les moments  $\nu_n^{(a)}$  des polynômes de Charlier, définis en (3.1.4), s'interprètent combinatoirement comme

$$\begin{aligned} \nu_n^{(a)} &= \sum_{k=0}^n S(n, k) a^k, \\ &= \sum_{\pi \in \mathcal{P}(A_n)} a^{b(\pi)}. \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Munis de ces différentes interprétations combinatoires, nous sommes en mesure de déterminer la série génératrice des coefficients de linéarisation des polynômes de Charlier.

**THÉORÈME 3.2.2:** (Zeng [Zen2])

Les polynômes de Charlier  $C_n^{(a)}(x)$ , définis par la récurrence linéaire à trois termes (3.2.4), satisfont, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{\underline{n}} \mathcal{L}^{(a)} \left( C_{n_1}^{(a)}(x) C_{n_2}^{(a)}(x) \dots C_{n_k}^{(a)}(x) \right) \frac{x_1^{n_1}}{n_1!} \frac{x_2^{n_2}}{n_2!} \dots \frac{x_k^{n_k}}{n_k!} \quad (3.2.10)$$

$$= \exp(a \cdot e_2(x_1, \dots, x_k) + a \cdot e_3(x_1, \dots, x_k) + \dots + a \cdot e_k(x_1, \dots, x_k)),$$

où la somme parcourt tous les  $k$ -uplets  $\underline{n} = (n_1, n_2, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k$ , et  $\mathcal{L}^{(a)}$  désigne la fonctionnelle linéaire déterminée par les moments  $\nu_n^{(a)}$ , définis en (3.1.4).

**DÉMONSTRATION:**

Notons  $CYCLE(\sigma)$  l'ensemble formé des cycles d'une permutation  $\sigma$  donnée. Par exemple,  $CYCLE((1, 3)(2)(4, 6, 5)) = \{(1, 3), (2), (4, 6, 5)\}$ .

Désignons par  $\mathcal{LC}(n_1, n_2, \dots, n_k) = \mathcal{LC}(\underline{n})$ , l'ensemble

$$\left\{ ((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi) = ((E_1, \sigma_1), (E_2, \sigma_2), \dots, (E_k, \sigma_k); \pi) \mid (E_i, \sigma_i) \in C(\{i\} \times \llbracket n_i \rrbracket), \right.$$

$$\left. \text{et } \pi \text{ est une partition de l'ensemble } CYCLE(\underline{\sigma}) = \bigcup_{i=1}^k CYCLE(\sigma_i) \right\}. \quad (3.2.11)$$

Si  $((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi) \in \mathcal{LC}(\underline{n})$ , avec  $\pi = \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_l$ , nous noterons

$$Supp(\pi_i) = \bigcup_{c \in \pi_i} Supp(c), \quad (3.2.12)$$

dans lequel  $Supp(c)$  désigne l'ensemble sous-jacent (ou support) du cycle  $c$ . Nous dirons également qu'un couple  $(i, j) \in \bigcup_{i=1}^k \{i\} \times \llbracket n_i \rrbracket$  est *de couleur*  $i$  si son abscisse est égale à  $i$ . Notons que l'ordre lexicographique induit un ordre total sur l'ensemble  $\bigcup_{i=1}^k \{i\} \times \llbracket n_i \rrbracket$ .

Soit  $((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi) \in \mathcal{LC}(\underline{n})$ , où  $\underline{n} = (n_1, n_2, \dots, n_k)$ , alors on définit la pondération

$$w((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi) = a^{b(\pi)} \cdot \prod_{i=1}^k w(E_i, \sigma_i), \quad (3.2.13)$$

où  $w(E, \sigma)$  a été défini en (3.2.3).

Par l'interprétation combinatoire des polynômes de Charlier (3.2.1) et des moments  $\nu_n^{(a)}$  (3.2.9), il est clair que

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}^{(a)} \left( C_{n_1}^{(a)}(x) C_{n_2}^{(a)}(x) \dots C_{n_k}^{(a)}(x) \right) \\ &= \mathcal{L}^{(a)} \left( \sum_{(E_1, \sigma_1) \in \mathcal{C}(\{1\} \times \llbracket n_1 \rrbracket)} \dots \sum_{(E_k, \sigma_k) \in \mathcal{C}(\{k\} \times \llbracket n_k \rrbracket)} w(E_1, \sigma_1) \dots w(E_k, \sigma_k) \right. \\ & \quad \left. x^{cyc(\sigma_1) + \dots + cyc(\sigma_k)} \right), \\ &= \sum_{((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi) \in \mathcal{LC}(\underline{n})} w((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi). \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

Nous allons décrire deux involutions  $\varphi$  et  $\psi$ , conservant les poids mais inversant les signes sur l'ensemble  $\mathcal{LC}(\underline{n})$ . Ces deux involutions seront indépendantes l'une de l'autre en ce sens que les caractéristiques des éléments  $((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi) \in \mathcal{LC}(\underline{n})$  modifiées par l'une ou l'autre des involutions seront indépendantes. En particulier, la restriction d'une des involutions à l'ensemble des points fixes de l'autre formera elle-même une involution de cet ensemble vers lui-même. De plus, quel que soit l'ordre dans lequel on applique  $\varphi$  et  $\psi$  à  $\mathcal{LC}(\underline{n})$ ,

les points fixes  $((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi) \in \text{Fix}(\varphi; \text{Fix}(\psi; \mathcal{LC}(\underline{n}))) = \text{Fix}(\varphi \circ \psi; \mathcal{LC}(\underline{n}))$  obtenus seront caractérisés par les propriétés suivantes:

- Fix.1) pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq k$ ,  $E_i = \emptyset$ , et  $\sigma_i$  est la permutation identité sur l'ensemble  $\text{Supp}(\sigma_i) = \{i\} \times \llbracket n_i \rrbracket$ ;
- Fix.2) tous les blocs  $\pi_i$  de  $\pi$  ont un support  $\text{Supp}(\pi_i)$  de cardinalité au moins égale à 2, et dont les éléments sont tous de couleurs distinctes.

Remarquons qu'alors on a

$$\begin{aligned} w((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi) &= a^{b(\pi)} \cdot \prod_{i=1}^k w(\emptyset, \text{Id}_{\{i\} \times \llbracket n_i \rrbracket}), \\ &= a^{b(\pi)} \cdot \prod_{i=1}^k (-1)^{n_i - n_i} a^{|\emptyset|}, \\ &= a^{b(\pi)}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\sum_{((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi) \in \text{Fix}(\varphi \circ \psi)} w((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi) \\ &= \text{coefficient de } \frac{x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}}{n_1! n_2! \dots n_k!} \text{ dans le second membre de (3.2.10).} \end{aligned}$$

Vu la forme de la pondération  $w$ , pour qu'une involution  $\theta$  sur l'ensemble  $\mathcal{LC}(\underline{n})$  inverse les signes tout en conservant les poids, il faut qu'en appliquant  $\theta$  à un élément  $((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi) \in \mathcal{LC}(\underline{n}) \setminus \text{Fix}(\theta)$ , le nombre total de cycles dans  $\bigcup_{i=1}^k \text{CYCLE}(\sigma_i)$  change de parité, alors que le paramètre  $b(\pi) + \sum_{i=1}^k |E_i|$  reste constant.

L'involution  $\varphi$  que nous décrivons ci-après sert à éliminer les structures  $((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi)$  dans  $\mathcal{LC}(\underline{n})$  telles que certains ensembles  $E_i$  ne sont pas vides, ou

telles que la partition  $\pi$  contient des blocs dont l'ensemble sous-jacent est un singleton. L'involution  $\psi$  de son côté sert à éliminer les structures  $((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi)$  telles que certaines permutations  $\sigma_i$  ne sont pas égales à l'identité, et telles que l'ensemble sous-jacent de certains blocs de  $\pi$  contienne plusieurs éléments de la même couleur.

**Définition de  $\varphi$ :** Soit  $\lambda = ((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi) \in \mathcal{LC}(\underline{n})$ , trouvons le couple minimum  $(i_0, j_0)$  parmi les couples  $(i, j) \in \bigcup_{l=1}^k \{l\} \times \llbracket n_l \rrbracket$ , satisfaisant l'une des conditions suivantes:

- (i)  $(i, j) \in E_i$  ; ou
- (ii)  $(i, j)$  est un point fixe de la permutation  $\sigma_i$ , formant le bloc  $\{((i, j))\}$  de  $\pi$ .

S'il n'y a aucun couple  $(i, j)$  satisfaisant (i) ou (ii), on pose  $\varphi(\lambda) = \lambda$ . Sinon, deux éventualités peuvent se présenter:

a) Si  $(i_0, j_0) \in E_{i_0}$ , on pose  $\varphi(\lambda) = ((\tilde{E}, \tilde{\sigma}); \tilde{\pi})$ , où

$$1) (\tilde{E}_i, \tilde{\sigma}_i) = (E_i, \sigma_i) \text{ si } i \neq i_0;$$

$$2) \tilde{E}_{i_0} = E_{i_0} \setminus \{(i_0, j_0)\} \text{ et}$$

$$\tilde{\sigma}_{i_0}(i_0, j) = \begin{cases} \sigma_{i_0}(i_0, j) & \text{si } j \in \text{Supp}(\sigma_{i_0}), \\ (i_0, j_0) & \text{si } j = j_0; \end{cases}$$

- 3)  $\tilde{\pi} = \pi \cup \{((i_0, j_0))\}$ , où cette notation désigne la partition  $\pi$  à laquelle on ajoute le bloc contenant le 1-cycle  $((i_0, j_0))$ .

Par exemple, prenons  $k = 2$  et soit  $\lambda = ((E_1, \sigma_1), (E_2, \sigma_2); \pi)$ , avec  $(E_1, \sigma_1) = (\{3\}, (1, 4, 2)(5))$ ,  $(E_2, \sigma_2) = (\{\underline{4}\}, (\underline{1}, \underline{3}, \underline{2}))$ , et  $\pi = \{(1, 4, 2)\}, \{(5), (\underline{1}, \underline{3}, \underline{2})\}$ ,

dans lesquels les entiers non soulignés  $j$  représentent les couples  $(1, j)$  de couleur 1, et les entiers soulignés  $\underline{j}$  les couples  $(2, j)$  de couleur 2. Alors on trouve  $(i_0, j_0) = (1, 3)$  et  $\varphi(\lambda) = ((\tilde{E}_1, \tilde{\sigma}_1), (\tilde{E}_2, \tilde{\sigma}_2); \tilde{\pi})$ , où  $(\tilde{E}_1, \tilde{\sigma}_1) = (\emptyset, (1, 4, 2)(3)(5))$ ,  $(\tilde{E}_2, \tilde{\sigma}_2) = (\{\underline{4}\}, (\underline{1}, \underline{3}, \underline{2}))$ , et  $\tilde{\pi} = \{(1, 4, 2)\}, \{(3)\}, \{(5), (\underline{1}, \underline{3}, \underline{2})\}$ .

b) Si  $\{(i_0, j_0)\}$  forme un bloc de la partition  $\pi$ , alors on pose  $\varphi(\lambda) = ((\tilde{E}, \tilde{\sigma}); \tilde{\pi})$ , où

- 1)  $(\tilde{E}_i, \tilde{\sigma}_i) = (E_i, \sigma_i)$  si  $i \neq i_0$ ;
- 2)  $\tilde{E}_{i_0} = E_{i_0} \cup \{(i_0, j_0)\}$  et  $\tilde{\sigma}_{i_0}$  est la restriction de  $\sigma_{i_0}$  à l'ensemble  $(\{i_0\} \times \llbracket n_{i_0} \rrbracket) \setminus \tilde{E}_{i_0}$ ; et
- 3)  $\tilde{\pi} = \pi \setminus \{(i_0, j_0)\}$ , c'est-à-dire la partition  $\pi$  à laquelle on a enlevé le bloc  $\{(i_0, j_0)\}$ .

Par exemple, prenons  $k = 2$  et soit  $\lambda = ((E_1, \sigma_1), (E_2, \sigma_2); \pi)$ , avec  $(E_1, \sigma_1) = (\emptyset, (1, 4, 2)(3)(5))$ ,  $(E_2, \sigma_2) = (\{\underline{4}\}, (\underline{1}, \underline{3}, \underline{2}))$ , et  $\pi = \{(1, 4, 2)\}, \{(3)\}, \{(5), (\underline{1}, \underline{3}, \underline{2})\}$ , avec les mêmes conventions de couleur que l'exemple précédent. Alors on trouve  $(i_0, j_0) = (1, 3)$  et  $\varphi(\lambda) = ((\tilde{E}_1, \tilde{\sigma}_1), (\tilde{E}_2, \tilde{\sigma}_2); \tilde{\pi})$ , où  $(\tilde{E}_1, \tilde{\sigma}_1) = (\{3\}, (1, 4, 2)(5))$ ,  $(\tilde{E}_2, \tilde{\sigma}_2) = (\{\underline{4}\}, (\underline{1}, \underline{3}, \underline{2}))$ , et  $\tilde{\pi} = \{(1, 4, 2)\}, \{(5), (\underline{1}, \underline{3}, \underline{2})\}$ .

Comme pour (a) et (b), le nombre total de cycles des permutations de  $((\tilde{E}, \tilde{\sigma}); \tilde{\pi})$  varie d'une unité par rapport à celui de  $((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi)$ , et que  $b(\tilde{\pi}) + \sum_{i=1}^k |\tilde{E}_i| = b(\pi) + \sum_{i=1}^k |E_i|$ , il est clair que l'application  $\varphi$  définie ci-haut est une involution conservant les poids mais inversant les signes sur  $\mathcal{LC}(\underline{n})$ . Les détails sont laissés au lecteur.

**Définition de  $\psi$ :** Soit  $\lambda = ((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi) \in \mathcal{LC}(\underline{n})$ . On dira que la partition  $\pi$  est écrite *sous forme standard* si

- (a) chaque cycle  $c \in \text{Supp}(\underline{\sigma})$  apparaissant dans  $\pi$  commence par son minimum;
- (b) dans chaque bloc, les cycles sont écrits par ordre croissant de leurs minima;
- (c) les blocs  $\pi_l$  sont ordonnés entre eux par ordre croissant des minima des ensembles  $\text{Supp}(\pi_l)$ .

Les partitions apparaissant dans les exemples de la construction  $\varphi$  ci-dessus étaient toutes écrites sous forme standard.

Soit  $\lambda = ((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi) \in \mathcal{LC}(\underline{n})$ , et supposons que  $\pi$  est écrite sous forme standard. Déterminons le premier bloc de  $\pi$ ,  $\pi_{l_0}$  dont le support  $\text{Supp}(\pi_{l_0})$  contient au moins deux éléments de même couleur (i.e. de même abscisse). S'il n'y en a pas, on pose simplement  $\psi(\lambda) = \lambda$ .

Sinon, soit  $i_0$ ,  $1 \leq i_0 \leq k$ , la couleur minimale apparaissant plus d'une fois dans  $\pi_{l_0}$ , et soient  $c(i_0, 1), c(i_0, 2), \dots, c(i_0, p)$ , les cycles de couleur  $i_0$  apparaissant dans le bloc  $\pi_{l_0}$ , ordonnés selon l'ordre croissant des minima,  $p > 0$ . Posons  $\tau$  la permutation formée de ces cycles, i.e.

$$\tau = c(i_0, 1)c(i_0, 2) \dots c(i_0, p).$$

Deux éventualités peuvent se présenter:

- (i)  $c(i_0, p) = ((i_0, j_0))$  est un cycle de longueur un. Alors  $p \geq 2$ , et  $c(i_0, p - 1) = ((i_0, j_1), (i_0, j_2), \dots, (i_0, j_m))$  est un cycle de longueur  $m \geq 1$ , tel que  $j_1 < j_0$ .  $\psi(\lambda)$  est alors obtenue de  $\lambda$  en fusionnant dans  $\sigma_{i_0}$  et dans le bloc  $\pi_{l_0}$  les cycles  $c(i_0, p)$  et  $c(i_0, p - 1)$ , pour former le nouveau cycle  $((i_0, j_1), (i_0, j_2), \dots, (i_0, j_m), (i_0, j_0))$ . Nous poserons dans ce cas  $\psi_{\text{per}}(\tau)$  la permutation

$$\begin{aligned} \psi_{per}(\tau) = & c(i_0, 1)c(i_0, 2) \dots c(i_0, p-2) \\ & ((i_0, j_1), (i_0, j_2), \dots, (i_0, j_m), (i_0, j_0)). \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

Par exemple, prenons  $k = 2$  et soit  $\lambda = ((E_1, \sigma_1), (E_2, \sigma_2); \pi)$ , avec  $(E_1, \sigma_1) = (\{3\}, (1, 4)(2)(5))$ ,  $(E_2, \sigma_2) = (\{\underline{4}\}, (\underline{1}, \underline{3}, \underline{2}))$ , et  $\pi = \{(1, 4), (5)\}, \{(2), (\underline{1}, \underline{3}, \underline{2})\}$ . On a  $l_0 = 1$ ,  $i_0 = 1$ , et  $\psi(\lambda) = ((\tilde{E}_1, \tilde{\sigma}_1), (\tilde{E}_2, \tilde{\sigma}_2); \tilde{\pi})$ , où  $(\tilde{E}_1, \tilde{\sigma}_1) = (\{3\}, (1, 4, 5)(2))$ ,  $(\tilde{E}_2, \tilde{\sigma}_2) = (\{\underline{4}\}, (\underline{1}, \underline{3}, \underline{2}))$ , et  $\tilde{\pi} = \{(1, 4, 5)\}, \{(2), (\underline{1}, \underline{3}, \underline{2})\}$ . De plus,  $\psi_{per}(\tau) = \psi_{per}((1, 4)(5)) = (1, 4, 5)$ .

(ii)  $c(i_0, p) = ((i_0, j_1), (i_0, j_2), \dots, (i_0, j_m))$  est un  $m$ -cycle,  $m \geq 2$ ,  $j_1 < j_m$ . Alors  $\psi(\lambda)$  est obtenue de  $\lambda$  en scindant le cycle  $c(i_0, p)$  dans  $\sigma_{i_0}$  et dans le bloc  $\pi_{l_0}$ , pour former les deux cycles  $((i_0, j_1), (i_0, j_2), \dots, (i_0, j_{m-1}))$  et  $((i_0, j_m))$ . De nouveau, nous poserons dans ce cas  $\psi_{per}(\tau)$  la permutation

$$\begin{aligned} \psi_{per}(\tau) = & c(i_0, 1)c(i_0, 2) \dots c(i_0, p-1) \\ & ((i_0, j_1), (i_0, j_2), \dots, (i_0, j_{m-1}))(i_0, j_0). \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

Par exemple, prenons  $k = 2$  et soit  $\lambda = ((E_1, \sigma_1), (E_2, \sigma_2); \pi)$ , avec  $(E_1, \sigma_1) = (\{3\}, (1, 4, 5)(2))$ ,  $(E_2, \sigma_2) = (\{\underline{4}\}, (\underline{1}, \underline{3}, \underline{2}))$ , et  $\pi = \{(1, 4, 5)\}, \{(2), (\underline{1}, \underline{3}, \underline{2})\}$ . On a  $l_0 = 1$ ,  $i_0 = 1$ ,  $m = 3$  et  $\psi(\lambda) = ((\tilde{E}_1, \tilde{\sigma}_1), (\tilde{E}_2, \tilde{\sigma}_2); \tilde{\pi})$ , où  $(\tilde{E}_1, \tilde{\sigma}_1) = (\{3\}, (1, 4)(2)(5))$ ,  $(\tilde{E}_2, \tilde{\sigma}_2) = (\{\underline{4}\}, (\underline{1}, \underline{3}, \underline{2}))$ , et  $\tilde{\pi} = \{(1, 4), (5)\}, \{(2), (\underline{1}, \underline{3}, \underline{2})\}$ .

Il est clair que l'application  $\psi$  est une involution conservant les poids et inversant les signes sur  $\mathcal{LC}(\underline{n})$ . Les détails sont laissés au lecteur.

De même, nous lui laissons le soin de vérifier que  $Fix(\varphi; Fix(\psi; \mathcal{LC}(\underline{n}))) = Fix(\psi; Fix(\varphi; \mathcal{LC}(\underline{n}))) = Fix(\varphi \circ \psi) = Fix(\psi \circ \varphi)$ , et que cet ensemble est caractérisé par les conditions Fix.1 et Fix.2 énoncées plus haut.  $\square$

**COROLLAIRE 3.2.3:** (*orthogonalité*)

$$\mathcal{L}^{(a)}(C_n^{(a)}) = \delta_{n,0}, \quad (3.2.17)$$

$$\text{et } \mathcal{L}^{(a)}(C_n^{(a)}(x)C_m^{(a)}(x)) = a^n n! \delta_{n,m}. \quad (3.2.18)$$

**DÉMONSTRATION:**

Ces résultats peuvent être dérivés algébriquement de la série génératrice (3.2.10), ou combinatoirement de la caractérisation de l'ensemble  $Fix(\varphi \circ \psi)$ .

En effet, pour (3.2.17), comme il n'y a qu'une seule couleur, il est impossible de construire des partitions dont les supports des blocs contiennent au moins deux éléments de couleurs différentes, à moins que  $n = 0$ .

De même, pour (3.2.18),

$$\begin{aligned} Fix(\varphi \circ \psi; \mathcal{LC}(n, m)) &= \left\{ ((\emptyset, Id_{\{1\} \times \llbracket n \rrbracket}), (\emptyset, Id_{\{2\} \times \llbracket m \rrbracket}); \pi) \mid \right. \\ &\quad \left. \begin{array}{l} \text{chaque bloc de } \pi \text{ contient au moins deux} \\ \text{1-cycles, tous de couleurs distinctes} \end{array} \right\}, \\ &= \begin{cases} \emptyset, & \text{si } n \neq m \\ \left\{ ((\emptyset, Id_{\{1\} \times \llbracket n \rrbracket}), (\emptyset, Id_{\{2\} \times \llbracket n \rrbracket}); \pi) \mid \right. \\ \quad \left. \pi = \{((1, 1)), ((2, j_1)), \dots, ((1, n)), \right. \\ \quad \left. ((2, j_n))\}, \text{ où } \{j_1, \dots, j_n\} = \llbracket n \rrbracket \right\}, & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Puisque pour  $((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi) \in Fix(\varphi \circ \psi)$ , la pondération se réduit au "a-comptage" du nombre de blocs de la partition  $\pi$ , (3.2.18) en découle.  $\square$

### 3.3 PROPRIÉTÉS CLASSIQUES DES POLYNÔMES DE CHARLIER

Les propriétés suivantes des polynômes de Charlier  $C_n^{(a)}(x)$  sont bien connues (cf par exemple Chihara [Chi], chapitre VI, pages 170-172):

#### THÉORÈME 3.3.1:

a) *série génératrice*

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(a)}(x) \frac{t^n}{n!} = e^{-at}(1+t)^x; \quad (3.3.1)$$

b) *formule explicite*

$$C_n^{(a)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x(x-1)\dots(x-k+1)(-a)^{n-k}; \quad (3.3.2)$$

c) *réurrence linéaire à trois termes*

$$C_{k+1}^{(a)}(x) = (x - (k + a)) C_k^{(a)}(x) - ak C_{k-1}^{(a)}(x), \quad (3.3.3)$$

avec conditions initiales  $C_{0,q}(x) = 1$  et  $C_{1,q}(x) = x - a$ ;

d) *orthogonalité*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(a)} \left( C_m^{(a)}(x) C_n^{(a)}(x) \right) &= \int_0^{\infty} C_m^{(a)}(x) C_n^{(a)}(x) d\Psi^{(a)}(x) \\ &= a^n n! \delta_{m,n}, \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

où  $d\Psi^{(a)}(x) = \frac{e^{-a} a^x}{x!}$  sont pour  $x = 0, 1, 2, \dots$ ;

e) *moments*

$$\nu_n^{(a)} = f(x^n) = \sum_{k=0}^{\infty} k^n \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \quad (3.3.5)$$

$$= \sum_{k=0}^n S(n, k) a^k; \quad (3.3.6)$$

f) *équations aux différences*

$$\Delta C_n^{(a)}(x) = nC_{n-1}^{(a)}(x), \quad (3.3.7)$$

$$a\Delta^2 C_n^{(a)}(x) = (x+1-a-n)\Delta C_n^{(a)}(x) - nC_n^{(a)}(x), \quad (3.3.8)$$

où l'opérateur  $\Delta$  est défini par  $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ .

### DÉMONSTRATION:

a) En se plaçant par exemple dans le contexte de la théorie des espèces pondérées, il est facile de voir que les permutations partielles pondérées, interprétant combinatoirement les polynômes de Charlier, sont isomorphes au produit de l'espèce  $\mathbb{E}_{(-a)}$  des ensembles dont chaque élément est pondéré par  $(-a)$ , avec l'espèce  $\mathbb{S}_{(-x)}(-X)$  des permutations dont chaque cycle est pondéré par  $(-x)$  et chaque élément sous-jacent par  $(-1)$ . En passant aux séries génératrices, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(a)}(x) \frac{t^n}{n!} &= e^{-at} \left( \frac{1}{1-(-t)} \right)^{-x}, \\ &= e^{-at} (1+t)^x. \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

b) La formule explicite des polynômes de Charlier est combinatoirement triviale, une fois connue la formule

$$x(x-1)\dots(x-n+1) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} c(n, k) x^k, \quad (3.3.9)$$

où  $c(n, k)$  désigne les nombres de Stirling de première espèce (sans signe), dont l'interprétation combinatoire classique est le nombre de permutations de l'ensemble  $[[n]]$  en  $k$  cycles.

c), d) et e) sont l'objet de la section 3.2.

e) Pour passer du membre de droite de (3.3.5) à (3.3.6), il suffit d'effectuer les manipulations suivantes: étant donné que

$$k^n = \sum_{j=0}^{\infty} S(n, j) k(k-1) \dots (k-j+1), \quad (3.3.10)$$

on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} k^n \frac{a^k}{k!} e^{-a} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} S(n, j) k(k-1) \dots (k-j+1) \frac{a^k}{k!} e^{-a} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} S(n, j) a^j e^{-a} \sum_{k=j}^{\infty} \frac{a^{k-j}}{(k-j)!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} S(n, j) a^j e^{-a} e^a \\ &= \sum_{k=0}^n S(n, k) a^k. \end{aligned}$$

f) Nous dirons qu'une permutation  $\tau$  est une *sous-permutation* d'une permutation  $\sigma$ , et nous écrirons  $\tau \preceq \sigma$ , si et seulement si  $CYCLE(\tau) \subseteq CYCLE(\sigma)$ . Par exemple,  $\tau = (1, 3)(4, 8, 6)(5)$  est une sous-permutation de la permutation  $\sigma = (1, 3)(2, 9, 7)(4, 8, 6)(5)(10)$ . Si de plus,  $CYCLE(\tau) \neq CYCLE(\sigma)$ , nous dirons que  $\tau$  est une *sous-permutation stricte* de  $\sigma$ , et nous écrirons  $\tau \prec \sigma$ .

Pour l'identité (3.3.7), on a clairement

$$\begin{aligned} \Delta C_n^{(a)}(x) &= C_n^{(a)}(x+1) - C_n^{(a)}(x), \\ &= \sum_{(E, \sigma) \in C(\llbracket n \rrbracket)} w(E, \sigma) (x+1)^{cyc(\sigma)} - \sum_{(E, \sigma) \in C(\llbracket n \rrbracket)} w(E, \sigma) x^{cyc(\sigma)}, \\ &= \sum_{(E, \sigma) \in C(\llbracket n \rrbracket)} \sum_{\tau \preceq \sigma} w(E, \sigma) x^{cyc(\tau)} - \sum_{(E, \sigma) \in C(\llbracket n \rrbracket)} w(E, \sigma) x^{cyc(\sigma)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{(E,\sigma) \in C(\llbracket n \rrbracket)} \sum_{\tau \prec \sigma} w(E,\sigma) x^{cyc(\tau)}, \\
&= \sum_{(E,\sigma) \in C(\llbracket n \rrbracket)} \sum_{\tau \prec \sigma} (-1)^{n-cyc(\sigma)} a^{|E|} x^{cyc(\tau)}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, l'expression " $\Delta C_n^{(a)}(x)$ " correspond au comptage de l'ensemble

$$\left\{ (E, \tau_1, \tau_2) \mid (E, \sigma) \in C(\llbracket n \rrbracket), \text{ où } CYCLE(\sigma) = CYCLE(\tau_1) \cup CYCLE(\tau_2), \right. \\
\left. Supp(\tau_1) \cap Supp(\tau_2) = \emptyset, \text{ et } \tau_1 \neq \emptyset \right\}, \quad (3.3.11)$$

(dans lequel  $CYCLE(\sigma)$  et  $Supp(\sigma)$  désignent respectivement l'ensemble formé des cycles de la permutation  $\sigma$  et le support de  $\sigma$ ), selon la pondération

$$v(E, \tau_1, \tau_2) = (-1)^{n-cyc(\tau_1)-cyc(\tau_2)} a^{|E|} x^{cyc(\tau_2)}. \quad (3.3.12)$$

Or, si l'on applique à cet ensemble l'involution  $\tilde{\psi}$  conservant les poids mais inversant les signes suivante:

$$\tilde{\psi}(E, \tau_1, \tau_2) = \begin{cases} (E, \tau_1, \tau_2), & \text{si } |Supp(\tau_1)| = 1, \\ (E, \psi_{per}(\tau_1), \tau_2), & \text{si } |Supp(\tau_1)| \geq 2, \end{cases} \quad (3.3.13)$$

où  $\psi_{per}$  a été définie en (3.2.15) et (3.2.16) de la section précédente et consiste en gros à fusionner ou scinder les derniers cycles de la permutation  $\tau_1$ , on obtient comme ensemble de points fixes

$$Fix(\tilde{\psi}) = \left\{ (E, (i), \tau) \mid (E, \tau) \in C(\llbracket n \rrbracket \setminus \{i\}) \right\}. \quad (3.3.14)$$

D'où

$$\Delta C_n^{(a)}(x) = \sum_{(E,(i),\tau) \in Fix(\tilde{\psi})} v(E, (i), \tau),$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{(E,(i),\tau) \in \text{Fix}(\tilde{\psi})} (-1)^{n-1-\text{cy}c(\tau)} a^{|E|} x^{\text{cy}c(\tau)}, \\
&= \sum_{(E,(i),\tau) \in \text{Fix}(\tilde{\psi})} w(E, \tau) x^{\text{cy}c(\tau)} = \binom{n}{1} C_{n-1}^{(a)}(x),
\end{aligned}$$

ce qui établit (3.3.7).

Pour (3.3.8), on peut démontrer l'identité suivante

$$nC_n^{(a)}(x) = (x - a - (n - 1))\Delta C_n^{(a)}(x) - a\Delta^2 C_n^{(a)}(x), \quad (3.3.15)$$

sensiblement de la même manière que la récurrence linéaire à trois termes dans la proposition 3.3.1. En effet,  $n \cdot C_n^{(a)}(x)$  s'interprète combinatoirement en termes de structures  $(E, \sigma) \in C(\llbracket n \rrbracket)$  pointées en un entier  $i_0 \in \llbracket n \rrbracket$ . L'analyse des différentes positions possible pour  $i_0$  dans  $(E, \sigma)$  permet de retrouver le membre de droite de (3.3.15). Les détails sont laissés au lecteur.  $\square$

### 3.4 DÉMONSTRATION COMBINATOIRE DE L'ORTHOGONALITÉ DES $q$ -POLYNÔMES DE CHARLIER ET COEFFICIENTS DE LINÉARISATION

Il existe plusieurs  $q$ -analogues des polynômes de Charlier et celui que nous proposons n'est pas le  $q$ -analogue usuel considéré dans la littérature (cf Andrews et Askey [AA], Hahn [Ha] et Milne [Mi2]). C'est plutôt la version normalisée suivante des polynômes de Al Salam-Carlitz, notés  $U_n(x, a)$  dans le livre de Chihara [Chi]:

$$C_{n,q}^{(a)}(x) = a^n U_n \left( \frac{x}{a} - \frac{1}{a(1-q)}, \frac{-1}{a(1-q)} \right). \quad (3.4.1)$$

Notre démarche a été la suivante: nous avons décrété que les  $q$ -polynômes de Charlier  $\{C_{n,q}^{(a)}(x)\}_{n \geq 0}$  seraient la classe de polynômes orthogonaux par rapport à la fonctionnelle linéaire  $\mathcal{L}_q^{(a)}$ , dont les moments  $\nu_{n,q}^{(a)}$  forment le  $q$ -analogue naturel des moments  $\nu_n^{(a)}$  des polynômes de Charlier, à savoir

$$\nu_n^{(a)} = \sum_{k=0}^n S_q[n, k] a^k, \quad (3.4.2)$$

dans lequel  $S_q[n, k]$  désigne les  $q$ -nombres de Stirling usuels dont la récurrence est donnée par

$$S_q[n+1, k] = S_q[n, k-1] + [k]_q S_q[n, k], \quad (3.4.3)$$

avec les conditions initiales  $S_q[0, k] = \delta_{0,k}$  et  $S_q[n, 0] = \delta_{n,0}$ .

Il s'avère que les coefficients de la récurrence linéaire à trois termes (3.1.3) correspondant à cette suite de moments sont

$$b_{k,q} = q^k a + [k]_q \quad \text{et} \quad \lambda_{k,q} = a q^{k-1} [k]_q. \quad (3.4.4)$$

Comme nous l'avons expliqué dans l'introduction de ce chapitre, la démonstration combinatoire de ce fait, utilisant la théorie combinatoire des polynômes orthogonaux généraux de X.G. Viennot [Vi1], repose sur le résultat de M. Wachs et D. White [WaWh] qu'un certain paramètre qu'ils appellent " $rs$ " sur les partitions ensemblistes a même distribution que les inversions. Ce paramètre est obtenu en transportant les  $q$ -pondérations correspondant aux coefficients  $b_{k,q}$  et  $\lambda_{k,q}$ , donnés en (3.4.4), le long d'une bijection de J. Françon et X.G. Viennot [FrVi], entre les "histoires de Charlier" et les partitions d'ensemble. Voici les définitions formelles des paramètres " $rs$ " et "inv" sur les partitions.

**DÉFINITIONS 3.4.1:** La *représentation sous forme de mot* d'une partition  $\pi$  de l'ensemble  $[[n]]$  en  $k$  blocs, est le mot  $m(\pi) = m_1 m_2 \dots m_n$ , où  $m_i$  est égal au numéro du bloc contenant l'entier  $i$  dans l'écriture standard de  $\pi$  (c'est-à-dire dont chaque bloc est écrit par ordre croissant de ses éléments et dont les blocs sont ordonnés par ordre croissant de leurs minima). Cette représentation correspond aux fonctions à croissance restreinte associées à des partitions de S.C. Milne [Mil].

Posons

$$R(m(\pi)) = \{i \mid m_i \text{ est la première occurrence de l'entier } j, 1 \leq j \leq k, \\ \text{en lisant } m(\pi) \text{ de droite à gauche}\}, \quad (3.4.5)$$

et

$$L(m(\pi)) = \{i \mid m_i \text{ est la première occurrence de l'entier } j, 1 \leq j \leq k, \\ \text{en lisant } m(\pi) \text{ de gauche à droite}\}. \quad (3.4.6)$$

L'ensemble  $R(m(\pi))$  contient donc les maxima des blocs de la partition, et l'ensemble  $L(m(\pi))$ , les minima des blocs.

Une *inversion* de  $\pi$  est un couple  $(i, j)$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ , tel que  $i \in L(m(\pi))$  et  $m_i > m_j$ . Nous noterons  $\text{inv}(\pi)$  le *nombre d'inversions* de  $\pi$ .

Une *non-fermeture* de  $\pi$  est un couple  $(i, j)$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ , tel que  $j \in R(m(\pi))$  et  $m_i > m_j$ . Nous noterons  $\text{rs}(\pi)$  le *nombre de non-fermetures* de  $\pi$ .

Par exemple, pour  $\pi = \{\{1, 2, 8\}, \{3, 5, 7\}, \{4\}, \{6, 9\}\}$ ,  $m(\pi) = 112324214$ ,  
 $R(m(\pi)) = \{4, 7, 8, 9\}$ ,  $L(m(\pi)) = \{1, 3, 4, 6\}$ ,  
 $\text{inv}(\pi) = |\{(3, 8), (4, 5), (4, 7), (4, 8), (6, 7), (6, 8)\}| = 6$ ,  
 et  $\text{rs}(\pi) = |\{(4, 7), (6, 7), (3, 8), (4, 8), (5, 8), (6, 8), (7, 8)\}| = 7$ .

L'attribution du nom "nombre de non-fermetures" au paramètre  $rs$  peut sembler obscure, mais elle s'explique par le transport des  $q$ -pondérations le long de la bijection de Françon et Viennot. En effet, dans la construction de Françon-Viennot, les partitions sont obtenues par insertions successives des entiers de 1 à  $n$  dans la partition vide. À chaque étape, les blocs de la partition partiellement construite sont soit *ouverts*, soit *fermés*. Un bloc ouvert est un bloc auquel sera ajouté au moins un élément dans une étape ultérieure de la construction, alors qu'un bloc fermé ne recevra plus d'éléments. À la dernière étape de la construction, tous les blocs se trouvent fermés. Dans cette optique, le paramètre " $rs$ " compte, pour chaque entier  $i$ , le nombre de blocs ouverts qui précèdent le bloc où  $i$  est inséré, à la  $i$ -ième étape.

Nous avons donc à notre disposition deux interprétations combinatoires des moments  $\nu_{n,q}^{(a)}$  en terme de partitions:

$$\nu_{n,q}^{(a)} = \sum_{\pi \in \mathcal{P}([n])} q^{\text{inv}(\pi)} a^{b(\pi)}, \quad (3.4.7)$$

$$= \sum_{\pi \in \mathcal{P}([n])} q^{rs(\pi)} a^{b(\pi)}, \quad (3.4.8)$$

où  $\mathcal{P}([n])$  désigne l'ensemble des partitions sur l'ensemble  $[n]$ , et  $b(\pi)$  le nombre de blocs de la partition  $\pi$ . Nous utiliserons la deuxième interprétation combinatoire dans cette section et nous nous servirons de (3.4.7) dans la section 3.6.

La proposition suivante fournit une interprétation combinatoire des polynômes  $C_{n,q}^{(a)}(x)$  en terme d'un  $q$ -comptage de permutations partielles.

**PROPOSITION 3.4.2:** *La suite de polynômes  $\{C_{n,q}^{(a)}(x)\}$  satisfait*

$$C_{n,q}^{(a)}(x) = \sum_{(E,\sigma) \in \mathcal{C}([n])} w(E,\sigma) w_q(E,\sigma) x^{\text{cyc}(\sigma)}, \quad (3.4.9)$$

$$= |C(A_n)|_{w,q,x}, \quad (3.4.10)$$

où  $\text{cyc}(\sigma)$  désigne le nombre de cycles de la permutation  $\sigma$ ,  $w(E, \sigma)$  a été défini en (3.1.12) par

$$w(E, \sigma) = (-1)^{n-\text{cyc}(\sigma)} a^{|E|}, \quad (3.4.11)$$

et  $w_q(E, \sigma)$  a été défini en (3.1.18) par

$$w_q(E, \sigma) = q^{\text{inv}(\sigma)} \cdot \prod_{i \in E} q^{i-1}. \quad (3.4.12)$$

Par exemple, si  $n=8$  et  $(E, \sigma) = (\{7, 2\}, (1, 5, 3)(4, 8)(6))$ ,  $\text{cyc}(\sigma) = 3$ ,  $w(E, \sigma) = (-1)^{8-3} a^2 = -a^2$ , et  $w_q(E, \sigma) = q^3 q^{6+1} = q^{10}$ .

Remarquons que le  $q$ -poids d'une permutation partielle  $(E, \sigma)$ , sous forme standard, est exactement égal au nombre d'inversions du mot  $m(E, \sigma)$  obtenu en enlevant les parenthèses et accolades de  $(E, \sigma)$ . En effet, comme on place les éléments  $k$  de  $E$  par ordre décroissant, tous les entiers plus petits que  $k$  se trouvent à sa droite et causent donc  $k - 1$  inversions.

### DÉMONSTRATION:

La démonstration de cette proposition est exactement la même que celle de la proposition 3.2.1, modulo le fait qu'on doit tenir compte cette fois des inversions générées dans les mots  $m(E, \sigma)$ , pour obtenir la récurrence linéaire à trois termes suivante:

$$C_{n+1,q}^{(a)}(x) = (x - aq^n - [n]_q) C_{n,q}^{(a)}(x) - aq^{n-1} [n]_q C_{n-1,q}^{(a)}(x), \quad (3.4.13)$$

avec les conditions initiales  $C_{0,q}^{(a)}(x) = 1$  et  $C_{1,q}^{(a)}(x) = x - a$ .

Passons en revue les trois cas considérés lors de l'insertion de l'entier  $(n+1)$  dans une permutation partielle  $(E, \sigma) \in C([n])$ .

- (1)  $(n + 1)$  forme un nouveau cycle de la permutation partielle. Alors il vient s'ajouter en toute dernière position du mot  $m(E, \sigma)$ , et ne cause aucune nouvelle inversion. Ce cas correspond au terme " $x \cdot C_{n,q}^{(a)}(x)$ " de la récurrence (3.4.13).
- (2)  $(n + 1)$  ne fait pas partie de la permutation elle-même. Alors il vient s'ajouter en toute première position du mot  $m(E, \sigma)$ , et cause exactement  $n$  inversions (une pour chaque entier subséquent). Ce cas correspond au terme " $-aq^n C_{n,q}^{(a)}(x)$ " de la récurrence (3.4.13).
- (3)  $(n + 1)$  s'insère dans la permutation sans créer de nouveau cycle.

D'un côté, dans la démonstration de la proposition 3.2.1, on ajoutait l'entier  $(n + 1)$  immédiatement après l'un des  $n$  éléments déjà placés dans  $(E, \sigma)$ , dont il devenait alors l'image. Ce faisant,  $(n + 1)$  se retrouve en  $i$ -ième position du mot  $m(E, \sigma)$ ,  $2 \leq i \leq n + 1$ , et cause exactement  $n + 1 - i$  inversions (une pour chaque entier subséquent). Ce cas correspond au terme " $-[n]_q C_{n,q}^{(a)}(x)$ " de la récurrence (3.4.13).

Ensuite, les structures "illégales" obtenues par cette opération étaient reconstruites à partir des permutations partielles  $(E', \sigma')$  de l'ensemble  $C(\llbracket n-1 \rrbracket)$ . Une fois effectué le choix de la pré-image  $k \in \llbracket n \rrbracket$  de  $(n + 1)$ , les entiers  $i \geq k$  étaient augmentés de 1 dans  $(E', \sigma')$ , et  $(k, n + 1)$  inséré dans  $E'$  de manière à ce que  $k$  respecte l'ordre décroissant des autres nombres dans l'ensemble  $E'$ .

Tous les entiers se trouvant à gauche de  $(k, n + 1)$ , dans le mot associé à la "permutation partielle illégale" obtenue  $(\tilde{E}, \tilde{\sigma})$ , sont supérieurs à  $k$  et forment donc une inversion avec  $k$ . De même, tous les entiers à droite de  $(k, n + 1)$  dans  $m(\tilde{E}, \tilde{\sigma})$  sont inférieurs à  $(n + 1)$  et forment ainsi une inversion

avec  $(n + 1)$ . Finalement, les entiers  $1, 2, \dots, (k - 1)$  se trouvent à droite de  $(k, n + 1)$  dans  $m(\tilde{E}, \tilde{\sigma})$  et forment chacun une inversion avec  $k$ . En tout,  $(n - 1) + (k - 1)$  inversions sont ajoutées lors du passage de la permutation partielle  $(E, \sigma)$  à la “permutation partielle illégale”  $(\tilde{E}, \tilde{\sigma})$ . Ce cas correspond au terme “ $-aq^{n-1}[n]_q C_{n-1,q}^{(a)}(x)$ ” de la récurrence (3.4.13).  $\square$

Les modèles combinatoires que nous proposons pour les  $q$ -polynômes de Charlier  $C_{n,q}^{(a)}(x)$  et les  $q$ -moments  $\nu_{n,q}^{(a)}(x)$  ne sont rien d’autre qu’un raffinement par  $q$ -comptage des modèles que nous avons introduits dans la section 3.2 pour les polynômes de Charlier  $C_n^{(a)}(x)$  et les moments  $\nu_n^{(a)}(x)$  respectivement. Malheureusement, ce  $q$ -comptage n’est pas compatible avec les involutions  $\varphi$  et  $\psi$  définies à la section 3.2. Cependant, deux nouvelles involutions,  $\varphi_q$  et  $\psi_q$ , plus ou moins inspirées des deux premières, seront suffisantes pour démontrer l’orthogonalité des polynômes et quelques propriétés des coefficients de linéarisation. Plus précisément, nous allons démontrer tous les résultats suivants:

**THÉORÈME 3.4.3:** *Si  $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_k$ , alors dans*

$$\mathcal{L}_q^{(a)} \left( C_{n_1,q}^{(a)}(x) C_{n_2,q}^{(a)}(x) \dots C_{n_k,q}^{(a)}(x) \right), \quad (3.4.14)$$

*le plus petit exposant de  $a$  qui apparaisse est égal  $n_k$ . Le plus grand exposant de  $a$  est égal à  $n_1 + n_2 + \dots + n_{k-1}$ . Le coefficient de  $a^{n_1+n_2+\dots+n_{k-1}}$  est un polynôme en  $q$ , unitaire et de degré  $n_k \cdot (n_1 + n_2 + \dots + n_{k-1} - 1)$ . Le coefficient de linéarisation (3.4.14) est divisible par  $q^{\binom{n_k}{2}}$ .*

*De plus,*

$$\mathcal{L}_q^{(a)} \left( C_{n,q}^{(a)}(x) \right) = \delta_{n,0}, \quad (3.4.15)$$

$$\mathcal{L}_q^{(a)} \left( C_{n,q}^{(a)}(x) C_{m,q}^{(a)}(x) \right) = a^n q^{\binom{n}{2}} [n]_q! \delta_{n,m}, \quad (3.4.16)$$

et si  $n_1 + n_2 + \dots + n_{k-1} = n_k$ ,

$$\mathcal{L}_q^{(a)} \left( C_{n_1, q}^{(a)}(x) C_{n_2, q}^{(a)}(x) \dots C_{n_k, q}^{(a)}(x) \right) = a^{n_k} q^{\binom{n_k}{2}} [n_k]_q!. \quad (3.4.17)$$

Remarquons que d'après ce théorème, si  $n_1 + n_2 + \dots + n_{k-1} < n_k$ , le coefficient de linéarisation (3.4.14) correspondant est nul. Ainsi sont expliqués tous les zéros apparaissant dans les tableaux des appendices B, C et D.

Soit  $((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi) = ((E_1, \sigma_1), (E_2, \sigma_2), \dots, (E_k, \sigma_k); \pi) \in \mathcal{LC}(\underline{n})$ , où l'ensemble  $\mathcal{LC}(\underline{n})$  a été introduit en (3.2.11) de la section 3.2. Dans la suite de cette section, à moins d'indications contraires, on supposera toujours que  $0 \leq n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_k$ .

Posons

$$\begin{aligned} w_q(\underline{E}, \underline{\sigma}) &= \prod_{i=1}^k w_q(E_i, \sigma_i), \\ &= \prod_{i=1}^k \left( q^{\text{inv}(\sigma_i)} \prod_{(i, j) \in E_i} q^{j-1} \right). \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

Combinatoirement, il est clair que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_q^{(a)} \left( C_{n_1, q}^{(a)}(x) C_{n_2, q}^{(a)}(x) \dots C_{n_k, q}^{(a)}(x) \right) \\ = \sum_{((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi) \in \mathcal{LC}(\underline{n})} w((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi) w_q(\underline{E}, \underline{\sigma}) q^{rs(\pi)}, \end{aligned} \quad (3.4.19)$$

$$= |\mathcal{LC}(\underline{n})|_{\mathcal{L}, q}, \quad (3.4.20)$$

où la notation  $w((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi)$  a été introduite en (3.2.13) de la section 3.2.

**DÉFINITION 3.4.4:** Nous dirons d'un couple  $(i, j)$ ,  $1 \leq i \leq k$  et  $1 \leq j \leq n_i$ , qu'il *cause un facteur a* s'il satisfait l'une des conditions suivantes:

- i)  $(i, j) \in E_i$ ; ou
- ii)  $(i, j)$  est le minimum de l'ensemble  $Supp(\pi_l)$ ,  $\pi_l$  désignant un bloc de la partition  $\pi$ .

Évidemment, la puissance de  $a$  apparaissant dans la pondération  $w$  introduite en (3.2.13) d'un élément  $((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi) \in \mathcal{LC}(\underline{n})$ , est égale au nombre de couples  $(i, j)$  causant un facteur  $a$ .

Nous divisons le théorème 3.4.3 en une série de lemmes.

**LEMME 3.4.5:** (*"q-analogue" de  $\psi$* )

*Le plus petit exposant de la variable  $a$  apparaissant dans (3.4.14) est au moins égal à  $n_k$ .*

**DÉMONSTRATION:**

L'involution conservant les  $q$ -poids mais inversant les signes  $\psi_q$  que nous allons introduire est inspirée de l'involution  $\psi$  de la section 3.2, en ce sens que l'ensemble des points fixes obtenus aura la forme

$$\begin{aligned} Fix(\psi_q; \mathcal{LC}(\underline{n})) = \{ & ((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi) \in \mathcal{LC}(\underline{n}) \mid \sigma_k \text{ est la permutation identité} \\ & \text{sur } (\{k\} \times \llbracket n_k \rrbracket) \setminus E_k, \text{ et dans le support de chaque bloc} \\ & \text{de } \pi, \text{ il y a au plus un élément de couleur } k\}, \end{aligned} \quad (3.4.21)$$

donc  $\psi_q$  influe sur les propriétés des éléments de couleur  $k$  de la même manière que  $\psi$ .

**Définition de  $\psi_q$ :** Soit  $((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi) \in \mathcal{LC}(\underline{n}) \setminus Fix(\psi_q)$ , et soit  $\sigma_k = c_1 c_2 \dots c_l$ , la décomposition standard en produit de cycles disjoints de  $\sigma_k$ . Déterminons

l'entier  $i_0$  maximum,  $1 \leq i_0 \leq l$ , tel que le support du bloc de  $\pi$  contenant le cycle  $c_{i_0}$  contient au moins deux couples de couleur  $k$  faisant partie de l'ensemble  $Supp(c_{i_0}c_{i_0+1} \dots c_l)$ . Puisque  $((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi) \notin Fix(\psi_q)$ ,  $i_0$  existe forcément. De plus, par maximalité,  $i_0$  satisfait l'une des deux conditions suivantes:

(i)  $c_{i_0}$  est un cycle de longueur supérieure ou égale à 2,

$c_{i_0+1}, c_{i_0+2}, \dots, c_l$  sont des points fixes de  $\sigma_k$ , et

les cycles  $c_{i_0}, c_{i_0+1}, \dots, c_l$  font tous partie de blocs différents dans  $\pi$ ; ou

(ii)  $c_{i_0}$  est un cycle de longueur supérieure ou égale à 1,

$c_{i_0+1}, c_{i_0+2}, \dots, c_l$  sont des points fixes de  $\sigma_k$ , et

les cycles  $c_{i_0}, c_{i_0+1}, \dots, c_l$  font tous partie de blocs de  $\pi$  différents, sauf pour un unique  $j_0$ ,  $i_0 < j_0 \leq l$  tel que  $c_{i_0}$  et  $c_{j_0}$  font partie du même bloc.

Par abus de notation, nous identifierons les 1-cycles  $c_i = ((k, j))$ ,  $i > i_0$ , avec la valeur du point fixe  $(k, j) \in \{k\} \times \llbracket n_k \rrbracket$ .

Si  $i_0$  satisfait la condition (i),  $c_{i_0} = ((k, j_1), \dots, (k, j_n))$ ,  $n \geq 2$ , et il existe un unique entier  $m$ ,  $0 \leq m \leq l - i_0$ , pour lequel

$$c_{i_0+1} < c_{i_0+2} < \dots < c_{i_0+m} < (k, j_n) < c_{i_0+m+1} < \dots < c_l, \quad (3.4.22)$$

dans l'ordre lexicographique. Alors on pose  $\psi_q((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi) = ((\underline{E}', \underline{\sigma}'); \pi')$ , où

1)  $E'_i = E_i$ , pour  $1 \leq i \leq k$ ,

2)  $\sigma'_i = \sigma_i$ , pour  $1 \leq i \leq k - 1$ ,

3)  $\sigma'_k = c_1 c_2 \dots c_{i_0-1} ((k, j_1), \dots, (k, j_{n-1})) c_{i_0+1} \dots c_{i_0+m} ((k, j_n)) c_{i_0+m+1} \dots c_l$ , et

4) si  $b_1, \dots, b_{l-i_0+1}$  désignent les blocs de la partition  $\pi$  sous forme standard lus de gauche à droite, qui contiennent un des cycles  $c_{i_0}, \dots, c_l$ , alors  $\pi'$  est obtenue à partir de  $\pi$  en remplaçant le cycle  $c_{i_0}$  par  $((k, j_1), \dots, (k, j_{n-1}))$ , et en plaçant les 1-cycles  $((k, j_n)), c_{i_0+1}, \dots, c_l$ , le cycle  $((k, j_n))$  d'abord et puis  $c_{i_0+1}$  à  $c_l$  dans l'ordre relatif dans lequel ils apparaissent à la lecture de  $\pi$  (de gauche à droite), dans les blocs  $b_1, \dots, b_{l-i_0+1}$  respectivement.

Par exemple, si  $k = 2, n_1 = 9, n_2 = 10$ ,

$$E_1 = \emptyset, \sigma_1 = (1)(2)(3)(4)(5)(6, 8, 9)(7),$$

$$E_2 = \{\underline{10}\}, \sigma_2 = (\underline{1}, \underline{2})(\underline{3}, \underline{9}, \underline{6})(\underline{4})(\underline{5})(\underline{7})(\underline{8}) \text{ et}$$

$$\pi = \left\{ (1), (\underline{1}, \underline{2}), (\underline{5}) \right\}, \left\{ (2), (\underline{8}) \right\}, \left\{ (3), (4) \right\}, \left\{ (5), (\underline{3}, \underline{9}, \underline{6}) \right\}, \\ \left\{ (6, 8, 9), (7), (\underline{7}) \right\}, \left\{ (\underline{4}) \right\},$$

dans lequel les entiers soulignés  $\underline{i}$  représentent les couples  $(2, i)$  de couleur 2 et les entiers non soulignés  $j$ , les couples  $(1, j)$  de couleur 1. Alors  $i_0 = 2$ ,  $m = 2$ ,  $c_{i_0} = (\underline{3}, \underline{9}, \underline{6})$ ,

$$E'_1 = E_1, \sigma'_1 = \sigma_1,$$

$$E'_2 = E_2, \sigma'_2 = (\underline{1}, \underline{2})(\underline{3}, \underline{9})(\underline{4})(\underline{5})(\underline{6})(\underline{7})(\underline{8}) \text{ et}$$

$$\pi = \left\{ (1), (\underline{1}, \underline{2}), (\underline{6}) \right\}, \left\{ (2), (\underline{5}) \right\}, \left\{ (3), (4) \right\}, \left\{ (5), (\underline{3}, \underline{9}), (\underline{8}) \right\}, \\ \left\{ (6, 8, 9), (7), (\underline{7}) \right\}, \left\{ (\underline{4}) \right\}.$$

Remarquons que l'entier maximum  $i'_0$  relatif à l'image  $\psi_q((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi) = ((\underline{E}', \underline{\sigma}'); \pi')$ , est exactement égal à l'entier  $i_0$ , et que  $((\underline{E}', \underline{\sigma}'); \pi')$  satisfait les conditions (ii) énoncées au début de la définition de  $\psi_q$ .

De plus, le nombre de cycles  $cyc(\sigma'_k) = cyc(\sigma_k) + 1$ , donc le poids de  $((\underline{E}', \underline{\sigma}'); \pi')$  est de signe opposé à celui de  $((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi)$ . L'exposant de la variable  $a$  comptabilisant le nombre d'éléments de  $E_1 \cup \dots \cup E_k$  et le nombre de blocs de  $\pi$  est invariant sous  $\psi_q$ .

Il reste à voir que  $\psi_q$  conserve la statistique  $q$ . Tout d'abord, la contribution au  $q$ -comptage des éléments des ensembles  $E'_i = E_i$  reste inchangée. De même, la contribution au  $q$ -comptage des inversions des permutations  $\sigma'_i = \sigma_i$ ,  $1 \leq i \leq k - 1$ , reste inchangée. Cependant, selon les notations introduites précédemment, dans  $\sigma'_k$ , il y a exactement  $m$  inversions de moins que dans  $\sigma_k$  (inversions  $(k, j_n)$  avec  $c_{i_0+1}, \dots, c_{i_0+m}$  perdues). Nous allons montrer qu'elles sont récupérées dans le paramètre  $rs(\pi')$ .

Le nombre de non-fermetures  $(c, c')$  causées par un cycle  $c$  d'une permutation  $\sigma$ , dépendant seulement de la présence d'un cycle  $c'$  plus grand (par rapport à l'ordre lexicographique des minima des cycles) dans les blocs de  $\pi$  précédant, il est clair que la contribution des cycles des permutations  $\sigma'_i = \sigma_i$ ,  $1 \leq i \leq k - 1$ , ainsi que de  $c'_1 = c_1, c'_2 = c_2, \dots, c'_{i_0-1} = c_{i_0-1}$ , à la statistique " $rs$ " reste constante en appliquant  $\psi_q$ . De plus, pour la même raison, la contribution à  $rs(\pi)$  des cycles  $c_{i_0}, \dots, c_l$  ne dépend que des positions relatives de ces cycles entre eux dans la partition  $\pi$ . Or, l'ordre relatif de  $c_{i_0+1}$  à  $c_l$  est préservé par  $\psi_q$ . Pour ce qui est du cycle  $c_{i_0}$  scindé en  $c'_{i_0} = ((k, j_1), \dots, (k, j_{n-1}))$  et  $((k, j_n))$ , si  $c_{i_0}$  se trouvait dans le  $i$ -ième bloc  $b_i$  de la liste  $b_1, \dots, b_{l-i_0+1}$ , il y avait dans  $\pi$  exactement  $(i - 1)$  non-fermetures de la forme  $(c_{i_0}, c)$  ( $c$  parcourant les 1-cycles de la liste  $c_{i_0+1}, \dots, c_l$  apparaissant dans les blocs  $b_j$ ,  $1 \leq j \leq i - 1$ ). Alors dans  $\pi'$ ,  $c'_{i_0}$  se trouve dans le bloc  $b_i$ ,  $((k, j_n))$  se trouve dans le bloc  $b_1$ , il y a exactement  $(i - 1)$  non-fermetures de la forme  $(c'_{i_0}, c)$  ( $c$  parcourant les 1-cycles de la liste  $((k, j_n), c_{i_0+1}, \dots, c_l$  apparaissant dans

les blocs  $b_j$ ,  $1 \leq j \leq i - 1$ , après application de  $\psi_q$ , et il y a exactement  $m$  nouvelles non-fermetures de la forme  $((k, j_n), c)$ , soient  $((k, j_n), c_{i_0+1})$ ,  $((k, j_n), c_{i_0+2}) \dots, ((k, j_n), c_{i_0+m})$ . D'où  $rs(\pi') = rs(\pi) + m$ .

Par conséquent,

$$w((\underline{E}', \underline{\sigma}'); \pi') w_q(\underline{E}', \underline{\sigma}') q^{rs(\pi')} = -w((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi) w_q(\underline{E}, \underline{\sigma}) q^{rs(\pi)}.$$

Inversement, si  $i_0$  satisfait la condition (ii), soit  $c_{i_0} = ((k, j_1), \dots, (k, j_n))$ . On pose alors  $\psi_q((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi) = ((\underline{E}'', \underline{\sigma}''); \pi'')$ , où

- 1)  $E''_i = E_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ ,
- 2)  $\sigma''_i = \sigma_i$ ,  $1 \leq i \leq k - 1$ ,
- 3)  $\sigma''_k = c_1 c_2 \dots c_{i_0-1} ((k, j_1), \dots, (k, j_n), c_{i_0+m+1}) c_{i_0+1} \dots c_{i_0+m} c_{i_0+m+2} \dots c_l$ , où  $c_{i_0+m+1}$  est le premier 1-cycle parmi  $c_{i_0+1}, \dots, c_l$ , qui apparaît dans un bloc de  $\pi$ , écrite sous forme standard, et
- 4) si  $b_1, \dots, b_{l-i_0}$  désignent les blocs de  $\pi$  lus de gauche à droite, contenant un des cycles  $c_{i_0}, \dots, c_l$ ,  $\pi''$  est obtenue à partir de  $\pi$  en remplaçant le cycle  $c_{i_0}$  par  $((k, j_1), \dots, (k, j_n), c_{i_0+m+1})$  et en plaçant les 1-cycles  $c_{i_0+1}, \dots, c_{i_0+m}, c_{i_0+m+2}, \dots, c_l$  dans l'ordre relatif dans lequel ils apparaissaient dans  $\pi$ , dans les blocs  $b_1, \dots, b_{l-i_0}$  de  $\pi''$ , excepté dans celui qui contient déjà  $((k, j_1), \dots, (k, j_n), c_{i_0+m+1})$ .

Nous laissons le soin au lecteur de montrer que l'application  $\psi_q$  ainsi définie est une involution conservant les poids mais inversant les signes, dont l'ensemble de points fixes est  $Fix(\psi_q; \mathcal{LC}(\underline{n}))$  (voir (3.4.21)). On a donc,

$$\mathcal{L}_q^{(a)} \left( C_{n_1, q}^{(a)}(x) C_{n_2, q}^{(a)}(x) \dots C_{n_k, q}^{(a)}(x) \right) = |Fix(\psi_q; \mathcal{LC}(\underline{n}))|_{\mathcal{L}, q}. \quad (3.4.23)$$

Examinons les points fixes  $((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi)$  de  $\psi_q$ . Chaque élément de  $E_k$  cause un facteur  $a$ . De plus,  $\sigma_k$  est la permutation identité et tous ses points fixes font partie de blocs de  $\pi$  différents, donc  $\pi$  doit posséder au moins  $n_k - |E_k|$  blocs, comptant pour un facteur  $a$  chacun. Par conséquent, tous les éléments de  $Fix(\psi_q; \mathcal{LC}(\underline{n}))$  ont au moins un facteur  $a^{|E_k| + n_k - |E_k|} = a^{n_k}$  dans leur pondération. D'où la conclusion.  $\square$

**LEMME 3.4.6:** (“ $q$ -analogue” de  $\varphi$ )

*Le plus grand exposant de  $a$  apparaissant dans (3.4.14) est au plus égal à  $n_1 + n_2 + \dots + n_{k-1}$ . De plus, (3.4.14) est divisible par  $q^{\binom{n_k}{2}}$ .*

**DÉMONSTRATION:**

Nous allons construire une involution  $\varphi_q$  conservant les  $q$ -poids mais inversant les signes, inspirée de l'involution  $\varphi$  de la section 3.2, que nous appliquerons à l'ensemble  $Fix(\psi_q; \mathcal{LC}(\underline{n}))$  défini en (3.4.21), et dont les points fixes formeront l'ensemble suivant:

$$Fix(\varphi_q; Fix(\psi_q)) = \{((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi) \in \mathcal{LC}(\underline{n}) \mid E_k = \emptyset, \sigma_k = \text{Identité sur } \{k\} \times \llbracket n_k \rrbracket, \text{ et dans le support de chaque bloc de } \pi, \text{ il y a au plus un élément de couleur } k \text{ et au moins un élément de couleur différente}\}. \quad (3.4.24)$$

**Définition de  $\varphi_q$ :** Soit  $((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi) \in Fix(\psi_q; \mathcal{LC}(\underline{n})) \setminus Fix(\varphi_q)$ .

Considérons tous les couples  $(k, j)$  de couleur  $k$  tels que  $(k, j)$  cause un facteur  $a$ . Il y a deux possibilités, soit  $(k, j) \in E_k$ , soit  $(k, j)$  est un point fixe de  $\sigma_k$  qui se retrouve tout seul dans un bloc de  $\pi$ .

Soit  $j_0$ ,  $0 \leq j_0 \leq n_k - 1$ , tel que

$$(k, j_0 + 1) = \min(E_k). \quad (3.4.25)$$

Si  $E_k = \emptyset$ , on pose  $j_0 = \infty$ .

De même, soit  $j_1$  tel que

$$(k, j_1) = \max \{j \mid \{(k, j)\} \text{ forme un bloc de } \pi\} \quad (3.4.26)$$

et

$$\begin{aligned} j'_1 &= \text{contribution de } ((k, j_1)) \text{ à la statistique } rs(\pi) & (3.4.27) \\ &= \text{nombre d'entiers } j, j_1 < j \leq n_k, \text{ tels que } ((k, j)) \text{ se trouve} \\ &\quad \text{dans un bloc précédant } \{(k, j_1)\} \text{ dans } \pi. \end{aligned}$$

Si l'ensemble considéré dans (3.4.26) est vide, on pose  $j_1 = j'_1 = \infty$ .

Remarquons que  $\{(k, j_1)\}$  est nécessairement le bloc le plus à droite de la partition  $\pi$  et que, parmi les cycles  $((k, j))$  de  $\sigma_k$  qui causent un facteur  $a$ , c'est celui qui cause le moins de non-fermetures de la forme  $((k, j), c)$ . De plus, puisque  $((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi) \notin \text{Fix}(\varphi_q; \text{Fix}(\psi_q))$ , au moins une des valeurs  $j_0$  ou  $j'_1$  est strictement inférieure à  $\infty$ .

Considérons les deux cas possible suivants:  $j_0 \leq j'_1$ , ou  $j_0 > j'_1$ .

Si  $j_0 \leq j'_1$ , on pose  $\varphi_q((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi) = ((\underline{E}', \underline{\sigma}'); \pi')$ , où

- 1)  $E'_i = E_i$ ,  $1 \leq i \leq k - 1$ ,
- 2)  $\sigma'_i = \sigma_i$ ,  $1 \leq i \leq k - 1$ ,
- 3)  $E'_k = E_k \setminus \{(k, j_0 + 1)\}$ ,

$$4) \sigma'_k = \sigma_k \circ ((k, j_0 + 1)) = Id_{(\{k\} \times \llbracket n_k \rrbracket) \setminus E'_k}, \text{ et}$$

5) la forme de  $\pi'$  est la même que celle de  $\pi$  sauf qu'elle possède un bloc additionnel  $\{((k, j'))\}$  à l'extrême-droite, qui comptera pour  $j_0$  contributions de la forme  $((k, j'), c)$  au nombre de non-fermetures  $rs(\pi')$ . Plus exactement, soit  $\sigma_k = c_1 c_2 \dots c_l$ , la décomposition de  $\sigma_k$  sous forme standard de produit de cycles disjoints. Retirons les 1-cycles  $c_i$  de  $\pi$  et remplaçons-les par des cases vides indicées par  $i$ . Nous appellerons la construction obtenue le *squelette* de  $\pi$ .

Par exemple, si les nombres soulignés correspondent à la présence de cycles des couleurs 1 à  $k - 1$  dans les blocs de  $\pi$ , et les nombres non soulignés  $i$  correspondent aux couples  $(k, i)$  de couleur  $k$ , si  $n_k = 9$ ,  $E_k = \{2, 6, 8\}$ ,  $\sigma_k = (1)(3)(4)(5)(7)(9) = c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6$ , et

$$\pi = \{\underline{1}, (7)\} \{\underline{2}, (4)\} \{\underline{3}\} \{\underline{4}, (9)\} \{(1)\} \{(3)\} \{(5)\},$$

alors  $j_0 = 1$ ,  $j_1 = 5$ ,  $j'_1 = 2$  et le squelette de  $\pi$  est

$$\{\underline{1}, \square_5\} \{\underline{2}, \square_3\} \{\underline{3}\} \{\underline{4}, \square_6\} \{\square_1\} \{\square_2\} \{\square_4\}.$$

Remarquons qu'il est possible de calculer la statistique  $rs(\pi)$  en considérant uniquement le squelette de  $\pi$ .

Pour déterminer le squelette de  $\pi'$ , il s'agit ensuite d'ajouter 1 à l'indice des cases indicées de  $l - j_0 + 1$  à  $l$  dans le squelette de  $\pi$ , et d'y ajouter à l'extrême-droite le bloc  $\{\square_{l-j_0+1}\}$ . Dans l'exemple, cela donne

$$\{\underline{1}, \square_5\} \{\underline{2}, \square_3\} \{\underline{3}\} \{\underline{4}, \square_7\} \{\square_1\} \{\square_2\} \{\square_4\} \{\square_6\}.$$

La partition  $\pi'$  est alors obtenue en insérant les cycles  $c'_i$  à la place des cases indicées  $i$ , où  $\sigma'_k = c'_1 c'_2 \dots c'_{l+1}$ . Remarquons que si  $j'_1 \neq \infty$ , et si  $\{\square_m\}$

désigne le bloc à l'extrême-droite du squelette de  $\pi$ , alors  $m = l - j'_1 < l - j_0 + 1$ , car le cycle  $c_m$  contribue à exactement  $j'_1$  non-fermetures de la forme  $(c_m, c)$ , et il doit donc y avoir exactement  $j'_1$  cases dont l'indice est supérieur à  $m$  dans les blocs précédant le bloc  $\{\square_m\}$  du squelette de  $\pi$ . Par conséquent, la partition  $\pi'$  obtenue est écrite sous forme standard. Dans l'exemple précédent, on obtient  $E'_k = \{6, 8\}$ ,  $\sigma'_k = (1)(2)(3)(4)(5)(7)(9) = c'_1 c'_2 c'_3 c'_4 c'_5 c'_6 c'_7$ , et

$$\pi' = \{\underline{1}, (5)\}\{\underline{2}, (3)\}\{\underline{3}\}\{\underline{4}, (9)\}\{(1)\}\{(2)\}\{(4)\}\{(7)\}.$$

Remarquons que si l'on note  $\tilde{j}_0$  et  $\tilde{j}'_1$  les nombres “ $j_0$ ” et “ $j'_1$ ” associés à  $\varphi_q((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi) = ((\underline{E}', \underline{\sigma}'); \pi')$ , on a  $\tilde{j}_0 > j_0$  et  $\tilde{j}'_1 = j_0$ , et l'on se retrouve dans le deuxième cas  $\tilde{j}_0 > \tilde{j}'_1$ . Puisque  $\text{cyc}(\sigma'_k) = \text{cyc}(\sigma_k) + 1$ , le poids de  $((\underline{E}', \underline{\sigma}'); \pi')$  est de signe opposé à celui de  $((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi)$ . Le nombre d'éléments de  $E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k$  plus le nombre de blocs de la partition reste constant lorsqu'on applique  $\varphi_q$ , donc la puissance de  $a$  apparaissant dans la pondération est conservée par  $\varphi_q$ .

Il reste à voir que la statistique  $q$  est conservée. Pour ce faire, il suffit de montrer que  $rs(\pi') = rs(\pi) + j_0$ . Or, en ajoutant 1 à certains indices des cases du squelette de  $\pi$  et en y insérant  $c'_1, c'_2, \dots, c'_{l+1}$ , l'ordre relatif des cycles entre eux (par rapport à l'ordre lexicographique des minima de cycles) est préservé, sauf pour le dernier bloc nouvellement créé, et donc le nombre de non-fermetures  $(c, c')$  où le cycle  $c$  n'apparaît pas dans le dernier bloc de  $\pi'$ , et le cycle  $c'$ , plus grand que  $c$ , fait partie d'un bloc à gauche de celui qui contient  $c$ , est conservé. Pour ce qui est du dernier bloc  $\{c'_{l-j_0+1}\}$ , il y a exactement  $j_0$  cycles plus grands que  $c'_{l-j_0+1}$  qui se trouvent dans des blocs à sa gauche,

donc exactement  $j_0$  non fermetures,  $(c'_{l-j_0+1}, c'_i)$ ,  $l - j_0 + 2 \leq i \leq l + 1$ , d'où la conclusion. Par conséquent,

$$w((\underline{E}', \underline{\sigma}'); \pi') w_q(\underline{E}', \underline{\sigma}') q^{rs(\pi')} = -w((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi) w_q(\underline{E}, \underline{\sigma}) q^{rs(\pi)}.$$

Inversement, si  $j_0 > j'_1$ , on pose  $\varphi_q((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi) = ((\underline{E}'', \underline{\sigma}''); \pi'')$ , où

- 1)  $E''_i = E_i$ ,  $1 \leq i \leq k - 1$ ,
- 2)  $\sigma''_i = \sigma_i$ ,  $1 \leq i \leq k - 1$ ,
- 3)  $E''_k = E_k \cup \{(k, j'_1 + 1)\}$ ,  $((k, j'_1 + 1) \notin E_k$  car  $\min(E_k) = (k, j_0 + 1) > (k, j'_1 + 1)$ ),
- 4)  $\sigma''_k = Id_{(\{k\} \times \llbracket n_k \rrbracket) \setminus E''_k} = c''_1 c''_2 \dots c''_{l-1}$ , et
- 5)  $\pi''$  est obtenue de  $\pi$  en faisant le squelette de  $\pi$ , en éliminant le dernier bloc  $\{\square_{l-j'_1}\}$ , en soustrayant 1 aux indices  $l - j'_1 + 1$  à  $l$ , et en insérant les cycles de  $\sigma''_k$  dans les cases du squelette de  $\pi''$  ainsi obtenu.

Nous laissons le soin au lecteur de montrer que l'application  $\varphi_q$  est une involution inversant les signes et conservant les poids, dont l'ensemble de points fixes est  $Fix(\varphi_q; Fix(\psi_q; \mathcal{LC}(\underline{n})))$  (voir (3.4.24)). On a donc,

$$\mathcal{L}_q^{(a)} \left( C_{n_1, q}^{(a)}(x) C_{n_2, q}^{(a)}(x) \dots C_{n_k, q}^{(a)}(x) \right) = |Fix(\varphi_q; Fix(\psi_q; \mathcal{LC}(\underline{n})))|_{\mathcal{L}, q}. \quad (3.4.28)$$

Examinons les points fixes  $((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi)$  de  $\varphi_q$ . Aucun élément de  $\{k\} \times \llbracket n_k \rrbracket$  ne cause un facteur  $a$ , donc seuls les éléments de  $\bigcup_{i=1}^{k-1} (\{i\} \times \llbracket n_i \rrbracket)$  peuvent causer des facteurs  $a$ . Par conséquent, la plus grande puissance de  $a$  pouvant apparaître dans (3.4.14) est  $n_1 + n_2 + \dots + n_{k-1}$ .

De plus, si  $c^{(1)}, c^{(2)}, \dots, c^{(n_k)}$  désigne la liste des 1-cycles  $c_i = ((k, i))$  de couleur  $k$ ,  $1 \leq i \leq n_k$ , selon leur ordre d'apparition dans  $\pi$ , et  $c_{(1)}, c_{(2)}, \dots, c_{(n_k)}$ , les minima respectifs (de couleurs différentes de  $k$ ) des blocs contenant les cycles  $c^{(i)}$ ,  $((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi) \in \text{Fix}(\varphi_q; \text{Fix}(\psi_q))$  possède toujours les non-fermetures suivantes:  $(c_{(i)}, c_{(j)})$ , pour  $1 \leq j < i \leq n_k$ . Par conséquent,  $rs(\pi) \geq \binom{n_k}{2}$  et  $q^{\binom{n_k}{2}}$  divise (3.4.14).  $\square$

**LEMME 3.4.7:** *Si  $n_k \geq n_1 + n_2 + \dots + n_{k-1}$ , le coefficient de  $a^{n_k}$  dans (3.4.14) est non nul, et celui de  $a^{n_1+n_2+\dots+n_{k-1}}$  est un polynôme unitaire en  $q$  de degré  $n_k \cdot (n_1 + n_2 + \dots + n_{k-1} - 1)$ .*

#### DÉMONSTRATION:

Lorsque  $q = 1$ , on a

$$\mathcal{L}_1^{(a)} \left( C_{n_1,1}^{(a)}(x) C_{n_2,1}^{(a)}(x) \dots C_{n_k,1}^{(a)}(x) \right) = \mathcal{L}^{(a)} \left( C_{n_1}^{(a)}(x) C_{n_2}^{(a)}(x) \dots C_{n_k}^{(a)}(x) \right). \quad (3.4.29)$$

Mais si  $n_k \geq n_1 + n_2 + \dots + n_{k-1}$  (où  $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_k$ ), le coefficient de  $a^{n_k}$  est non nul dans  $\mathcal{L}^{(a)} \left( C_{n_1}^{(a)}(x) C_{n_2}^{(a)}(x) \dots C_{n_k}^{(a)}(x) \right)$ . Combinatoirement, par les résultats de la section 3.2, cela se traduit par l'existence d'une partition de l'ensemble  $\bigcup_{i=1}^k (\{i\} \times \llbracket n_i \rrbracket)$  en  $n_k$  blocs, dans laquelle chaque bloc contient au moins deux éléments et contient des éléments tous de couleurs différentes. Nous exhibons une telle partition: mettons par exemple les  $n_k$  premiers éléments de  $\bigcup_{i=1}^{k-1} (\{i\} \times \llbracket n_i \rrbracket)$  (selon l'ordre lexicographique) dans des blocs différents. Ajoutons un couple de couleur  $k$  à chacun de ces blocs et plaçons les  $n_1 + n_2 + \dots + n_{k-1} - n_k$  éléments restant dans les blocs, de telle sorte qu'il n'y ait jamais deux éléments de même couleur dans chaque bloc (c'est toujours possible puisque  $n_i \leq n_k$ ,  $1 \leq i \leq k-1$ ).

Puisque le coefficient de  $a^{n_k}$  dans  $\mathcal{L}^{(a)} \left( C_{n_1}^{(a)}(x) C_{n_2}^{(a)}(x) \dots C_{n_k}^{(a)}(x) \right)$  est non nul, cela entraîne a fortiori que le coefficient de  $a^{n_k}$  dans le coefficient de linéarisation  $\mathcal{L}_q^{(a)} \left( C_{n_1, q}^{(a)}(x) C_{n_2, q}^{(a)}(x) \dots C_{n_k, q}^{(a)}(x) \right)$  est non nul.

Dans l'ensemble  $Fix(\varphi_q; Fix(\psi_q; \mathcal{LC}(\underline{n})))$ , les seuls triplets  $((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi)$  qui contribuent au coefficient de  $a^{n_1+n_2+\dots+n_{k-1}}$  sont ceux pour lesquels tous les éléments de  $\bigcup_{i=1}^{k-1} (\{i\} \times \llbracket n_i \rrbracket)$  causent un facteur  $a$ . Si l'on cherche à maximiser

$$inv((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi) = \sum_{i=1}^k \left( \sum_{(i,j) \in E_i} (j-1) + inv(\sigma_i) \right) + rs(\pi)$$

parmi ces éléments, on trouve un unique triplet  $((\tilde{\underline{E}}, \tilde{\underline{\sigma}}); \tilde{\pi})$ , pour lequel  $inv((\tilde{\underline{E}}, \tilde{\underline{\sigma}}); \tilde{\pi}) = n_k \cdot (n_1 + n_2 + \dots + n_{k-1} - 1)$  est maximal, donné par

- 1)  $\tilde{E}_i = \emptyset$ ,  $1 \leq i \leq k$ ,
- 2)  $\tilde{\sigma}_i = Id_{\{i\} \times \llbracket n_i \rrbracket}$ ,  $1 \leq i \leq k$ , et
- 3)  $\tilde{\pi}$  est composée de  $n_1 + n_2 + \dots + n_{k-1}$  blocs dont les minima sont les cycles  $((i, j))$ , avec  $1 \leq i \leq k-1$  et  $1 \leq j \leq n_i$ . Les cycles  $((k, n_k))$ ,  $((k, n_k - 1))$ ,  $\dots$ ,  $((k, 1))$  apparaissent, dans cet ordre, dans les  $n_k$  premiers blocs de la partition  $\tilde{\pi}$ .

Puisque  $\tilde{\sigma}_i = Id_{\{i\} \times \llbracket n_i \rrbracket}$ , le poids de  $((\tilde{\underline{E}}, \tilde{\underline{\sigma}}); \tilde{\pi})$  est positif. De plus,  $inv(\tilde{\sigma}_i) = 0$  et  $\tilde{E}_i = \emptyset \forall i$ , donc la puissance de  $q$  apparaissant dans " $w_q(\tilde{\underline{E}}, \tilde{\underline{\sigma}}) q^{rs(\tilde{\pi})}$ " (défini en (3.4.12)) est  $q^{rs(\tilde{\pi})}$ . Mais à cause de la structure de  $\tilde{\pi}$ , chaque élément  $((i, j))$  faisant partie du  $l$ -ième bloc  $b_l$  de  $\tilde{\pi}$  compte pour

$$\begin{cases} l-1 & \text{si } 1 \leq l \leq n_k, \\ n_k & \text{si } n_k \leq l \leq n_1 + n_2 + \dots + n_{k-1}, \end{cases} \quad (3.4.30)$$

non-fermetures dans  $rs(\tilde{\pi})$ . Donc

$$\begin{aligned} rs(\tilde{\pi}) &= 2 \cdot (0 + 1 + \dots + (n_k - 1)) + n_k \cdot (n_1 + n_2 + \dots + n_{k-1} - n_k) \\ &= 2 \cdot \left( \frac{(n_k - 1)n_k}{2} \right) + n_k \cdot (n_1 + n_2 + \dots + n_{k-1}) - n_k^2 \\ &= n_k \cdot (n_1 + n_2 + \dots + n_{k-1} - 1). \end{aligned}$$

Les détails sont laissés au lecteur.  $\square$

**PROPOSITION 3.4.8:** (identités (3.4.15) à (3.4.17))

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_q^{(a)} \left( C_{n,q}^{(a)}(x) \right) &= \delta_{n,0}, \\ \mathcal{L}_q^{(a)} \left( C_{n,q}^{(a)}(x) C_{m,q}^{(a)}(x) \right) &= a^n q^{\binom{n}{2}} [n]_q! \delta_{n,m}, \end{aligned}$$

et si  $n_1 + n_2 + \dots + n_{k-1} = n_k$ ,

$$\mathcal{L}_q^{(a)} \left( C_{n_1,q}^{(a)}(x) C_{n_2,q}^{(a)}(x) \dots C_{n_k,q}^{(a)}(x) \right) = a^{n_k} q^{\binom{n_k}{2}} [n_k]_q!.$$

**DÉMONSTRATION:**

i) (identité (3.4.15)) Lorsque  $k$  égale 1, par (3.4.24),

$$\begin{aligned} \text{Fix}(\varphi_q; \text{Fix}(\psi_q; \mathcal{LC}(n))) &= \{((E, \sigma); \pi) \in \mathcal{LC}(n) \mid E = \emptyset, \sigma = \text{Identité sur} \\ &\quad \{1\} \times \llbracket n \rrbracket, \text{ et dans le support de chaque bloc} \\ &\quad \text{de } \pi, \text{ il y a au plus un élément de couleur 1} \\ &\quad \text{et au moins un élément de couleur différente}\} \\ &= \begin{cases} \emptyset & \text{si } n > 0 \\ \{((\emptyset, \emptyset); \emptyset)\} & \text{si } n = 0; \end{cases} \end{aligned}$$

et donc

$$\mathcal{L}_q^{(a)} \left( C_{n,q}^{(a)}(x) \right) = \sum_{((E, \sigma); \pi) \in \text{Fix}(\varphi_q)} w((E, \sigma); \pi) w_q(E, \sigma) q^{rs(\pi)} = \delta_{0,n}.$$

ii) (identité (3.4.16)) Lorsque  $k$  égale 2, si  $n \leq m$ , par (3.4.24),

$$\begin{aligned} \text{Fix}(\varphi_q; \text{Fix}(\psi_q; \mathcal{LC}(n, m))) &= \{((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi) \in \mathcal{LC}(n, m) \mid \\ &E_2 = \emptyset, \sigma_2 = \text{Identité sur } \{2\} \times \llbracket m \rrbracket, \\ &\text{et dans le support de chaque bloc de } \pi, \\ &\text{il y a au plus un élément de couleur 2 et} \\ &\text{au moins un élément de couleur différente} \} \\ &= \begin{cases} \emptyset & \text{si } n < m \\ \{((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi) \in \mathcal{LC}(n, n) \mid \\ E_1 = E_2 = \emptyset, \sigma_1 = \sigma_2 = Id \\ \text{et chaque bloc de } \pi \text{ contient} \\ \text{exactement un élément} \\ \text{de chaque couleur} \} & \text{si } n = m; \end{cases} \end{aligned}$$

Si  $n = m$  et si  $((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi) \in \text{Fix}(\varphi_q; \text{Fix}(\psi_q; \mathcal{LC}(n, n)))$ , alors, selon (3.4.11),

$$w(E_1, \sigma_1) = w(E_2, \sigma_2) = 1;$$

selon (3.2.13),

$$w((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi) = a^{b(\pi)} = a^n;$$

selon (3.4.12),

$$w_q(\underline{E}, \underline{\sigma}) q^{rs(\pi)} = q^{rs(\pi)};$$

et donc

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_q^{(a)} \left( C_{n,q}^{(a)}(x) C_{n,q}^{(a)}(x) \right) &= \sum_{((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi) \in \text{Fix}(\varphi_q)} w((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi) w_q(\underline{E}, \underline{\sigma}) q^{rs(\pi)} \\ &= \sum_{((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi) \in \text{Fix}(\varphi_q)} a^n q^{rs(\pi)}. \end{aligned}$$

Mais pour chaque  $((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi) \in \text{Fix}(\varphi_q; \text{Fix}(\psi_q))$ , il existe une unique permutation  $\tau \in \mathfrak{S}_n$  pour laquelle la partition  $\pi$  s'écrit

$$\pi = \{((1, 1)), ((2, \tau(1)))\} \{((1, 2)), ((2, \tau(2)))\} \dots \{((1, n)), ((2, \tau(n)))\}.$$

Chaque cycle  $((1, i))$  compte pour  $i - 1$  non-fermetures de la forme  $((1, i), c)$  (avec chaque bloc à sa gauche), donc en tout  $\binom{n}{2}$  contributions. De même, chaque cycle  $((2, \tau(i)))$  compte pour autant de non-fermetures qu'il n'y a de cycles  $((2, \tau(j)))$  tels que  $1 \leq j \leq i$ , et  $\tau(j) > \tau(i)$ . Cela correspond exactement au nombre d'inversions  $inv(\tau)$  de la permutation  $\tau$ , exprimée sous forme de mot (non pas comme produit de cycles disjoints). Et puisque  $\sigma$  parcourt  $\mathfrak{S}_n$  lorsque les triplets  $((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi)$  parcourent  $Fix(\varphi_q; Fix(\psi_q; \mathcal{LC}(n, n)))$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_q^{(a)} \left( C_{n,q}^{(a)}(x) C_{n,q}^{(a)}(x) \right) &= \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} a^n q^{\binom{n}{2} + inv(\tau)}, \\ &= a^n q^{\binom{n}{2}} [n]_q!, \end{aligned}$$

ce qui démontre la formule (3.4.16).

iii) (identité (3.4.17)) Raisonnement similaire à (ii). □

### 3.5 PROPRIÉTÉS DES $q$ -POLYNÔMES DE CHARLIER

**THÉORÈME 3.5.1:** *Les  $q$ -polynômes de Charlier  $C_{n,q}^{(a)}(x)$  ont les propriétés suivantes:*

a) *série génératrice (Stanton et White (non publié))*

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{n,q}^{(a)}(x) \frac{t^n}{(q)_n} = \frac{(at)_{\infty} \left( -\frac{t}{1-q} \right)_{\infty}}{\left( t \left( x - \frac{1}{1-q} \right) \right)_{\infty}}, \quad (3.5.1)$$

où  $(x)_n = (1-x)(1-qx) \dots (1-q^{n-1}x)$ , et  $(x)_{\infty} = \prod_{i \geq 0} (1 - q^i x)$ ;

b) *formule explicite (Stanton et White (non publié))*

$$C_{n,q}^{(a)}(x) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\binom{n-k}{2}} x(x - [1]_q) \dots (x - [k-1]_q) (-a)^{n-k}; \quad (3.5.2)$$

c) *réurrence linéaire à trois termes*

$$C_{k+1,q}^{(a)}(x) = (x - ([k]_q + aq^k)) C_{k,q}^{(a)}(x) - aq^{k-1}[k]_q C_{k-1,q}^{(a)}(x), \quad (3.5.3)$$

avec conditions initiales  $C_{0,q}(x) = 1$  et  $C_{1,q}(x) = x - a$ ;

d) *orthogonalité*

$$\mathcal{L}_q^{(a)} \left( C_m^{(a)}(x) C_n^{(a)}(x) \right) = a^n q^{\binom{n}{2}} [n]_q! \delta_{m,n}; \quad (3.5.4)$$

e) *moments*

$$\nu_{n,q}^{(a)} = \sum_{k=0}^n S_q[n, k] a^k, \quad (3.5.5)$$

où  $S_q[n, k]$  dénote le  $q$ -analogue usuel (3.1.16) des nombres de Stirling de deuxième espèce;

f) *équations aux  $q$ -différences*

$$\Delta_q C_{n,q}^{(a)}(x) = [n]_q C_{n-1,q}^{(a)}(x), \quad (3.5.6)$$

$$aq^{n-2} \Delta_q^2 C_{n,q}^{(a)}(x) = (x - aq^{n-1} - [n-1]_q) \Delta_q C_{n,q}^{(a)}(x) - [n]_q C_{n,q}^{(a)}(x), \quad (3.5.7)$$

où l'opérateur  $\Delta_q$  est défini par

$$\Delta_q f(x) = \frac{f(qx+1) - f(x)}{(q-1)x+1}. \quad (3.5.8)$$

**DÉMONSTRATION:**

a) Posons

$$GF(x, t) = \sum_{n \geq 0} C_{n,q}^{(a)}(x) \frac{t^n}{(q)_n}. \quad (3.5.9)$$

D'un côté, on calcule

$$\sum_{n \geq 1} C_{n,q}^{(a)}(x) \frac{t^{n-1}}{(q)_{n-1}} = \frac{1}{t} \left( GF(x, t) - GF(x, qt) \right), \quad (3.5.10)$$

et de l'autre, en utilisant la récurrence linéaire à trois termes (3.5.3),

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} C_{n,q}^{(a)}(x) \frac{t^{n-1}}{(q)_{n-1}} &= x \cdot GF(x, t) - a \cdot GF(x, qt) - \frac{at}{(1-q)} GF(x, qt) \\ &\quad - \frac{t}{(1-q)} \left[ \frac{1}{t} \left( GF(x, t) - GF(x, qt) \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.5.11)$$

En comparant les membres de droite de (3.5.10) et (3.5.11), on trouve l'équation fonctionnelle

$$GF(x, t) = \frac{(1-at) \left( 1 + \frac{t}{1-q} \right)}{1-t \left( x - \frac{1}{1-q} \right)} \cdot GF(x, qt). \quad (3.5.12)$$

L'identité (3.5.1) est obtenue en itérant (3.5.12).

b) (3.5.2) découle de l'interprétation combinatoire des  $q$ -polynômes de Charlier.

En effet, pour construire toutes les permutations partielles  $(E, \sigma) \in C(\llbracket n \rrbracket)$ , il suffit de choisir un ensemble  $E$ ,  $E \subseteq \llbracket n \rrbracket$  (de cardinalité  $k$ ,  $0 \leq k \leq n$ ), puis de construire une permutation  $\sigma$  sur l'ensemble complémentaire  $\llbracket n \rrbracket \setminus E$ .

Or,

$$\sum_{\substack{E \subseteq \llbracket n \rrbracket, \\ |E|=n-k}} \left( \prod_{i \in E} q^{i-1} \right) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\binom{n-k}{2}}. \quad (3.5.13)$$

En effet, comme nous l'avons mentionné au début de la section 1.4 du chapitre 1, le coefficient  $q$ -binomial " $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ " peut s'interpréter combinatoirement

comme le nombre de mots de longueur  $n$ , contenant  $k$  lettres “1” et  $n - k$  lettres “0”,  $q$ -pondérés par le nombre d’inversions.

Associons bijectivement à tout sous-ensemble  $E$  de  $\llbracket n \rrbracket$  de cardinalité  $k$ , le mot  $\omega(E) = \omega_1 \omega_2 \dots \omega_n$  (possédant  $n - k$  symboles “1” et  $k$  symboles “0”) tel que

$$\omega_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \notin E, \\ 0 & \text{si } i \in E. \end{cases} \quad (3.5.14)$$

Si  $i_0 \in E$ , il y a exactement

$$i_0 - 1 - |\{j \in E \mid j < i_0\}| \quad (3.5.15)$$

lettres “1” dans  $\omega(E)$  qui précèdent la lettre  $\omega_{i_0} = 0$ , comptant chacune pour une inversion. Donc, si  $E = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ , où  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ ,

$$\begin{aligned} \text{inv}(\omega(E)) &= \sum_{i \in E} (i - 1 - |\{j \in E \mid j < i\}|), \\ &= (i_1 - 1 - 0) + (i_2 - 1 - 1) + \dots + (i_k - 1 - (k - 1)), \\ &= \sum_{i \in E} (i - 1) - \binom{|E|}{2}. \end{aligned} \quad (3.5.16)$$

L’identité (3.5.13) découle aisément de cette égalité.

Ainsi, en vertu du résultat bien connu

$$\begin{aligned} x(x - [1]_q) \dots (x - [n - 1]_q) &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} c_q[n, k] x^k, \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(n, k)} (-1)^{n - \text{cyc}(\sigma)} q^{\text{inv}(\sigma)} x^{\text{cyc}(\sigma)}, \end{aligned} \quad (3.5.17)$$

où  $\mathfrak{S}(n, k)$  désigne l'ensemble des permutations sur  $\llbracket n \rrbracket$  en  $k$  cycles, on aura

$$\begin{aligned}
C_{n,q}^{(a)}(x) &= \sum_{(E,\sigma) \in \mathcal{C}(\llbracket n \rrbracket)} w(E, \sigma) w_q(E, \sigma) x^{cyc(\sigma)}, \\
&= \sum_{(E,\sigma) \in \mathcal{C}(\llbracket n \rrbracket)} \left[ (-1)^{n-cyc(\sigma)} a^{|E|} \right] \left[ q^{\text{inv}(\sigma)} \prod_{i \in E} q^{i-1} \right] x^{cyc(\sigma)}, \\
&= \sum_{k=0}^n \left\{ \sum_{\substack{E \subseteq \llbracket n \rrbracket, \\ |E|=n-k}} (-a)^{n-k} \cdot \prod_{i \in E} q^{i-1} \right. \\
&\quad \left. \times \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(\llbracket n \rrbracket \setminus E)} (-1)^{k-cyc(\sigma)} q^{\text{inv}(\sigma)} x^{cyc(\sigma)} \right\}, \\
&= \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\binom{n-k}{2}} (-a)^{n-k} x(x - [1]_q) \dots (x - [k-1]_q).
\end{aligned}$$

c), d) et e) sont l'objet de la section 3.4.

f) La formule (3.5.6) se démontre algébriquement en utilisant la formule explicite (3.5.2) et la définition des  $q$ -différences (3.5.8):

$$\begin{aligned}
\Delta_q C_{n,q}^{(a)}(x) &= \frac{C_{n,q}^{(a)}(qx+1) - C_{n,q}^{(a)}(x)}{(q-1)x+1}, \\
&= \frac{1}{(q-1)x+1} \left\{ \left[ \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\binom{n-k}{2}} (qx+1)(qx+1 - [1]_q) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. (qx+1 - [2]_q) \dots (qx+1 - [k-1]_q) (-a)^{n-k} \right] \right. \\
&\quad \left. - \left[ \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\binom{n-k}{2}} x(x - [1]_q) \dots (x - [k-1]_q) (-a)^{n-k} \right] \right\}, \\
&= \frac{1}{(q-1)x+1} \left\{ \left[ \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\binom{n-k}{2}} (qx+1) q^{k-1} x \right. \right. \\
&\quad \left. \left. (x - [1]_q) \dots (x - [k-2]_q) (-a)^{n-k} \right] \right. \\
&\quad \left. - \left[ \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\binom{n-k}{2}} x(x - [1]_q) \dots (x - [k-1]_q) (-a)^{n-k} \right] \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(q-1)x+1} \left[ \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\binom{n-k}{2}} x(x-[1]_q) \dots (x-[k-2]_q) \right. \\
&\quad \left. \left( q^{k-1}(qx+1) - (x-[k-1]_q) \right) (-a)^{n-k} \right], \\
&= (\clubsuit).
\end{aligned}$$

Mais

$$q^{k-1}(qx+1) - (x-[k-1]_q) = [k]_q((q-1)x+1),$$

et

$$[k]_q \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = [n]_q \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q,$$

D'où

$$\begin{aligned}
(\clubsuit) &= \sum_{k=1}^n [n]_q \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q q^{\binom{n-k}{2}} x(x-[1]_q) \dots (x-[k-2]_q) (-a)^{n-k}, \\
&= [n]_q \sum_{j=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix}_q q^{\binom{n-1-j}{2}} x(x-[1]_q) \dots (x-[j-1]_q) (-a)^{n-1-j}, \\
&= [n]_q C_{n-1,q}^{(a)}(x).
\end{aligned}$$

La formule (3.5.7) se démontre algébriquement en utilisant la formule (3.5.6) et la récurrence linéaire à trois termes (3.5.3):

$$\begin{aligned}
&(x - aq^{n-1} - [n-1]_q) \Delta_q C_{n,q}^{(a)}(x) - aq^{n-2} \Delta_q^2 C_{n,q}^{(a)}(x) \\
&= (x - aq^{n-1} - [n-1]_q) \left( [n]_q C_{n-1,q}^{(a)}(x) \right) - aq^{n-2} \left( [n]_q [n-1]_q C_{n-2,q}^{(a)}(x) \right), \\
&= [n]_q \left( (x - aq^{n-1} - [n-1]_q) C_{n-1,q}^{(a)}(x) - aq^{n-2} [n-1]_q C_{n-2,q}^{(a)}(x) \right), \\
&= [n]_q C_{n,q}^{(a)}(x). \quad \square
\end{aligned}$$

**REMARQUE 3.5.2:** Toutes les propriétés ci-haut des  $q$ -polynômes de Charlier découlent des propriétés correspondantes des polynômes d'Al Salam-Carlitz [ASCa].

### 3.6 CONJECTURES ET RÉSULTATS PARTIELS SUR LES COEFFICIENTS DE LINÉARISATION DES $q$ -POLYNÔMES DE CHARLIER

Les involutions  $\varphi_q$  et  $\psi_q$  que nous avons introduites dans la section 3.4 nous ont permis de démontrer quelques propriétés des coefficients de linéarisation des  $q$ -polynômes de Charlier. Elles ne nous permettent cependant pas de trouver une interprétation combinatoire optimale de ces coefficients. En fait, à ce point, nous ne pouvons émettre aucune hypothèse à ce sujet. Nous savons par contre que cette interprétation optimale ne contiendrait pas l'interprétation combinatoire des coefficients de linéarisation des polynômes de Charlier présentée dans la section 3.2.

En effet, selon les notations introduites dans les section 3.2 et 3.4, on a par exemple,

$$\begin{aligned} & \left| \text{Fix}(\varphi \circ \psi; \mathcal{LC}(1, 2, 2)) \right|_{\mathcal{L}, q} \\ &= \left| \left\{ \begin{aligned} & ((\underline{E}, \underline{\sigma}); \{((1, 1)), ((2, 1)), ((3, 1))\}, \{((2, 2)), ((3, 2))\}), \\ & ((\underline{E}, \underline{\sigma}); \{((1, 1)), ((2, 2)), ((3, 1))\}, \{((2, 1)), ((3, 2))\}), \\ & ((\underline{E}, \underline{\sigma}); \{((1, 1)), ((2, 1)), ((3, 2))\}, \{((2, 2)), ((3, 1))\}), \\ & ((\underline{E}, \underline{\sigma}); \{((1, 1)), ((2, 2)), ((3, 2))\}, \{((2, 1)), ((3, 1))\}) \end{aligned} \right\} \right|_{\mathcal{L}, q}, \\ &= q \cdot (2 + 2q)a^2, \end{aligned}$$

où  $(\underline{E}, \underline{\sigma}) = (E_1 = \emptyset, \sigma_1 = ((1, 1))), (E_2 = \emptyset, \sigma_2 = ((2, 1))((2, 2))), (E_3 = \emptyset, \sigma_3 = ((3, 1))((3, 2)))$ ; alors que d'après l'appendice B,

$$\mathcal{L}_q^{(a)} \left( C_{1,q}^{(a)}(x) C_{2,q}^{(a)}(x) C_{2,q}^{(a)}(x) \right) = q \cdot (q^2 + 2q + 1)a^2 + q \cdot (q^3 + q^2 - q - 1)a^3.$$

Toutefois, en examinant les appendices B, C et D, nous avons émis la conjecture suivante:

**CONJECTURE 3.6.1:** *Le coefficient de la plus petite puissance de  $a$  dans  $\mathcal{L}_q^{(a)} \left( C_{n_1,q}^{(a)}(x) C_{n_2,q}^{(a)}(x) \dots C_{n_k,q}^{(a)}(x) \right)$  est un polynôme en  $q$  à coefficients positifs. De plus, lorsque  $k = 3$ , c'est un polynôme symétrique et unimodal.*

Dans l'espoir de résoudre cette conjecture, nous avons trouvé une formule explicite pour le coefficient de la plus petite puissance de  $a$  apparaissant dans  $\mathcal{L}_q^{(a)} \left( C_{n_1,q}^{(a)}(x) C_{n_2,q}^{(a)}(x) \dots C_{n_k,q}^{(a)}(x) \right)$ .

**PROPOSITION 3.6.2:** *Soient  $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k \geq 0$ . Le coefficient de  $a^{n_1}$  dans  $\mathcal{L}_q^{(a)} \left( C_{n_1,q}^{(a)}(x) C_{n_2,q}^{(a)}(x) \dots C_{n_k,q}^{(a)}(x) \right)$  est donné par*

$$\prod_{i=2}^k q^{\binom{n_i}{2}} [n_i]_q! \sum_{s=n_2}^{n_1} (-1)^{n_1-s} q^{\binom{n_1-s}{2}} \begin{bmatrix} n_1 \\ s \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} s \\ n_2 \end{bmatrix}_q \dots \begin{bmatrix} s \\ n_k \end{bmatrix}_q. \quad (3.6.1)$$

### DÉMONSTRATION:

Nous supposons que  $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k \geq 0$ , parce que dans la démonstration combinatoire qui suit, c'est la plus petite "couleur" de points qui joue un rôle important, plutôt que la plus grande comme dans la section 3.4. Nous détaillerons peu cette démonstration car les mêmes arguments utilisés dans les sections précédentes reviennent.

Remarquons d'abord que

$$\begin{aligned} q^{\binom{n_i}{2}} [n_i]_q! \begin{bmatrix} s \\ n_i \end{bmatrix}_q &= q^{\binom{n_i}{2}} [n_i]_q! \frac{[s]_q!}{[n_i]_q! [s - n_i]_q!}, \\ &= q^{\binom{n_i}{2}} [s]_q [s - 1]_q \dots [s - n_i + 1]_q, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= q^0 [s]_q q^1 [s-1]_q \dots q^{n_i-1} [s-n_i+1]_q, \\
&= [s]_q ([s]_q - [1]_q) \dots ([s]_q - [n_i-1]_q), \\
&= \sum_{l \geq 0} c_q[n_i, l] (-1)^{n_i-l} [s]_q^l, \tag{3.6.2}
\end{aligned}$$

où  $c_q[n, k]$  désigne les  $q$ -nombres de Stirling de première espèce sans signe. Cette dernière égalité utilise l'identité (1.2.7) de la proposition (1.2.3) du chapitre 1.

Donc

$$(3.6.1) = \sum_{s=n_2}^{n_1} (-1)^{n_1-s} q^{\binom{n_1-s}{2}} \begin{bmatrix} n_1 \\ s \end{bmatrix}_q \prod_{i=2}^k \sum_{k_i \geq 0} c_q[n_i, k_i] (-1)^{n_i-k_i} [s]_q^{k_i}. \tag{3.6.3}$$

C'est cette dernière expression que nous allons obtenir combinatoirement. Or, puisque la statistique "inv" a même distribution que la statistique "rs" sur les partitions ensemblistes,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_q^{(a)} \left( C_{n_1, q}^{(a)}(x) C_{n_2, q}^{(a)}(x) \dots C_{n_k, q}^{(a)}(x) \right) \\
&= \sum_{((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi) \in \mathcal{LC}(\underline{n})} w((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi) w_q(\underline{E}, \underline{\sigma}) q^{\text{inv}(\pi)}, \tag{3.6.4}
\end{aligned}$$

où  $w((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi)$  et  $w_q(\underline{E}, \underline{\sigma})$  ont été définis en (3.2.13) et (3.4.18) respectivement.

Nous allons construire une involution  $\theta_q$  sur  $\mathcal{LC}(\underline{n})$ , préservant les poids mais inversant les signes, dont l'ensemble de points fixes sera:

$$\begin{aligned}
\text{Fix}(\theta_q; \mathcal{LC}(\underline{n})) = & \left\{ ((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi) \in \mathcal{LC}(\underline{n}) \mid \sigma_1 \text{ est la permutation identité et il y a au plus un cycle} \right. \\
& \left. \text{de couleur 1 dans chaque bloc de } \pi \right\}. \tag{3.6.5}
\end{aligned}$$

En fait,  $\theta_q$  consiste en une adaptation de la démonstration de l'orthogonalité des  $q$ -nombres de Stirling de première et deuxième espèce de la proposition 1.3.1 du chapitre 1.

En effet, soit  $((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi) \in \mathcal{LC}(\underline{n})$ , posons

$$l_0 = n_1 - |E_1|,$$

$$i_0 = \text{cyc}(\sigma_1),$$

et  $j_0 =$  nombre de blocs de  $\pi$  contenant un cycle de couleur 1.

Considérons le sous-ensemble de  $\mathcal{LC}(\underline{n})$  contenant les triplets  $((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi)$  tels que

- 1)  $E_i$  est fixé,  $1 \leq i \leq k$ ,
- 2)  $\sigma_i$  est fixé,  $2 \leq i \leq k$ ,
- 3)  $l_0$  et  $j_0$  sont fixés, et
- 4) la position dans les blocs de  $\pi$  des cycles de couleurs différentes de 1 est fixée.

C'est-à-dire que les seules latitudes qu'on ait sont que  $\sigma_1$  est une permutation quelconque (en au moins  $j_0$  cycles) sur  $(\{1\} \times \llbracket n_1 \rrbracket) \setminus E_1$ , et il doit y avoir au moins un cycle de couleur 1 dans chacun des  $j_0$  premiers blocs de  $\pi$ , mais aucun dans les suivants. La pondération (comme dans le membre de droite de (3.6.4)) de cet ensemble a la forme suivante:

$$\begin{aligned} (\text{facteur en } q \text{ et } a) \cdot \sum_{i_0=j_0}^{l_0} (-1)^{l_0-i_0} c_q[l_0, i_0] S_q[i_0, j_0] & \quad (3.6.6) \\ = (\text{facteur en } q \text{ et } a) \cdot \delta_{l_0, j_0}. & \quad (\text{par (1.3.5)}) \end{aligned}$$

Cette dernière égalité nous suggère la marche à suivre pour la construction de  $\theta_q$ . En gros,  $\theta_q$  consiste à coder la permutation  $\sigma_1$  et la partition  $\pi$ , restreinte aux cycles de couleur 1, en deux tableaux 0-1  $(\varphi_1, \varphi_2)$ ,  $\varphi_1$  possédant  $l_0 - i_0$  colonnes de longueurs distinctes plus petites ou égales à  $l_0 - 1$ , et  $\varphi_2$  possédant

$i_0 - j_0$  colonnes de longueurs plus petites ou égales à  $j_0$  (selon la méthode utilisée dans la démonstration de la proposition 2.3.5 du chapitre 2), d'y appliquer l'involution apparaissant dans la démonstration de l'identité (1.3.5) du chapitre 1 (transférer la colonne la plus courte d'un tableau 0-1 à l'autre), de décoder le nouveau couple de tableaux 0-1 obtenu, et de remettre en place les cycles de couleur 1 dans  $\pi$ .

Les points fixes de cette involution adviennent lorsque les deux tableaux 0-1  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont vides, i.e. quand  $l_0 = i_0 = j_0$ . Alors,  $\sigma_1$  doit être la permutation identité, et ses points fixes doivent tous faire partie de blocs de  $\pi$  différents. Les détails sont laissés au lecteur.

Trouvons le coefficient de  $a^{n_1}$  dans

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_q^{(a)} \left( C_{n_1, q}^{(a)}(x) C_{n_2, q}^{(a)}(x) \dots C_{n_k, q}^{(a)}(x) \right) \\ &= \sum_{((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi) \in \text{Fix}(\theta_q)} w((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi) w_q(\underline{E}, \underline{\sigma}) q^{\text{inv}(\pi)}. \end{aligned} \quad (3.6.7)$$

Puisque pour tout  $((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi) \in \text{Fix}(\theta_q)$ , tous les éléments de couleur 1 causent un facteur  $a$ , aucun couple de couleur différente de 1 ne doit en causer. Ainsi, on a nécessairement  $E_i = \emptyset$ , pour  $2 \leq i \leq k$ , et une fois l'ensemble  $E_1$ , de cardinalité  $n_1 - s$ , déterminé,  $\sigma_1 = \text{Id}_{(\{1\} \times \llbracket n_1 \rrbracket) \setminus E_1}$ , et chaque cycle des permutations  $\sigma_i$ ,  $2 \leq i \leq k$ , a le choix d'apparaître dans l'un des  $s$  blocs de  $\pi$ . Notons que si un cycle de couleur  $\geq 2$  apparaît dans le  $j$ -ième bloc de  $\pi$ ,  $1 \leq j \leq s$ , alors il contribue pour  $s - j$  inversions de  $\pi$ .

En passant au  $q$ -comptage, en vertu de (3.5.13) et de l'interprétation combinatoire des  $q$ -nombres de Stirling de première espèce  $c_q[n, k]$  en termes de permutations, on obtient (3.6.3).  $\square$

Nous avons donc trouvé une formule explicite pour le terme de plus petit degré en  $a$  des coefficients de linéarisations des  $q$ -polynômes de Charlier. Cependant, cette expression étant une somme alternée de polynômes en  $q$ , elle ne nous donne pas la positivité des coefficients. Toutefois, dans le cas  $k = 3$ , des calculs expérimentaux utilisant le logiciel MAPLE, nous ont amenée à conjecturer la valeur de cette somme. Dennis Stanton en a récemment donné une démonstration analytique, utilisant la formule de  $q$ -Vandermonde (cf Andrews [An]).

**PROPOSITION 3.6.3:** *Si  $n_1 + s = n_2 + n_3$  ( $n_1 \geq n_2 \geq n_3$ ), le coefficient de  $a^{n_1}$  dans  $L_q^{(a)}(C_{n_1,q}^{(a)}(x)C_{n_2,q}^{(a)}(x)C_{n_3,q}^{(a)}(x))$  est donné par*

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{n_3-s} (-1)^j q^{\binom{j}{2} + \binom{n_2}{2} + \binom{n_3}{2}} \begin{bmatrix} n_1 \\ j \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n_1 - j \\ n_2 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n_1 - j \\ n_3 \end{bmatrix}_q [n_2]_q! [n_3]_q! \\ & = q^{\binom{n_1}{2} + \binom{s}{2}} [n_1]_q! [s]_q! \begin{bmatrix} n_2 \\ s \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n_3 \\ s \end{bmatrix}_q. \end{aligned} \quad (3.6.8)$$

On peut également montrer analytiquement que le polynôme (3.6.8) est symétrique et unimodal. Ceci établit la conjecture 3.6.1 dans le cas  $k = 3$ .

**REMARQUE 3.6.4:** Nous avons également abordé la conjecture 3.6.1 de manière combinatoire, en essayant de réduire (à coup d'involutions conservant les poids mais inversant les signes) le sous-ensemble de  $Fix(\theta_q; \mathcal{LC}(\underline{n}))$  contenant les triplets  $((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi)$  pour lesquels seuls les couples de couleur 1 causent des facteurs  $a$  (i.e. dont la pondération donne le coefficient de  $a^{n_1}$  dans  $\mathcal{L}_q^{(a)}(C_{n_1,q}^{(a)}(x)C_{n_2,q}^{(a)}(x) \dots C_{n_k,q}^{(a)}(x))$ , à un ensemble dont tous les éléments auraient une pondération positive. Sans atteindre complètement cet objectif, nous avons réduit ce sous-ensemble à l'ensemble suivant:

$$\left\{ ((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi) \in \mathcal{LC}(\underline{n}) \mid E_i = \emptyset, 2 \leq i \leq k, \sigma_i = Id_{(\{i\} \times \llbracket n_i \rrbracket) \setminus E_i}, 1 \leq i \leq k, \right.$$

il y a exactement un cycle de couleur 1 dans chaque bloc de  $\pi$ ,  
 et pour chaque  $i$  et chaque  $j$ ,  $2 \leq i \leq k$ ,  $1 \leq j \leq n_i$ , le cycle  $((i, j))$   
 doit apparaître dans l'un des  $s - j + 1$  premiers blocs de  $\pi$   
 (écrite sous forme standard),  $s$  désignant le nombre de blocs de  $\pi$  }.  
 (3.6.9)

C'est parce que l'ensemble  $E_1$  n'est pas nécessairement vide dans (3.6.9) qu'il y a des triplets  $((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi)$  qui ont des pondérations négatives.

Nous omettons l'involution conservant les poids mais inversant les signes qui permet d'obtenir (3.6.9). Elle est assez technique, et elle utilise encore une fois le codage des permutations  $\sigma_i$ ,  $2 \leq i \leq k$ , en un couple de tableaux 0-1  $(\varphi_1, \varphi_2)$ , dont le premier correspond à la permutation  $\sigma_i$ , et le second, aux positions des cycles de  $\sigma_i$  dans les différents blocs de  $\pi$ .

## CHAPITRE 4

### MOMENTS DES $q$ -POLYNÔMES DE LAGUERRE ET LA BIJECTION DE FOATA-ZEILBERGER

#### 4.1 INTRODUCTION

Toute famille de polynômes orthogonaux unitaires  $P_n(x)$  peut être définie à l'aide d'une *réurrence linéaire à trois termes* de la forme

$$P_{n+1}(x) = (x - b_n)P_n(x) - \lambda_n P_{n-1}(x), \quad (4.1.1)$$

lorsque  $n \geq 1$ , avec  $P_0(x) = 1$  et  $P_1(x) = x - b_0$ , où  $\{b_n\}_{n \geq 0}$  et  $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$  sont deux suites à valeurs dans un anneau  $K$ .

Les *polynômes de Laguerre classiques*, notés  $L_n^{(\alpha)}(x)$ , satisfont une telle récurrence pour les coefficients

$$b_k^{(\alpha)} = 2k + \alpha + 1 \quad \text{et} \quad \lambda_k^{(\alpha)} = k(k + \alpha). \quad (4.1.2)$$

Ils ont pour moments  $\mu_n^{(\alpha)}$  l'expression suivante:

$$\mu_n^{(\alpha)} = (\alpha + 1)_n = (\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + n). \quad (4.1.3)$$

En particulier, lorsque  $\alpha = 0$ , on a  $\mu_n^{(0)} = n!$ .

Un  $q$ -analogue naturel des polynômes de Laguerre (pour  $\alpha = 0$ ) est de considérer la famille de polynômes orthogonaux dont les moments sont

$$\mu_{n,q}^{(0)} = [n]_q!, \quad (4.1.4)$$

où  $[n]_q = (q^n - 1)/(q - 1)$  et

$$[n]_q! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ [1]_q [2]_q \dots [n]_q & \text{sinon;} \end{cases}$$

ou plus généralement, pour  $\beta = \alpha + 1$  variable formelle, la famille de polynômes orthogonaux dont les moments sont donnés par

$$\mu_{n,q}^{(\beta-1)} = [n; \beta]_q!, \quad (4.1.5)$$

où nous notons

$$[n; \beta]_q = \beta + q + q^2 + \dots + q^{n-1}, \quad (4.1.6)$$

$$\text{et } [n; \beta]_q! = [1; \beta]_q [2; \beta]_q \dots [n; \beta]_q. \quad (4.1.7)$$

Remarquons que lorsque  $\beta = 1$ , on a  $[n; 1]_q = [n]_q$ . Dans la suite, nous identifierons toujours  $\beta$  et  $\alpha + 1$ .

L'objet principal de ce chapitre est de démontrer de manière bijective, avec les chemins de Motzkin valués (cf Françon et Viennot [FrVi], Flajolet [Fla], Viennot [Vil]), que la classe de polynômes cherchée, notée  $L_{n,q}^{(\beta-1)}(x)$ , satisfait la récurrence linéaire à trois termes (4.1.1) pour les coefficients

$$b_{k,q}^{(\beta-1)} = q^k ([k]_q + [k + 1; \beta]_q) \quad \text{et} \quad \lambda_{k,q}^{(\beta-1)} = q^{2k-1} [k]_q [k; \beta]_q. \quad (4.1.8)$$

Remarquons que cette classe de polynômes n'est pas le  $q$ -analogue des polynômes de Laguerre que les analystes considèrent habituellement. Ils apparaissent cependant dans la littérature comme cas particulier des polynômes "little  $q$ -Jacobi"  $p_n(x, a, b; q)$  (cf Gasper et Rahman [GR]), pour les valeurs

$$b = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1/a - q}{1 - q} = \beta.$$

Les polynômes  $p_n(x, a, b; q)$  sont définis en termes de séries hypergéométriques basiques par

$$p_n(x, a, b; q) = {}_2\phi_1 \left( \begin{matrix} q^{-n} & abq^{n+1} \\ aq \end{matrix} \middle| q; qx \right).$$

Pour plus de détails, le lecteur est référé à l'ouvrage de Gasper et Rahman [GR].

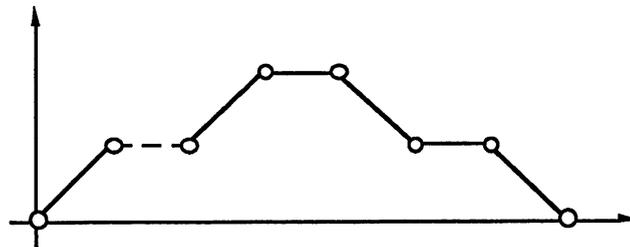


FIGURE 4.1: un chemin de Motzkin coloré

Un *chemin de Motzkin coloré*  $w = (s_0, s_1, \dots, s_n)$  de longueur  $|w| = n$  est un chemin dans le plan  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  partant du sommet  $s_0 = (0, 0)$ , se terminant au sommet  $s_n = (n, 0)$ , et dont les pas élémentaires ont l'un des quatre types suivant: Nord-Est  $(s_i, s_{i+1}) = ((i, j), (i + 1, j + 1))$ , Est bleu (en pointillé dans la figure 4.1) ou Est rouge  $(s_i, s_{i+1}) = ((i, j), (i + 1, j))$ , ou Sud-Est  $(s_i, s_{i+1}) = ((i, j), (i + 1, j - 1))$ . On dira d'un pas élémentaire  $(s_i, s_{i+1})$  qu'il *part du niveau*  $j$  si  $s_i = (i, j)$ .

Étant données quatre suites  $\{a_k\}_{k \geq 0}$ ,  $\{b'_k\}_{k \geq 0}$ ,  $\{b''_k\}_{k \geq 0}$  et  $\{c_k\}_{k \geq 1}$ , à valeurs dans un anneau  $K$ , on définit la *valuation d'un pas élémentaire*  $(s_i, s_{i+1}) = ((i, j), (i + 1, j'))$  partant du niveau  $j$ , de la manière suivante:

$$v(s_i, s_{i+1}) = \begin{cases} a_j & \text{si } (s_i, s_{i+1}) \text{ Nord-Est,} \\ b'_j & \text{si } (s_i, s_{i+1}) \text{ Est bleu,} \\ b''_j & \text{si } (s_i, s_{i+1}) \text{ Est rouge,} \\ c_j & \text{si } (s_i, s_{i+1}) \text{ Sud-Est;} \end{cases} \quad (4.1.9)$$

et la *valuation d'un chemin*  $w = (s_0, s_1, \dots, s_n)$  par

$$v(w) = \prod_{i=0}^{n-1} v(s_i, s_{i+1}). \quad (4.1.10)$$

Par exemple, le chemin de Motzkin  $w$  de la figure 4.1 a la pondération  $v(w) = a_0 b'_1 a_1 b''_2 c_2 b'_1 c_1$ .

P. Flajolet [Fla] et X.G. Viennot [Vil] ont démontré que si l'on définissait les suites  $\{a_k\}_{k \geq 0}$ ,  $\{b'_k\}_{k \geq 0}$ ,  $\{b''_k\}_{k \geq 0}$  et  $\{c_k\}_{k \geq 1}$  de telle sorte que pour tout  $k \geq 0$ ,

$$b_k = b'_k + b''_k, \quad (4.1.11)$$

et pour tout  $k \geq 1$ ,

$$\lambda_k = a_{k-1} c_k, \quad (4.1.12)$$

alors le lien entre les suites  $\{b_k\}_{k \geq 0}$ ,  $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$  des coefficients de la récurrence linéaire à trois termes d'une classe de polynômes orthogonaux, et leurs moments  $\mu_n$ , est donné par

$$\mu_n = \sum_{|w|=n} v(w), \quad (4.1.13)$$

où  $w$  parcourt l'ensemble des chemins de Motzkin colorés de longueur  $n$ .

Pour les polynômes de Laguerre classiques  $L_n^{(\beta-1)}(x)$ , on choisit habituellement

$$a_k^{(\beta)} = k + \beta, \quad b_k^{(\beta)'} = k, \quad b_k^{(\beta)''} = k + \beta \quad \text{et} \quad c_k^{(\beta)} = k, \quad (4.1.14)$$

comme suites associées à la valuation (4.1.9) des chemins de Motzkin colorés. Nous noterons la valuation (4.1.10) correspondante  $v^{(\beta)}(w)$ .

Le choix de ces quatre valuations, satisfaisant  $b_k^{(\beta)'} + b_k^{(\beta)''} = 2k + \beta$  et  $a_{k-1}^{(\beta)} c_k^{(\beta)} = k(k + \beta - 1)$ , provient de la notion d'histoires de Laguerre et de la construction d'une bijection entre celles-ci et les permutations.

Plus précisément, une *histoire de Laguerre*  $h$  de longueur  $|h| = n$  est la donnée d'un couple  $(w; (p_1, \dots, p_n))$ , dans lequel  $w = (s_0, s_1, \dots, s_n)$  est un chemin de Motzkin coloré de longueur  $n$ , et  $(p_1, \dots, p_n)$  est une suite d'entiers tels que si  $(s_{i-1}, s_i)$  est un pas élémentaire partant du niveau  $k$ , le  $i$ -ième choix  $p_i$  est dans l'intervalle suivant:

$$0 \leq p_i \leq \begin{cases} k & \text{si } (s_{i-1}, s_i) \text{ N-E ou E rouge,} \\ k - 1 & \text{si } (s_{i-1}, s_i) \text{ S-E ou E bleu.} \end{cases} \quad (4.1.15)$$

Pour  $\beta = 1$ , la valuation  $v^{(\beta)}(w_0)$  d'un chemin de Motzkin coloré  $w_0$  est égale au nombre d'histoires de Laguerre  $h = (w_0; (p_1, \dots, p_n))$ . Dans ce cas, la preuve combinatoire que les moments  $\mu_n^{(0)}$  des polynômes de Laguerre  $L_n^{(0)}(x)$  sont égaux à  $n!$ , revient à trouver une bijection entre les permutations dans  $\mathfrak{S}_n$  et les histoires de Laguerre de longueur  $n$ . Une telle bijection fut donnée par J. Françon et X.G. Viennot dans l'article [FrVi].

Plus généralement, la bijection Françon-Viennot  $\Psi_{FV}$  permet de démontrer combinatoirement que les moments des polynômes de Laguerre  $L_n^{(\beta-1)}(x)$  sont donnés par l'expression  $\mu_n^{(\beta-1)} = \beta(\beta + 1) \dots (\beta + n - 1)$ , c'est-à-dire le polynôme énumérateur des permutations  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  selon le nombre d'*éléments saillants inférieurs gauches* (i.e. éléments  $\sigma(i)$  tels que  $\sigma(i) < \sigma(j)$  pour  $1 \leq j < i$ ). Pour ce faire, il suffit de pondérer les histoires de Laguerre  $h = (w; (p_1, \dots, p_n))$  par la valuation

$$v_\beta(p_i) = \begin{cases} \beta & \text{si } p_i = 0 \text{ et } (s_{i-1}, s_i) \text{ N-E ou E rouge,} \\ 1 & \text{sinon;} \end{cases} \quad (4.1.16)$$

et

$$v_\beta(h) = \prod_{i=1}^n v_\beta(p_i), \quad (4.1.17)$$

et de montrer que si  $v_\beta(h) = \beta^l$ , alors  $h$  correspond à une permutation  $\Psi_{FV}(h)$  ayant  $l$  éléments saillants.

Notons que selon les notations introduites précédemment,

$$v^{(\beta)}(w_0) = \sum_{h=(w_0; (p_1, \dots, p_n))} v_\beta(h), \quad (4.1.18)$$

où  $v^{(\beta)}$  désigne la valuation des chemins de Motzkin associée aux suites (4.1.14), et la somme parcourt les histoires de Laguerre ayant  $w_0$  comme chemin de Motzkin associé.

En fait, en donnant d'autres pondérations aux histoires de Laguerre, ou en restreignant les choix possibles  $p_i$  dans la bijection Françon-Viennot, il est possible (voir Viennot [Vi1]) de retrouver combinatoirement les moments des cinq classes de polynômes orthogonaux de Sheffer (c'est-à-dire Hermite, Laguerre, Charlier, Meixner et Meixner-Pollačzek (appelés aussi Meixner de première et seconde espèce dans le livre de T.S. Chihara [Chi])).

Dans ce chapitre, nous allons introduire un  $q$ -comptage des histoires de Laguerre. Notons d'abord  $v_q^{(\beta)}(w)$  la valuation des chemins de Motzkin colorés  $w$  (telle que définie en (4.1.9) et (4.1.10)) associée aux suites

$$a_{k,q}^{(\beta)} = q^k [k+1; \beta]_q, \quad b_{k,q}^{(\beta)'} = q^k [k]_q, \quad b_{k,q}^{(\beta)''} = q^k [k+1; \beta]_q \quad \text{et} \quad c_{k,q}^{(\beta)} = q^k [k]_q. \quad (4.1.19)$$

Puis, pour une histoire de Laguerre  $h = (w; (p_1, \dots, p_n))$ , nous notons successivement:

$$aire(w) = \sum_{i=1}^n niv(w, i), \quad (4.1.20)$$

dans lequel  $niv(w, i)$  désigne le niveau de départ du  $i$ -ième pas élémentaire  $(s_{i-1}, s_i)$  de  $w$ ,

$$som(h) = \sum_{i=1}^n p_i, \quad (4.1.21)$$

$$\text{et } lag(h) = aire(w) + som(h). \quad (4.1.22)$$

Avec ces notations, en vertu des résultats de P. Flajolet [Fla] et X.G. Viennot [Vi1], pour démontrer que la classe des polynômes orthogonaux  $L_{n,q}^{(\beta-1)}(x)$  définie par les moments (4.1.5) satisfait la récurrence linéaire à trois termes (4.1.1) avec les coefficients  $b_{k,q}^{(\beta-1)}$  et  $\lambda_{k,q}^{(\beta-1)}$  donnés en (4.1.8), il suffit de montrer que

$$[n; \beta]_q! = \sum_h v_\beta(h) q^{lag(h)}, \quad (4.1.23)$$

où  $h$  parcourt l'ensemble des histoires de Laguerre de longueur  $n$ .

Pour  $\beta = 1$ , cette égalité revient à dire que la distribution  $lag(h)$  est une distribution *Mahonienne*, c'est-à-dire qu'elle a même distribution que le paramètre *nombre d'inversions* des permutations. En utilisant la bijection Françon-Viennot, la statistique  $lag(h)$  conduit à une nouvelle statistique (*Mahonienne*) sur les permutations, qui ne semble pas directement pouvoir être reliée aux statistiques classiques *nombre d'inversions* ou *indice majeur* (cf Foata [Fo]).

En fait, nous utilisons une autre bijection entre les permutations et les histoires de Laguerre, introduite par D. Foata et D. Zeilberger [FoZ3]. Nous

apportons quelques modifications et compléments par rapport à l'article original de D. Foata et D. Zeilberger. Nous rappelons d'abord la très ingénieuse construction bijective, que nous noterons  $\Psi_{FZ}$ , définie directement par D. Foata et D. Zeilberger, en la décomposant en quatre étapes. Un premier avantage de ce découpage est d'ordre pédagogique pour ce que nous voulons démontrer ici. Un second avantage est de souligner que les deuxième et quatrième étapes de la construction reposent en fait sur des bijections ou constructions déjà connues, intervenant dans d'autres théories relatives aux polynômes orthogonaux, ce qui permet d'inscrire la bijection Foata-Zeilberger comme le chaînon manquant d'une véritable théorie combinatoire unifiée des polynômes orthogonaux.

À la section 4.3, nous exposons la première étape de la construction de D. Foata et D. Zeilberger, à savoir la décomposition d'une permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  en deux involutions sans points fixes  $\sigma \rightarrow (\sigma_{exc}, \sigma_{nex})$ , obtenues essentiellement en "séparant" les excédances ( $i < \sigma(i)$ ) et les non-excédances ( $i \geq \sigma(i)$ ) de la permutation  $\sigma$ .

La deuxième étape de la bijection Foata-Zeilberger consiste à coder chacune de ces involutions sans points fixes par une *histoire d'Hermite*, c'est-à-dire une histoire de Laguerre  $h = (w; (p_1, \dots, p_n))$ , soumise aux restrictions que le chemin  $w$  est un chemin de Dyck (il ne contient pas de pas élémentaires Est), et que pour tout pas Nord-Est  $(s_{i-1}, s_i)$ , on ait  $p_i = 0$ . Ce codage peut être vu comme un cas particulier de la bijection Françon-Viennot, et permet d'interpréter combinatoirement les moments des polynômes d'Hermite en termes d'involutions sans points fixes. Il existe en fait deux formes différentes de la bijection (selon que l'on numérote les "positions" libres de droite à gauche ou de gauche à droite). Il est classique que les histoires d'Hermite "passent"

aisément aux  $q$ -analogues (voir par exemple Flajolet [Fla], Viennot [Vi1], Penaud [Pe], Ismail, Stanton et Viennot [ISV]). En fait, certaines  $q$ -pondérations de ces histoires conduisent aux moments de deux  $q$ -analogues différents des polynômes d’Hermite ( $q$ -Hermite “continus” et  $q$ -Hermite “discrets”). Tous ces rappels forment la section 4.2.

La troisième étape de la construction de la bijection Foata-Zeilberger consiste à “fusionner” les deux histoires d’Hermite associées aux involutions  $\sigma_{exc}$  et  $\sigma_{nex}$  en une seule histoire, que nous appelons *histoire de Laguerre subdivisée*. Nous l’exposons à la section 4.5.

Et finalement, la quatrième étape consiste à appliquer un opérateur de “tassement” (cf Viennot [Vi1, Vi2]) des chemins valués pour retrouver les histoires de Laguerre usuelles. Les histoires de Laguerre subdivisées et les opérateurs de tassement sont exposés en section 4.4.

Pour résumer, disons ici que les histoires de Laguerre sont l’objet combinatoire associé au développement en fractions continues de type Jacobi (J-fractions) de la série des moments:

$$\sum_{n \geq 0} n! t^n = \frac{1}{1 - b_0^{(0)} t - \frac{\lambda_1^{(0)} t^2}{1 - b_1^{(0)} t - \frac{\lambda_2^{(0)} t^2}{\ddots \frac{\lambda_{k+1}^{(0)} t^2}{1 - b_k^{(0)} t - \ddots}}}}, \quad (4.1.24)$$

tandis que les histoires de Laguerre subdivisées forment l'objet combinatoire associé au développement en fractions continues de type Stieltjes (S-fractions) de cette même série de moments:

$$\sum_{n \geq 0} n!t^n = \frac{1}{1 - \frac{\gamma_1 t}{1 - \frac{\gamma_2 t}{\ddots \frac{1}{1 - \frac{\gamma_k t}{\ddots}}}}}, \quad (4.1.25)$$

dans laquelle on sait que  $\gamma_k = \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$ .

X.G. Viennot [Vi1, Vi2] a montré que les bijections de tassement permettent de passer d'un modèle à l'autre. Il y a en fait deux bijections de tassements (transformant un chemin de Dyck valué en un chemin de Motzkin valué). En combinant ces deux bijections, X.G. Viennot [Vi2] déduit une interprétation combinatoire du célèbre algorithme "quotient-différence" (ou qd-algorithme), permettant de développer une série formelle en S-fraction.

Au fond, nous pourrions dire que la bijection Françon-Viennot correspond au développement de la série  $\sum_{n \geq 0} n!t^n$  en J-fraction, tandis que la bijection Foata-Zeilberger correspond à son développement en S-fraction.

En section 4.5, nous mettons bout à bout les quatre étapes de la bijection Foata-Zeilberger et montrons comment une autre répartition des  $q$ -poids que celle employée par D. Foata et D. Zeilberger sur les deux involutions  $\sigma_{exc}$  et  $\sigma_{nex}$  permet de transformer la statistique  $lag$  des histoires de Laguerre (4.1.22) en le nombre d'inversions classique  $inv$  des permutations. En fait, la statistique  $lag$  est transformée par la bijection Foata-Zeilberger en un nouveau paramètre sur les permutations, dont il n'est pas évident à priori que ce

soit le nombre d'inversions de la permutation originale  $\sigma$ . Ce curieux fait est démontré par une double récurrence en section 4.3. La section 4.5 termine ainsi la preuve combinatoire du résultat principal de ce chapitre, donnant la récurrence linéaire à trois termes des polynômes  $L_{n,q}^{(0)}(x)$ . L'extension de ce résultat aux polynômes  $L_{n,q}^{(\beta-1)}(x)$  se fait sans difficulté. En effet, la notion d'éléments saillants s'interprète facilement à travers les quatre étapes de la construction de Foata-Zeilberger.

La construction de Foata-Zeilberger était originellement relative à une autre statistique,  $den(\sigma)$ , introduite par Marleen Denert [Den]. Celle-ci avait conjecturé que cette statistique était également Mahonienne. L'un des buts de D. Foata et D. Zeilberger était de démontrer cette conjecture (voir aussi Han [Han1, Han2]). Curieusement, la statistique de Denert sur les permutations est transformée par la bijection de Foata-Zeilberger en une statistique très proche de notre statistique  $lag$  sur les histoires de Laguerre. Nous n'avons cependant pas pu relier simplement les deux statistiques pour retrouver ainsi une autre preuve de la conjecture de Denert.

Dans la section 4.6, nous exhibons la bijection Françon-Viennot et nous montrons ce que devient le paramètre  $lag(h)$  transporté sur les permutations le long de cette bijection. Nous obtenons ainsi une nouvelle statistique Mahonienne pour les permutations.

Dans la section 4.7, nous montrons comment certaines restrictions des histoires de Laguerre permettent d'interpréter combinatoirement les moments d'un  $q$ -analogue des polynômes de Charlier, en liaison avec des résultats récents

de M. Wachs et D. White [WaWh]. Une nouvelle statistique,  $char(\pi)$ , apparaît sur les partitions d'ensembles, ayant même distribution que les inversions donnant le  $q$ -analogue classique des nombres de Stirling de deuxième espèce.

Enfin, dans la section 4.8, nous esquissons une théorie combinatoire générale des  $q$ -analogues des classes de polynômes orthogonaux de Sheffer. Nous proposons un  $q$ -analogue combinatoire de ces classes de polynômes, à l'aide d'un raffinement des  $q$ -valuations des histoires de Laguerre. Nous donnons notamment une interprétation combinatoire des moments en termes de certaines statistiques sur les permutations, obtenues via la bijection Foata-Zeilberger.

La classe de polynômes orthogonaux un peu plus générale que les  $q$ -polynômes de Laguerre étudiés dans ce chapitre, dont les coefficients de la récurrence linéaire à trois termes (4.1.1) sont

$$\begin{aligned} b_k(\beta, \gamma; q) &= q^k([k; \gamma]_q + [k+1; \beta]_q) \\ \text{et } \lambda_k(\beta, \gamma; q) &= q^{2k-1}[k; \gamma]_q[k; \beta]_q, \end{aligned} \quad (4.1.26)$$

a été étudiée par J. Zeng [Ze] en 1989. Il a notamment montré, en utilisant les fractions continues ainsi qu'une transformation particulière  $\varrho$ , faisant correspondre à toute permutation de  $\mathfrak{S}_n$  une permutation de  $\mathfrak{S}_{n-1}$  (cf Dumont et Kreweras [DuKr]), que les moments associés à ces polynômes étaient donnés par l'expression

$$\mu_n(\beta, \gamma; q) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \beta^{ssg(\sigma)} \gamma^{side(\sigma)} q^{inv(\sigma)}, \quad (4.1.27)$$

où  $ssg(\sigma)$  désigne le nombre d'*éléments saillants supérieurs gauches* de  $\sigma$  (ou nombre de *records*), i.e. le nombre d'entiers  $\sigma_{i_0}$  dans  $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n$  tels que  $\sigma_j < \sigma_{i_0}$  pour tout  $j < i_0$ , et  $side(\sigma)$  désigne le nombre d'*éléments saillants inférieurs droits exclusifs* de  $\sigma$  (ou nombre d'*anti-records exclusifs*), i.e. le

nombre d'entiers  $\sigma_{i_0}$  dans  $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n$  tels que  $\sigma_j > \sigma_{i_0}$  pour tout  $j > i_0$ , et qui ne sont pas en même temps des records de  $\sigma$ .

En particulier, il obtient aussi le résultat

$$\mu_n(\beta, 1; q) = [n; \beta]_q!. \quad (4.1.28)$$

Mentionnons également les travaux poursuivis actuellement par R. Simion et D. Stanton [SiSt, St], qui ont pour objet l'étude et la classification des différentes spécialisations des polynômes de Laguerre généralisés, définis par la récurrence linéaire à trois termes (4.1.1) pour les coefficients

$$b_k = a[k+1]_{r,s} + b[k]_{t,u} \quad \text{et} \quad \lambda_k = ab[k]_{p,q}[k]_{v,w}, \quad (4.1.29)$$

où  $[n]_{p,q} = (p^n - q^n)/(p - q)$ .

R. Simion et D. Stanton obtiennent en particulier, via la bijection Françon-Viennot, des interprétations combinatoires des moments de ces polynômes en termes de séquences croissantes maximales ("runs") de la permutation.

## 4.2 INVOLUTIONS, HISTOIRES D'HERMITE ET $q$ -ANALOGUES DES POLYNÔMES D'HERMITE

Notons  $INV[n]$  l'ensemble des involutions sans points fixes sur l'ensemble  $\llbracket 2n \rrbracket = \{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ . Nous conviendrons que l'ensemble  $INV[0]$  contient un élément, l'involution vide. Soit  $\tau \in INV[n]$ . Tout comme les permutations, on peut représenter  $\tau$  soit comme un tableau dont la première ligne est formée des entiers de 1 à  $2n$  et la seconde, des images correspondantes par  $\tau$ , i.e.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 2n \\ \tau(1) & \tau(2) & \tau(3) & \dots & \tau(2n) \end{pmatrix};$$

soit comme produit de cycles disjoints, ordonnés selon l'ordre croissant des minima des cycles, chaque cycle commençant par son minimum, comme par exemple

$$\tau = (1, 4)(2, 7)(3, 10)(5, 6)(8, 9).$$

Nous dirons dans ce cas que  $\tau$  est écrite sous forme standard de produit de cycles disjoints.

Dans la suite, nous utiliserons également une autre écriture de  $\tau \in INV[n]$ : sa *représentation graphique*. Elle est construite de la manière suivante: on associe un sommet à chaque entier de 1 à  $2n$  et on les place sur une ligne, par ordre croissant, de gauche à droite. On dessine un arc du sommet  $i$  au sommet  $j$  si et seulement si  $\tau(i) = j$ . La figure 4.2 illustre la représentation graphique de l'involution  $\tau$  donnée ci-dessus.

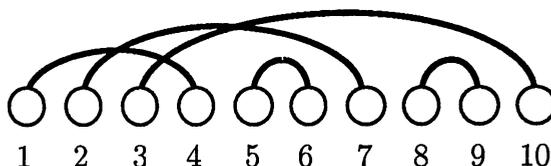


FIGURE 4.2: représentation graphique de  $\tau = (1, 4)(2, 7)(3, 10)(5, 6)(8, 9)$

Il existe une bijection classique entre l'ensemble  $INV[n]$  et les histoires d'Hermite de longueur  $2n$ . Rappelons qu'une *histoire d'Hermite* est une histoire de Laguerre  $h = (w; (p_1, \dots, p_n))$ , soumise aux restrictions suivantes:

- i) le chemin  $w$  ne contient pas de pas Est (c'est un *chemin de Dyck*), et
- ii) si  $(s_{i-1}, s_i)$  est un pas Nord-Est, alors  $p_i = 0$ .

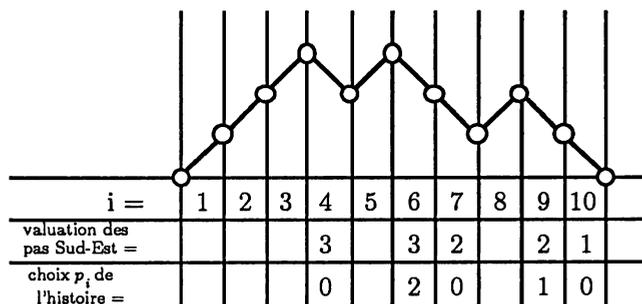
En appliquant la bijection Françon-Viennot aux histoires d’Hermite, on obtient une classe de permutations en correspondance évidente avec les involutions sans points fixes. En fait, cette correspondance n’est pas autre chose que la “première transformation fondamentale”, envoyant les cycles des permutations sur leurs éléments saillants (voir Foata [Fo]) et qui, dans ce cas, revient à enlever les parenthèses dans l’involutions  $\tau$ , écrite sous forme (non standard) de produit de cycles disjoints, les cycles étant ordonnés par ordre décroissant des minima de cycles, chaque cycle commençant par son minimum.

Nous rappelons la correspondance de Françon-Viennot, restreinte aux histoires d’Hermite et composée avec la première transformation fondamentale, en la décrivant directement, comme dans l’article de P. Flajolet [Fla]. Dans la suite, nous aurons également besoin d’une variante de cette correspondance, obtenue en renversant l’ordre des “positions libres”.

Soit  $h = (w; (p_1, \dots, p_{2n}))$ , une histoire d’Hermite de longueur  $2n$ . Nous construisons une involution sans points fixes  $\varphi_{gd}(h) = \tau$  (respectivement  $\varphi_{dg}(h) = \tau'$ ), sous forme standard de produit de 2-cycles disjoints, comme suit: en parcourant le chemin  $w$ , chaque fois que l’on rencontre un pas élémentaire  $(s_{i-1}, s_i)$  Nord-Est, on “ouvre” un nouveau cycle dans  $\tau$  (respectivement  $\tau'$ ) avec l’entier  $i$ , et chaque fois que l’on rencontre un pas  $(s_{i-1}, s_i)$  Sud-Est, on “referme” le  $(p_i + 1)$ -ième cycle “ouvert” avec l’entier  $i$ , les cycles encore ouverts étant numérotés de gauche à droite (respectivement de droite à gauche pour  $\varphi_{dg}(h)$ ).

Par exemple, si  $h = (w; (0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 1, 0))$ , où  $w$  est le chemin de Dyck représenté dans la figure 4.3,  $\varphi_{gd}(h) = (1, 4)(2, 7)(3, 10)(5, 6)(8, 9)$  et

$\varphi_{dg}(h) = (1, 6)(2, 9)(3, 4)(5, 7)(8, 10)$ . On retrouve à la figure 4.4 les différentes étapes de la construction des involutions  $\varphi_{gd}(h)$  et  $\varphi_{dg}(h)$ , représentées graphiquement.



**FIGURE 4.3:** une histoire d'Hermite  $h = (w; (p_1, \dots, p_{10}))$

Les constructions décrites ci-haut s'expriment d'ailleurs très simplement en termes des représentations graphiques des involutions. En effet, l'opération "ouvrir un cycle" avec l'entier  $i$  correspond, du point de vue graphique, à décréter que le sommet  $i$  est l'extrémité gauche d'un arc dont l'autre extrémité reste à déterminer. Nous dirons dans ce cas que  $i$  est un *sommet pendant*. De même, "refermer un cycle" avec un entier  $i$  correspond à relier le sommet associé  $i$  à l'un des sommets pendants toujours libres qui le précèdent.

Il est clair que les applications  $\varphi_{gd}$  et  $\varphi_{dg}$  sont des bijections entre les histoires d'Hermite de longueur  $2n$  et l'ensemble  $INV[n]$  des involutions sans points fixes sur  $\llbracket 2n \rrbracket$ . Les détails sont laissés au lecteur.

D'après les résultats que nous avons cités dans la section 4.1 de ce chapitre, ces bijections fournissent une preuve combinatoire du fait que les polynômes d'Hermite classiques, notés  $H_n(x)$ , dont les coefficients de la récurrence linéaire

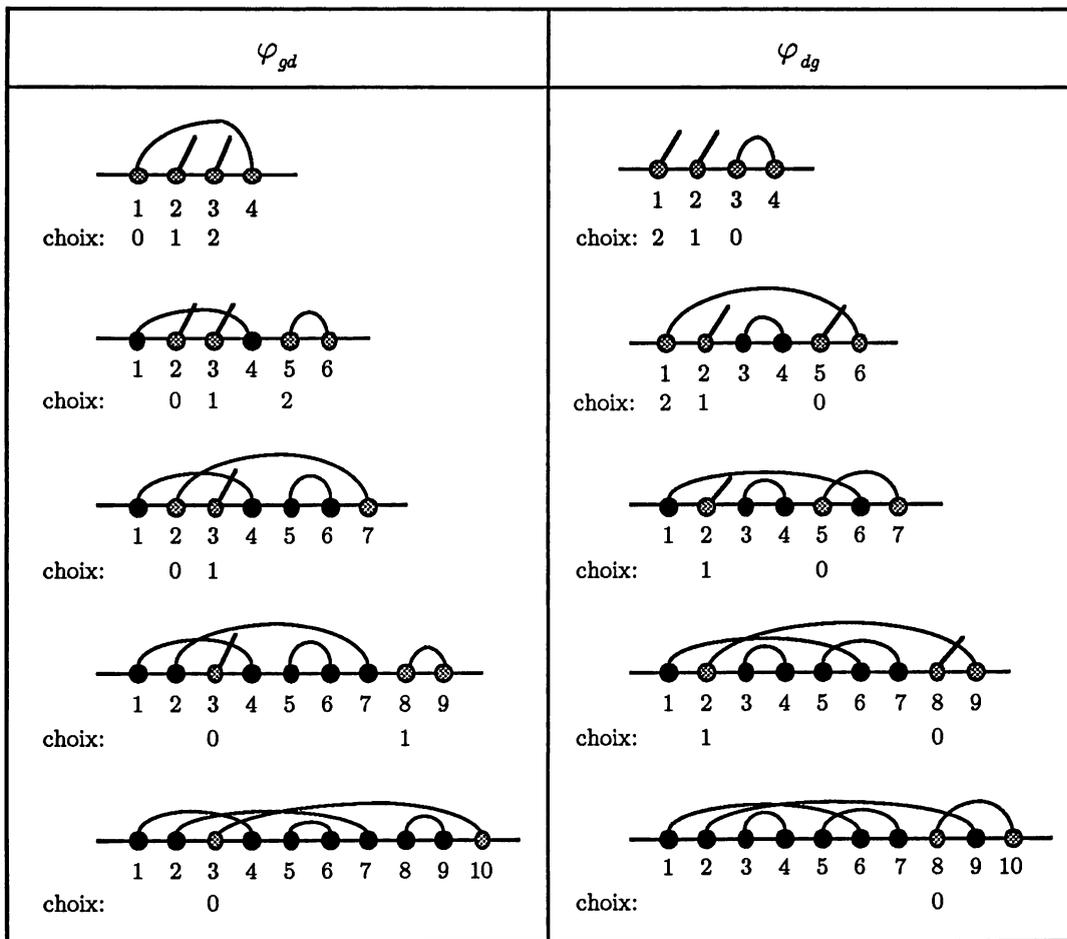


FIGURE 4.4: les bijection  $\varphi_{gd}$  et  $\varphi_{dg}$

à trois termes (4.1.1) sont  $b_k = 0$  et  $\lambda_k = k$ , ont pour moments d'ordre  $n$   $h_n$ , le nombre d'involutions sans points fixes sur l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n\}$ , c'est-à-dire:

$$h_{2n+1} = 0 \quad \text{et} \quad h_{2n} = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n - 1). \tag{4.2.1}$$

On retrouve dans la littérature deux  $q$ -analogues classiques des polynômes d'Hermite (voir Désarménien [Dés] pour un historique), soient les *polynômes de  $q$ -Hermite de première sorte* ou *continus* (Rogers [Ro], Szegö [Sz], Cigler [Ci],

Ismail, Stanton et Viennot [ISV], Penaud [Pe]) ou les *polynômes de  $q$ -Hermite de deuxième sorte* ou *discrets* (Al Salam et Carlitz [ASCa], Askey, Cigler [Ci]).

Les premiers, que nous noterons  $H_n^I(x, q)$ , satisfont la récurrence linéaire à trois termes (4.1.1) pour  $b_k = 0$  et  $\lambda_k = [k]_q$ , et ont pour moments

$$h_{n,q}^I = \frac{1}{(1-q)^n} \sum_{j=0}^n (-1)^j t_{n,j} q^{j(j+1)/2}, \quad (4.2.2)$$

où  $t_{n,j}$  désigne les nombres de Delannoy

$$t_{n,j} = \binom{2n}{n-j} - \binom{2n}{n-j-1} \quad (4.2.3)$$

(cf Riordan [Ri], Touchard [To]). De même, les  $q$ -polynômes d'Hermite de deuxième sorte, que nous noterons  $H_n^{II}(x, q)$ , satisfont la récurrence linéaire à trois termes pour les coefficients  $b_k = 0$  et  $\lambda_k = q^{k-1}[k]_q$ . Ils ont pour moments

$$h_{2n+1,q}^{II} = 0 \text{ et } h_{2n,q}^{II} = [1]_q \cdot [3]_q \cdot \dots \cdot [2n-1]_q, \quad (4.2.4)$$

le  $q$ -analogue naturel des moments  $h_n$  des polynômes d'Hermite classiques.

En introduisant des “ $q$ -analogues” des histoires d'Hermite, correspondant aux deux  $q$ -analogues classiques des polynômes d'Hermite, nous allons maintenant exprimer les moments  $h_{n,q}^I$  et  $h_{n,q}^{II}$  en terme d'un certain  $q$ -comptage des involutions sans points fixes. Nous aurons besoin, pour ce faire, de quelques statistiques sur ces objets.

**DÉFINITIONS 4.2.1:** soit  $\tau \in INV[n]_q$ , une involution sans points fixes. On appelle *croisement* de  $\tau$  une paire  $((i, \tau(i)), (j, \tau(j)))$ , telle que  $1 \leq i < j < \tau(i) < \tau(j) \leq 2n$ . On dira que  $(i, \tau(i))$  (respectivement  $(j, \tau(j))$ ) est l'*arc initial* (respectivement l'*arc terminal*) de ce croisement.

De même, on appelle *paire imbriquée* de  $\tau$ , une paire  $((i, \tau(i)), (j, \tau(j)))$ , telle que  $1 \leq i < j < \tau(j) < \tau(i) \leq 2n$ . On dira de plus que  $(i, \tau(i))$  (respectivement  $(j, \tau(j))$ ) est l'*arc extérieur* (respectivement l'*arc intérieur*) de cette paire imbriquée.

Remarquons que ces deux définitions correspondent exactement aux croisements d'arcs ainsi qu'aux paires d'arcs imbriqués dans les représentations graphiques des involutions sans points fixes. Nous noterons respectivement  $cr(\tau)$  et  $pbr(\tau)$ , le nombre de croisements et le nombre de paires imbriquées de  $\tau \in INV[n]$ . Par exemple, pour

$$\tau = (1, 4)(2, 7)(3, 10)(5, 6)(8, 9),$$

qui est représentée graphiquement à la figure 4.2, on trouve  $cr(\tau) = 3$  et  $pbr(\tau) = 3$ . Par convention, l'involution vide ne contient aucun croisement ni paire imbriquée.

Finalement, nous poserons

$$Inv(\tau) = cr(\tau) + 2 \cdot pbr(\tau). \quad (4.2.5)$$

**REMARQUE 4.2.2:** il existe une autre formulation de la statistique  $pbr(\tau)$  en termes d'inversions sur des mots. Plus exactement, notons  $m(\tau)$  le mot obtenu de la représentation de  $\tau$  sous forme standard de produit de cycles, en extrayant les maxima des cycles dans leur ordre d'apparition. Notons  $invm(\tau)$  le nombre d'inversions de ce mot, i.e.

$$invm(\tau) = inv(m(\tau)), \quad (4.2.6)$$

$$\text{où } inv(a_1 a_2 \dots a_n) = |\{1 \leq i < j \leq n \mid a_i > a_j\}|, \quad (4.2.7)$$

alors

$$invm(\tau) = pbr(\tau). \quad (4.2.8)$$

Par exemple, pour  $\tau = (1, 4)(2, 7)(3, 10)(5, 6)(8, 9)$  illustrée à la figure 4.2,  $invm(\tau) = inv(4 \ 7 \ 10 \ 6 \ 9) = 3 = pbr(\tau)$ .

**PROPOSITION 4.2.3:** *Avec les notations précédentes, on a les égalités suivantes:*

i)

$$h_{2n,q}^I = \sum_{\tau \in INV[n]} q^{pbr(\tau)}, \quad (4.2.9)$$

$$= \sum_{\tau \in INV[n]} q^{cr(\tau)}; \quad (4.2.10)$$

ii)

$$h_{2n,q}^{II} = \sum_{\tau \in INV[n]} q^{Inv(\tau)}. \quad (4.2.11)$$

**DÉMONSTRATION:**

i) Les coefficients de la récurrence linéaire à trois termes des  $q$ -polynômes d'Hermite de première sorte étant égaux à  $b_k = 0$  et  $\lambda_k = [k]_q$ , on a

$$h_{2n,q}^I = \sum_h q^{som(h)}, \quad (4.2.12)$$

où la sommation parcourt l'ensemble des histoires d'Hermite  $h$  de longueur  $2n$ , et  $som(h)$  a été défini en (4.1.21). Pour démontrer la partie (i) de la proposition 4.2.3, il suffit donc de démontrer les égalités suivantes: si  $h = (w; (p_1, \dots, p_{2n}))$  est une histoire d'Hermite,

$$som(h) = pbr(\varphi_{gd}(h)), \quad (4.2.13)$$

pour l'égalité (4.2.9), et

$$\text{som}(h) = \text{cr}(\varphi_{dg}(h)), \quad (4.2.14)$$

pour l'identité (4.2.10). Rappelons que  $\text{som}(h)$  désigne la somme des choix  $p_1 + \dots + p_{2n}$ .

Puisque par définition des histoires d'Hermite, le choix  $p_i$  correspondant à un pas élémentaire Nord-Est  $(s_{i-1}, s_i)$  doit nécessairement être nul, il suffit d'examiner ce qui se passe dans la construction des bijections  $\varphi_{gd}$  et  $\varphi_{dg}$  lorsque l'on rencontre un pas élémentaire  $(s_{i-1}, s_i)$  Sud-Est.

Supposons donc que l'on soit en train de construire  $\varphi_{gd}(h)$  (graphiquement) et qu'on est arrivé dans la lecture de  $h$  à un pas élémentaire Sud-Est  $(s_{i-1}, s_i)$ , partant du niveau  $k$ . À cette étape de la construction, exactement  $k$  sommets inférieurs à  $i$  sont toujours pendants, alors que les  $i - k - 1$  sommets restant sont reliés entre eux. Selon les règles de construction, il faut alors ajouter un arc entre le sommet  $i$  et le  $(p_i + 1)$ -ième sommet pendant, ceux-ci étant numérotés de gauche à droite. Ainsi, les  $p_i$  sommets pendants  $j$ , se trouvant à gauche de l'extrémité gauche  $\varphi_{gd}(h)(i)$  de l'arc  $(\varphi_{gd}(h)(i), i)$ , seront reliés à un sommet  $\varphi_{gd}(h)(j)$  se trouvant à droite du sommet  $i$ , i.e. on aura les inégalités suivantes:

$$j < \varphi_{gd}(h)(i) < i < \varphi_{gd}(h)(j).$$

L'arc  $(\varphi_{gd}(h)(i), i)$  forme donc l'arc intérieur d'exactly  $p_i$  paires imbriquées dans  $\varphi_{gd}(h)$  (ce sont les seules). Comme tout pas élémentaire Sud-Est de l'histoire d'Hermite  $h$  correspond à un seul arc dans la représentation graphique de  $\varphi_{gd}(h)$ , cela signifie que  $\text{som}(h) = p_1 + p_2 + \dots + p_{2n}$  est exactement égal au nombre de paires imbriquées de  $\varphi_{gd}(h)$ , et l'identité (4.2.9) est vérifiée.

De même, on peut montrer que pour  $\varphi_{dg}(h)$ , chaque pas Sud-Est  $(s_{i-1}, s_i)$  de  $h$  correspond un à arc  $(\varphi_{dg}(h)(i), i)$ , formant l'arc initial d'exactly  $p_i$  croisements (voir la figure 4.5). Les détails sont laissés au lecteur.

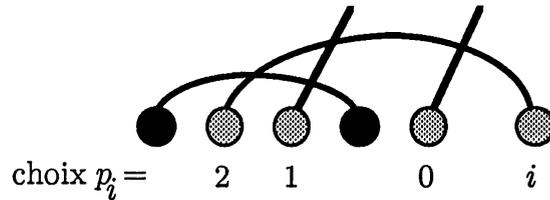


FIGURE 4.5: le choix  $p_i$  dans  $\varphi_{dg}$

ii) (récurrence sur  $n$ )

1) cas initial  $n=0$ .  $INV[0]$  contient seulement l'involution vide, sans croisements ni paires imbriquées, donc

$$\sum_{\tau \in INV[0]} q^{Inv(\tau)} = 1 = h_{0,q}^{II}.$$

2) cas général. Soit  $\tau \in INV[n]$ . Pour construire une involution sans points fixes  $\tau' \in INV[n+1]$  à partir de  $\tau$ , on peut procéder comme suit: dans un premier temps, on ajoute un sommet étiqueté  $(2n+1)$  à la droite de tous les autres sommets dans la représentation graphique de  $\tau$ . On insère ensuite un second point immédiatement à gauche d'un des sommets  $i_0$  déjà existant (y compris possiblement le sommet  $(2n+1)$ ), que l'on joint par un arc au sommet  $(2n+1)$ . Finalement, on renumérote les sommets, dans l'ordre, de 1 à  $(2n+2)$ . Par exemple, si l'on choisit  $i_0 = 8$ , on obtient, à partir de l'involution  $\tau = (1, 6)(2, 9)(3, 4)(5, 7)(8, 10)$ ,  $\tau' = (1, 6)(2, 10)(3, 4)(5, 7)(8, 12)(9, 11)$  (voir la figure 4.6).

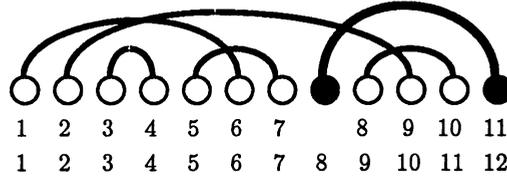


FIGURE 4.6: construction de  $\tau' \in INV[n+1]$   
à partir de  $\tau \in INV[n]$

Ce procédé est clairement inversible, on a donc une bijection entre l'ensemble  $[2n+1] \times INV[n]$  et l'ensemble  $INV[n+1]$ . De plus,

$$Inv(\tau') = Inv(\tau) + 2n + 1 - i_0, \quad (4.2.15)$$

puisque dans  $\tau'$ , en plus des croisements et paires imbriquées héritées de  $\tau$ , qui sont préservées, les sommets  $(i_0+1), (i_0+2), \dots, (2n+1)$  comptent soit comme arc initial d'un croisement avec le nouvel arc  $(i_0, 2n+2)$ , soit comme l'une ou l'autre des extrémités de l'arc intérieur d'une paire imbriquée (comptant double dans la statistique  $Inv$ ), ayant  $(i_0, 2n+2)$  comme arc extérieur. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \sum_{\tau' \in INV[n+1]} q^{Inv(\tau')} &= \sum_{i_0=1}^{2n+1} q^{2n+1-i_0} \sum_{\tau \in INV[n]} q^{Inv(\tau)}, \\ &= [2n+1]_q \cdot [1]_q [3]_q \dots [2n-1]_q, \\ &\quad \text{(par hypothèse d'induction)} \\ &= h_{2n+2, q}^{II}. \quad \square \end{aligned}$$

REMARQUE 4.2.4: Une démonstration alternative de (ii) consiste à établir l'égalité

$$\sum_{h=(w; (p_1, \dots, p_{2n}))} q^{som(h)} \cdot q^{nse(h)} = \sum_{\tau \in INV[n]} q^{Inv(\tau)}, \quad (4.2.16)$$

où, dans la sommation de gauche,  $h$  parcourt toutes les histoires d'Hermite de longueur  $2n$ ,

$$nse(h) = \sum_{\substack{(s_{i-1}, s_i) \\ \text{pas Sud-Est de } w}} (niv(w, i) - 1), \quad (4.2.17)$$

et  $niv(w, i)$  désigne le niveau de départ du  $i$ -ième pas élémentaire  $(s_{i-1}, s_i)$  de  $w$ .

Le fait que les moments  $h_{2n,q}^{II}$  soient égaux au membre de gauche de (4.2.16) découle du fait que les coefficients de la récurrence linéaire à trois termes (4.1.1) des polynômes  $H_{n,q}^{II}(x)$  sont égaux à  $b_k = 0$  et  $\lambda_k = q^{k-1}[k]_q$ .

Appliquons la bijection  $\varphi_{gd}$  aux histoires d'Hermite  $h = (w; (p_1, \dots, p_{2n}))$  de longueur  $2n$ . Comme nous l'avons vu dans la démonstration de la partie (i) de la proposition précédente, à la lecture d'un pas Sud-Est  $(s_{i-1}, s_i)$ , partant du niveau  $k$ , il y a exactement  $k$  sommets toujours pendants à gauche du sommet  $i$  dans la construction partielle de  $\varphi_{gd} = \tau$ . De plus, nous avons établi que les  $p_i$  sommets pendants se trouvant à gauche du sommet  $\tau(i)$ , correspondent aux arcs extérieurs de toutes les paires imbriquées dont l'arc intérieur est  $(\tau(i), i)$ . De même, on peut montrer que les  $k - 1 - p_i$  sommets pendants restant, se situant entre le sommet  $\tau(i)$  et le sommet  $i$ , correspondent aux arcs terminaux des croisements dont l'arc initial est  $(\tau(i), i)$ .

Ainsi, la bijection  $\varphi_{gd}$  envoie le paramètre " $som(h)$ " sur le paramètre " $pbr(\varphi_{gd}(h))$ ", et le paramètre " $nse(h)$ " sur " $pbr(\varphi_{gd}(h)) + cr(\varphi_{gd}(h))$ ", ce qui démontre (4.2.16). Les détails sont laissés au lecteur.

### 4.3 UNE NOUVELLE DÉFINITION DES INVERSIONS D'UNE PERMUTATION

Dans cette section, nous allons introduire une décomposition des permutations  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  en deux involutions sans points fixes (essentiellement en séparant les excédances  $(i < \sigma(i))$  et les non-excédances  $(i \geq \sigma(i))$  de la permutation)

et nous exprimerons ensuite le nombre d'inversions classique de  $\sigma$  en terme de la statistique  $Inv$  sur les involutions, définie en (4.2.5) de la section 4.2.

Soit donc  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , une permutation sur l'ensemble  $\llbracket n \rrbracket$ . La *représentation graphique de  $\sigma$*  se construit de la manière suivante: on prend  $2n$  sommets numérotés de gauche à droite par  $1^-, 1^+, 2^-, 2^+, \dots, n^-, n^+$  (on décide que  $1^- < 1^+ < 2^- < 2^+ < \dots < n^- < n^+$ ). On trace un arc du point  $i^+$  au point  $j^-$  si et seulement  $\sigma(i) = j$ . De plus, si  $i < j$ , l'arc devra passer au-dessus de tous les sommets (on dira alors que c'est un *arc supérieur*) et si  $i \geq j$ , l'arc passera plutôt en dessous des points (*arc inférieur*). Par exemple, si

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix},$$

la représentation graphique de  $\sigma$  est illustrée à la figure 4.7.

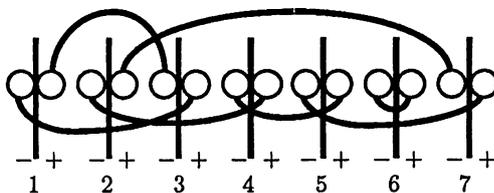


FIGURE 4.7: représentation graphique d'une permutation  $\sigma$

Nous noterons  $\sigma_{exc}$  (respectivement  $\sigma_{nex}$ ), l'involution sans points fixes (qui aura comme support un sous-ensemble de  $\{1^-, 1^+, 2^-, 2^+, \dots, n^-, n^+\}$ ) dont la représentation graphique est formée par les arcs supérieurs (respectivement inférieurs) et leurs extrémités dans la représentation graphique de  $\sigma$ . Dans l'exemple précédent, on obtient  $\sigma_{exc} = (1^+, 3^-)(2^+, 7^-)$  et  $\sigma_{nex} = (1^-, 3^+)(2^-, 4^+)(4^-, 5^+)(5^-, 7^+)(6^-, 6^+)$ . Notons

$$exc(\sigma) = |\{1 \leq i \leq n \mid i < \sigma(i)\}|, \quad (4.3.1)$$

$$= \text{nombre d'arcs supérieurs dans la} \\ \text{représentation graphique de } \sigma. \quad (4.3.2)$$

La statistique classique d'inversions sur la permutation  $\sigma$  s'exprime élégamment en terme des croisements et paires imbriquées de  $\sigma_{exc}$  et  $\sigma_{nex}$ .

**LEMME 4.3.1:** *Pour toute permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , avec les notations précédentes,*

$$inv(\sigma) = exc(\sigma) + Inv(\sigma_{exc}) + Inv(\sigma_{nex}). \quad (4.3.3)$$

Par exemple, pour la permutation  $\sigma$  dont la représentation graphique est donnée dans la figure 4.7, on calcule  $inv(\sigma) = 8$ ,  $exc(\sigma) = 2$ ,  $Inv(\sigma_{exc}) = 1$ , et  $Inv(\sigma_{nex}) = 3 + 2$ .

**DÉMONSTRATION:** (par récurrence sur  $n$  puis sur la position de  $n$  dans la permutation)

Le cas initial  $n = 0$  est trivial. Supposons donc que l'identité (4.3.3) soit vérifiée pour toute permutation  $\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\dots\sigma(n) \in \mathfrak{S}_n$ , et montrons que quelle que soit la façon d'insérer  $n+1$  dans  $\sigma$  pour obtenir  $\sigma' \in \mathfrak{S}_{n+1}$ , l'identité (4.3.3) est conservée.

a) Si la permutation  $\sigma'$  est obtenue de  $\sigma$  de la manière suivante:

$$\sigma'(i) = \begin{cases} \sigma(i) & \text{si } 1 \leq i \leq n, \\ n+1 & \text{si } i = n+1, \end{cases}$$

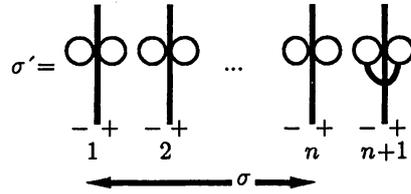


FIGURE 4.8: cas (a) du lemme 4.3.1

on a clairement (voir figure 4.8),  $inv(\sigma') = inv(\sigma)$ ,  $exc(\sigma') = exc(\sigma)$ ,  $Inv(\sigma'_{exc}) = Inv(\sigma_{exc})$  et  $Inv(\sigma'_{nex}) = Inv(\sigma_{nex})$ , donc par induction

$$inv(\sigma') = exc(\sigma') + Inv(\sigma'_{exc}) + Inv(\sigma'_{nex}).$$

b) Supposons maintenant que l'identité (4.3.3) est vérifiée pour

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & k+1 & \dots & n & n+1 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(k) & n+1 & \dots & \sigma(n) & \sigma(n+1) \end{pmatrix},$$

et montrons que (4.3.3) est aussi vérifiée pour

$$\begin{aligned} \sigma' &= \sigma \circ (k, k+1), \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & k+1 & \dots & n & n+1 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & n+1 & \sigma(k) & \dots & \sigma(n) & \sigma(n+1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Remarquons que la permutation  $\sigma'$  possède une inversion de plus que  $\sigma$ :  $\sigma'(k) = n+1 > \sigma(k) = \sigma'(k+1)$ . Donc, pour démontrer (4.3.3), il suffit de montrer que

$$exc(\sigma') + Inv(\sigma'_{exc}) + Inv(\sigma'_{nex}) = exc(\sigma) + Inv(\sigma_{exc}) + Inv(\sigma_{nex}) + 1. \quad (4.3.4)$$

Il y a quatre sous-cas à considérer, pour lesquels un dessin suffit à illustrer les variations des différentes statistiques  $exc$  et  $Inv$ .

- b.1)  $k + 1 = n + 1$  et  $\sigma(k) \leq n$ ,
- b.2)  $k + 1 < n + 1$  et  $\sigma(k) \leq k$ ,
- b.3)  $k + 1 < n + 1$  et  $\sigma(k) > k + 1$ ,
- b.4)  $k + 1 < n + 1$  et  $\sigma(k) = k + 1$ .

cas b.1)  $k + 1 = n + 1$  et  $\sigma(k) \leq n$  (figure 4.9).

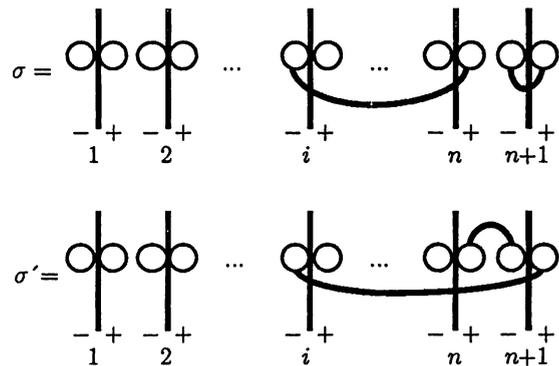


FIGURE 4.9: sous-cas (b.1) du lemme 4.3.1

En comparant  $\sigma$  à  $\sigma'$ , on constate que  $exc(\sigma') = exc(\sigma) + 1$ ,  $Inv(\sigma'_{exc}) = Inv(\sigma_{exc})$  et  $Inv(\sigma'_{nex}) = Inv(\sigma_{nex})$ . La permutation  $\sigma'$  contient l'excédance supplémentaire  $\sigma'(n) = n + 1$ .

cas b.2)  $k + 1 < n + 1$  et  $\sigma(k) \leq k$  (figure 4.10).

Comparons  $\sigma'$  à  $\sigma$ . Si  $j = \sigma^{-1}(k + 1) < k$ , l'arc supérieur  $(j^+, (k + 1)^-)$  apparait dans les représentations graphiques de  $\sigma$  et  $\sigma'$ . La permutation  $\sigma'$  contient alors un croisement (supérieur) de plus que  $\sigma$ , à savoir le croisement entre les arcs  $(j^+, (k + 1)^-)$  et  $(k^+, (n + 1)^-)$ . On a donc  $exc(\sigma') = exc(\sigma)$ ,  $Inv(\sigma'_{exc}) = Inv(\sigma_{exc}) + 1$  et  $Inv(\sigma'_{nex}) = Inv(\sigma_{nex})$ .

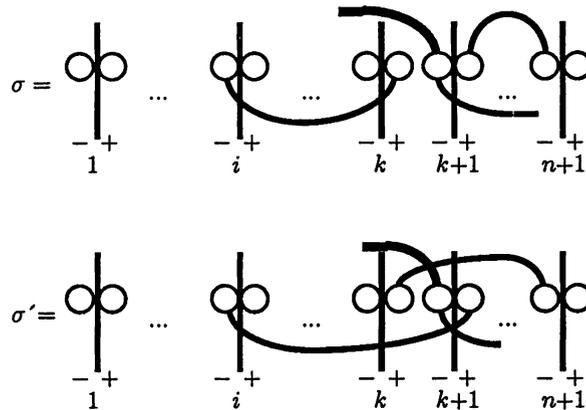


FIGURE 4.10: sous-cas (b.2) du lemme 4.3.1

Inversement, si  $j = \sigma^{-1}(k+1) > k+1$ , il y a un nouveau croisement (inférieur) entre les arcs  $((k+1)^-, j^+)$  et  $(i^-, (k+1)^+)$  dans  $\sigma'$ . Ainsi  $exc(\sigma') = exc(\sigma)$ ,  $Inv(\sigma'_{exc}) = Inv(\sigma_{exc})$  et  $Inv(\sigma'_{nex}) = Inv(\sigma_{nex}) + 1$ .

cas b.3)  $k+1 < n+1$  et  $\sigma(k) > k+1$  (figure 4.11).

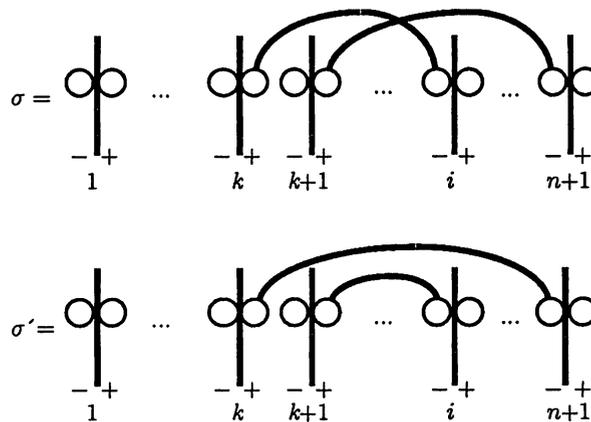


FIGURE 4.11: sous-cas (b.3) du lemme 4.3.1

Le croisement de l'arc  $(k^+, i^-)$  avec l'arc  $((k+1)^+, (n+1)^-)$  dans la représentation graphique de  $\sigma$  devient la paire imbriquée entre les arcs  $(k^+, (n+1)^-)$  et  $((k+1)^+, i^-)$  dans  $\sigma'$ , qui compte double dans la statistique

*Inv.* Les autres croisements ou paires imbriquées de  $\sigma$  sont préservés entre eux, ou avec l'un ou l'autre des arcs  $(k^+, (n+1)^-)$  et  $((k+1)^+, i^-)$  de  $\sigma'$ . Ainsi  $exc(\sigma') = exc(\sigma)$ ,  $Inv(\sigma'_{exc}) = Inv(\sigma_{exc}) + 1$  et  $Inv(\sigma'_{nex}) = Inv(\sigma_{nex})$ .

cas b.4)  $k+1 < n+1$  et  $\sigma(k) = k+1$  (figure 4.12).

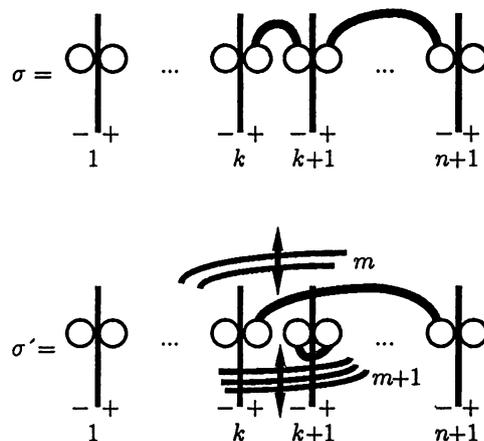


FIGURE 4.12: sous-cas (b.4) du lemme 4.3.1

Dans ce cas, on retrouve un arc supérieur de moins dans la représentation graphique de  $\sigma'$  que dans celle de  $\sigma$ , reflétant l'excédance perdue  $k+1 < \sigma(k+1) = n+1$ , devenue  $\sigma'(k+1) = k+1$ .

Ensuite, les croisements et paires imbriquées entre les arcs supérieurs de la représentation graphique de  $\sigma'$  sont tous conservés, sauf les paires imbriquées de  $\sigma_{exc}$  qui avaient  $(k^+, (k+1)^-)$  comme arc intérieur.

L'argument de la preuve repose sur le fait suivant: il passe autant d'arcs supérieurs au-dessus de deux sommets successifs  $k^+, (k+1)^-$ , dans la représentation graphique d'une permutation  $\sigma$ , qu'il ne passe d'arcs inférieurs en dessous de ces deux points. En effet, on peut faire correspondre bijectivement à chaque arc supérieur  $(j_0^+, l_0^-)$  tel que  $j_0 \leq k < k+1 \leq l_0$ , un unique arc

inférieur  $(l_1^-, j_1^+)$ , satisfaisant les inégalités  $l_1 \leq k < k + 1 \leq j_1$ , en suivant simplement les cycles de la permutation  $\sigma$ . En fait, on prend  $j_1 = \sigma^i(j_0)$  et  $l_1 = \sigma^i(l_0)$ , où  $i$  est le plus petit entier pour lequel l'inégalité suivante est vérifiée:  $\sigma^i(l_0) \leq k < k + 1 \leq \sigma^i(j_0)$ .

Notons  $m$  le nombre d'arcs  $(j^+, l^-)$  tels que  $j < k < k + 1 < l$ , dans la permutations  $\sigma$ . En comptant l'arc  $(k^+, (k + 1)^-)$ , il y a exactement  $m + 1$  arcs passant au-dessus des sommets  $k^+$  et  $(k + 1)^-$  dans la représentation graphique de  $\sigma$ , et de même pour la permutation  $\sigma'$ , en comptant l'arc  $(k^+, (n + 1)^-)$ . Lors du passage de  $\sigma$  à  $\sigma'$ , on a déjà fait remarquer que parmi les arcs supérieurs,  $m$  paires imbriquées sont perdues. Du côté des arcs inférieurs, les croisements et paires imbriquées existant sont conservés. Par contre, par ce qui précède, le nouvel arc  $((k + 1)^-, (k + 1)^+)$  de  $\sigma'$  forme l'arc intérieur d'exactly  $m + 1$  nouvelles paires imbriquées (correspondant aux  $m + 1$  arcs qui passent en dessous des points  $k^+$  et  $(k + 1)^-$ ), et ne cause aucun nouveau croisement.

Ainsi  $exc(\sigma') = exc(\sigma) - 1$ ,  $Inv(\sigma'_{exc}) = Inv(\sigma_{exc}) - 2m$  et  $Inv(\sigma'_{nex}) = Inv(\sigma_{nex}) + 2(m + 1)$  où  $m$  désigne le nombre d'arcs  $(j^+, l^-)$  tels que  $j < k < k + 1 < l$ . □

#### 4.4 HISTOIRES DE LAGUERRE SUBDIVISÉES ET TASSEMENT

Une fonctionnelle linéaire  $f$  est dite *symétrique* si ses moments d'ordre impair,  $\mu_{2n+1} = f(x^{2n+1})$  sont tous nuls. Entre autres, les polynômes d'Hermite et leurs  $q$ -analogues, que nous avons étudiés dans la section 4.2, possèdent une fonctionnelle linéaire symétrique.

Soit  $S_n(x)$  une famille de polynômes orthogonaux associée à une fonctionnelle linéaire symétrique. On peut montrer qu'alors les coefficients  $b_k$  de la récurrence linéaire à trois termes (4.1.1) satisfaite par  $S_n(x)$  sont tous égaux à zéro. De même, cette famille est aussi caractérisée par l'identité

$$S_n(-x) = (-1)^n S_n(x), \quad (4.4.1)$$

pour tout  $n \geq 0$ .

Cette dernière propriété permet de définir deux suites de polynômes unitaires  $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$  et  $\{Q_n(x)\}_{n \geq 0}$ , par les relations

$$S_{2n}(x) = P_n(x^2) \quad \text{et} \quad S_{2n+1}(x) = xQ_n(x^2). \quad (4.4.2)$$

Or, il se trouve que les polynômes  $P_n(x)$  et  $Q_n(x)$  eux-mêmes forment aussi des classes de polynômes orthogonaux. De plus, si  $\nu_n$  désigne les moments associés aux polynômes  $P_n(x)$ , et  $\nu_n^+$  désigne les moments associés aux polynômes  $Q_n(x)$ , alors ces deux suites de moments sont reliées entre elles par la relation

$$\nu_n^+ = \nu_{n+1}. \quad (4.4.3)$$

Ce passage des polynômes  $P_n(x)$  aux polynômes  $Q_n(x)$  est un cas particulier des "kernel polynomials" (cf Chihara [Chi]), définis plus généralement comme étant des polynômes  $P_n^+(x, c)$ , orthogonaux par rapport aux moments  $\nu'_n = \nu_{n+1} - c\nu_n$ .

Il existe aussi une relation entre les moments des polynômes  $S_n(x)$ , notés  $\mu_n$ , et ceux des polynômes  $P_n(x)$ : pour tout  $n \geq 0$ ,

$$\mu_{2n} = \nu_n. \quad (4.4.4)$$

Dans cette section, nous exhibons des bijections classiques de tassement (cf Viennot, chapitre 5 [Vi1]), entre des chemins de Dyck de longueur  $2n$  et certains chemins de Motzkin colorés de longueur  $n$  ou  $n - 1$ . Ces bijections permettent de démontrer combinatoirement les relations (4.4.3) et (4.4.4), entre les moments des polynômes  $S_n(x)$  et ceux des polynômes associés  $P_n(x)$  et  $Q_n(x)$ . Nous les étendons ensuite aux histoires de Laguerre subdivisées et usuelles.

Soit  $w = (s_0, s_1, \dots, s_{2n})$  un chemin de Dyck de longueur  $2n$ . Il existe deux manières naturelles de le contracter en un chemin de Motzkin coloré.

La première consiste à lire les pas élémentaires de  $w$  de deux en deux, et à les remplacer par un seul pas élémentaire selon les règles suivantes:

- (i) si  $(s_{2i}, s_{2i+1})$  et  $(s_{2i+1}, s_{2i+2})$  sont deux pas Nord-Est, alors ils sont remplacés par un pas élémentaire  $(s_i^*, s_{i+1}^*)$  Nord-Est;
- (ii) si  $(s_{2i}, s_{2i+1})$  et  $(s_{2i+1}, s_{2i+2})$  sont deux pas Sud-Est, alors ils sont remplacés par un pas élémentaire  $(s_i^*, s_{i+1}^*)$  Sud-Est;
- (iii) si  $(s_{2i}, s_{2i+1})$  est un pas Nord-Est et  $(s_{2i+1}, s_{2i+2})$  est un pas Sud-Est, ils sont remplacés par un pas élémentaire  $(s_i^*, s_{i+1}^*)$  Est rouge; et
- (iv) si  $(s_{2i}, s_{2i+1})$  est un pas Sud-Est et  $(s_{2i+1}, s_{2i+2})$  est un pas Nord-Est, ils sont remplacés par un pas élémentaire  $(s_i^*, s_{i+1}^*)$  Est bleu.

Notons  $\Theta(w) = (s_0^*, s_1^*, \dots, s_n^*) = w^*$  le nouveau chemin obtenu. Remarquons que si le pas élémentaire  $(s_{2i}, s_{2i+1})$  (qui part toujours d'un niveau pair) part du niveau  $2l$ , alors le pas élémentaire correspondant  $(s_i^*, s_{i+1}^*)$  dans  $\Theta(w)$  part du niveau  $l$ .

**PROPOSITION 4.4.1:** *L'application de tassement  $\Theta$  décrite ci-haut constitue une bijection entre les chemins de Dyck de longueur  $2n$  et les chemins de Motzkin colorés de longueur  $n$ , sans pas Est bleu au niveau 0.*

*De plus, le niveau de départ d'un pas élémentaire  $(s_i^*, s_{i+1}^*)$  dans  $\Theta(w) = (s_0^*, s_1^*, \dots, s_n^*)$  est égal au niveau de départ du pas  $(s_{2i}, s_{2i+1})$  correspondant dans  $w$  divisé par 2.*

La deuxième façon de contracter des chemins de Dyck de longueur  $2n$  consiste à effacer le premier et le dernier pas du chemin (le premier étant obligatoirement un pas Nord-Est et le dernier un pas Sud-Est), à lire les pas restant de deux en deux et à appliquer la même règle de substitution des couples de pas élémentaires que  $\Theta$ . On obtient cette fois une bijection  $\Theta^+$  entre les chemins de Dyck de longueur  $2n+2$  et les chemins de Motzkin colorés quelconques de longueur  $n$ .

Par exemple, si  $w$  désigne le chemin de Dyck de la figure 4.13, alors  $\Theta(w)$  et  $\Theta^+(w)$  sont décrits dans les figures 4.14 et 4.15 respectivement.

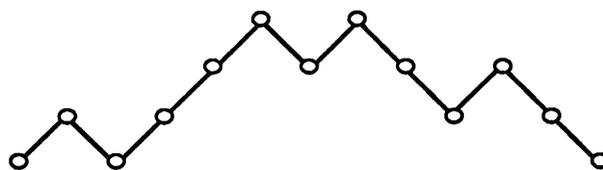


FIGURE 4.13: chemin de Dyck

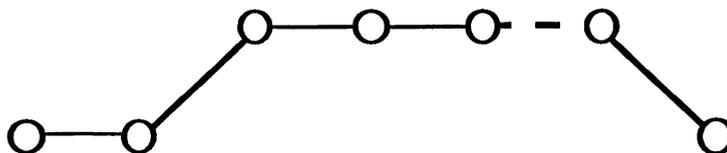


FIGURE 4.14: la bijection  $\Theta$  appliquée à la figure 4.13

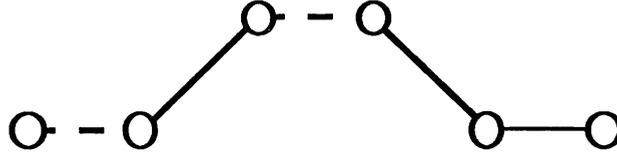


FIGURE 4.15: la bijection  $\Theta^+$  appliquée à la figure 4.13

Soit  $\{\gamma_k\}_{k \geq 1}$ , une suite de scalaires à valeurs dans un anneau  $K$ . Soit  $v$  la valuation des chemins de Dyck  $w = (s_0, s_1, \dots, s_{2n})$ , définie comme dans la théorie classique des polynômes orthogonaux, par

$$v(s_i, s_{i+1}) = \begin{cases} 1 & \text{si } (s_i, s_{i+1}) \text{ est un pas Nord-Est,} \\ \gamma_k & \text{si } (s_i, s_{i+1}) \text{ est un pas Sud-Est partant du niveau } k. \end{cases} \quad (4.4.5)$$

On peut alors transporter aisément les valuations des pas élémentaires, le long de  $\Theta$  et de  $\Theta^+$ , par les relations respectives:

$$v'(s_i^*, s_{i+1}^*) = v(s_{2i}, s_{2i+1}) \cdot v(s_{2i+1}, s_{2i+2}), \quad (4.4.6)$$

pour  $\Theta$ , et

$$v^+(s_i^*, s_{i+1}^*) = v(s_{2i+1}, s_{2i+2}) \cdot v(s_{2i+2}, s_{2i+3}), \quad (4.4.7)$$

pour  $\Theta^+$ .

Plus exactement, le long de  $\Theta$ , on obtient comme suites  $\{a_k\}$ ,  $\{b'_k\}$ ,  $\{b''_k\}$ ,  $\{c_k\}$ , associées à la valuation des chemins de Motzkin colorés, définie en (4.1.9) et (4.1.10)

$$a_k = 1, \quad b'_k = \gamma_{2k}, \quad b''_k = \gamma_{2k+1}, \quad c_k = \gamma_{2k}\gamma_{2k-1}, \quad (4.4.8)$$

et le long de  $\Theta^+$ ,

$$a_k^+ = 1, \quad b_k^+ = \gamma_{2k+1}, \quad b_k^{''+} = \gamma_{2k+2}, \quad c_k^+ = \gamma_{2k+1}\gamma_{2k}, \quad (4.4.9)$$

où, par convention,  $\gamma_0 = 0$ .

Les identités suivantes découlent, pour tout chemin de Dyck  $w$ :

$$v(w) = v'(\Theta(w)), \quad (4.4.10)$$

$$\text{et } v(w) = \gamma_1 \cdot v^+(\Theta^+(w)). \quad (4.4.11)$$

**THÉORÈME 4.4.2:** *Soit  $S_n(x)$ , la famille de polynômes orthogonaux dont les coefficients de la récurrence linéaire à trois termes (4.1.1) sont  $b_k = 0$  et  $\lambda_k = \gamma_k$ , et dont les moments sont donnés par*

$$\mu_n = \sum_w v(w), \quad (4.4.12)$$

où  $w$  parcourt l'ensemble des chemins de Dyck de longueur  $n$  et  $v$  est la valuation définie en (4.4.5). Soient  $P_n(x)$  et  $Q_n(x)$  les familles de polynômes orthogonaux définies par les relations (4.4.2).

Alors les moments associés aux polynômes  $P_n(x)$  sont donnés par

$$\nu_n = \sum_w v'(w), \quad (4.4.13)$$

où  $w$  parcourt tous les chemins de Motzkin colorés de longueur  $n$  et  $v'$  désigne la valuation définie en (4.4.6).

De même, les moments des polynômes  $Q_n(x)$  sont donnés par

$$\nu_n^+ = \nu_{n+1} = \sum_w v^+(w), \quad (4.4.14)$$

où  $w$  parcourt tous les chemins de Motzkin colorés de longueur  $n$  et  $v^+$  est la valuation définie en (4.4.7).

Le lecteur est référé au chapitre 5 de [Vil] pour la démonstration de ce théorème.

En utilisant la théorie des polynômes orthogonaux et les bijections de tassement  $\Theta$  et  $\Theta^+$ , X.G. Viennot [Vi2] a donné une interprétation combinatoire de l'algorithme quotient-différence (ou QD-algorithme) (cf Stiefel [Sti], Rutishauser [Ru], Henrici [Hen1, Hen2], Brezinski [Bre], Gragg [Gr]). Cet algorithme permet de calculer les coefficients  $\gamma_k$  d'une fraction continue de type Stieltjes (voir formule (4.1.24)) à partir des coefficients  $\mu_n$  de sa série génératrice.

Appelons *polynômes de Laguerre subdivisés*, les polynômes  $S_n(x)$  orthogonaux par rapport à la fonctionnelle linéaire symétrique correspondant aux moments

$$\mu_{2n} = n! \quad \text{et} \quad \mu_{2n+1} = 0. \quad (4.4.15)$$

La suite  $\{\gamma_k\}_{k \geq 1}$  associée à la valuation (4.4.5) des chemins de Dyck, interprétant combinatoirement ces moments (cf (4.4.12)), est donnée par

$$\gamma_k = \left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil, \quad (4.4.16)$$

où  $\lceil x \rceil$  désigne le plus petit entier  $n$  plus grand que  $x$ .

Les classes de polynômes associées,  $P_n(x)$  et  $Q_n(x)$ , ne sont pas autre chose que les polynômes de Laguerre classiques

$$P_n(x) = L_n^{(0)}(x) \quad \text{et} \quad Q_n(x) = L_n^{(1)}(x). \quad (4.4.17)$$

En effet, par le tassement  $\Theta$ , les valuations des chemins de Motzkin colorés obtenus sont, d'après les égalités (4.4.8),

$$a_k = 1, \quad b'_k = k, \quad b''_k = k+1, \quad \text{et} \quad c_k = k^2. \quad (4.4.18)$$

D'autre part, ces valuations satisfont bien les identités (4.1.11) et (4.1.12) de la section 4.1 pour les coefficients  $b_k^{(0)}$  et  $\lambda_k^{(0)}$  définis en (4.1.2). En vertu

des résultats énoncés dans la section 4.1, la classe de polynômes orthogonaux associée  $P_n(x)$  correspond donc aux polynômes de Laguerre avec le paramètre  $\alpha = 0$ . Un raisonnement similaire montre que  $Q_n(x) = L_n^{(1)}(x)$ .

Définissons une *histoire de Laguerre subdivisée*  $h_s$  de longueur  $2n$ , comme la donnée d'une paire  $h_s = (w; (p_1, \dots, p_{2n}))$  où  $w = (s_0, \dots, s_{2n})$  est un chemin de Dyck de longueur  $2n$  et la suite d'entiers  $(p_1, \dots, p_{2n})$  est telle que

$$0 \leq p_i \leq \begin{cases} 0 & \text{si } (s_{i-1}, s_i) \text{ est un pas Nord-Est,} \\ \lceil \frac{k+1}{2} \rceil - 1 & \text{si } (s_{i-1}, s_i) \text{ est un pas Sud-Est partant du niveau } k. \end{cases} \quad (4.4.19)$$

Nous dirons que le  $i$ -ième choix  $p_i$  est *significatif* si  $(s_{i-1}, s_i)$  est un pas Sud-Est (par opposition aux choix  $p_i$  correspondant aux pas Nord-Est qui sont nécessairement nuls).

Il y a  $n!$  histoires de Laguerre subdivisées de longueur  $2n$ , et aussi  $n!$  histoires de Laguerre de longueur  $n$ . À partir de  $\Theta$ , nous construisons une bijection entre les histoires de Laguerre subdivisées et les histoires de Laguerre classiques. Cependant, remarquons que d'après (4.4.18),  $\Theta$  conduit à des valuations  $a_k = 1$  et  $c_k = k^2$  des chemins de Motzkin, plutôt que les valeurs  $a_k^{(0)} = k + 1$  et  $c_k^{(0)} = k$ , correspondant aux histoires de Laguerre usuelles. C'est pour cette raison que nous allons effectuer une manipulation sur les choix  $p_i$ , avant de tasser les chemins de Dyck associés aux histoires de Laguerre subdivisées.

En fait, cette manipulation correspond, au niveau des chemins valués, à modifier la valuation (4.4.5) des chemins de Dyck. Plutôt que de donner une valuation égale à 1 aux pas élémentaires Nord-Est partant du niveau  $k$ , nous leur donnons une valuation  $\alpha_k$ . Ceci modifie légèrement les valuations (4.4.8)

et (4.4.9) obtenues le long des applications  $\Theta$  et  $\Theta^+$ . Nous n'entrerons pas ici dans ces détails.

Soit  $w = (s_0, s_1, \dots, s_{2n})$ , un chemin de Dyck. Pour tout entier  $k$ , le chemin  $w$  contient autant de pas élémentaires Nord-Est partant du niveau  $k$  que de pas élémentaires Sud-Est partant du niveau  $k+1$ . Si  $(s_i, s_{i+1})$  désigne un pas Sud-Est partant du niveau  $k+1$  dans  $w$ , nous lui associerons bijectivement le pas élémentaire Nord-Est  $NE(s_i, s_{i+1})$ , partant du niveau  $k$ , qui est le “plus rapproché” de lui par la gauche. Plus exactement,  $NE(s_i, s_{i+1}) = (s_{j_0}, s_{j_0+1})$ , où

$$j_0 = \max\{j \mid 0 \leq j < i, (s_j, s_{j+1}) \text{ est un pas Nord-Est partant du niveau } k\}. \quad (4.4.20)$$

Soit donc  $h_s = (w; (p_1, \dots, p_n))$ , une histoire de Laguerre subdivisée de longueur  $2n$ . Nous construisons  $\Theta h(h_s) = h^* = (w^*; (p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*))$ , une histoire de Laguerre de longueur  $n$ , de la manière suivante:

- i) pour chaque pas Sud-Est  $(s_{i-1}, s_i)$  de  $w$  dans une bande de hauteur  $2l$  à  $2l+1$  (i.e. partant du niveau  $2l+1$ ), échangeons la valeur du choix  $p_i$  avec celle du choix associé à  $NE(s_{i-1}, s_i)$ .

Par exemple, si  $h_s$  est l'histoire de Laguerre subdivisée décrite dans la figure 4.16, on obtient comme nouveaux choix  $p_i$  (notés  $\tilde{p}_i$ ) la deuxième ligne de choix de la figure 4.16. Nous avons encadré les choix  $p_i$  significatifs, pour souligner le fait que cette opération a pour effet de les redistribuer comme premier, troisième,  $\dots$ , et  $(2n-1)$ -ième choix. Remarquons que ces nouveaux choix varient maintenant dans les intervalles suivant:

$$0 \leq \tilde{p}_i \leq \begin{cases} l, & \text{si } (s_{i-1}, s_i) \text{ part du niveau } 2l, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.4.20)$$

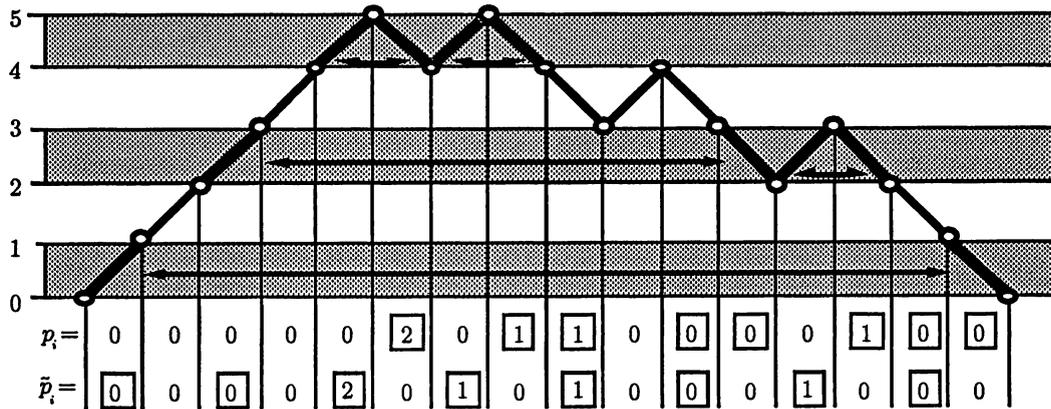


FIGURE 4.16: redistribution des  $p_i$  significatifs dans une histoire de Laguerre subdivisée

ii) nous appliquons alors la bijection  $\Theta$  au chemin  $w$ , obtenant ainsi un chemin de Motzkin coloré  $\Theta(w) = w^*$ , sans pas élémentaires Est bleu au niveau 0, et nous conservons seulement les choix  $\tilde{p}_i$  tels que  $i$  est impair, i.e.  $(p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*) = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_3, \dots, \tilde{p}_{2n-1})$ .

L'histoire de Laguerre ainsi obtenue est notée  $\Theta h(h_s)$ . Dans l'exemple de la figure 4.16,  $\Theta h(h_s) = (w^*; (0, 0, 2, 1, 1, 0, 1, 0))$ , où  $w^*$  est le chemin illustré à la figure 4.17.

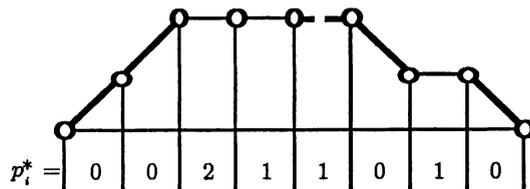


FIGURE 4.17: la bijection  $\Theta h$  appliquée à  $h_s$  de la figure 4.16

**PROPOSITION 4.4.3:** *L'application  $\Theta h$  de tassement définie ci-haut constitue une bijection entre les histoires de Laguerre subdivisées de longueur  $2n$  et les histoires de Laguerre de longueur  $n$ .*

## 4.5 LA BIJECTION DE FOATA-ZEILBERGER ET LES MOMENTS DES $q$ -POLYNÔMES DE LAGUERRE

Dans cette section, nous rassemblons les constructions introduites dans les sections 4.2, 4.3 et 4.4, pour reconstituer la bijection de D. Foata et D. Zeilberger [FoZ3] entre les permutations et les histoires de Laguerre.

Nous enrichirons ensuite cette bijection d'une  $q$ -pondération, différente de celle de l'article [FoZ3] (qui est relative à la statistique Mahonienne de Denert), ce qui nous permettra de démontrer le théorème 4.5.4, à savoir que la classe des polynômes  $L_{n,q}^{(\beta-1)}(x)$ , orthogonaux par rapport aux moments (4.1.5), satisfait la récurrence linéaire à trois termes (4.1.1) pour les coefficients  $b_{k,q}^{(\beta-1)}$  et  $\lambda_{k,q}^{(\beta-1)}$  donnés en (4.1.8).

DESCRIPTION EN QUATRE ÉTAPES DE LA BIJECTION FOATA-ZEILBERGER:

*Première étape:* Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , prenons par exemple

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 3 & 2 & 8 & 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Nous séparons  $\sigma$  en deux involutions sans points fixes  $\sigma_{exc}$  et  $\sigma_{nex}$ , tel que décrit dans la section 4.3. Dans l'exemple, on obtient la décomposition suivante:

$$\begin{aligned} \sigma_{exc} &= (1^+, 6^-)(2^+, 5^-)(5^+, 8^-), \quad \text{et} \\ \sigma_{nex} &= (1^-, 6^+)(2^-, 4^+)(3^-, 3^+)(4^-, 8^+)(7^-, 7^+). \end{aligned}$$

*Deuxième étape:* Aux deux involutions sans points fixes  $(\sigma_{exc}, \sigma_{nex})$ , nous associons le quadruplet  $(h_{exc}, h_{nex}; Supp_{exc}, Supp_{nex})$ , dans lequel  $h_{exc} = (w_{exc}; (p'_1, p'_2, \dots, p'_{2k}))$  et  $h_{nex} = (w_{nex}; (p''_1, p''_2, \dots, p''_{2(n-k)}))$  sont deux histoires





Dans l'exemple, nous obtenons l'histoire de Laguerre subdivisée  $HLs(\sigma) = h_s = (w_s; (0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0))$ , où  $w_s$  est illustré à la figure 4.20.

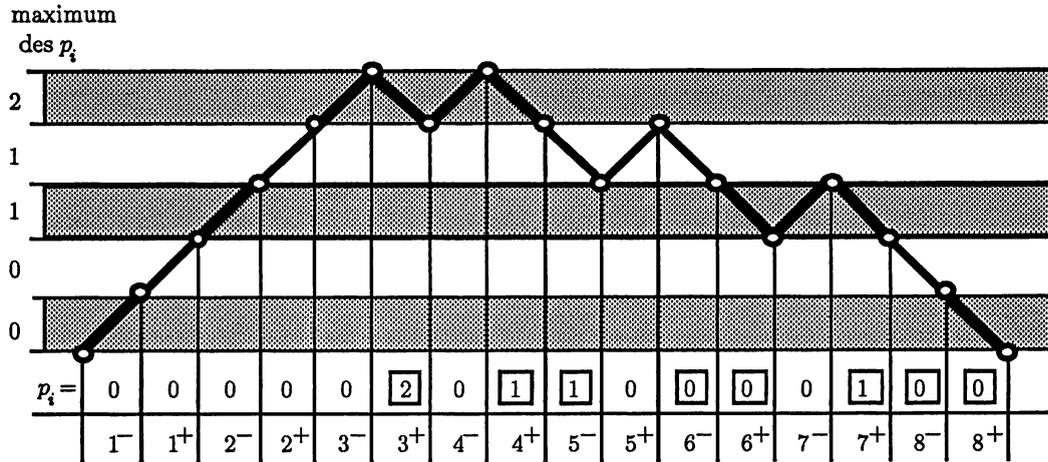


FIGURE 4.20: la bijection  $HLs$  appliquée aux histoires d'Hermite des figures 4.18 et 4.19

Remarquons que le chemin  $w_{nex}$  de l'histoire d'Hermite  $h_{nex} = (w_{nex}; (p'_i))$  correspond aux pas élémentaires se trouvant à l'intérieur des bandes de hauteur  $2l$  à  $2l + 1$  dans  $w_s$ , alors que le chemin  $w_{exc}$  correspond plutôt aux pas élémentaires dans les bandes de hauteur  $2l + 1$  à  $2l + 2$ .

En effet, comme  $w_s$  est un chemin de Dyck, les pas élémentaires dont les indices sont des entiers  $i^-$  partent toujours d'un niveau pair, alors que les pas élémentaires correspondant aux entiers  $j^+$  partent toujours d'un niveau impair. Ainsi, comme dans  $w_{nex}$ , les pas élémentaires associés aux entiers  $i^-$  sont nécessairement Nord-Est, et ceux associés aux entiers  $j^+$ , Sud-Est, en fusionnant les deux histoires d'Hermite, les pas élémentaires de  $w_{nex}$  se

retrouvent dans des bandes de hauteur  $2l$  à  $2l+1$ . Raisonnement similaire pour  $w_{exc}$ .

*Quatrième étape:* Nous appliquons à  $h_s$  la bijection  $\Theta h$ , entre les histoires de Laguerre subdivisées de longueur  $2n$  et les histoires de Laguerre de longueur  $n$ , introduite dans la section 4.4.

Dans l'exemple,  $h_s$  correspondant à l'histoire de Laguerre subdivisée de la figure 4.15,  $\Theta h(h_s) = (w^*; (0, 0, 2, 1, 1, 0, 1, 0))$ , où  $w^*$  est décrit par la figure 4.16.

**THÉORÈME 4.5.1:** (*Bijection de Foata-Zeilberger*)

*Chacune des étapes décrites ci-dessus est inversible. En particulier,*

$$HLs : \mathfrak{S}_n \rightarrow \{\text{histoires de Laguerre subdivisées de longueur } 2n\}$$

*est une bijection, et  $\Psi_{FZ} = \Theta h \circ HLs$  constitue une bijection entre  $\mathfrak{S}_n$  et l'ensemble des histoires de Laguerre de longueur  $n$ .*

**DÉMONSTRATION:**

Elle découle aisément des constructions précédentes; voir aussi Foata et Zeilberger [FoZ3], et pour la deuxième et la quatrième étapes, Flajolet [Fla], Françon et Viennot [FrVi], et Viennot [Vi1, Vi2].  $\square$

Si  $h = (w; (p_1, \dots, p_n))$  désigne une histoire de Laguerre, rappelons que le paramètre  $lag(h)$ , défini dans la section 4.1, est égal à

$$lag(h) = som(h) + aire(w). \quad (4.5.1)$$

**PROPOSITION 4.5.2:** *Avec les notations précédentes, pour toute permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ ,*

$$inv(\sigma) = lag(\Psi_{FZ}(\sigma)). \quad (4.5.2)$$

**DÉMONSTRATION:**

Montrons d'abord que si  $HLs(\sigma) = h_s = ((w_s; (p_1, \dots, p_n))$ ,

$$inv(\sigma) = som(h_s) + nsel(h_s) + sep(h_s) \quad (4.5.3)$$

où

$$nsel(h_s) = \sum_{\substack{\text{pas } (s_{i-1}, s_i) S-E \text{ de } w, \\ niv(w, i) = 2l+2}} l + \sum_{\substack{\text{pas } (s_{i-1}, s_i) S-E \text{ de } w, \\ niv(w, i) = 2l+1}} l, \quad (4.5.4)$$

$sep(h_s)$  désigne le nombre de pas élémentaires Sud-Est partant d'un niveau pair dans  $w_s$ , et  $niv(w, i)$  désigne le niveau de départ du  $i$ -ième pas élémentaire  $(s_{i-1}, s_i)$  de  $w$ .

Or, en vertu du lemme (4.3.1),

$$inv(\sigma) = exc(\sigma) + Inv(\sigma_{exc}) + Inv(\sigma_{nex}).$$

En construisant les histoires d'Hermite  $h_{exc} = \varphi_{gd}^{-1}(\sigma_{exc})$  et  $h_{nex} = \varphi_{gd}^{-1}(\sigma_{nex})$ , le nombre d'excédances de  $\sigma$ ,  $exc(\sigma)$ , c'est-à-dire aussi le nombre de 2-cycles de  $\sigma_{exc}$ , devient clairement le nombre de pas Sud-Est de  $w_{exc}$ . En fusionnant les deux histoires d'Hermite  $h_{exc}$  et  $h_{nex}$ , dans la troisième étape de la bijection Foata-Zeilberger, les pas Sud-Est de  $w_{exc}$  se retrouvent dans les bandes de hauteur  $2l + 1$  à  $2l + 2$  de  $w_s$ , donc

$$exc(\sigma) = sep(HLs(\sigma)). \quad (4.5.6)$$

Notons  $h_{exc} = (w_{exc}; (p'_1, \dots, p'_{2k}))$  et  $h_{nex} = (w_{nex}; (p''_1, \dots, p''_{2(n-k)}))$ . Par la remarque 4.2.3, le paramètre “ $Inv(\sigma_{exc})$ ” (respectivement le paramètre “ $Inv(\sigma_{nex})$ ”) est transporté par la bijection  $\varphi_{gd}^{-1}$  sur “ $\sum_{i=1}^{2k} p'_i + nse(h_{exc})$ ” (respectivement “ $\sum_{i=1}^{2(n-k)} p''_i + nse(h_{nex})$ ”), où  $nse(h)$  désigne la somme des niveaux d'arrivée des pas élémentaires Sud-Est de l'histoire d'Hermite  $h$  (cf (4.2.17)). En fusionnant les deux histoires d'Hermite dans la troisième étape, la suite de choix  $p_i$  obtenue est un produit d'intercalement des suites de choix  $(p'_i)$  de  $h_{exc}$  et de  $(p''_i)$  de  $h_{nex}$ . De plus, les pas élémentaires Sud-Est de  $w_{exc}$  (respectivement de  $w_{nex}$ ) partant du niveau  $l$  sont envoyés sur les pas Sud-Est partant du niveau  $2l$  (respectivement du niveau  $2l - 1$ ) de  $w_s$ . Par conséquent,

$$Inv(\sigma_{exc}) + Inv(\sigma_{nex}) = som(h_s) + nsel(h_s). \quad (4.5.7)$$

Les identités (4.5.6) et (4.5.7) établissent (4.5.3).

Il reste à montrer que

$$som(h_s) + nsel(h_s) + sep(h_s) = lag(\Theta h(h_s)). \quad (4.5.8)$$

Soit  $\Theta h(h_s) = (w^*; (p_1^*, \dots, p_n^*))$ . Comme les  $p_i^*$  sont obtenus des choix  $p_i$  en oubliant certains  $p_i$  nuls (les choix non significatifs),

$$som(h_s) = \sum_{i=1}^{2n} p_i = \sum_{i=1}^n p_i^* = som(\Theta h(h_s)). \quad (4.5.9)$$

Le paramètre “ $nsel(h_s) + sep(h_s)$ ” compte, par définition,  $l+1$  pour chaque pas élémentaire Sud-Est de  $w_s$  partant d'un niveau pair  $2l+2$ , et  $l$  pour chaque pas Sud-Est partant d'un niveau impair  $2l+1$ . Dans la section 4.4, avant

d'appliquer le tassement aux chemins de Dyck des histoires de Laguerre subdivisées, nous avons déplacé les choix significatifs  $p_i$  associés aux pas élémentaires Sud-Est  $(s_{i-1}, s_i)$  se trouvant dans les bandes de hauteur  $2l$  à  $2l + 1$ , pour les attribuer aux pas Nord-Est  $NE(s_{i-1}, s_i)$  partant du niveau  $2l$  les plus rapprochés (cf (4.4.20)). Faisons de même pour les contributions au paramètre “ $n\text{sel}(h_s) + \text{sep}(h_s)$ ”. Ainsi, les égalités suivantes découlent:

$$\begin{aligned}
n\text{sel}(h_s) + \text{sep}(h_s) &= \sum_{\substack{(s_{i-1}, s_i) \text{ pas S-E de } w_s, \\ \text{niv}(w_s, i) = 2l+2}} (l+1) + \sum_{\substack{(s_{i-1}, s_i) \text{ pas S-E de } w_s, \\ \text{niv}(w_s, i) = 2l+1}} l, \\
&= \sum_{\substack{(s_{i-1}, s_i) \text{ pas S-E de } w_s, \\ \text{niv}(w_s, i) = 2l+2}} (l+1) + \sum_{\substack{(s_{i-1}, s_i) \text{ pas N-E de } w_s, \\ \text{niv}(w_s, i) = 2l}} l, \\
&= \sum_{\substack{(s_{i-1}, s_i) \text{ pas de } w_s, \\ \text{niv}(w_s, i) = 2l}} l.
\end{aligned}$$

En vertu de la proposition 4.4.1 et de la définition de  $\Theta h$ , cette dernière somme est exactement égale au paramètre “ $\text{aire}(w^*)$ ”, la somme des niveaux de départ des pas élémentaires de  $w^*$ . Par conséquent, l'identité (4.5.8) est vérifiée, ce qui conclut la démonstration de cette proposition. Dans la figure 4.21 nous explicitons les  $q$ -pondérations sur les chemins valués, obtenues dans les différentes étapes de la bijection Foata-Zeilberger.  $\square$

**THÉORÈME 4.5.3:** *La classe de polynômes  $L_{n,q}^{(0)}(x)$ , dont les moments sont  $\mu_{n,q}^{(0)} = [n]_q!$ , satisfait la récurrence linéaire à trois termes (4.1.1) pour*

$$b_{k,q}^{(0)} = q^k([k]_q + [k+1]_q) \quad \text{et} \quad \lambda_{k,q}^{(0)} = q^{2k-1}[k]_q[k]_q. \quad (4.5.11)$$



$$\begin{aligned}
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} q^{inv(\sigma)}, \quad (\text{par la proposition 4.5.2}) \\
&= [n]_q! = \mu_{n,q}^{(0)}. \quad \square
\end{aligned}$$

Soit  $\sigma$  une permutation de  $\mathfrak{S}_n$ . Un élément  $x \in \llbracket n \rrbracket$  est dit *élément saillant inférieur droit* si et seulement si  $x = \sigma(i)$  est le plus petit des éléments  $\sigma(i)$ ,  $\sigma(i+1), \dots, \sigma(n)$ . Notons  $sid(\sigma)$  le nombre d'éléments saillants inférieurs droits de  $\sigma$ . On sait que

$$[n; \beta]_q! = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} q^{inv(\sigma)} \beta^{sid(\sigma)}. \quad (4.5.12)$$

**THÉORÈME 4.5.4:** *La classe de polynômes  $L_{n,q}^{(\beta-1)}(x)$ , dont les moments sont  $\mu_{n,q}^{(\beta-1)} = [n; \beta]_q!$ , satisfait la récurrence linéaire à trois termes (4.1.1) pour*

$$b_{k,q}^{(\beta-1)} = q^k([k]_q + [k+1; \beta]_q) \quad \text{et} \quad \lambda_{k,q}^{(\beta-1)} = q^{2k-1}[k; \beta]_q[k]_q. \quad (4.5.13)$$

**DÉMONSTRATION:**

Il faut montrer que

$$\sum_h q^{lag(h)} v_\beta(h) = [n; \beta]_q!, \quad (4.5.14)$$

où  $h$  parcourt l'ensemble des histoires de Laguerre de longueur  $n$ , et  $v_\beta(h)$  a été défini en (4.1.17). D'après le théorème 4.5.3, il suffit de montrer que

$$\beta^{sid(\sigma)} = v_\beta(\Theta h \circ H L s(\sigma)). \quad (4.5.15)$$

Or  $x = \sigma(i_0)$  est un élément saillant inférieur droit de  $\sigma$  si et seulement si, dans  $HLs(\sigma) = h_s$ , le pas élémentaire correspondant à  $i_0^+$  est Sud-Est et le choix  $p_{2i_0}$  correspondant est égal à 0.

En effet, si  $x$  est un élément saillant inférieur droit, on a nécessairement  $i_0 \geq \sigma(i_0)$ , sinon au moins l'un des  $\sigma(j)$ ,  $i_0 < j \leq n$  serait inférieur à  $\sigma(i_0)$ . Donc  $\left((\sigma(i_0))^- , i_0^+\right)$  forme un cycle de  $\sigma_{nex}$  et  $i_0^+$  fermant le cycle, le pas élémentaire correspondant à  $i_0^+$  dans  $\varphi_{gd}^{-1}(\sigma_{nex})$  sera Sud-Est.

Montrons maintenant que le choix  $p_{2i_0}$  correspondant doit être nul. Si  $i_0 < j \leq n$ , soit  $j$  est une excédance de  $\sigma$  et alors l'inégalité suivante est toujours vérifiée:

$$\sigma(i_0) \leq i_0 < j < \sigma(j).$$

Sinon,  $j$  forme une non-excédance dans  $\sigma$ , et pour que  $\sigma(i_0)$  soit effectivement un élément saillant inférieur droit de la permutation, l'inégalité  $\sigma(j) < \sigma(i_0)$  ne doit pas se produire, i.e. on ne peut pas avoir

$$(\sigma(j))^- < (\sigma(i_0))^- \leq i_0^+ < j^+.$$

Cela signifie qu'il n'y a aucune paire imbriquée au-dessus de l'arc  $\left((\sigma(i_0))^- , i_0^+\right)$ . Mais d'après la démonstration de la proposition 4.2.1 (i), la valeur du choix  $p_{2i_0}$  (significatif), via la bijection  $\varphi_{gd}$ , est exactement égale au nombre de paires imbriquées ayant  $\left((\sigma(i_0))^- , i_0^+\right)$  comme arc intérieur. Par conséquent,  $p_{2i_0} = 0$ .

Appliquons la bijection de tassement d'histoires  $\Theta h$  à  $h_s$ . Nous avons déjà remarqué que les pas élémentaires correspondant à la permutation des non-excédances  $\sigma_{nex}$  se retrouvaient dans les bandes de niveau impair  $2l$  à  $2l + 1$  de  $h_s$ . C'est donc le cas du pas Sud-Est  $(s_{2i_0-1}, s_{2i_0})$  correspondant à l'entier  $i_0^+$ .

Dans la première étape de  $\Theta h$ , le choix  $p_{2i_0} = 0$  associé à  $i_0^+$  est transféré au pas Nord-Est  $NE(s_{2i_0-1}, s_{2i_0}) = (s_{2j_0}, s_{2j_0+1})$ , tel que défini en (4.4.20). On retrouve donc après cette opération  $p_{2j_0+1} = 0$ .

Finalement, selon la règle de substitution de couples de pas élémentaires de l'application de tassement  $\Theta h$ , donnée à la section 4.4, lorsque le premier pas d'un couple est Nord-Est, le pas élémentaire correspondant obtenu dans l'image peut être soit Nord-Est, soit Est rouge. C'est le cas du couple de pas élémentaires  $(s_{2j_0}, s_{2j_0+1}), (s_{2j_0+1}, s_{2j_0+2})$ . De plus,  $p_{2j_0+1} = 0$  est le choix significatif qui est conservé comme choix associé au pas élémentaire obtenu.

Le théorème découle de la définition de la valuation  $v_\beta(h) = \beta^l$ , où  $l$  compte le nombre de pas Nord-Est ou Est bleu de  $h$  dont le choix correspondant est  $p_i = 0$ . □

#### 4.6 RAPPEL SUR LA BIJECTION FRANÇON-VIENNOT ET UNE NOUVELLE STATISTIQUE MAHONIENNE

Nous rappelons maintenant la bijection classique Françon-Viennot  $\Psi_{FV}$  (cf Goulden et Jackson [GJ]), entre les permutations et les histoires de Laguerre. Cette bijection peut être décrite de deux façons différentes. Dans l'article original [FrVi], elle est décrite en termes de mots sur l'alphabet  $\llbracket n \rrbracket \cup \{0\}$ . Le symbole "0" y joue un rôle spécial (position "libre" ou "ouverte"). Les mots correspondent à des *histoires de Laguerre incomplètes*, c'est-à-dire à l'extension de la notion d'histoires de Laguerre dans le cas d'un chemin de Motzkin coloré s'arrêtant à un niveau quelconque (non nécessairement nul). Dans l'article [Fla] ou la monographie [Vi1], la bijection  $\Psi_{FV}$  est plutôt décrite en termes d'*arbres*

*binaires croissants*. Le passage aux mots de permutations s'obtient alors par projection de ces arbres.

Nous rappelons ici la description originale [FrVi] en termes de mots, appelés dans [FoZ3] "*gravid permutations*", où le symbole "0" est remplacé par " $\infty$ ". En fait, la bijection présentée en section 8 de l'article de D. Foata et D. Zeilberger [FoZ3] est la même que celle présentée dans [FrVi]. Plus précisément, il s'agit du cas particulier de la construction de J. Françon et X.G. Viennot où la dernière position "libre" (la lettre " $\infty$ " à la fin des mots) est toujours laissée vacante au cours des insertions successives des lettres. Dans le cas général, toutes les positions libres peuvent être occupées. Ces deux cas sont appelés dans [Vi1] respectivement "*histoires de Laguerre restreintes*" et "*histoires de Laguerre larges*", et sont dénombrées respectivement par  $n!$  et  $(n+1)!$ . Dans ce chapitre et l'article [FoZ3], les histoires de Laguerre considérées sont des histoires de Laguerre restreintes.

La description qui suit de la bijection  $\Psi_{FV}$  entre permutations et histoires de Laguerre (restreintes) sera faite en plaçant au début des mots plutôt qu'à la fin le symbole " $\infty$ " correspondant à la position extrême toujours vacante.

Soit  $h = (w; (p_1, \dots, p_n))$ , une histoire de Laguerre de longueur  $n$ , où  $w = (s_0, s_1, \dots, s_n)$  est un chemin de Motzkin coloré. Nous construisons une permutation  $\sigma = \Psi_{FV}(h)$  selon le procédé récursif suivant.

Posons  $\sigma_0 = \infty$ . Pour tout  $i$ ,  $0 \leq i \leq n - 1$ , supposons construits  $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_i$ , tels que chaque  $\sigma_j$  est un mot commençant par le symbole " $\infty$ ", contenant les lettres  $1, 2, \dots, j$ , plus un certain nombre de symboles " $\infty$ ", et tels qu'il n'y ait jamais deux symboles " $\infty$ " consécutifs.

- i) Si le pas élémentaire  $(s_i, s_{i+1})$  est un pas Nord-Est, le mot  $\sigma_{i+1}$  est obtenu à partir de  $\sigma_i$  en remplaçant le  $(p_i + 1)$ -ième symbole “ $\infty$ ” par les lettres “ $\infty (i + 1) \infty$ ”;
- ii) si  $(s_i, s_{i+1})$  est un pas élémentaire Est rouge,  $\sigma_{i+1}$  est obtenu de  $\sigma_i$  en remplaçant le  $(p_i + 1)$ -ième symbole “ $\infty$ ” par les lettres “ $\infty (i + 1)$ ”;
- iii) si  $(s_i, s_{i+1})$  est un pas Est bleu,  $\sigma_{i+1}$  est obtenu de  $\sigma_i$  en remplaçant le  $(p_i + 2)$ -ième symbole “ $\infty$ ” par “ $(i + 1) \infty$ ”; et
- iv) si  $(s_i, s_{i+1})$  est un pas élémentaire Sud-Est,  $\sigma_{i+1}$  est obtenu de  $\sigma_i$  en remplaçant le  $(p_i + 2)$ -ième symbole “ $\infty$ ” par “ $(i + 1)$ ”.

On pose finalement  $\Psi_{FV}(h) = \sigma = \sigma(1)\sigma(2) \dots \sigma(n)$ , où  $\sigma$  est égal à  $\sigma_n$  auquel on a enlevé le symbole “ $\infty$ ” initial. Par exemple, si  $h = (w; (0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0))$ , où  $w$  est le chemin de Motzkin coloré illustré à la figure 4.22, alors on trouve successivement:

$$\sigma_0 = \infty;$$

$$\sigma_1 = \infty 1 \infty;$$

$$\sigma_2 = \infty 1 \infty 2 \infty;$$

$$\sigma_3 = \infty 3 \infty 1 \infty 2 \infty;$$

$$\sigma_4 = \infty 3 \infty 4 1 \infty 2 \infty;$$

$$\sigma_5 = \infty 3 5 \infty 4 1 \infty 2 \infty;$$

$$\sigma_6 = \infty 3 5 6 4 1 \infty 2 \infty;$$

$$\sigma_7 = \infty 3 5 6 4 1 \infty 7 2 \infty;$$

$$\sigma_8 = \infty 3 5 6 4 1 \infty 8 7 2 \infty;$$

$$\sigma_9 = \infty 3 5 6 4 1 \infty 8 7 2 9;$$

$$\sigma_{10} = \infty 3 5 6 4 1 10 8 7 2 9;$$

$$\Rightarrow \sigma = 3 5 6 4 1 10 8 7 2 9.$$

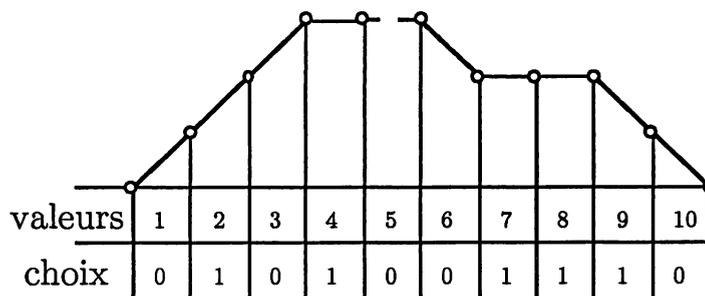


FIGURE 4.22: histoire de Laguerre  $h$

**PROPOSITION 4.6.1:** *L'application  $\Psi_{FV}$  définie ci-dessus constitue une bijection entre les histoires de Laguerre de longueur  $n$  et les permutations de  $\mathfrak{S}_n$ .*

Le lecteur est référé aux articles [FoZ3, FrVi] ou à la monographie [Vi1] pour la démonstration de cette proposition.

**REMARQUE 4.6.2:** En arrêtant le procédé d'insertion à un instant quelconque de la construction ci-dessus, nous obtenons une extension de la bijection  $\Psi_{FV}$  entre les histoires de Laguerre incomplètes et les mots  $\sigma_i$  qui sont caractérisés ci-haut. Pour plus de détails, le lecteur se rapportera au chapitre 3 de [Vi1], dans lequel il est montré que cette construction permet de définir une nouvelle classe de polynômes, les "polynômes verticaux", qui constituent la classe des polynômes "inverses" associée à toute classe de polynômes orthogonaux. Les matrices (triangulaires) des coefficients de ces deux classes de polynômes sont inverses l'une de l'autre. En "renversant le temps" dans

le procédé d'insertion  $\Psi_{FV}$ , il est possible (cf [Vi1], chapitre 3) d'interpréter en termes d'histoires les *opérateurs delta* notés  $Q$  et  $S$  dans la théorie de G.C. Rota [Ro], pour les cinq classes de polynômes orthogonaux de Sheffer (Hermite, Charlier, Laguerre, Meixner et Meixner-Pollačzek).

Dans la section 8 de [FoZ3], D. Foata et D. Zeilberger posent le problème de l'extension de leur bijection aux histoires de Laguerre incomplètes. La décomposition de cette bijection en quatre étapes, avec notamment le passage par les histoires d'Hermite et les histoires de Laguerre subdivisées, permettrait de répondre à cette question.

Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , définissons

$$lag(\sigma) = lag(\Psi_{FV}^{-1}(\sigma)). \quad (4.6.1)$$

Par ce qui précède, cette nouvelle statistique  $lag$  sur les permutations est une statistique Mahonienne. Dans le reste de cette section, nous donnons une expression directe du paramètre  $lag$ . Nous aurons besoin pour ce faire des définitions et lemmes techniques suivants. Nous référons le lecteur à Françon et Viennot [FrVi], Flajolet [Fla] et Viennot [Vi1] pour les démonstrations.

**DÉFINITIONS 4.6.3:** Soit  $\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\dots\sigma(n) \in \mathfrak{S}_n$ . Dans la suite, on convient que  $\sigma(0) = n+1$  et  $\sigma(n+1) = 0$ . Nous dirons que  $x = \sigma(i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , est

- i) un *pic* si et seulement si  $\sigma(i-1) < x = \sigma(i) > \sigma(i+1)$ ,
- ii) un *creux* si et seulement si  $\sigma(i-1) > x = \sigma(i) < \sigma(i+1)$ ,

- iii) une *double montée* si et seulement si  $\sigma(i-1) < x = \sigma(i) < \sigma(i+1)$ ,
- iv) une *double descente* si et seulement si  $\sigma(i-1) > x = \sigma(i) > \sigma(i+1)$ .

Par exemple, dans la permutation  $\sigma = 3\ 5\ 6\ 4\ 1\ 10\ 8\ 7\ 2\ 9$  (correspondant à l'histoire de Laguerre de la figure 4.22), les pics sont 6, 9 et 10, les creux sont 1, 2 et 3, 5 est une double montée, et 4, 7 et 8 sont des double descentes.

**LEMME 4.6.4:** Si  $\Psi_{FV}(h) = \sigma$ , où  $h = (w; (p_1, \dots, p_n))$  et  $w = (s_0, s_1, \dots, s_n)$ ,

- i)  $(s_{x-1}, s_x)$  est un pas Sud-Est si et seulement si  $x$  est un pic de  $\sigma$ ;
- ii)  $(s_{x-1}, s_x)$  est un pas Nord-Est si et seulement si  $x$  est un creux de  $\sigma$ ;
- iii)  $(s_{x-1}, s_x)$  est un pas Est bleu si et seulement si  $x$  est une double montée de  $\sigma$ ;
- iv)  $(s_{x-1}, s_x)$  est un pas Est rouge si et seulement si  $x$  est une double descente de  $\sigma$ .

**DÉFINITION 4.6.5:** Pour  $x \in \llbracket n \rrbracket$ , la  $x$ -décomposition de  $\sigma$  est l'unique factorisation du mot  $\sigma$  sous la forme

$$\sigma = u_1 v_1 \dots u_k v_k u_{k+1}, \quad k \geq 1 \tag{4.6.2}$$

dans laquelle les  $u_i$  et  $v_j$  sont des mots non vides, sauf éventuellement  $u_1$  et  $u_{k+1}$ , et les mots  $u_i$ ,  $1 \leq i \leq k+1$  (resp.  $v_j$ ,  $1 \leq j \leq k$ ) ont toutes leurs lettres strictement inférieures à  $x$  (resp. supérieures ou égales à  $x$ ).

Par exemple, la 6-décomposition de  $\sigma = 11\ 3\ 5\ 6\ 4\ 1\ 10\ 8\ 7\ 2\ 9$  est  $u_1 = \emptyset$ ,  $v_1 = 11$ ,  $u_2 = 3\ 5$ ,  $v_2 = 6$ ,  $u_3 = 4\ 1$ ,  $v_3 = 10\ 8\ 7$ ,  $u_4 = 2$ ,  $v_4 = 9$  et  $u_5 = \emptyset$ .

**LEMME 4.6.6:** Soit  $\Psi_{FV}(h) = \sigma$ , où  $h = (w; (p_1, \dots, p_n))$  et  $w = (s_0, s_1, \dots, s_n)$ . Alors  $p_x = j$  si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite,

- i)  $(s_{x-1}, s_x)$  est un pas Nord-Est ou Est rouge et  $x$  se trouve dans le facteur  $v_{j+1}$  de la  $x$ -factorisation du mot  $(n+1)\sigma(1)\sigma(2)\dots\sigma(n)$ ;
- ii)  $(s_{x-1}, s_x)$  est un pas Sud-Est ou Est bleu et  $x$  se trouve dans le facteur  $v_{j+2}$  de la  $x$ -factorisation du mot  $(n+1)\sigma(1)\sigma(2)\dots\sigma(n)$ .

**DÉFINITION 4.6.7:** Soit  $\sigma = \sigma(1)\dots\sigma(n) \in \mathfrak{S}_n$ , nous dirons que  $(\sigma(i), \sigma(i+1), \dots, \sigma(j))$ ,  $0 \leq i \leq j \leq n+1$ , est une *séquence décroissante maximale* (nous écrirons *s.d.m.*), si

$$\sigma(i-1) < \sigma(i) > \sigma(i+1) > \dots > \sigma(j) < \sigma(j+1). \quad (4.6.3)$$

Par convention,  $\sigma(0) = n+1$ ,  $\sigma(n+1) = 0$ ,  $\sigma(-1) = -1$  et  $\sigma(n+2) = n+2$ .

Par exemple, pour  $\sigma = 3\ 5\ 6\ 4\ 1\ 10\ 8\ 7\ 2\ 9$ , les séquences décroissantes maximales sont  $(11,3)$ ,  $(5)$ ,  $(6,4,1)$ ,  $(10,8,7,2)$  et  $(9,0)$ .

**PROPOSITION 4.6.8:** Avec les notations précédentes, si  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ ,

$$\text{lag}(\sigma) = \sum_{(y=\sigma(i), \sigma(i+1), \dots, \sigma(j)=z)} \left( |\{x = \sigma(l) \mid j < l \text{ et } z < x < y\}| + y - z - 1 \right) - n; \quad (4.6.4)$$

où la somme parcourt les séquences décroissantes maximales  $(\sigma(i), \sigma(i+1), \dots, \sigma(j))$  de la permutation  $\sigma$ .

où la somme du membre de droite s'étend sur le même ensemble que celle de (4.6.5) ( $n + 1 = \sigma(0)$ ), ne correspondant pas à un pas élémentaire du chemin  $w$ , ne doit pas être compté).

Maintenant, si  $x = \sigma(l)$  se trouve dans le facteur  $v_{m+1}$  de la  $x$ -factorisation du mot  $(n + 1)\sigma(1)\sigma(2) \dots \sigma(n)$ , cela signifie qu'il y a exactement  $m$  couples  $(\sigma(i) = y, \sigma(j) = z)$  pic-creux consécutifs de  $\sigma$  tels que  $j < l$  et  $z < x < y$ . Selon le lemme 4.6.6, en tenant compte du décalage entre les indices des choix  $p_i$  et ceux des facteurs de la  $i$ -factorisation contenant la lettre  $i$  dans le cas des pas Sud-Est (correspondant aux pics de la permutation associée) et des pas Est bleus (correspondant aux double montées de la permutation associée), on aura alors, si  $\Psi_{FV}(h) = \sigma$ ,

$$\begin{aligned} \text{som}(h) = & \sum_{(\sigma(i)=y, \sigma(j)=z)} |\{x = \sigma(l) \mid j < l \text{ et } z < x < y\}| \\ & - \#\{\text{pics (autres que } \sigma(0) = n + 1)\} \\ & - \#\{\text{double montées}\}, \end{aligned} \tag{4.6.8}$$

où la somme du membre de droite s'étend sur le même ensemble que celle de (4.6.5). En mettant ensemble les identités (4.6.7) et (4.6.8), on obtient l'identité (4.6.5).  $\square$

Par exemple, pour  $\sigma = 3 \ 5 \ 6 \ 4 \ 1 \ 10 \ 8 \ 7 \ 2 \ 9$ , correspondant à l'histoire de Laguerre  $h$  de la figure 4.22, on calcule  $\text{lag}(\sigma) = (7 + 11 - 3 - 1) + (0 + 5 - 5 - 1) + (1 + 6 - 1 - 1) + (1 + 10 - 2 - 1) + (0 + 9 - 0 - 1) - 10 = 24$ , qui est bien égal à  $\text{lag}(h) = \text{som}(h) + \text{aire}(h) = 5 + 19 = 24$ . La figure 4.23 est une représentation de la permutation permettant de visualiser les différentes composantes à calculer.

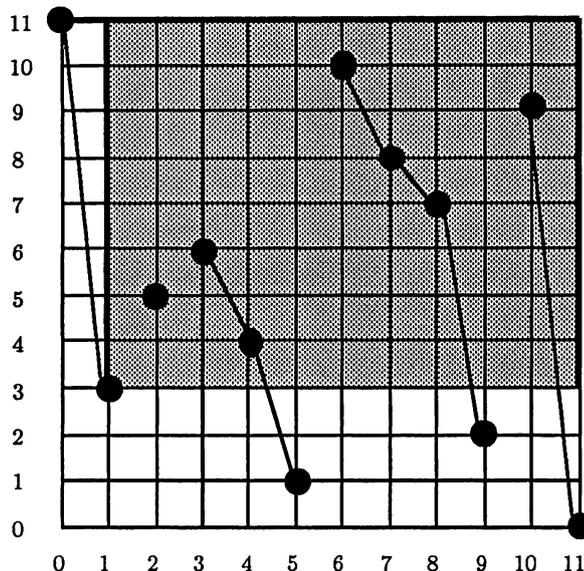


FIGURE 4.23: la statistique *lag*

**REMARQUE 4.6.9:** Le lemme 4.6.6 caractérise la fonction “choix”  $p_x = j$  directement à partir de la permutation  $\sigma$  et l’adaptation aux histoires de Laguerre “restreintes” du lemme décrit dans [FrVi] pour les histoires de Laguerre “larges”. La caractérisation en terme de couples de pic-creux consécutifs est due à Foata, Zeilberger [FoZ3].

#### 4.7 LES $q$ -POLYNÔMES DE CHARLIER

Nous avons introduit dans le chapitre 3 les  $q$ -polynômes de Charlier  $C_{n,q}^{(a)}(x)$ , formant la classe de polynômes orthogonaux par rapport aux moments

$$\nu_{n,q}^{(a)} = \sum_{k=0}^n S_q[n, k] a^k, \quad (4.7.1)$$

dans lequel  $S_q[n, k]$  désigne les  $q$ -nombres de Stirling de deuxième espèce, satisfaisant la récurrence

$$S_q[n+1, k+1] = S_q[n, k] + [k+1]_q S_q[n, k+1], \quad (4.7.2)$$

avec conditions initiales  $S_q[0, k] = \delta_{0,k}$  et  $S_q[n, 0] = \delta_{n,0}$ .

M. Wachs et D. White [WaWh] ont donné une très jolie démonstration combinatoire du fait que les coefficients de la récurrence linéaire à trois termes de ces polynômes sont

$$b_{k,q} = q^k a + [k]_q \quad \text{et} \quad \lambda_{k,q} = q^{k-1} a [k]_q. \quad (4.7.3)$$

Plus précisément, on appelle *histoire de Charlier* une histoire de Laguerre  $h = (w; (p_1, \dots, p_n))$  soumise à la contrainte suivante: si  $(s_{i-1}, s_i)$  est un pas Nord-Est ou Est rouge, alors le choix  $p_i$  correspondant doit être nul. Notons respectivement

$$v_{a,q}(s_{i-1}, s_i) = \begin{cases} q^k a & \text{si } (s_{i-1}, s_i) \text{ est un pas N-E ou E rouge} \\ & \text{partant du niveau } k \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (4.7.4)$$

$$\text{et } v_{a,q}(h) = \prod_{i=1}^n v_{a,q}(s_{i-1}, s_i). \quad (4.7.5)$$

Alors, en vertu des résultats de P. Flajolet et X.G. Viennot cités à la section 4.1, pour montrer que les coefficients de la récurrence linéaire à trois termes (4.1.1) des  $q$ -polynômes de Charlier sont effectivement donnés par (4.7.3), il suffit d'établir l'identité suivante:

$$\sum_h v_{a,q}(h) q^{\text{som}(h)} = \sum_{k=0}^n S_q[n, k] a^k, \quad (4.7.6)$$

où  $h$  parcourt toutes les histoires de Charlier de longueur  $n$  et  $\text{som}(h)$  a été défini en (4.1.21).

La restriction de la bijection Françon-Viennot aux histoires de Charlier établit une correspondance entre les histoires de Charlier et une famille de permutations trivialement en bijection avec les partitions d'ensemble. M. Wachs et D. White [WaWh] ont démontré bijectivement que la statistique  $rs$  obtenue par transport du  $q$ -comptage le long de cette bijection possédait la même distribution que la statistique classique d'*inversions* sur les partitions d'ensemble, correspondant aux  $q$ -nombres de Stirling de deuxième espèce.

De la même manière, en modifiant légèrement la bijection de Foata-Zeilberger, on peut établir une autre bijection entre les histoires de Charlier et les partitions ensemblistes, et ainsi obtenir une nouvelle statistique, que nous appellerons  $char(\pi)$ , différente de la statistique d'inversions et de la statistique  $rs$  sur les partitions, mais équidistribuée.

Dans ce qui suit, nous décrivons directement la statistique  $char$  sur les partitions ensemblistes. Soit  $\pi$  une partition de  $[n]$ , écrite sous forme standard, i.e. chaque bloc est ordonné par ordre croissant de ses éléments et les blocs sont ordonnés par ordre croissant de leurs minima. Par exemple,  $\pi = \{1, 7\}\{2\}\{3, 5, 9\}\{4\}\{6, 8\}$  est écrite sous forme standard. On représente  $\pi$  graphiquement de la manière suivante: comme pour les permutations, doublons les points  $1, 2, \dots, n$  en  $2n$  sommets  $1^-, 1^+, 2^-, 2^+, \dots, n^-, n^+$ . Pour chaque bloc  $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$  de  $\pi$  de cardinalité strictement plus grande que 1,  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ , on joint par un arc les couples de sommets  $(i_j^+, i_{j+1}^-)$ ,  $1 \leq j \leq k-1$ . Pour l'exemple précédent, on obtient la figure 4.24. Remarquons que les sommets  $i^+$  ne forment pas l'extrémité d'un arc dans la représentation graphique de  $\pi$  correspondent aux éléments maximaux des blocs de la partition  $\pi$  et qu'il y en a donc autant qu'il n'y a de blocs dans la partition.

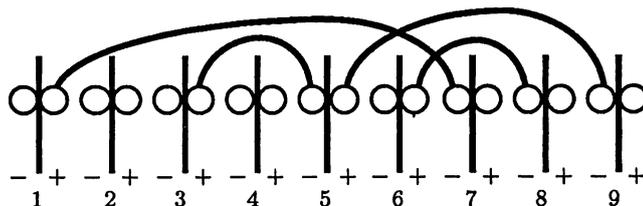


FIGURE 4.24: représentation graphique de la partition  $\pi = \{1, 7\}\{2\}\{3, 5, 9\}\{4\}\{6, 8\}$

Définissons le paramètre *char* sur les partitions d'ensemble comme suit:

$$\begin{aligned} \text{char}(\pi) = & \sum_{\text{arcs } (i^+, j^-)} \#\{\text{arcs passant au-dessus de } (i^+, j^-)\} \\ & + \sum_{i^+} \#\{\text{arcs passant au-dessus du sommet } i^+\}, \quad (4.7.7) \end{aligned}$$

où la seconde sommation parcourt tous les sommets  $i^+$  de la représentation graphique de  $\pi$  qui ne sont pas l'extrémité d'un arc. Par exemple, pour la partition  $\pi$  de la figure 4.24,  $\text{char}(\pi) = 2 + 6 = 8$ .

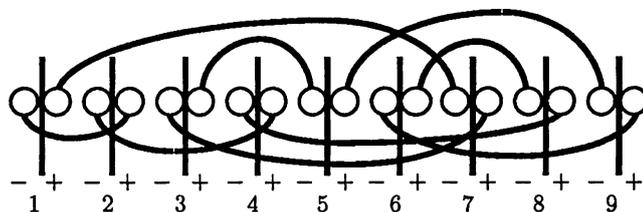


FIGURE 4.25: représentation graphique de  $\sigma(\pi)$  associé à la partition  $\pi$  de la figure 4.24

Le lecteur aura sans doute remarqué que la représentation graphique d'une partition  $\pi$  est presque une représentation graphique de permutation, tel que décrit dans la section 4.3. Notons  $\sigma^{(\pi)}$  la permutation dont la représentation graphique est obtenue en ajoutant à la représentation graphique de  $\pi$  les arcs inférieurs suivants: en allant de gauche à droite, on joint chaque sommet  $i^+$  n'étant pas déjà l'extrémité d'un arc supérieur au sommet  $j^-$  libre le plus à

gauche. Dans l'exemple, on obtient la permutation  $\sigma^{(\pi)} = 7\ 1\ 5\ 2\ 9\ 8\ 3\ 4\ 6$ , décrite graphiquement à la figure 4.25.

**THÉORÈME 4.7.1:** *L'application  $\tilde{\Psi}_{FZ}(\pi) = \Psi_{FZ}(\sigma^{(\pi)})$  forme une bijection entre les partitions ensemblistes de  $\llbracket n \rrbracket$  et les histoires de Charlier de longueur  $n$ . De plus,*

$$a^{bl(\pi)} q^{char(\pi)} = v_{a,q} \left( \tilde{\Psi}(\pi) \right) q^{som(\tilde{\Psi}(\pi))}, \quad (4.7.8)$$

où  $bl(\pi)$  désigne le nombre de blocs de la partition  $\pi$  et  $som(h)$  a été défini en (1.4.21).

#### DÉMONSTRATION:

La démonstration de ce théorème est assez technique et utilise différentes propriétés de la bijection  $\Psi_{FZ}$  que nous avons déjà mentionnées dans les sections précédentes de ce chapitre.

Remarquons d'abord que  $\sigma^{(\pi)}$  a été construite à partir de  $\pi$  de telle sorte que dans l'histoire d'Hermite  $h_{nex}^{(\pi)} = \varphi_{gd}^{-1}(\sigma_{nex}^{(\pi)})$ , correspondant aux non-excédances de  $\sigma^{(\pi)}$ , tous les choix  $p_i$  soient nuls. En particulier, ça signifie que  $pbr(\sigma_{nex}^{(\pi)}) = 0$ . De plus, il s'ensuit que dans l'histoire de Laguerre associée  $h^{(\pi)} = \tilde{\Psi}_{FZ}(\pi)$ , les choix  $p_i$  associés aux pas élémentaires Nord-Est et Est rouges sont nécessairement nuls, i.e.  $h^{(\pi)}$  est une histoire de Charlier.

Si l'on pondère par  $a$  les pas Nord-Est et Est rouges des histoires de Charlier, alors d'après une propriété déjà invoquée dans la preuve du théorème 4.5.4,  $a$  compte le nombre de pas Sud-Est de  $h_{nex}^{(\pi)}$  tels que le choix  $p_i$  associé est nul. Dans ce cas,  $a$  comptabilise donc le nombre de sommets  $i^+$  dans le support de  $\sigma_{nex}^{(\pi)}$ , i.e. le nombre de blocs de la partition  $\pi$ .

On a vu dans la démonstration de la proposition 4.5.2 que le paramètre *som* sur les histoires de Laguerre satisfaisait l'égalité suivante:

$$\text{som} \left( \Psi_{FZ}(\sigma^{(\pi)}) \right) = \text{pbr}(\sigma_{exc}^{(\pi)}) + \text{pbr}(\sigma_{nex}^{(\pi)}),$$

qui est égal, dans ce cas, au nombre de paires imbriquées dans la représentation graphique de  $\pi$  (puisque  $\text{pbr}(\sigma_{nex}^{(\pi)}) = 0$ ).

Finalement, la somme des niveaux de départ  $k$  des pas Nord-Est et Est rouges des histoires de Charlier  $h^{(\pi)}$  est transformée, via la bijection  $\Psi_{FZ}^{-1}$ , en le nombre d'arcs dans la représentation graphique de  $\sigma^{(\pi)}$  passant en dessous des sommets  $i^+$  appartenant au support de  $\sigma_{nex}^{(\pi)}$ , sans compter les arcs aboutissant aux sommets  $i^+$ . Par le même argument que celui de la preuve du lemme 4.3.1, c'est aussi égal au nombre d'arcs passant au-dessus de ces sommets.

Les détails sont laissés au lecteur. □

**COROLLAIRE 4.7.2:** *On a l'égalité suivante:*

$$\sum_{\pi} q^{\text{char}(\pi)} = S_q[n, k], \quad (4.7.9)$$

où  $\pi$  parcourt les partitions de  $[[n]]$  en  $k$  blocs.

**REMARQUE 4.7.3:** En codant l'involution sans points fixes  $\sigma_{exc}$  par l'histoire d'Hermite  $\varphi_{dg}^{-1}(\sigma_{exc})$  plutôt que par  $\varphi_{gd}^{-1}(\sigma_{exc})$  dans la deuxième étape de la construction de la bijection  $\Psi_{FZ}$  et en appliquant le même raisonnement que ci-dessus, on obtient une nouvelle statistique *char'* sur les partitions, ayant elle aussi même distribution que les inversions:

$$\text{char}'(\pi) = \text{cr}(\pi) + \sum_{i^+} \#\{\text{arcs passant au-dessus du sommet } i^+\}, \quad (4.7.10)$$

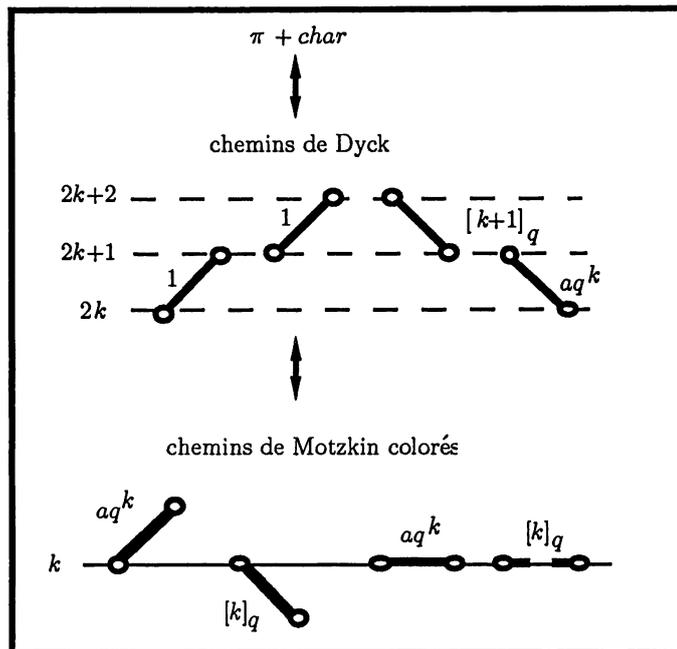


FIGURE 4.26: correspondance des  $q$ -pondérations  
le long de la bijection  $\tilde{\Psi}_{FZ}$

où  $cr(\pi)$  désigne le nombre de croisements d'arcs dans la représentation graphique de  $\pi$ , et la sommation parcourt tous les sommets  $i^+$  de la représentation graphique de  $\pi$  qui ne sont pas l'extrémité d'un arc.

#### 4.8 REMARQUES FINALES ET EXTENSIONS AUX $q$ -ANALOGUES DES CINQ CLASSES DE POLYNÔMES ORTHOGONAUX DE SHEFFER

Nous avons déjà mentionné la statistique Mahonienne  $den(\sigma)$ , introduite par Marleen Denert et faisant l'objet principal de l'article [FoZ3]. En appliquant leur bijection  $\Psi_{FZ}$  aux permutations, D. Foata et D. Zeilberger

obtiennent une autre statistique Mahonienne,  $ind(h)$ , qu'ils baptisent *index*, sur les histoires de Laguerre  $h = (w; (p_1, \dots, p_n))$ :

$$ind(h) = som(h) + \sum_{\substack{(s_{j-1}, s_j) \\ \text{pas N-E}}} j + \sum_{\substack{(s_{j-1}, s_j) \\ \text{pas E rouge}}} j. \quad (4.8.1)$$

Cette statistique ressemble beaucoup à l'expression de  $lag(h)$  dans la formule (4.6.6), à savoir

$$lag(h) = som(h) + \sum_{\substack{(s_{j-1}, s_j) \\ \text{pas S-E}}} j - \sum_{\substack{(s_{j-1}, s_j) \\ \text{pas N-E}}} j. \quad (4.8.2)$$

Un problème ouvert consiste à trouver une involution sur les histoires de Laguerre de longueur  $n$  qui enverrait le paramètre  $ind$  sur le paramètre  $lag$ .

Remarquons que les définitions des statistiques  $den$  et  $inv$  sur les permutations montrent aussi un certain degré de similarité: d'après l'article Foata, Zeilberger [FoZ3], la statistique  $denert$  peut s'écrire

$$den(\sigma) = \sum_{\substack{i \\ i < \sigma(i)}} i + pbr(\sigma_{exc}) + pbr(\sigma_{nex}), \quad (4.8.3)$$

tandis que le nombre d'inversions de  $\sigma$  peut s'écrire (d'après la relation (4.3.3))

$$inv(\sigma) = \sum_{\substack{i \\ i < \sigma(i)}} 1 + 2 \cdot pbr(\sigma_{exc}) + 2 \cdot pbr(\sigma_{nex}) \\ + cr(\sigma_{exc}) + cr(\sigma_{nex}). \quad (4.8.4)$$

Dans la monographie de Viennot [Vi1], l'étude exhaustive des histoires de Laguerre servait de point de départ à une théorie combinatoire unifiée des classes de polynômes orthogonaux de Sheffer (cf chapitre 2 de [Vi1]). En effet,

les modèles combinatoires des moments des cinq classes de polynômes étaient obtenus soit en considérant des restrictions sur les histoires de Laguerre (Hermite et Charlier), soit en ajoutant des paramètres sur les histoires de Laguerre (Meixner et Meixner-Pollačzek).

Plus généralement, soient  $\{a_k\}_{k \geq 0}$ ,  $\{b'_k\}_{k \geq 0}$ ,  $\{b''_k\}_{k \geq 0}$  et  $\{c_k\}_{k \geq 1}$ , les suites à valeurs dans l'anneau  $\mathbb{N}[a, b', b'', c, \beta]$  définies par

$$a_k = a(k + \beta), \quad b'_k = b'(k + \beta), \quad b''_k = b''k \quad \text{et} \quad c_k = ck, \quad (4.8.5)$$

et soit  $v_s$  la valuation des chemins de Motzkin colorés associée à ces quatre suites comme dans (4.1.9) et (4.1.10). On définit les *polynômes de Sheffer généraux*,  $Sh_n(x; a, b', b'', c, \beta)$  comme étant la classe de polynômes orthogonaux dont les moments  $\mu_n$  sont

$$\mu_n = \sum_w v_s(w), \quad (4.8.6)$$

où  $w$  parcourt les chemins de Motzkin de longueur  $n$ .

Une suite de polynômes  $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$  est dite *suite de polynômes de Sheffer* si et seulement si la fonction génératrice exponentielle de ces polynômes a la forme

$$\sum_{n \geq 0} P_n(x) \frac{t^n}{n!} = f(t) \exp(x \cdot g(t)). \quad (4.8.7)$$

Dans le cas où les polynômes sont à coefficients réels, nous appelons polynômes orthogonaux *défini-positifs* des polynômes dont les coefficients de la récurrence linéaire à trois termes satisfont  $\lambda_k > 0$ , pour tout  $k \geq 1$ .

Meixner a prouvé qu'une suite de polynômes orthogonaux défini-positifs est de Sheffer si et seulement si les coefficients de la récurrence linéaire à trois termes ont la forme

$$b_k = ck + d, \quad \lambda_k = ak^2 + bk, \quad (4.8.8)$$

dans lequel les nombres réels  $a, b, c, d$  satisfont  $a \geq 0$  et  $a + b > 0$ . Il a de plus montré qu'à un changement de variable près, il n'existe que cinq classes de polynômes orthogonaux définis-positifs déterminés par (4.8.8), soient les polynômes de Laguerre, Hermite, Charlier, Meixner et Meixner-Pollačzek.

Dans un contexte plus général, on peut montrer que toute suite de polynômes orthogonaux de Sheffer peut être décrite à un changement de variable près par les polynômes de Sheffer généraux  $Sh_n(x; a, b', b'', c, \beta)$ .

À l'aide du modèle combinatoire des histoires de Laguerre et de la bijection Françon-Viennot, on obtient une expression des moments de ces polynômes en termes de permutations, comptées selon un certain nombre de paramètres. Plus exactement,

$$\mu_n = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \beta^{s(\sigma)} a^{c(\sigma)} (b')^{dm(\sigma)} (b'')^{dd(\sigma)} c^{p(\sigma)}, \quad (4.8.9)$$

où  $s(\sigma)$  désigne le nombre d'éléments saillants (inférieurs gauches) de  $\sigma$ ,  $c(\sigma)$  le nombre de creux,  $dd(\sigma)$  le nombre de double descentes,  $dm(\sigma)$  le nombre de double montées, et  $p(\sigma)$ , le nombre de pics de  $\sigma$ .

La bijection de Foata-Zeilberger permet d'obtenir un  $q$ -analogue général des polynômes de Sheffer. Plus exactement, soient  $\{a_{k,q}\}_{k \geq 0}$ ,  $\{b'_{k,q}\}_{k \geq 0}$ ,  $\{b''_{k,q}\}_{k \geq 0}$  et  $\{c_{k,q}\}_{k \geq 1}$ , les suites à valeurs dans l'anneau  $\mathbb{N}[a, b', b'', c, \beta, q]$  définies par

$$a_{k,q} = aq^k[k+1; \beta]_q, \quad b'_{k,q} = b'q^k[k]_q, \quad b''_{k,q} = b''q^k[k+1; \beta]_q \text{ et } c_{k,q} = cq^k[k]_q, \quad (4.8.10)$$

et soit  $v_{s,q}$  la valuation des chemins de Motzkin colorés associée à ces quatre suites tel que défini dans (4.1.9) et (4.1.10).

**DÉFINITION 4.8.1:** On appelle  $q$ -polynômes de Sheffer généraux, notés  $Sh_{n,q}(x; a, b', b'', c, \beta)$ , la classe de polynômes orthogonaux dont les moments  $\mu_{n,q}$  sont donnés par

$$\mu_{n,q} = \sum_w v_{s,q}(w), \quad (4.8.11)$$

où  $w$  parcourt les chemins de Motzkin de longueur  $n$ .

**DÉFINITIONS 4.8.2:** Soit  $\sigma$  une permutation. On dira que l'entier  $x = \sigma(i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , est

- i) un *pic de cycle* si et seulement si  $\sigma^{-1}(x) < x = \sigma(i) \geq \sigma(x)$ ,
- ii) un *creux de cycle* si et seulement si  $\sigma^{-1}(x) \geq x = \sigma(i) < \sigma(x)$ ,
- iii) une *double montée de cycle* si et seulement si  $\sigma^{-1}(x) < x = \sigma(i) < \sigma(x)$ ,
- iv) une *double descente de cycle* si et seulement si  $\sigma^{-1}(x) \geq x = \sigma(i) \geq \sigma(x)$ .

Remarquons que les points fixes d'une permutation sont des double descentes de cycles.

Nous noterons

$$pc(\sigma) = \#\{\text{pics de cycle de } \sigma\}, \quad (4.8.12)$$

$$cc(\sigma) = \#\{\text{creux de cycle de } \sigma\}, \quad (4.8.13)$$

$$dmc(\sigma) = \#\{\text{double montées de cycle de } \sigma\}, \quad (4.8.14)$$

$$ddc(\sigma) = \#\{\text{double descentes de cycle de } \sigma\}. \quad (4.8.15)$$

**THÉORÈME 4.8.3:** *Avec les notations précédentes, les moments des  $q$ -polynômes de Sheffer généraux,  $Sh_{n,q}(x; a, b', b'', c, \beta)$  sont égaux à*

$$\mu_{n,q} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \beta^{sid(\sigma)} q^{inv(\sigma)} a^{cc(\sigma)} (b')^{dmc(\sigma)} (b'')^{ddc(\sigma)} c^{pc(\sigma)}, \quad (4.8.16)$$

où  $sid(\sigma)$  et  $inv(\sigma)$  désignent respectivement le nombre d'éléments saillants inférieurs droits et le nombre d'inversions de  $\sigma$ .

### DÉMONSTRATION:

Étant donné le théorème 4.5.4, il suffit de déterminer à quoi correspondent chacun des types de pas élémentaires des histoires de Laguerre  $h$  au niveau des permutations  $\sigma$  lors de l'application de  $\Psi_{FZ}^{-1}$ .

Par exemple, selon les constructions et notations introduites dans les sections précédentes de ce chapitre, si le  $i$ -ième pas élémentaire de l'histoire de Laguerre  $h = \Psi_{FZ}(\sigma)$  est Nord-Est, c'est parce que dans l'histoire de Laguerre subdivisée correspondante (avant tassement), les pas élémentaires correspondants aux entier  $i^-$  et  $i^+$  sont tous les deux Nord-Est. Donc  $i^-$  doit faire partie du support de l'involution sans points fixes  $\sigma_{nex}$ , alors que  $i^+$  fait partie du support de  $\sigma_{exc}$  (voir la caractérisation des quadruplets  $(h_{exc}, h_{nex}; Supp_{exc}, Supp_{nex})$  dans la section 4.5), c'est-à-dire qu'on a les inégalités suivantes:

$$(\sigma^{-1}(i))^+ \geq i^- \quad \text{et} \quad i^+ < (\sigma(i))^- , \quad (4.8.17)$$

i.e.  $\sigma^{-1}(i) \geq i < \sigma(i)$ , et donc l'entier  $i$  est un creux de cycle dans la permutation  $\sigma$ .

Raisonnement similaire pour les pas élémentaires Est bleu, Est rouge et Sud-Est des histoires de Laguerre.  $\square$

En spécialisant les valeurs des paramètres  $a, b', b'', c$ , nous obtenons des  $q$ -analogues des cinq classes de polynômes orthogonaux de Sheffer. Remarquons que l'expression (4.8.18) des moments de ces polynômes en termes de permutations pose le problème combinatoire de trouver des expressions pour les séries génératrices des permutations selon le nombre d'inversions, le nombre d'éléments saillants inférieurs droits et certaines statistiques sur les cycles des permutations. Ces distributions conjointes ne sont pas classiques au sens où les deux premiers paramètres se calculent sur les permutations exprimées sous forme de mots, alors que les autres statistiques se calculent sur les permutations écrites comme produit de cycles disjoints. On considère habituellement des distributions conjointes de statistiques calculées sur les permutations exprimées selon l'une ou l'autre des écritures, mais pas les deux à la fois. Mentionnons cependant que I. Gessel et C. Reutenauer [GeRe] ont récemment trouvé une expression du nombre de permutations ayant une structure cyclique et un ensemble de descentes fixés comme produit scalaire de deux caractères spéciaux du groupe symétrique.

## BIBLIOGRAPHIE

- [ASCa] AL SALAM, W.A. et CARLITZ, L., "Some orthogonal  $q$ -polynomials", Math. Nachr. 30, 1965, pp. 47–61.
- [An] ANDREWS, G.E., The Theory of Partitions, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 2, Reading MA, Addison-Wesley, 1976.
- [AA] ANDREWS, G.E. et ASKEY, R., "Classical Orthogonal Polynomials", dans Polynômes Orthogonaux et Applications (actes Bar-le-Duc, 1984), Lecture Notes in Math 1171, Springer-Verlag, New York, 1985, pp. 36–62.
- [AI] ASKEY, R. et ISMAIL, M., "Permutation problems and special functions", Canad. J. Math. 28, 1976, pp. 853–874.
- [AGV] AZOR, R., GILLIS, J. et VICTOR, D., "Combinatorial applications of Hermite polynomials", SIAM J. Math. Anal. 13, 1982, pp. 879–890.
- [Br] BRENTI, F., Unimodal, Log-Concave and Pólya Frequency Sequences in Combinatorics, thèse de Ph.D., MIT, 1988, 158 p.
- [Bre] BREZINSKI, C., "Outline of Padé approximation and general orthogonal polynomials", ISNM, Vol. 50, Birkhäuser Verlag, Basel, 1980.
- [But1] BUTLER, L.M., "A Unimodality Result in the enumeration of Subgroups of a finite Abelian Group", Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 101, No 4, décembre 1987, pp. 771–775.
- [But2] BUTLER, L.M., "The  $q$ -log concavity of  $q$ -binomial coefficients", Jour. Comb. Theory Ser. A 54, 1990, pp. 53–62.
- [Ca1] CARLITZ, L., "On abelian fields", Trans. Amer. Math. Soc. 35, 1933, pp. 122–136.
- [Ca2] CARLITZ, L., " $q$ -Bernoulli numbers and polynomials", Duke Math. J. 15, 1948, pp. 987–1000.
- [Ca3] CARLITZ, L., "The number of derangements of sequence with given specification", The Fibonacci Quarterly 16, 1980, pp. 255–258.

- [Ch] CHEN, W. Y., "Context-free grammars, differential operators and formal power series", dans Actes du Colloque sur les séries formelles et la combinatoire algébrique, M. Delest, G. Jacob et P. Leroux éd., Publ. LaBRI, Bordeaux, 1991, pp.145–160, ISSN-1157-3953.
- [Chi] CHIHARA, T.S., An Introduction to orthogonal polynomials, Gordon and Breach, New-York, 1978.
- [Ci] CIGLER, J., "Elementare  $q$ -Identitäten", Actes de la 5ème session du Séminaire Lotharingien de Combinatoire, Publ. de l'I.R.M.A., no 182/S-04, Strasbourg, 1982.
- [Co1] COMTET, L., "Nombres de Stirling généraux et fonctions symétriques", C. R. Acad. Sc. Paris, t. 275, 1972, pp. 747–750.
- [Co2] COMTET, L., Advanced combinatorics, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1974.
- [DDR] DAMIANI, E., D'ANTONA, O. et REGONATI, F., "Whitney numbers of certain geometric lattices", à paraître.
- [dM] DE MÉDICIS, A., Unimodalité et concavité logarithmique pour des suites de nombres classiques et leurs  $q$ -analogue, mémoire de maîtrise de l'UQAM, septembre 1989.
- [dML1] DE MÉDICIS, A. et LEROUX, P., "A unified combinatorial approach for  $q$ - (and  $p, q$ -) Stirling numbers", J. of Statistical Planning and Inference, 1990, à paraître.
- [dML2] DE MÉDICIS, A. et LEROUX, P., "Généralisations des nombres de Stirling et  $p, q$ -analogues", dans Atelier de Combinatoire franco-québécois, (actes, mai 1991), J. Labelle et J.-G. Penaud éd., Publ. du LACIM, no 10, Montréal, 1992, pp. 87–103, ISBN 2-89276-101-8.
- [Den] DENERT, M., "The genus zeta function of hereditary orders in central simple algebras over global fields", Math. Comp., t. 54, 1990, pp. 449–465.
- [Dés] DÉSARMÉNIEN, J., "Les  $q$ -analogues des polynômes d'Hermite", Actes de la 6ème session du Séminaire Lotharingien, Publ. de l'I.R.M.A., Strasbourg, 1982, pp. 39–56.

- [dSCV] DE SAINTE-CATHERINE, M. et VIENNOT, G., "Combinatorial interpretation of integrals of products of Hermite Laguerre and Tchebycheff polynomials", dans Polynômes Orthogonaux et Applications, ed. C. Brezinski, A. Draux, A.P. Magnus, P. Maroni et A. Ronveaux, Lecture Notes in Math. 1171, Springer-Verlag, 1985, pp. 120–128.
- [Dow] DOWLING, T.A., "A class of geometric lattices based on finite groups", Journal of Comb. Theory Ser. B 14, 1973, pp. 61–85.
- [DuKr] DUMONT, D. et KREWERAS, G., "Sur le développement d'une fraction continue liée à la série hypergéométrique et son interprétation en terme de records et anti-records dans les permutations", Europ. J. Comb., t.g., 1988, pp. 27–32.
- [EG] EVEN, S. et GILLIS, J., "Derangements and Laguerre polynomials", Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 79, 1976, pp. 135–143.
- [Fo] FOATA, D., "On the Netto inversion number of a sequence", Proc. Am. Math. Soc., vol. 19, 1968, pp. 236–240.
- [FoZ1] FOATA, D. et ZEILBERGER, D., "Laguerre polynomials, weighted derangements and positivity", SIAM J. Discrete Math. 1, 1988, pp. 425–433.
- [FoZ2] FOATA, D. et ZEILBERGER, D., "Linearization coefficients for the Jacobi polynomials", Actes 16e Séminaire Lotharingien, Publ. I.R.M.A., 341/S-16, Strasbourg, 1987, pp. 73–86.
- [FoZ3] FOATA, D. et ZEILBERGER, D., "Denert's permutation statistic is indeed Euler-Mahonian", Studies in Applied Math. 83, 1990, pp. 31–59.
- [Fla] FLAJOLET, P., "Combinatorial aspects of continued fractions", Disc. Math., 32, 1980, pp. 125–161. [Fr] FRANÇON, J., "Fractions continues  $q$ -analogiques pour certaines distributions de permutations et partitions", Publ. Math. de l'Univ. de Haute Alsace, rapport de recherche 7, 1982, 8 p. À paraître dans les Annales des Sc. Math. du Québec.
- [FrVi] FRANÇON, J. et VIENNOT, G., "Permutations selon les pics, creux, doubles montées, doubles descentes, nombres d'Euler et nombres de Genocchi", Discrete Math. 28, 1979, pp. 21–35.
- [GR] GASPER, G. et RAHMAN, M., Basic Hypergeometric Series, Encyclopedia of mathematics and its applications, vol. 35, Cambridge University Press, New York, 1990.

- [Ga] GARSIA, A.M., “On the “maj” and “inv”  $q$ -analogues of Eulerian Polynomials”, Journal of Linear and Multilinear Algebra 8, 1979, pp. 21–34.
- [GaR1] GARSIA, A.M. et REMMEL, J.B., “A Combinatorial Interpretation of  $q$ -Derangement and  $q$ -Laguerre Numbers”, Europ. J. of Combinatorics 1, 1980, pp. 47–59.
- [GaR2] GARSIA, A.M. et REMMEL, J.B., “ $q$ -counting Rook Configurations and a Formula of Frobenius”, J. Comb. Theory Ser. A 41, 1986, pp. 246–275.
- [GaR3] GARSIA, A.M. et REMMEL, J.B., ‘A novel form of  $q$ -Lagrange inversion”, Houston J. Math. 12, 1986, pp. 503–523.
- [Ge1] GESSEL, I., “A  $q$ -analogue of the exponential formula”, Disc. Math. 40, 1982, pp. 69–80.
- [Ge2] GESSEL, I., “Generalized Rook Polynomials and Orthogonal polynomials”, à paraître, 1988, 19 p.
- [GeRe] GESSEL, I. et REUTENAUER, C., “Counting permutations with cycle structure and descent set”, J. Comb. Theory Ser. A, à paraître.
- [GoRo] GOLDMAN, J. et ROTA, G.C., “On the Foundations of Combinatorial Theory IV: Finite Vector Spaces and Eulerian Generating Functions”, Studies in Appl. Math. 49, 1970, pp. 239–258.
- [God] GODSIL, C.D., “Hermite polynomials and a duality relation for matchings polynomials”, Combinatorica 1, 1981, pp. 257–262.
- [Gou] GOULD, H.W., “The  $q$ -Stirling Numbers of First and Second Kinds”, Duke Math. J. 28, 1961, pp. 281–289.
- [GJ] GOULDEN, I. et JACKSON, D.M., Combinatorial Enumeration, New York, John Wiley & Sons, 1983.
- [Gr] GRAGG, W.B., “The Padé table and its relation to certain algorithms of numerical analysis”, SIAM Review 14, 1972, pp. 1–62.
- [Hab] HABSIEGER, L., “Inégalités entre fonctions symétriques élémentaires: applications à des problèmes de log concavité”, Discrete Math., à paraître.
- [Han1] HAN, G.N., “Une nouvelle bijection pour la statistique de Denert”, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 310, 1990, pp. 493–496.
- [Han2] HAN, G.N., Calcul Denertien, thèse de Doctorat, Publ. de l’I.R.M.A., Stratsbourg, 476/TS-29, 1991.

- [Ha] HAHN, W., "Über Orthogonalpolynome, die  $q$ -Differenzen-gleichungen genügen", Math. Nachr. 2, 1949, pp. 4–34.
- [Hen1] HENRICI, P., The quotient-difference algorithm, J.Wiley, New York, vol. 1, 1974 et vol. 2, 1976.
- [Hen2] HENRICI, P., "Applied and computational complex analysis", NBS Appl. Math. Series 49, 1958, pp. 23–46.
- [ISV] ISMAIL, M., STANTON, D. et VIENNOT., X.G., "The combinatorics of  $q$ -Hermite polynomials and the Askey-Wilson integral", Europ. J. Comb. 8, 1987, pp. 379–392.
- [Ja] JACKSON, F.H., " $q$ -Difference equations", American Journal of Mathematics, Vol. 32, 1910, pp. 305–314.
- [Jac] JACKSON, D.M., "Laguerre polynomials and derangements", Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 80, 1976, pp. 213–214.
- [Kou] KOUTRAS, M., "Non-central Stirling numbers and some applications", Discrete Math. 42, 1982, pp. 73–89.
- [Le1] LEROUX, P., "Catégories triangulaires: exemples, applications et problèmes", Rapport de recherche, Université du Québec à Montréal, juillet 1980, 72 p.
- [Le2] LEROUX, P., Algèbre linéaire, une approche matricielle, Modulo Éditeur, Montréal, 1983, 500 p. ISBN 2-89113-201-7.
- [Le3] LEROUX, P., "Reduced Matrices and  $q$ -log Concavity Properties of  $q$ -Stirling Numbers", Journal of Comb. Theory Ser. A 54, 1990, pp. 64–84.
- [Mac] MACDONALD, I.G., Symmetric functions and Hall polynomials, Clarendon Press, Oxford, 1979.
- [MM] MACMAHON, P.A., "The indices of permutations and the derivation therefrom of functions of a single variable associated with the permutations of any assemblage of objects", Amer. J. Math. 35, 1913, pp. 281–322.
- [Me1] MERCIER, A., "Quelques résultats sur les  $q$ -analogues", Séminaire de Combinatoire, Université du Québec à Montréal, 1989.
- [Me2] MERCIER, A., "Quelques identités pour les  $q$ -analogues", Utilitas Mathematica 38, 1990, pp. 33–41.

- [Mi1] MILNE, S.C., "Restricted Growth Functions and Incidence Relations of the Lattice of Partitions of an  $n$ -Set", Adv. in Math. 26, 1977, pp. 290–305.
- [Mi2] MILNE, S.C., "A  $q$ -analog of restricted growth functions, Dobinski's equality, and Charlier polynomials", Trans. of Amer. Math. Soc. 245, 1978, pp. 89–118.
- [Mi3] MILNE, S.C., "Mappings of Subspaces into Subsets", J. of Comb. Th. Ser. A, Vol. 33, No 1, 1982, pp. 36–47.
- [Mi4] MILNE, S.C., "Restricted growth functions, rank row matchings of partition lattices, and  $q$ -Stirling numbers", Adv. in Math. 43, 1982, pp. 173–196.
- [NSW] NIJENHUIS, A., SOLOW, A.E., et WILF, H.S., "Bijective Methods in the Theory of Finite Vector Spaces", J. of Comb. Theory Ser. A 37, 1984, pp. 80–84.
- [OH] O'HARA, K.M., "Unimodality of Gaussian coefficients: a constructive proof", J. Comb.Theory Ser. A 53, 1990, pp. 29–52.
- [Pe] PENAUD, J.-G., "Une preuve combinatoire d'une formule de Touchard-Riordan", dans Arbres et animaux, mémoire d'habilitation, Université Bordeaux I, Bordeaux, 1990, pp. 143–162. À paraître dans les Comptes Rendus du 4-ième Colloque "Séries formelles et combinatoire algébrique", Montréal, Juin 1992.
- [Po] PÓLYA, G., "Gaussian binomial coefficients and the enumeration of inversions", Proceedings of the Second Chapel Hill Conference on Combinatorial Mathematics and its Applications, 1970, pp. 381–384.
- [ReWa] REMMEL, J.B. et WACHS, M. (1986), " $p, q$ -analogues of the Stirling numbers", 1986, communication privée.
- [Ri] RIORDAN, J., "The distribution of crossing of chords joining pairs of  $2n$  points on a circle", Math. Comp. 29, 1975, pp. 215–222.
- [Ro] ROGERS, L.J., "On a Three-fold symmetry in the elements of Heine's series", Proc. London Math. Soc. 24, 1938, pp. 171–179.
- [RoKO] ROTA, G.C., KAHANER, D. et ODLYZKO, A., "Finite operators calculus", J. Math. Anal. Appl. 42, 1973, pp. 685–760.
- [RV] RUCIŃSKI, A. et VOIGT, B., "A local limit theorem for generalized Stirling numbers", Rev. Roumaine de Math. Pures, App. 35, no 2, 1990, pp. 161–172.

- [Ru] RUTISHAUSER, H., Der Quotienten-Differenzen Algorithmus, Birkhäuser Verlag, Basel, 1957.
- [Sa1] SAGAN, B.E., "Inductive and Injective Proofs of Log Concavity Results", Discrete Mathematics 68, 1988, pp. 281–292.
- [Sa2] SAGAN, B.E., "Inductive Proofs of  $q$ -Log Concavity", Discrete Maths 99, 1992, pp.289–306.
- [Sa3] SAGAN, B.E., "Log concave sequences of symmetric functions and analogs of the Jacobi-Trudi determinants", AMS Transactions 329, 1992, pp.795–811.
- [Sa4] SAGAN, B.E., "A maj statistics for set partitions", Europ. J. Comb. 12, 1991, pp. 69–79.
- [SiSt] SIMION, R. et STANTON, D., "Octobasic Laguerre polynomials and permutation statistics", en préparation.
- [Sta1] STANLEY, R. P., "Supersolvable lattices", Algebra Univ., no 2, 1972, pp. 197–217.
- [Sta2] STANLEY, R. P., "Finite lattices and Jordan-Hölder sets", Algebra Univ., 4, 1974, pp. 361–371.
- [Sta3] STANLEY, R.P., "Log-Concave and Unimodal Sequences in Algebra, Combinatorics, and Geometry", Annals of the New York Acad. of Sc., à paraître, 79 p.
- [St] STANTON, D., "Specializations of generalized Laguerre polynomials", en préparation.
- [StWh] STANTON, D. et WHITE, D., Constructive Combinatorics, Undergrad. Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1986, 184 p.
- [Sti] STIEFEL, E., "Kernel polynomials in linear algebra and their numerical applications", NBS Appl. Math. Series 49, 1958, pp. 1–22.
- [Sun] SUNDARAM, S. communication privée, 1988.
- [Sz] SZÉGO, G., "Ein Beitrag zur Theorie des Thetafunktionen", Sitz. Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math., K. XIX, 1926, pp. 242–252.
- [TT] TOADER, S. et TOADER, G.H., "Generalized Stirling Numbers", Studia Univ. Babes-Bolyai Mathematica XXXIII, no 1, 1988, pp. 50–53.

- [Tou] TOUCHARD, J., "Sur un problème de configurations et sur les fractions continues", Canadian J. Math. 4, 1952, pp. 2–25.
- [VS] VERDE-STAR, L., "Interpolation and Combinatorial Functions", Studies in Applied Maths 79, 1988, pp. 65–92.
- [Vi1] VIENNOT, X.G., Une Théorie Combinatoire des Polynômes Orthogonaux, Notes de conférences données à l'UQAM, septembre et octobre 1983 (réédition, publications du LACIM, UQAM, Montréal, 1992).
- [Vi2] VIENNOT, X.G., "A combinatorial interpretation of the quotient-difference algorithm", Rapport de recherche de l'UER de mathématique et informatique, Université Bordeaux I, mars 1986, 23 p.
- [Vo] VOIGT, B., "A common generalization of binomial coefficients, Stirling numbers and Gaussian coefficients", Proc. 11th Winter School on Abstract Analysis (Železná Ruda, 1983), Rend. Circ. Mat. Palermo, Suppl. no 3, 1984, pp. 339–359.
- [WaWh] WACHS, D. et WHITE, D., " $p, q$ -Stirling Numbers and Set Partition Statistics", J. Comb. Theory Ser. A 56, 1991, pp. 27–46.
- [Wh] WHITE, D., communication privée, 1988.
- [Ze] ZEILBERGER, D., "A One-line High School Algebra Proof of the Unimodality of the Gaussian Polynomials  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$  for  $k < 20$ ", en préparation, février 1988, 6 p.
- [Zen1] ZENG, J., "Records, Antirecords et Permutations Discordantes", European J. Comb. 10, 1989, pp. 103–109.
- [Zen2] ZENG, J., "Weighted derangements and the linearization coefficients of orthogonal Sheffer polynomials", Proc. London Math. Soc. 65, 1992, pp. 1–22.
- [Zen3] ZENG, J., "Counting a pair of permutations and the linearization coefficients for Jacobi polynomials", dans Atelier de Combinatoire franco-québécois, (Actes, mai 1991), J. Labelle et J.-G. Penaud éd., Publ. du LACIM, no 10, Montréal, 1992, pp. 243–257, ISBN 2-89276-101-8.

## APPENDICE A

$q$ -polynômes de Charlier pour  $n \leq 6$

TABLEAU II :  $q$ -polynômes de Charlier (1)

$n$	$C_{n,q}^{(a)}(x)$
1	$x - a$
2	$x^2 - [a(q+1) + 1]x + a^2q$
3	$x^3 - [a(q^2 + q + 1) + q + 2]x^2$ $+ [a^2(q^3 + q^2 + q) + a(q^2 + q + 1) + q + 1]x - a^3q^3$
4	$x^4 - [a(q^3 + q^2 + q + 1) + q^2 + 2q + 3]x^3$ $+ [a^2(q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q) + a(q^4 + 3q^3 + 3q^2 + 3q + 2)$ $+ q^3 + 3q^2 + 4q + 3]x^2$ $- [a^3(q^6 + q^5 + q^4 + q^3) + a^2(q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q)$ $+ a(q^4 + 2q^3 + 2q^2 + 2q + 1) + q^3 + 2q^2 + 2q + 1]x + a^4q^6$
5	$x^5 - [a(q^4 + q^3 + q^2 + q + 1) + q^3 + 2q^2 + 3q + 4]x^4$ $+ [a^2(q^7 + q^6 + 2q^5 + 2q^4 + 2q^3 + q^2 + q)$ $+ a(q^6 + 3q^5 + 6q^4 + 6q^3 + 6q^2 + 5q + 3)$ $+ q^5 + 3q^4 + 7q^3 + 9q^2 + 9q + 6]x^3$ $- [a^3(q^9 + q^8 + 2q^7 + 2q^6 + 2q^5 + q^4 + q^3)$ $+ a^2(q^8 + 3q^7 + 4q^6 + 6q^5 + 6q^4 + 5q^3 + 3q^2 + 2q)$ $+ a(q^7 + 4q^6 + 8q^5 + 11q^4 + 11q^3 + 10q^2 + 7q + 3)$ $+ q^6 + 4q^5 + 8q^4 + 12q^3 + 12q^2 + 9q + 4]x^2$ $+ [a^4(+q^{10} + q^9 + q^8 + q^7 + q^6)$ $+ a^3(q^9 + q^8 + 2q^7 + 2q^6 + 2q^5 + q^4 + q^3)$ $+ a^2(q^8 + 2q^7 + 3q^6 + 4q^5 + 4q^4 + 3q^3 + 2q^2 + q)$ $+ a(q^7 + 3q^6 + 5q^5 + 6q^4 + 6q^3 + 5q^2 + 3q + 1)$ $+ q^6 + 3q^5 + 5q^4 + 6q^3 + 5q^2 + 3q + 1]x - a^5q^{10}$

TABLEAU II :  $q$ -polynômes de Charlier (2)

$n$	$C_{n,q}^{(a)}(x)$
6	$  \begin{aligned}  & x^6 - [a(q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1) \\  & \quad + q^4 + 2q^3 + 3q^2 + 4q + 5]x^5 \\  & + [a^2(q^9 + q^8 + q^7 + 2q^6 + 3q^5 + 2q^4 + 2q^3q^2 + q) \\  & + a(q^8 + 3q^7 + 6q^6 + 10q^5 + 10q^4 + 10q^3 + 9q^2 + 7q + 4) \\  & + q^7 + 3q^6 + 7q^5 + 13q^4 + 17q^3 + 18q^2 + 16q + 10]x^4 \\  & - [a^3(q^{12} + q^{11} + 2q^{10} + 3q^9 + 3q^8 + 3q^7 + 3q^6 + 2q^5 + q^4 + q^3) \\  & \quad + a^2(q^{11} + 3q^{10} + 7q^9 + 9q^8 + 13q^7 + 14q^6 \\  & \quad + 15q^5 + 11q^4 + 9q^3 + 5q^2 + 3q) \\  & \quad + a(q^{10} + 4q^9 + 11q^8 + 20q^7 + 29q^6 + 35q^5 \\  & \quad + 34q^4 + 31q^3 + 24q^2 + 15q + 6) \\  & \quad + q^9 + 4q^8 + 11q^7 + 21q^6 + 33q^5 + 42q^4 \\  & \quad + 43q^3 + 36q^2 + 24q + 10]x^3 \\  & + [a^4(q^{14} + q^{13} + 2q^{12} + 2q^{11} + 3q^{10} + 2q^9 + 2q^8 + q^7 + q^6) \\  & \quad + a^3(q^{13} + 3q^{12} + 4q^{11} + 7q^{10} + 9q^9 + 9q^8 \\  & \quad + 9q^7 + 8q^6 + 5q^5 + 3q^4 + 2q^3) \\  & \quad + a^2(q^{12} + 4q^{11} + 9q^{10} + 15q^9 + 20q^8 + 25q^7 \\  & \quad + 26q^6 + 24q^5 + 18q^4 + 13q^3 + 7q^2 + 3q) \\  & \quad + a(q^{11} + 5q^{10} + 13q^9 + 25q^8 + 37q^7 + 46q^6 \\  & \quad + 49q^5 + 45q^4 + 37q^3 + 25q^2 + 13q + 4) \\  & \quad + q^{10} + 5q^9 + 13q^8 + 25q^7 + 38q^6 + 48q^5 + 50q^4 + 43q^3 \\  & \quad + 30q^2 + 16q + 5]x^2 \\  & - [a^5(q^{15} + q^{14} + q^{13} + q^{12} + q^{11} + q^{10}) \\  & + a^4(q^{14} + q^{13} + 2q^{12} + 2q^{11} + 3q^{10} + 2q^9 + 2q^8 + q^7 + q^6) \\  & \quad + a^3(q^{13} + 2q^{12} + 3q^{11} + 5q^{10} + 6q^9 + 6q^8 \\  & \quad + 6q^7 + 5q^6 + 3q^5 + 2q^4 + q^3) \\  & \quad + a^2(q^{12} + 3q^{11} + 6q^{10} + 9q^9 + 12q^8 + 14q^7 \\  & \quad + 14q^6 + 12q^5 + 9q^4 + 6q^3 + 3q^2 + q) \\  & \quad + a(q^{11} + 4q^{10} + 9q^9 + 15q^8 + 20q^7 + 23q^6 + 23q^5 \\  & \quad + 20q^4 + 15q^3 + 9q^2 + 4q + 1) \\  & \quad + q^{10} + 4q^9 + 9q^8 + 15q^7 + 20q^6 + 22q^5 \\  & \quad + 20q^4 + 15q^3 + 9q^2 + 4q + 1]x + a^6q^{15}  \end{aligned}  $

## APPENDICE B

Coefficients de linéarisation pour un produit  
de trois  $q$ -polynômes de Charlier

TABLEAU III : Coefficients de linéarisation pour un produit de trois  $q$ -polynômes de Charlier (1)

$n_1$	$n_2$	$n_3$	$f_q(C_{n_1,q}^{(a)}(x)C_{n_2,q}^{(a)}(x)C_{n_3,q}^{(a)}(x))$
1	1	1	$a + (q - 1)a^2$
1	1	2	$q(q + 1)a^2$
1	1	3	0
1	1	4	0
1	1	5	0
1	1	6	0
1	2	2	$q(q^2 + 2q + 1)a^2 + q(q^3 + q^2 - q - 1)a^3$
1	2	3	$q^3(q^3 + 2q^2 + 2q + 1)a^3$
1	2	4	0
1	2	5	0
1	2	6	0

TABLEAU III : Coefficients de linéarisation pour un produit de trois  $q$ -polynômes de Charlier (2)

$n_1$	$n_2$	$n_3$	$f_q(C_{n_1,q}^{(a)}(x)C_{n_2,q}^{(a)}(x)C_{n_3,q}^{(a)}(x))$
1	3	3	$q^3(q^5 + 3q^4 + 5q^3 + 5q^2 + 3q + 1)a^3 + q^3(q^6 + 2q^5 + 2q^4 - 2q^2 - 2q - 1)a^4$
1	3	4	$q^6(q^6 + 3q^5 + 5q^4 + 6q^3 + 5q^2 + 3q + 1)a^4$
1	3	5	0
1	3	6	0
1	4	4	$q^6(q^9 + 4q^8 + 9q^7 + 15q^6 + 19q^5 + 19q^4 + 15q^3 + 9q^2 + 4q + 1)a^4 + q^6(q^{10} + 3q^9 + 5q^8 + 6q^7 + 4q^6 - 4q^4 - 6q^3 - 5q^2 - 3q - 1)a^5$
1	4	5	$q^{10}(q^{10} + 4q^9 + 9q^8 + 15q^7 + 20q^6 + 22q^5 + 20q^4 + 15q^3 + 9q^2 + 4q + 1)a^5$
1	4	6	0
1	5	5	$q^{10}(q^{14} + 5q^{13} + 14q^{12} + 29q^{11} + 49q^{10} + 70q^9 + 86q^8 + 92q^7 + 86q^6 + 70q^5 + 49q^4 + 29q^3 + 14q^2 + 5q + 1)a^5 + q^{10}(q^{15} + 4q^{14} + 9q^{13} + 15q^{12} + 20q^{11} + 21q^{10} + 16q^9 + 6q^8 - 6q^7 - 16q^6 - 21q^5 - 20q^4 - 15q^3 - 9q^2 - 4q - 1)a^6$

TABLEAU III : Coefficients de linéarisation pour un produit de trois  $q$ -polynômes de Charlier (3)

$n_1$	$n_2$	$n_3$	$f_q(C_{n_1,q}^{(a)}(x)C_{n_2,q}^{(a)}(x)C_{n_3,q}^{(a)}(x))$
1	5	6	$q^{15}(q^{15} + 5q^{14} + 14q^{13} + 29q^{12} + 49q^{11} + 71q^{10} + 90q^9 + 101q^8 + 101q^7 + 90q^6 + 71q^5 + 49q^4 + 29q^3 + 14q^2 + 5q + 1)a^6$
2	2	2	$q^2(q^2 + 2q + 1)a^2 + q(q^5 + 4q^4 + 5q^3 + q^2 - 2q - 1)a^3 + q^2(q^4 - 2q^2 + 1)a^4$
2	2	3	$q^3(q^5 + 4q^4 + 7q^3 + 7q^2 + 4q + 1)a^3 + q^3(q^6 + 3q^5 + 3q^4 - 3q^2 - 3q - 1)a^4$
2	2	4	$q^6(q^6 + 3q^5 + 5q^4 + 6q^3 + 5q^2 + 3q + 1)a^4$
2	2	5	0
2	2	6	0
2	3	3	$q^4(q^6 + 4q^5 + 8q^4 + 10q^3 + 8q^2 + 4q + 1)a^3 + q^3(q^9 + 5q^8 + 12q^7 + 17q^6 + 14q^5 + 4q^4 - 5q^3 - 7q^2 - 4q - 1)a^4 + q^4(q^8 + 2q^7 + q^6 - 2q^5 - 4q^4 - 2q^3 + q^2 + 2q + 1)a^5$
2	3	4	$q^6(q^9 + 5q^8 + 13q^7 + 23q^6 + 30q^5 + 30q^4 + 23q^3 + 13q^2 + 5q + 1)a^4 +$

TABLEAU III : Coefficients de linéarisation pour un produit de trois  $q$ -polynômes de Charlier (4)

$n_1$	$n_2$	$n_3$	$f_q(C_{n_1,q}^{(a)}(x)C_{n_2,q}^{(a)}(x)C_{n_3,q}^{(a)}(x))$
2	3	4	$+q^6(q^{10} + 4q^9 + 8q^8 + 10q^7 + 7q^6 - 7q^4 - 10q^3 - 8q^2 - 4q - 1)a^5$
2	3	5	$q^{10}(q^{10} + 4q^9 + 9q^8 + 15q^7 + 20q^6 + 22q^5 + 20q^4 + 15q^3 + 9q^2 + 4q + 1)a^5$
2	3	6	0
2	4	4	$q^7(q^{11} + 5q^{10} + 14q^9 + 28q^8 + 43q^7 + 53q^6 + 53q^5 + 43q^4 + 28q^3 + 14q^2 + 5q + 1)a^4$ $+q^6(q^{14} + 6q^{13} + 18q^{12} + 37q^{11} + 57q^{10} + 67q^9 + 59q^8 + 34q^7 + 3q^6 - 20q^5 - 28q^4 - 23q^3 - 13q^2 - 5q - 1)a^5$ $+q^7(q^{13} + 3q^{12} + 5q^{11} + 5q^{10} + q^9 - 5q^8 - 10q^7 - 10q^6 - 5q^5 + q^4 + 5q^3 + 5q^2 + 3q + 1)a^6$
2	4	5	$q^{10}(q^{14} + 6q^{13} + 19q^{12} + 43q^{11} + 77q^{10} + 114q^9 + 143q^8 + 154q^7 + 143q^6 + 114q^5 + 77q^4 + 43q^3 + 19q^2 + 6q + 1)a^5$ $+q^{10}(q^{15} + 5q^{14} + 13q^{13} + 24q^{12} + 34q^{11} + 37q^{10} + 29q^9 + 11q^8 - 11q^7 - 29q^6 - 37q^5 - 34q^4 - 24q^3 - 13q^2 - 5q - 1)a^6$
2	4	6	$q^{15}(q^{15} + 5q^{14} + 14q^{13} + 29q^{12} + 49q^{11} + 71q^{10} + 90q^9 + 101q^8 + 101q^7 + 90q^6 + 71q^5 + 49q^4 + 29q^3 + 14q^2 + 5q + 1)a^6$

TABLEAU III : Coefficients de linéarisation pour un produit de trois  $q$ -polynômes de Charlier (5)

$n_1$	$n_2$	$n_3$	$f_q(C_{n_1,q}^{(a)}(x)C_{n_2,q}^{(a)}(x)C_{n_3,q}^{(a)}(x))$
2	5	5	$  \begin{aligned}  & q^{11}(q^{17} + 6q^{16} + 20q^{15} + 49q^{14} + 97q^{13} + 162q^{12} \\  & + 234q^{11} + 297q^{10} + 334q^9 + 334q^8 + 297q^7 \\  & + 234q^6 + 162q^5 + 97q^4 + 49q^3 + 20q^2 + 6q + 1)a^5 \\  & + q^{10}(q^{20} + 7q^{19} + 25q^{18} + 62q^{17} + 121q^{16} \\  & + 196q^{15} + 269q^{14} + 315q^{13} + 313q^{12} + 256q^{11} \\  & + 156q^{10} + 41q^9 - 57q^8 - 116q^7 - 131q^6 \\  & - 112q^5 - 77q^4 - 43q^3 - 19q^2 - 6q - 1)a^6 \\  & + q^{11}(q^{19} + 4q^{18} + 9q^{17} + 15q^{16} + 19q^{15} + 17q^{14} \\  & + 7q^{13} - 9q^{12} - 26q^{11} - 37q^{10} - 37q^9 - 26q^8 - 9q^7 \\  & + 7q^6 + 17q^5 + 19q^4 + 15q^3 + 9q^2 + 4q + 1)a^7  \end{aligned}  $
2	5	6	$  \begin{aligned}  & q^{15}(q^{20} + 7q^{19} + 26q^{18} + 69q^{17} + 147q^{16} + 266q^{15} \\  & + 421q^{14} + 593q^{13} + 752q^{12} + 865q^{11} \\  & + 906q^{10} + 865q^9 + 752q^8 + 593q^7 + 421q^6 \\  & + 266q^5 + 147q^4 + 69q^3 + 26q^2 + 7q + 1)a^6 \\  & + q^{15}(q^{21} + 6q^{20} + 19q^{19} + 43q^{18} + 78q^{17} \\  & + 119q^{16} + 155q^{15} + 172q^{14} + 159q^{13} + 113q^{12} \\  & + 41q^{11} - 41q^{10} - 113q^9 - 159q^8 - 172q^7 \\  & - 155q^6 - 119q^5 - 78q^4 - 43q^3 - 19q^2 - 6q - 1)a^7  \end{aligned}  $
3	3	3	$  \begin{aligned}  & q^6(q^6 + 4q^5 + 8q^4 + 10q^3 + 8q^2 + 4q + 1)a^3 \\  & + q^4(q^{11} + 6q^{10} + 19q^9 + 39q^8 + 56q^7 + 57q^6 \\  & + 39q^5 + 14q^4 - 3q^3 - 7q^2 - 4q - 1)a^4 \\  & + q^4(q^{12} + 5q^{11} + 13q^{10} + 20q^9 + 17q^8 + q^7 \\  & - 18q^6 - 25q^5 - 17q^4 - 4q^3 + 3q^2 + 3q + 1)a^5 \\  & + q^6(q^9 + q^8 - q^7 - 3q^6 - 2q^5 + 2q^4 \\  & + 3q^3 + q^2 - q - 1)a^6  \end{aligned}  $

TABLEAU III : Coefficients de linéarisation pour un produit de trois  $q$ -polynômes de Charlier (6)

$n_1$	$n_2$	$n_3$	$f_q(C_{n_1,q}^{(a)}(x)C_{n_2,q}^{(a)}(x)C_{n_3,q}^{(a)}(x))$
3	3	4	$  \begin{aligned}  & q^7(q^{11} + 6q^{10} + 19q^9 + 41q^8 + 66q^7 + 83q^6 \\  & + 83q^5 + 66q^4 + 41q^3 + 19q^2 + 6q + 1)a^4 \\  & + q^6(q^{14} + 6q^{13} + 20q^{12} + 45q^{11} + 74q^{10} \\  & + 91q^9 + 81q^8 + 44q^7 - 3q^6 - 37q^5 \\  & - 46q^4 - 35q^3 - 18q^2 - 6q - 1)a^5 \\  & + q^7(q^{13} + 4q^{12} + 8q^{11} + 9q^{10} + 3q^9 - 8q^8 - 17q^7 \\  & - 17q^6 - 8q^5 + 3q^4 + 9q^3 + 8q^2 + 4q + 1)a^6  \end{aligned}  $
3	3	5	$  \begin{aligned}  & q^{10}(q^{14} + 6q^{13} + 20q^{12} + 47q^{11} + 86q^{10} \\  & + 129q^9 + 163q^8 + 176q^7 + 163q^6 + 129q^5 \\  & + 86q^4 + 47q^3 + 20q^2 + 6q + 1)a^5 \\  & + q^{10}(q^{15} + 5q^{14} + 14q^{13} + 27q^{12} + 39q^{11} + 43q^{10} \\  & + 34q^9 + 13q^8 - 13q^7 - 34q^6 - 43q^5 \\  & - 39q^4 - 27q^3 - 14q^2 - 5q - 1)a^6  \end{aligned}  $
3	3	6	$  \begin{aligned}  & q^{15}(q^{15} + 5q^{14} + 14q^{13} + 29q^{12} + 49q^{11} + 71q^{10} \\  & + 90q^9 + 101q^8 + 101q^7 + 90q^6 + 71q^5 \\  & + 49q^4 + 29q^3 + 14q^2 + 5q + 1)a^6  \end{aligned}  $
3	4	4	$  \begin{aligned}  & q^9(q^{12} + 6q^{11} + 19q^{10} + 42q^9 + 71q^8 + 96q^7 + 106q^6 \\  & + 96q^5 + 71q^4 + 42q^3 + 19q^2 + 6q + 1)a^4 \\  & + q^7(q^{17} + 7q^{16} + 27q^{15} + 73q^{14} + 151q^{13} + 250q^{12} \\  & + 338q^{11} + 375q^{10} + 337q^9 + 234q^8 + 107q^7 + 3q^6 \\  & - 51q^5 - 58q^4 - 40q^3 - 19q^2 - 6q - 1)a^5 \\  & + q^7(q^{18} + 6q^{17} + 20q^{16} + 46q^{15} + 78q^{14} + 99q^{13} \\  & + 88q^{12} + 37q^{11} - 38q^{10} - 103q^9 - 127q^8 - 104q^7 \\  & - 54q^6 - 7q^5 + 18q^4 + 21q^3 + 13q^2 + 5q + 1)a^6 \\  & + q^9(q^{15} + 3q^{14} + 4q^{13} + 2q^{12} - 4q^{11} - 10q^{10} \\  & - 11q^9 - 5q^8 + 5q^7 + 11q^6 + 10q^5 \\  & + 4q^4 - 2q^3 - 4q^2 - 3q - 1)a^7  \end{aligned}  $

TABLEAU III : Coefficients de linéarisation pour un produit de trois  $q$ -polynômes de Charlier (7)

$n_1$	$n_2$	$n_3$	$f_q(C_{n_1,q}^{(a)}(x)C_{n_2,q}^{(a)}(x)C_{n_3,q}^{(a)}(x))$
3	4	5	$  \begin{aligned}  & q^{11}(q^{17} + 7q^{16} + 27q^{15} + 74q^{14} + 159q^{13} + 282q^{12} \\  & + 425q^{11} + 554q^{10} + 631q^9 + 631q^8 + 554q^7 \\  & + 425q^6 + 282q^5 + 159q^4 + 74q^3 + 27q^2 + 7q + 1)a^5 \\  & + q^{10}(q^{20} + 7q^{19} + 27q^{18} + 74q^{17} + 158q^{16} \\  & + 275q^{15} + 399q^{14} + 486q^{13} + 492q^{12} + 397q^{11} \\  & + 220q^{10} + 14q^9 - 158q^8 - 252q^7 - 260q^6 \\  & - 207q^5 - 132q^4 - 67q^3 - 26q^2 - 7q - 1)a^6 \\  & + (q^{19} + 5q^{18} + 14q^{17} + 27q^{16} + 38q^{15} \\  & + 38q^{14} + 20q^{13} - 14q^{12} - 52q^{11} \\  & - 77q^{10} - 77q^9 - 52q^8 - 14q^7 + 20q^6 \\  & + 38q^5 + 38q^4 + 27q^3 + 14q^2 + 5q + 1)a^7  \end{aligned}  $
3	4	6	$  \begin{aligned}  & q^{15}(q^{20} + 7q^{19} + 27q^{18} + 75q^{17} + 166q^{16} + 309q^{15} \\  & + 499q^{14} + 713q^{13} + 913q^{12} + 1056q^{11} \\  & + 1108q^{10} + 1056q^9 + 913q^8 + 713q^7 + 499q^6 \\  & + 309q^5 + 166q^4 + 75q^3 + 27q^2 + 7q + 1)a^6 \\  & + q^{15}(q^{21} + 6q^{20} + 20q^{19} + 48q^{18} + 91q^{17} \\  & + 143q^{16} + 190q^{15} + 214q^{14} + 200q^{13} \\  & + 143q^{12} + 52q^{11} - 52q^{10} - 143q^9 - 200q^8 - 214q^7 \\  & - 190q^6 - 143q^5 - 91q^4 - 48q^3 - 20q^2 - 6q - 1)a^7  \end{aligned}  $
3	5	5	$  \begin{aligned}  & q^{13}(q^{19} + 7q^{18} + 27q^{17} + 75q^{16} + 166q^{15} + 308q^{14} \\  & + 493q^{13} + 693q^{12} + 865q^{11} + 965q^{10} + 965q^9 \\  & + 865q^8 + 693q^7 + 493q^6 + 308q^5 + 166q^4 \\  & + 75q^3 + 27q^2 + 7q + 1)a^5 \\  & + q^{11}(q^{24} + 8q^{23} + 35q^{22} + 109q^{21} + 268q^{20} + 548q^{19} \\  & + 960q^{18} + 1467q^{17} + 1976q^{16} + 2357q^{15} \\  & + 2487q^{14} + 2302q^{13} + 1830q^{12} + 1186q^{11} + 529q^{10} \\  & + 2q^9 - 316q^8 - 425q^7 - 384q^6 - 273q^5 \\  & - 158q^4 - 74q^3 - 27q^2 - 7q - 1)a^6 +  \end{aligned}  $

TABLEAU III : Coefficients de linéarisation pour un produit de trois  $q$ -polynômes de Charlier (8)

$n_1$	$n_2$	$n_3$	$f_q(C_{n_1,q}^{(a)}(x)C_{n_2,q}^{(a)}(x)C_{n_3,q}^{(a)}(x))$
3	5	5	$  \begin{aligned}  &+q^{11}(q^{25} + 7q^{24} + 27q^{23} + 74q^{22} + 159q^{21} + 280q^{20} \\  &\quad + 412q^{19} + 507q^{18} + 509q^{17} + 381q^{16} \\  &\quad + 130q^{15} - 185q^{14} - 472q^{13} - 644q^{12} - 657q^{11} \\  &\quad - 527q^{10} - 318q^9 - 109q^8 + 41q^7 + 111q^6 \\  &\quad + 115q^5 + 84q^4 + 47q^3 + 20q^2 + 6q + 1)a^7 \\  &+q^{13}(q^{22} + 4q^{21} + 9q^{20} + 14q^{19} + 15q^{18} + 8q^{17} \\  &\quad - 8q^{16} - 28q^{15} - 43q^{14} - 44q^{13} - 28q^{12} \\  &\quad + 28q^{10} + 44q^9 + 43q^8 + 28q^7 + 8q^6 - 8q^5 \\  &\quad - 15q^4 - 14q^3 - 9q^2 - 4q - 1)a^8  \end{aligned}  $
3	5	6	$  \begin{aligned}  &q^{16}(q^{24} + 8q^{23} + 35q^{22} + 110q^{21} + 276q^{20} \\  &\quad + 584q^{19} + 1076q^{18} + 1762q^{17} + 2600q^{16} \\  &\quad + 3490q^{15} + 4289q^{14} + 4846q^{13} + 5046q^{12} + 4846q^{11} \\  &\quad + 4289q^{10} + 3490q^9 + 2600q^8 + 1762q^7 + 1076q^6 \\  &\quad + 584q^5 + 276q^4 + 110q^3 + 35q^2 + 8q + 1)a^6 \\  &+q^{15}(q^{27} + 8q^{26} + 35q^{25} + 109q^{24} + 269q^{23} + 556q^{22} \\  &\quad + 993q^{21} + 1561q^{20} + 2183q^{19} + 2729q^{18} + 3046q^{17} \\  &\quad + 3007q^{16} + 2561q^{15} + 1762q^{14} + 761q^{13} - 238q^{12} \\  &\quad - 1041q^{11} - 1522q^{10} - 1653q^9 - 1497q^8 - 1171q^7 \\  &\quad - 799q^6 - 474q^5 - 241q^4 - 102q^3 - 34q^2 - 8q - 1)a^7 \\  &+q^{16}(q^{26} + 6q^{25} + 20q^{24} + 48q^{23} + 91q^{22} + 142q^{21} \\  &\quad + 184q^{20} + 194q^{19} + 152q^{18} + 52q^{17} - 91q^{16} \\  &\quad - 242q^{15} - 357q^{14} - 400q^{13} - 357q^{12} - 242q^{11} \\  &\quad - 91q^{10} + 52q^9 + 152q^8 + 194q^7 + 184q^6 \\  &\quad + 142q^5 + 91q^4 + 48q^3 + 20q^2 + 6q + 1)a^8  \end{aligned}  $

## APPENDICE C

Coefficients de linéarisation pour un produit  
de quatre  $q$ -polynômes de Charlier

TABLEAU IV : Coefficients de linéarisation pour un produit de quatre  $q$ -polynômes de Charlier (1)

$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$	$f_q(C_{n_1,q}^{(a)}(x)C_{n_2,q}^{(a)}(x)C_{n_3,q}^{(a)}(x)C_{n_4,q}^{(a)}(x))$
1	1	1	1	$a + (q^2 + 3q - 1)a^2 + (q^2 - 2q + 1)a^3$
1	1	1	2	$q(q^2 + 3q + 2)a^2 + q(q^3 + 2q^2 - q - 2)a^3$
1	1	1	3	$q^3(q^3 + 2q^2 + 2q + 1)a^3$
1	1	1	4	0
1	1	2	2	$q(q^3 + 3q^2 + 3q + 1)a^2$ $+q(q^5 + 4q^4 + 7q^3 + 3q^2 - 3q - 2)a^3$ $+q(q^5 + q^4 - 2q^3 - 2q^2 + q + 1)a^4$
1	1	2	3	$q^3(q^5 + 4q^4 + 8q^3 + 9q^2 + 6q + 2)a^3$ $+q^3(q^6 + 3q^5 + 4q^4 + q^3 - 3q^2 - 4q - 2)a^4$
1	1	2	4	$q^6(q^6 + 3q^5 + 5q^4 + 6q^3 + 5q^2 + 3q + 1)a^4$
1	1	3	3	$q^3(q^7 + 4q^6 + 9q^5 + 13q^4 + 13q^3$ $+9q^2 + 4q + 1)a^3$ $+q^3(q^9 + 5q^8 + 12q^7 + 19q^6 + 18q^5$ $+8q^4 - 4q^3 - 9q^2 - 6q - 2)a^4$ $+q^3(q^9 + 2q^8 + 2q^7 - q^6 - 4q^5$

TABLEAU IV : Coefficients de linéarisation pour un produit de quatre  $q$ -polynômes de Charlier (2)

$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$	$f_q(C_{n_1,q}^{(a)}(x)C_{n_2,q}^{(a)}(x)C_{n_3,q}^{(a)}(x)C_{n_4,q}^{(a)}(x))$
1	1	3	4	$q^6(q^9 + 5q^8 + 13q^7 + 24q^6 + 33q^5 + 35q^4 + 29q^3 + 18q^2 + 8q + 2)a^4 + q^6(q^{10} + 4q^9 + 8q^8 + 11q^7 + 9q^6 + 2q^5 - 6q^4 - 11q^3 - 10q^2 - 6q - 2)a^5$
1	1	4	4	$q^6(q^{12} + 5q^{11} + 14q^{10} + 29q^9 + 47q^8 + 62q^7 + 68q^6 + 62q^5 + 47q^4 + 29q^3 + 14q^2 + 5q + 1)a^4 + q^6(q^{14} + 6q^{13} + 18q^{12} + 37q^{11} + 59q^{10} + 73q^9 + 69q^8 + 46q^7 + 12q^6 - 17q^5 - 31q^4 - 29q^3 - 18q^2 - 8q - 2)a^5 + q^6(q^{14} + 3q^{13} + 5q^{12} + 6q^{11} + 3q^{10} - 3q^9 - 9q^8 - 12q^7 - 9q^6 - 3q^5 + 3q^4 + 6q^3 + 5q^2 + 3q + 1)a^6$
1	2	2	2	$q^2(q^3 + 3q^2 + 3q + 1)a^2 + q(q^7 + 5q^6 + 13q^5 + 19q^4 + 13q^3 + q^2 - q - 1)a^3 + q(q^8 + 4q^7 + 8q^6 + 6q^5 - 6q^4 - 12q^3 - 4q^2 + 2q + 1)a^4 + q^2(q^6 - 3q^4 + 3q^2 - 1)a^5$
1	2	2	3	$q^3(q^7 + 5q^6 + 13q^5 + 21q^4 + 22q^3 + 15q^2 + 6q + 1)a^3 + q^3(q^9 + 5q^8 + 14q^7 + 25q^6 + 27q^5 + 13q^4 - 7q^3 - 16q^2 - 11q - 3)a^4 + q^3(q^9 + 3q^8 + 4q^7 - 7q^5 - 8q^4 - 2q^3 + 4q^2 + 4q + 1)a^5$

TABLEAU IV : Coefficients de linéarisation pour un produit de quatre  $q$ -polynômes de Charlier (3)

$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$	$f_q(C_{n_1,q}^{(a)}(x)C_{n_2,q}^{(a)}(x)C_{n_3,q}^{(a)}(x)C_{n_4,q}^{(a)}(x))$
1	2	2	4	$q^6(q^9 + 5q^8 + 14q^7 + 27q^6 + 38q^5 + 41q^4 + 34q^3 + 21q^2 + 9q + 2)a^4 + q^6(q^{10} + 4q^9 + 9q^8 + 13q^7 + 11q^6 + 3q^5 - 7q^4 - 13q^3 - 12q^2 - 7q - 2)a^5$
1	2	3	3	$q^4(q^8 + 5q^7 + 13q^6 + 22q^5 + 26q^4 + 22q^3 + 13q^2 + 5q + 1)a^3 + q^3(q^{12} + 6q^{11} + 20q^{10} + 46q^9 + 77q^8 + 94q^7 + 80q^6 + 40q^5 - 18q^3 - 15q^2 - 6q - 1)a^4 + q^3(q^{13} + 5q^{12} + 14q^{11} + 26q^{10} + 31q^9 + 17q^8 - 14q^7 - 40q^6 - 40q^5 - 18q^4 + 3q^3 + 9q^2 + 5q + 1)a^5 + q^4(q^{11} + 2q^{10} + q^9 - 3q^8 - 6q^7 - 3q^6 + 3q^5 + 6q^4 + 3q^3 - q^2 - 2q - 1)a^6$
1	2	3	4	$q^6(q^{12} + 6q^{11} + 20q^{10} + 47q^9 + 84q^8 + 119q^7 + 136q^6 + 126q^5 + 94q^4 + 55q^3 + 24q^2 + 7q + 1)a^4 + q^6(q^{14} + 6q^{13} + 20q^{12} + 47q^{11} + 84q^{10} + 115q^9 + 118q^8 + 82q^7 + 19q^6 - 40q^5 - 69q^4 - 63q^3 - 38q^2 - 15q - 3)a^5 + q^6(q^{14} + 4q^{13} + 9q^{12} + 13q^{11} + 10q^{10} - 2q^9 - 18q^8 - 27q^7 - 22q^6 - 7q^5 + 8q^4 + 14q^3 + 11q^2 + 5q + 1)a^6$
1	2	4	4	$q^7(q^{14} + 6q^{13} + 20q^{12} + 48q^{11} + 90q^{10} + 138q^9 + 177q^8 + 192q^7 + 177q^6 + 138q^5 + 90q^4 + 48q^3 + 20q^2 + 6q + 1)a^4 +$

TABLEAU IV : Coefficients de linéarisation pour un produit de quatre  $q$ -polynômes de Charlier (4)

$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$	$f_q(C_{n_1,q}^{(a)}(x)C_{n_2,q}^{(a)}(x)C_{n_3,q}^{(a)}(x)C_{n_4,q}^{(a)}(x))$
1	2	4	4	$  \begin{aligned}  &+q^6(q^{18} + 7q^{17} + 27q^{16} + 74q^{15} + 159q^{14} \\  &+ 279q^{13} + 406q^{12} + 493q^{11} + 495q^{10} \\  &+ 398q^9 + 234q^8 + 64q^7 - 55q^6 - 101q^5 \\  &- 90q^4 - 55q^3 - 24q^2 - 7q - 1)a^5 \\  &+ q^6(q^{19} + 6q^{18} + 20q^{17} + 47q^{16} + 85q^{15} \\  &+ 120q^{14} + 127q^{13} + 87q^{12} + 2q^{11} - 97q^{10} \\  &- 164q^9 - 170q^8 - 119q^7 - 46q^6 + 11q^5 \\  &+ 35q^4 + 31q^3 + 17q^2 + 6q + 1)a^6 \\  &+ q^7(q^{17} + 3q^{16} + 5q^{15} + 5q^{14} - 8q^{12} - 15q^{11} \\  &- 15q^{10} - 6q^9 + 6q^8 + 15q^7 + 15q^6 + 8q^5 \\  &- 5q^3 - 5q^2 - 3q - 1)a^7  \end{aligned}  $
1	3	3	3	$  \begin{aligned}  &q^6(q^8 + 5q^7 + 13q^6 + 22q^5 + 26q^4 \\  &+ 22q^3 + 13q^2 + 5q + 1)a^3 \\  &+ q^4(q^{14} + 7q^{13} + 26q^{12} + 68q^{11} + 135q^{10} \\  &+ 210q^9 + 257q^8 + 244q^7 + 173q^6 + 82q^5 \\  &+ 15q^4 - 12q^3 - 12q^2 - 5q - 1)a^4 \\  &+ q^4(q^{16} + 6q^{15} + 22q^{14} + 57q^{13} + 113q^{12} \\  &+ 173q^{11} + 199q^{10} + 154q^9 + 40q^8 - 86q^7 \\  &- 153q^6 - 135q^5 - 70q^4 - 14q^3 \\  &+ 8q^2 + 7q + 2)a^5 \\  &+ q^4(q^{16} + 5q^{15} + 13q^{14} + 23q^{13} + 25q^{12} \\  &+ 8q^{11} - 28q^{10} - 60q^9 - 58q^8 - 20q^7 + 24q^6 \\  &+ 40q^5 + 27q^4 + 7q^3 - 3q^2 - 3q - 1)a^6 \\  &+ q^6(q^{12} + q^{11} - q^{10} - 4q^9 - 3q^8 + 3q^7 \\  &+ 6q^6 + 3q^5 - 3q^4 - 4q^3 - q^2 + q + 1)a^7  \end{aligned}  $
1	3	3	4	$  \begin{aligned}  &q^7(q^{14} + 7q^{13} + 26q^{12} + 68q^{11} + 137q^{10} \\  &+ 222q^9 + 296q^8 + 328q^7 + 303q^6 \\  &+ 232q^5 + 145q^4 + 72q^3 + 27q^2 \\  &+ 7q + 1)a^4 +  \end{aligned}  $

TABLEAU IV : Coefficients de linéarisation pour un produit de quatre  $q$ -polynômes de Charlier (5)

$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$	$f_q(C_{n_1,q}^{(a)}(x)C_{n_2,q}^{(a)}(x)C_{n_3,q}^{(a)}(x)C_{n_4,q}^{(a)}(x))$
1	3	3	4	$  \begin{aligned}  &+q^6(q^{18} + 7q^{17} + 28q^{16} + 81q^{15} + 184q^{14} \\  &+ 341q^{13} + 523q^{12} + 664q^{11} + 688q^{10} \\  &+ 558q^9 + 312q^8 + 48q^7 - 135q^6 - 195q^5 \\  &- 160q^4 - 91q^3 - 36q^2 - 9q - 1)a^5 \\  &+ q^6(q^{19} + 6q^{18} + 21q^{17} + 53q^{16} + 103q^{15} \\  &+ 157q^{14} + 182q^{13} + 141q^{12} + 24q^{11} - 130q^{10} \\  &- 246q^9 - 264q^8 - 183q^7 - 60q^6 + 35q^5 \\  &+ 69q^4 + 55q^3 + 27q^2 + 8q + 1)a^6 \\  &+ q^7(q^{17} + 4q^{16} + 8q^{15} + 10q^{14} + 4q^{13} - 11q^{12} \\  &- 27q^{11} - 31q^{10} - 15q^9 + 11q^8 + 30q^7 + 30q^6 \\  &+ 14q^5 - 3q^4 - 11q^3 - 9q^2 - 4q - 1)a^7  \end{aligned}  $
1	3	4	4	$  \begin{aligned}  &q^9(q^{15} + 7q^{14} + 26q^{13} + 68q^{12} + 138q^{11} \\  &+ 228q^{10} + 315q^9 + 369q^8 + 369q^7 + 315q^6 \\  &+ 228q^5 + 138q^4 + 68q^3 + 26q^2 + 7q + 1)a^4 \\  &+ q^7(q^{21} + 8q^{20} + 35q^{19} + 110q^{18} + 274q^{17} \\  &+ 566q^{16} + 994q^{15} + 1503q^{14} + 1967q^{13} \\  &+ 2227q^{12} + 2165q^{11} + 1776q^{10} + 1182q^9 \\  &+ 574q^8 + 117q^7 - 122q^6 - 177q^5 \\  &- 134q^4 - 71q^3 - 27q^2 - 7q - 1)a^5 \\  &+ q^7(q^{23} + 7q^{22} + 29q^{21} + 88q^{20} + 213q^{19} \\  &+ 428q^{18} + 726q^{17} + 1044q^{16} + 1259q^{15} \\  &+ 1231q^{14} + 883q^{13} + 272q^{12} - 407q^{11} \\  &- 911q^{10} - 1078q^9 - 912q^8 - 562q^7 - 216q^6 \\  &+ 4q^5 + 82q^4 + 72q^3 + 37q^2 + 12q + 2)a^6 \\  &+ q^7(q^{23} + 6q^{22} + 20q^{21} + 48q^{20} + 89q^{19} \\  &+ 128q^{18} + 136q^{17} + 81q^{16} - 45q^{15} \\  &- 204q^{14} - 322q^{13} - 327q^{12} - 205q^{11} - 14q^{10} \\  &+ 151q^9 + 218q^8 + 184q^7 + 98q^6 + 20q^5 \\  &- 19q^4 - 24q^3 - 14q^2 - 5q - 1)a^7 +  \end{aligned}  $

TABLEAU IV : Coefficients de linéarisation pour un produit de quatre  $q$ -polynômes de Charlier (6)

$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$	$f_q(C_{n_1,q}^{(a)}(x)C_{n_2,q}^{(a)}(x)C_{n_3,q}^{(a)}(x)C_{n_4,q}^{(a)}(x))$
1	3	4	4	$  \begin{aligned}  &+q^9(q^{19} + 3q^{18} + 4q^{17} + 2q^{16} - 5q^{15} - 13q^{14} \\  &\quad - 15q^{13} - 7q^{12} + 9q^{11} + 21q^{10} \\  &\quad + 21q^9 + 9q^8 - 7q^7 - 15q^6 - 13q^5 \\  &\quad - 5q^4 + 2q^3 + 4q^2 + 3q + 1)a^8  \end{aligned}  $
1	4	4	4	$  \begin{aligned}  &q^{12}(q^{15} + 7q^{14} + 26q^{13} + 68q^{12} + 138q^{11} \\  &+ 228q^{10} + 315q^9 + 369q^8 + 369q^7 + 315q^6 \\  &+ 228q^5 + 138q^4 + 68q^3 + 26q^2 + 7q + 1)a^4 \\  &+ q^9(q^{23} + 9q^{22} + 43q^{21} + 145q^{20} + 386q^{19} \\  &\quad + 856q^{18} + 1628q^{17} + 2702q^{16} + 3953q^{15} \\  &\quad + 5125q^{14} + 5899q^{13} + 6019q^{12} + 5417q^{11} \\  &\quad + 4257q^{10} + 2867q^9 + 1595q^8 + 670q^7 \\  &\quad + 146q^6 - 62q^5 - 92q^4 - 59q^3 \\  &\quad - 25q^2 - 7q - 1)a^5 \\  &+ q^8(q^{27} + 8q^{26} + 37q^{25} + 126q^{24} + 346q^{23} \\  &\quad + 801q^{22} + 1603q^{21} + 2813q^{20} + 4358q^{19} \\  &\quad + 5969q^{18} + 7195q^{17} + 7537q^{16} + 6671q^{15} \\  &\quad + 4651q^{14} + 1963q^{13} - 646q^{12} - 2485q^{11} \\  &\quad - 3213q^{10} - 2941q^9 - 2096q^8 - 1163q^7 \\  &\quad - 464q^6 - 88q^5 + 41q^4 + 48q^3 \\  &\quad + 24q^2 + 7q + 1)a^6 \\  &+ q^8(q^{28} + 7q^{27} + 29q^{26} + 89q^{25} + 220q^{24} \\  &\quad + 455q^{23} + 802q^{22} + 1210q^{21} + 1545q^{20} \\  &\quad + 1611q^{19} + 1226q^{18} + 342q^{17} - 866q^{16} \\  &\quad - 2020q^{15} - 2688q^{14} - 2609q^{13} - 1839q^{12} \\  &\quad - 728q^{11} + 272q^{10} + 845q^9 + 933q^8 + 699q^7 \\  &\quad + 376q^6 + 129q^5 + 7q^4 - 24q^3 \\  &\quad - 17q^2 - 6q - 1)a^7 +  \end{aligned}  $

TABLEAU IV : Coefficients de linéarisation pour un produit de quatre  $q$ -polynômes de Charlier (7)

$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$	$f_q(C_{n_1,q}^{(a)}(x)C_{n_2,q}^{(a)}(x)C_{n_3,q}^{(a)}(x)C_{n_4,q}^{(a)}(x))$
1	4	4	4	$  \begin{aligned}  &+q^9(q^{26} + 6q^{25} + 19q^{24} + 42q^{23} + 71q^{22} \\  &+ 90q^{21} + 73q^{20} - 125q^{18} - 256q^{17} \\  &- 319q^{16} - 256q^{15} - 68q^{14} + 164q^{13} \\  &+ 328q^{12} + 348q^{11} + 229q^{10} + 54q^9 \\  &- 85q^8 - 138q^7 - 115q^6 - 62q^5 \\  &- 17q^4 + 4q^3 + 7q^2 + 4q + 1)a^8 \\  &+ q^{12}(q^{20} + 2q^{19} + q^{18} - 2q^{17} - 7q^{16} - 8q^{15} \\  &- 2q^{14} + 8q^{13} + 16q^{12} + 12q^{11} \\  &- 12q^9 - 16q^8 - 8q^7 + 2q^6 + 8q^5 \\  &+ 7q^4 + 2q^3 - q^2 - 2q - 1)a^9  \end{aligned}  $
2	2	2	2	$  \begin{aligned}  &q^3(q^3 + 3q^2 + 3q + 1)a^2 \\  &+ q^2(q^8 + 6q^7 + 18q^6 + 35q^5 + 44q^4 \\  &+ 32q^3 + 10q^2 - q - 1)a^3 \\  &+ q(q^{11} + 5q^{10} + 16q^9 + 33q^8 + 44q^7 + 30q^6 \\  &- 9q^5 - 34q^4 - 24q^3 - 5q^2 + 2q + 1)a^4 \\  &+ q^2(q^{10} + 4q^9 + 7q^8 + 5q^7 - 8q^6 - 21q^5 +  \end{aligned}  $
2	2	2	2	$  \begin{aligned}  &-10q^4 + 11q^3 + 11q^2 + q - 1)a^5 \\  &+ q^3(q^7 - q^6 - 3q^5 + 3q^4 + 3q^3 \\  &- 3q^2 - q + 1)a^6  \end{aligned}  $
2	2	2	3	$  \begin{aligned}  &q^4(q^8 + 6q^7 + 18q^6 + 35q^5 + 47q^4 \\  &+ 44q^3 + 28q^2 + 11q + 2)a^3 \\  &+ q^3(q^{12} + 6q^{11} + 21q^{10} + 52q^9 + 95q^8 \\  &+ 128q^7 + 120q^6 + 65q^5 - q^4 \\  &- 35q^3 - 30q^2 - 12q - 2)a^4 +  \end{aligned}  $

TABLEAU IV : Coefficients de linéarisation pour un produit de quatre  $q$ -polynômes de Charlier (8)

$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$	$f_q(C_{n_1,q}^{(a)}(x)C_{n_2,q}^{(a)}(x)C_{n_3,q}^{(a)}(x)C_{n_4,q}^{(a)}(x))$
2	2	2	3	$  \begin{aligned}  &+q^3(q^{13} + 5q^{12} + 15q^{11} + 31q^{10} + 43q^9 \\  &\quad + 33q^8 - 8q^7 - 55q^6 - 66q^5 \\  &\quad - 34q^4 + 5q^3 + 18q^2 + 10q + 2)a^5 \\  &+q^4(q^{11} + 3q^{10} + 3q^9 - 2q^8 - 10q^7 - 10q^6 \\  &\quad + 2q^5 + 12q^4 + 9q^3 - q^2 - 5q - 2)a^6  \end{aligned}  $
2	2	2	4	$  \begin{aligned}  &q^6(q^{12} + 6q^{11} + 21q^{10} + 52q^9 + 98q^8 \\  &\quad + 146q^7 + 174q^6 + 167q^5 + 128q^4 \\  &\quad + 76q^3 + 33q^2 + 9q + 1)a^4 \\  &+q^6(q^{14} + 6q^{13} + 20q^{12} + 49q^{11} + 92q^{10} \\  &\quad + 133q^9 + 145q^8 + 108q^7 + 32q^6 - 46q^5 \\  &\quad - 89q^4 - 85q^3 - 53q^2 - 21q - 4)a^5 \\  &+q^6(q^{14} + 4q^{13} + 10q^{12} + 16q^{11} + 15q^{10} \\  &\quad + 2q^9 - 20q^8 - 35q^7 - 32q^6 - 13q^5 \\  &\quad + 9q^4 + 19q^3 + 16q^2 + 7q + 1)a^6  \end{aligned}  $
2	2	3	3	$  \begin{aligned}  &q^5(q^9 + 6q^8 + 18q^7 + 35q^6 + 48q^5 \\  &\quad + 48q^4 + 35q^3 + 18q^2 + 6q + 1)a^3 \\  &+q^4(q^{14} + 7q^{13} + 27q^{12} + 74q^{11} + 156q^{10} \\  &\quad + 260q^9 + 343q^8 + 352q^7 + 269q^6 + 136q^5 \\  &\quad + 24q^4 - 26q^3 - 26q^2 - 11q - 2)a^4 \\  &+q^3(q^{17} + 6q^{16} + 22q^{15} + 59q^{14} + 123q^{13} \\  &\quad + 201q^{12} + 252q^{11} + 222q^{10} + 90q^9 \\  &\quad - 88q^8 - 208q^7 - 206q^6 - 116q^5 \\  &\quad - 25q^4 + 16q^3 + 16q^2 + 6q + 1)a^5 \\  &+q^4(q^{16} + 5q^{15} + 14q^{14} + 27q^{13} + 35q^{12} \\  &\quad + 22q^{11} - 21q^{10} - 74q^9 - 92q^8 - 50q^7 \\  &\quad + 21q^6 + 62q^5 + 50q^4 + 15q^3 \\  &\quad - 6q^2 - 7q - 2)a^6 \\  &+q^5(+q^{13} + 2q^{12} - 5q^{10} - 7q^9 + 9q^7 + 9q^6 \\  &\quad - 7q^4 - 5q^3 + 2q + 1)a^7  \end{aligned}  $

TABLEAU IV : Coefficients de linéarisation pour un produit de quatre  $q$ -polynômes de Charlier (9)

$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$	$f_q(C_{n_1,q}^{(a)}(x)C_{n_2,q}^{(a)}(x)C_{n_3,q}^{(a)}(x)C_{n_4,q}^{(a)}(x))$
2	2	3	4	$  \begin{aligned}  & q^7(q^{14} + 7q^{13} + 27q^{12} + 74q^{11} + 157q^{10} \\  & + 269q^9 + 380q^8 + 447q^7 + 439q^6 + 358q^5 \\  & + 239q^4 + 127q^3 + 51q^2 + 14q + 2)a^4 \\  & + q^6(q^{18} + 7q^{17} + 28q^{16} + 82q^{15} + 191q^{14} \\  & + 366q^{13} + 584q^{12} + 776q^{11} + 846q^{10} \\  & + 728q^9 + 443q^8 + 101q^7 - 162q^6 - 269q^5 \\  & - 237q^4 - 143q^3 - 60q^2 - 16q - 2)a^5 \\  & + q^6(q^{19} + 6q^{18} + 21q^{17} + 54q^{16} + 109q^{15} \\  & + 175q^{14} + 218q^{13} + 192q^{12} + 70q^{11} - 118q^{10} \\  & - 285q^9 - 342q^8 - 263q^7 - 107q^6 + 32q^5 \\  & + 94q^4 + 83q^3 + 44q^2 + 14q + 2)a^6 \\  & + q^7(q^{17} + 4q^{16} + 9q^{15} + 13q^{14} + 9q^{13} - 7q^{12} \\  & - 30q^{11} - 43q^{10} - 31q^9 + 2q^8 + 35q^7 + 45q^6 \\  & + 29q^5 + 3q^4 - 14q^3 - 15q^2 - 8q - 2)a^7  \end{aligned}  $
2	3	3	3	$  \begin{aligned}  & q^7(q^9 + 6q^8 + 18q^7 + 35q^6 + 48q^5 + 48q^4 \\  & + 35q^3 + 18q^2 + 6q + 1)a^3 \\  & + q^5(q^{16} + 8q^{15} + 34q^{14} + 101q^{13} + 232q^{12} \\  & + 431q^{11} + 659q^{10} + 831q^9 + 857q^8 \\  & + 709q^7 + 453q^6 + 205q^5 + 48q^4 \\  & - 11q^3 - 15q^2 - 6q - 1)a^4 \\  & + q^4(q^{20} + 7q^{19} + 29q^{18} + 89q^{17} + 219q^{16} \\  & + 446q^{15} + 761q^{14} + 1086q^{13} + 1274q^{12} \\  & + 1175q^{11} + 751q^{10} + 150q^9 - 361q^8 \\  & - 577q^7 - 494q^6 - 274q^5 - 88q^4 \\  & - 2q^3 + 13q^2 + 6q + 1)a^5 \\  & + q^4(q^{21} + 6q^{20} + 22q^{19} + 60q^{18} + 130q^{17} \\  & + 227q^{16} + 315q^{15} + 325q^{14} + 188q^{13} \\  & - 99q^{12} - 424q^{11} - 601q^{10} - 511q^9 \\  & - 216q^8 + 83q^7 + 220q^6 + 186q^5 \\  & + 86q^4 + 15q^3 - 7q^2 - 5q - 1)a^6 +  \end{aligned}  $

TABLEAU IV : Coefficients de linéarisation pour un produit de quatre  $q$ -polynômes de Charlier (10)

$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$	$f_q(C_{n_1,q}^{(a)}(x)C_{n_2,q}^{(a)}(x)C_{n_3,q}^{(a)}(x)C_{n_4,q}^{(a)}(x))$
2	3	3	3	$  \begin{aligned}  &+q^5(q^{19} + 5q^{18} + 13q^{17} + 22q^{16} + 23q^{15} \\  &\quad + 4q^{14} - 39q^{13} - 85q^{12} - 90q^{11} \\  &\quad - 28q^{10} + 66q^9 + 116q^8 + 83q^7 \\  &+ 7q^6 - 43q^5 - 42q^4 - 17q^3 + 3q + 1)a^7 \\  &\quad + q^7(q^{14} + q^{13} - 2q^{12} - 5q^{11} - 2q^{10} \\  &\quad \quad + 7q^9 + 9q^8 - 9q^6 - 7q^5 \\  &\quad \quad + 2q^4 + 5q^3 + 2q^2 - q - 1)a^8  \end{aligned}  $
2	3	3	4	$  \begin{aligned}  &q^8(q^{16} + 8q^{15} + 34q^{14} + 101q^{13} + 232q^{12} \\  &\quad + 433q^{11} + 674q^{10} + 887q^9 + 993q^8 \\  &\quad + 946q^7 + 763q^6 + 515q^5 + 285q^4 \\  &\quad \quad + 125q^3 + 41q^2 + 9q + 1)a^4 \\  &+ q^7(q^{21} + 8q^{20} + 36q^{19} + 118q^{18} + 310q^{17} \\  &\quad + 682q^{16} + 1285q^{15} + 2096q^{14} + 2969q^{13} \\  &\quad + 3641q^{12} + 3826q^{11} + 3372q^{10} + 2379q^9 \\  &\quad \quad + 1178q^8 + 162q^7 - 420q^6 - 560q^5 \\  &\quad \quad - 430q^4 - 233q^3 - 90q^2 - 23q - 3)a^5 \\  &+ q^6(q^{24} + 7q^{23} + 29q^{22} + 90q^{21} + 227q^{20} \\  &\quad + 482q^{19} + 875q^{18} + 1363q^{17} + 1806q^{16} \\  &\quad + 1982q^{15} + 1679q^{14} + 842q^{13} - 322q^{12} \\  &\quad - 1393q^{11} - 1953q^{10} - 1836q^9 - 1219q^8 \\  &\quad \quad - 482q^7 + 45q^6 + 251q^5 + 226q^4 \\  &\quad \quad + 124q^3 + 45q^2 + 10q + 1)a^6 \\  &+ q^7(q^{23} + 6q^{22} + 21q^{21} + 54q^{20} + 110q^{19} \\  &\quad + 180q^{18} + 231q^{17} + 208q^{16} + 62q^{15} \\  &\quad - 201q^{14} - 487q^{13} - 639q^{12} - 539q^{11} \\  &\quad - 208q^{10} + 185q^9 + 434q^8 + 442q^7 + 270q^6 \\  &\quad + 67q^5 - 54q^4 - 76q^3 - 47q^2 - 17q - 3)a^7 \\  &+ q^8(q^{20} + 4q^{19} + 8q^{18} + 9q^{17} + q^{16} - 17q^{15} \\  &\quad - 36q^{14} - 38q^{13} - 11q^{12} + 33q^{11} \\  &+ 63q^{10} + 54q^9 + 12q^8 - 31q^7 - 46q^6 - 30q^5 \\  &\quad - 4q^4 + 11q^3 + 11q^2 + 5q + 1)a^8  \end{aligned}  $

TABLEAU IV : Coefficients de linéarisation pour un produit de quatre  $q$ -polynômes de Charlier (11)

$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$	$f_q(C_{n_1,q}^{(a)}(x)C_{n_2,q}^{(a)}(x)C_{n_3,q}^{(a)}(x)C_{n_4,q}^{(a)}(x))$
2	3	4	4	$  \begin{aligned}  & q^{10}(q^{17} + 8q^{16} + 34q^{15} + 101q^{14} + 232q^{13} \\  & + 434q^{12} + 681q^{11} + 912q^{10} + 1053q^9 \\  & + 1053q^8 + 912q^7 + 681q^6 + 434q^5 \\  & + 232q^4 + 101q^3 + 34q^2 + 8q + 1)a^4 \\  & + q^8(q^{24} + 9q^{23} + 44q^{22} + 154q^{21} + 429q^{20} \\  & + 1002q^{19} + 2019q^{18} + 3568q^{17} + 5581q^{16} \\  & + 7761q^{15} + 9603q^{14} + 10547q^{13} + 10220q^{12} \\  & + 8638q^{11} + 6236q^{10} + 3685q^9 + 1595q^8 \\  & + 280q^7 - 293q^6 - 377q^5 - 257q^4 \\  & - 122q^3 - 41q^2 - 9q - 1)a^5 \\  & + q^7(q^{28} + 8q^{27} + 37q^{26} + 127q^{25} + 355q^{24} \\  & + 845q^{23} + 1754q^{22} + 3217q^{21} + 5246q^{20} \\  & + 7614q^{19} + 9793q^{18} + 11036q^{17} + 10639q^{16} \\  & + 8306q^{15} + 4421q^{14} + 11q^{13} - 3650q^{12} \\  & - 5615q^{11} - 5675q^{10} - 4360q^9 - 2561q^8 \\  & - 1041q^7 - 145q^6 + 184q^5 + 193q^4 \\  & + 107q^3 + 39q^2 + 9q + 1)a^6 \\  & + q^7(q^{29} + 7q^{28} + 29q^{27} + 90q^{26} + 228q^{25} \\  & + 490q^{24} + 909q^{23} + 1463q^{22} + 2029q^{21} \\  & + 2368q^{20} + 2179q^{19} + 1243q^{18} - 397q^{17} \\  & - 2333q^{16} - 3885q^{15} - 4410q^{14} - 3661q^{13} \\  & - 1965q^{12} - 60q^{11} + 1315q^{10} + 1799q^9 \\  & + 1520q^8 + 896q^7 + 329q^6 + 9q^5 \\  & - 86q^4 - 68q^3 - 30q^2 - 8q - 1)a^7 \\  & + q^8(q^{27} + 6q^{26} + 20q^{25} + 48q^{24} + 90q^{23} \\  & + 133q^{22} + 146q^{21} + 88q^{20} - 68q^{19} \\  & - 297q^{18} - 505q^{17} - 560q^{16} - 373q^{15} \\  & + 16q^{14} + 435q^{13} + 671q^{12} + 610q^{11} \\  & + 314q^{10} - 33q^9 - 253q^8 - 285q^7 - 189q^6 \\  & - 69q^5 + 5q^4 + 25q^3 + 17q^2 + 6q + 1)a^8 \\  & + q^{10}(q^{22} + 3q^{21} + 4q^{20} + q^{19} - 8q^{18} \\  & - 17q^{17} - 17q^{16} - 2q^{15} + 22q^{14} + 36q^{13} \\  & + 28q^{12} - 28q^{10} - 36q^9 - 22q^8 + 2q^7 + 17q^6 \\  & + 17q^5 + 8q^4 - q^3 - 4q^2 - 3q - 1)a^9  \end{aligned}  $

TABLEAU IV : Coefficients de linéarisation pour un produit de quatre  $q$ -polynômes de Charlier (12)

$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$	$f_q(C_{n_1,q}^{(a)}(x)C_{n_2,q}^{(a)}(x)C_{n_3,q}^{(a)}(x)C_{n_4,q}^{(a)}(x))$
2	4	4	4	$  \begin{aligned}  & q^{13}(q^{17} + 8q^{16} + 34q^{15} + 101q^{14} + 232q^{13} \\  & + 434q^{12} + 681q^{11} + 912q^{10} + 1053q^9 \\  & + 1053q^8 + 912q^7 + 681q^6 + 434q^5 \\  & + 232q^4 + 101q^3 + 34q^2 + 8q + 1)a^4 \\  & + q^{10}(q^{26} + 10q^{25} + 53q^{24} + 198q^{23} \\  & + 583q^{22} + 1433q^{21} + 3039q^{20} \\  & + 5674q^{19} + 9445q^{18} + 14125q^{17} + 19059q^{16} \\  & + 23243q^{15} + 25610q^{14} + 25435q^{13} \\  & + 22664q^{12} + 17979q^{11} + 12539q^{10} \\  & + 7525q^9 + 3729q^8 + 1379q^7 + 239q^6 \\  & - 136q^5 - 159q^4 - 89q^3 - 33q^2 - 8q - 1)a^5 \\  & + q^9(q^{31} + 9q^{30} + 46q^{29} + 172q^{28} \\  & + 521q^{27} + 1345q^{26} + 3045q^{25} \\  & + 6151q^{24} + 11205q^{23} + 18523q^{22} \\  & + 27872q^{21} + 38189q^{20} + 47532q^{19} \\  & + 53437q^{18} + 53689q^{17} + 47265q^{16} \\  & + 35001q^{15} + 19550q^{14} + 4525q^{13} - 6837q^{12} \\  & - 12831q^{11} - 13690q^{10} - 11108q^9 - 7238q^8 \\  & - 3763q^7 - 1462q^6 - 323q^5 + 56q^4 \\  & + 94q^3 + 48q^2 + 14q + 2)a^6 \\  & + q^8(q^{34} + 8q^{33} + 37q^{32} + 129q^{31} \\  & + 370q^{30} + 912q^{29} + 1980q^{28} + 3840q^{27} \\  & + 6703q^{26} + 10560q^{25} + 14987q^{24} \\  & + 19019q^{23} + 21229q^{22} + 20108q^{21} \\  & + 14711q^{20} + 5321q^{19} - 6248q^{18} \\  & - 17027q^{17} - 23949q^{16} - 25137q^{15} \\  & - 20754q^{14} - 12896q^{13} - 4561q^{12} \\  & + 1714q^{11} + 4801q^{10} + 5066q^9 \\  & + 3738q^8 + 2077q^7 + 835q^6 + 188q^5 - 30q^4 \\  & - 51q^3 - 25q^2 - 7q - 1)a^7 +  \end{aligned}  $

TABLEAU IV : Coefficients de linéarisation pour un produit de quatre  $q$ -polynômes de Charlier (13)

$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$	$f_q(C_{n_1,q}^{(a)}(x)C_{n_2,q}^{(a)}(x)C_{n_3,q}^{(a)}(x)C_{n_4,q}^{(a)}(x))$
2	4	4	4	$  \begin{aligned}  &+q^9(q^{33} + 7q^{32} + 29q^{31} + 89q^{30} + 223q^{29} \\  &+475q^{28} + 876q^{27} + 1406q^{26} + 1948q^{25} \\  &+2264q^{24} + 2031q^{23} + 968q^{22} - 974q^{21} \\  &-3438q^{20} - 5653q^{19} - 6676q^{18} - 5840q^{17} \\  &-3187q^{16} + 426q^{15} + 3663q^{14} + 5368q^{13} \\  &+5135q^{12} + 3441q^{11} + 1288q^{10} - 395q^9 \\  &-1174q^8 - 1162q^7 - 760q^6 - 341q^5 \\  &-84q^4 + 12q^3 + 22q^2 + 10q + 2)a^8 \\  &+q^{10}(q^{30} + 6q^{29} + 19q^{28} + 42q^{27} \\  &+70q^{26} + 87q^{25} + 66q^{24} - 18q^{23} - 166q^{22} \\  &-334q^{21} - 428q^{20} - 349q^{19} - 63q^{18} + 342q^{17} \\  &+671q^{16} + 736q^{15} + 477q^{14} + 22q^{13} \\  &-389q^{12} - 564q^{11} - 464q^{10} - 209q^9 + 32q^8 \\  &+154q^7 + 152q^6 + 90q^5 + 30q^4 - q^3 \\  &-7q^2 - 4q - 1)a^9 \\  &+q^{13}(q^{23} + 2q^{22} + q^{21} - 3q^{20} - 9q^{19} - 9q^{18} \\  &+15q^{16} + 24q^{15} + 14q^{14} - 8q^{13} \\  &-28q^{12} - 28q^{11} - 8q^{10} + 14q^9 + 24q^8 + 15q^7 \\  &-9q^5 - 9q^4 - 3q^3 + q^2 + 2q + 1)a^{10}  \end{aligned}  $
3	3	3	3	$  \begin{aligned}  &q^9(q^9 + 6q^8 + 18q^7 + 35q^6 + 48q^5 \\  &+48q^4 + 35q^3 + 18q^2 + 6q + 1)a^3 \\  &+q^7(q^{17} + 9q^{16} + 42q^{15} + 135q^{14} + 333q^{13} \\  &+666q^{12} + 1111q^{11} + 1565q^{10} \\  &+1865q^9 + 1869q^8 + 1555q^7 + 1051q^6 \\  &+556q^5 + 214q^4 + 49q^3 - 4q - 1)a^4 \\  &+q^5(q^{23} + 8q^{22} + 37q^{21} + 125q^{20} + 340q^{19} \\  &+778q^{18} + 1531q^{17} + 2617q^{16} + 3895q^{15} \\  &+5026q^{14} + 5552q^{13} + 5115q^{12} + 3712q^{11} \\  &+1790q^{10} + 42q^9 - 989q^8 - 1199q^7 - 884q^6 \\  &-450q^5 - 149q^4 - 20q^3 + 8q^2 + 5q + 1)a^5+  \end{aligned}  $

TABLEAU IV : Coefficients de linéarisation pour un produit de quatre  $q$ -polynômes de Charlier (14)

$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$	$f_q(C_{n_1,q}^{(a)}(x)C_{n_2,q}^{(a)}(x)C_{n_3,q}^{(a)}(x)C_{n_4,q}^{(a)}(x))$
3	3	3	3	$  \begin{aligned}  &+q^5(q^{25} + 7q^{24} + 29q^{23} + 92q^{22} + 239q^{21} \\  &\quad + 526q^{20} + 996q^{19} + 1630q^{18} \\  &\quad + 2288q^{17} + 2692q^{16} + 2505q^{15} + 1522q^{14} \\  &\quad - 114q^{13} - 1852q^{12} - 2963q^{11} \\  &-2987q^{10} - 2051q^9 - 772q^8 + 194q^7 + 564q^6 \\  &\quad + 478q^5 + 245q^4 + 75q^3 + 8q^2 - 3q - 1)a^6 \\  &\quad + q^5(q^{25} + 6q^{24} + 22q^{23} + 59q^{22} + 127q^{21} \\  &\quad + 223q^{20} + 315q^{19} + 333q^{18} + 192q^{17} \\  &\quad - 147q^{16} - 605q^{15} - 963q^{14} - 966q^{13} \\  &\quad - 519q^{12} + 174q^{11} + 717q^{10} + 821q^9 \\  &\quad + 525q^8 + 119q^7 - 133q^6 - 172q^5 \\  &\quad - 101q^4 - 31q^3 - q^2 + 3q + 1)a^7 \\  &\quad + q^7(q^{21} + 5q^{20} + 12q^{19} + 17q^{18} + 10q^{17} \\  &\quad - 15q^{16} - 53q^{15} - 80q^{14} \\  &\quad - 60q^{13} + 21q^{12} + 120q^{11} + 150q^{10} \\  &\quad + 71q^9 - 55q^8 - 120q^7 - 85q^6 \\  &\quad - 10q^5 + 33q^4 + 29q^3 + 10q^2 - 1)a^8 \\  &\quad q^9(q^{15} - 3q^{13} - 3q^{12} + 3q^{11} + 9q^{10} \\  &\quad + 2q^9 - 9q^8 - 9q^7 + 2q^6 \\  &\quad + 9q^5 + 3q^4 - 3q^3 - 3q^2 + 1)a^9  \end{aligned}  $

## APPENDICE D

Coefficients de linéarisation pour un produit  
de cinq  $q$ -polynômes de Charlier

TABLEAU V : Coefficients de linéarisation pour un produit de cinq  $q$ -polynômes de Charlier (1)

$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$	$n_5$	$f_q(\prod_{i=1}^5 C_{n_i,q}^{(a)}(x))$
1	1	1	1	1	$a + (q^3 + 4q^2 + 6q - 1)a^2$ $+ (q^4 + 3q^3 + 2q^2 - 7q + 1)a^3$ $+ (q^3 - 3q^2 + 3q - 1)a^4$
1	1	1	1	2	$q(q^3 + 4q^2 + 6q + 3)a^2$ $+ q(q^5 + 4q^4 + 9q^3 + 7q^2 - 4q - 5)a^3$ $+ q(q^5 + 2q^4 - q^3 - 5q^2 + 3)a^4$
1	1	1	1	3	$q^3(q^5 + 4q^4 + 9q^3 + 11q^2 + 8q + 3)a^3$ $+ q^3(q^6 + 3q^5 + 5q^4 + 2q^3$ $- 3q^2 - 5q - 3)a^4$
1	1	1	2	2	$q(q^4 + 4q^3 + 6q^2 + 4q + 1)a^2$ $+ q(q^7 + 5q^6 + 14q^5 + 24q^4 + 22q^3$ $+ 5q^2 - 6q - 3)a^3$ $+ q(q^8 + 4q^7 + 9q^6 + 10q^5 - 2q^4$ $- 17q^3 - 11q^2 + 3q + 3)a^4$ $+ q(q^7 + q^6 - 3q^5 - 3q^4$ $+ 3q^3 + 3q^2 - q - 1)a^5$
1	1	1	2	3	$q^3(q^7 + 5q^6 + 14q^5 + 25q^4 + 30q^3$ $+ 24q^2 + 12q + 3)a^3$ $+ q^3(q^9 + 5q^8 + 14q^7 + 27q^6 + 33q^5$ $+ 21q^4 - 4q^3 - 20q^2 - 17q - 6)a^4$ $+ q^3(q^9 + 3q^8 + 5q^7 + 2q^6 - 6q^5$ $- 11q^4 - 6q^3 + 3q^2 + 6q + 3)a^5$

TABLEAU V : Coefficients de linéarisation pour un produit de cinq  $q$ -polynômes de Charlier (2)

$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$	$n_5$	$f_q(\prod_{i=1}^5 C_{n_i,q}^{(a)}(x))$
1	1	1	3	3	$  \begin{aligned}  & q^3(q^9 + 5q^8 + 14q^7 + 26q^6 + 35q^5 \\  & + 35q^4 + 26q^3 + 14q^2 + 5q + 1)a^3 \\  & + q^3(q^{12} + 6q^{11} + 20q^{10} + 47q^9 \\  & + 83q^8 + 109q^7 + 104q^6 + 63q^5 \\  & + 11q^4 - 21q^3 - 24q^2 - 12q - 3)a^4 \\  & + q^3(q^{13} + 5q^{12} + 14q^{11} + 27q^{10} \\  & + 36q^9 + 26q^8 - 5q^7 - 41q^6 - 52q^5 \\  & - 32q^4 - 3q^3 + 12q^2 + 9q + 3)a^5 \\  & + q^3(q^{12} + 2q^{11} + 2q^{10} - 2q^9 \\  & - 6q^8 - 6q^7 + 6q^5 + 6q^4 \\  & + 2q^3 - 2q^2 - 2q - 1)a^6  \end{aligned}  $
1	1	2	2	2	$  \begin{aligned}  & q^2(q^4 + 4q^3 + 6q^2 + 4q + 1)a^2 \\  & + q(q^9 + 6q^8 + 19q^7 + 40q^6 + 58q^5 \\  & + 53q^4 + 24q^3 - 4q - 1)a^3 \\  & + q(q^{11} + 5q^{10} + 16q^9 + 35q^8 + 52q^7 \\  & + 46q^6 + 4q^5 - 42q^4 \\  & - 43q^3 - 12q^2 + 4q + 2)a^4 \\  & + q(q^{11} + 4q^{10} + 8q^9 + 8q^8 - 3q^7 \\  & - 23q^6 - 24q^5 + 5q^4 \\  & + 20q^3 + 7q^2 - 2q - 1)a^5 \\  & + q^2(q^8 - 4q^6 + 6q^4 - 4q^2 + 1)a^6  \end{aligned}  $
1	1	2	2	3	$  \begin{aligned}  & q^3(q^9 + 6q^8 + 19q^7 + 40q^6 + 60q^5 \\  & + 65q^4 + 50q^3 + 26q^2 + 8q + 1)a^3 \\  & + q^3(q^{12} + 6q^{11} + 21q^{10} + 53q^9 \\  & + 101q^8 + 146q^7 + 153q^6 + 101q^5 \\  & + 17q^4 - 42q^3 - 48q^2 - 24q - 5)a^4 \\  & + q^3(q^{13} + 5q^{12} + 15q^{11} + 32q^{10} \\  & + 48q^9 + 45q^8 + 7q^7 - 52q^6 - 84q^5 \\  & - 59q^4 - 6q^3 + 24q^2 + 19q + 5)a^5 +  \end{aligned}  $

TABLEAU V : Coefficients de linéarisation pour un produit de cinq  $q$ -polynômes de Charlier (3)

$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$	$n_5$	$f_q(\prod_{i=1}^5 C_{n_i,q}^{(a)}(x))$
1	1	2	2	3	$+q^3(q^{12} + 3q^{11} + 4q^{10} - 9q^8 - 14q^7 - 5q^6 + 11q^5 + 15q^4 + 5q^3 - 5q^2 - 5q - 1)a^6$
1	1	2	3	3	$q^4(q^{10} + 6q^9 + 19q^8 + 40q^7 + 61q^6 + 70q^5 + 61q^4 + 40q^3 + 19q^2 + 6q + 1)a^3$ $+q^3(q^{15} + 7q^{14} + 27q^{13} + 75q^{12} + 162q^{11} + 281q^{10} + 393q^9 + 437q^8 + 373q^7 + 224q^6 + 68q^5 - 25q^4 - 44q^3 - 26q^2 - 8q - 1)a^4$ $+q^3(q^{17} + 6q^{16} + 22q^{15} + 59q^{14} + 125q^{13} + 211q^{12} + 280q^{11} + 274q^{10} + 153q^9 - 49q^8 - 224q^7 - 269q^6 - 182q^5 - 57q^4 + 17q^3 + 27q^2 + 12q + 2)a^5$ $+q^3(q^{17} + 5q^{16} + 14q^{15} + 28q^{14} + 9q^{13} + 32q^{12} - 7q^{11} - 68q^{10} - 108q^9 - 85q^8 - 7q^7 + 63q^6 + 74q^5 + 37q^4 - 11q^2 - 6q - 1)a^6$ $+q^4(+q^{14} + 2q^{13} + q^{12} - 4q^{11} - 8q^{10} - 4q^9 + 6q^8 + 12q^7 + 6q^6 - 4q^5 - 8q^4 - 4q^3 + q^2 + 2q + 1)a^7$
1	1	3	3	3	$q^6(q^{10} + 6q^9 + 19q^8 + 40q^7 + 61q^6 + 70q^5 + 61q^4 + 40q^3 + 19q^2 + 6q + 1)a^3$ $+q^4(q^{17} + 8q^{16} + 34q^{15} + 102q^{14} + 239q^{13} + 457q^{12} + 728q^{11} + 970q^{10} + 1075q^9 + 976q^8 + 705q^7 + 382q^6 + 131q^5 + 4q^4 - 27q^3 - 18q^2 - 6q - 1)a^4 +$

TABLEAU V : Coefficients de linéarisation pour un produit de cinq  $q$ -polynômes de Charlier (4)

$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$	$n_5$	$f_q(\prod_{i=1}^5 C_{n_i,q}^{(a)}(x))$
1	1	3	3	3	$  \begin{aligned}  &+q^4(q^{20} + 7q^{19} + 29q^{18} + 89q^{17} \\  &+ 220q^{16} + 453q^{15} + 789q^{14} \\  &+ 1162q^{13} + 1429q^{12} + 1416q^{11} \\  &+ 1031q^{10} + 370q^9 - 295q^8 \\  &- 678q^7 - 681q^6 - 437q^5 - 171q^4 \\  &- 19q^3 + 21q^2 + 13q + 3)a^5 \\  &+ q^4(q^{21} + 6q^{20} + 22q^{19} \\  &+ 60q^{18} + 131q^{17} + 233q^{16} \\  &+ 336q^{15} + 373q^{14} + 267q^{13} \\  &- 13q^{12} - 385q^{11} - 661q^{10} \\  &- 665q^9 - 383q^8 - 3q^7 + 244q^6 \\  &+ 266q^5 + 152q^4 + 40q^3 - 8q^2 \\  &- 10q - 3)a^6 \\  &+ q^4(q^{20} + 5q^{19} + 13q^{18} + 23q^{17} \\  &+ 27q^{16} + 12q^{15} - 28q^{14} - 82q^{13} \\  &- 108q^{12} - 67q^{11} + 32q^{10} + 120q^9 \\  &+ 124q^8 + 52q^7 - 28q^6 - 56q^5 \\  &- 37q^4 - 10q^3 + 3q^2 + 3q + 1)a^7 \\  &+ q^6(q^{15} + q^{14} - q^{13} - 5q^{12} - 4q^{11} \\  &+ 4q^{10} + 10q^9 + 6q^8 - 6q^7 \\  &- 10q^6 - 4q^5 + 4q^4 + 5q^3 + q^2 \\  &- q - 1)a^8  \end{aligned}  $
1	2	2	2	2	$  \begin{aligned}  &q^3(q^4 + 4q^3 + 6q^2 + 4q + 1)a^2 \\  &+ q^2(q^{10} + 7q^9 + 25q^8 + 59q^7 \\  &+ 101q^6 + 127q^5 + 110q^4 + 57q^3 \\  &+ 12q^2 - 2q - 1)a^3 \\  &+ q(q^{14} + 6q^{13} + 22q^{12} + 59q^{11} \\  &+ 122q^{10} + 195q^9 + 232q^8 + 183q^7 \\  &+ 49q^6 - 80q^5 - 107q^4 \\  &- 54q^3 - 8q^2 + 3q + 1)a^4 +  \end{aligned}  $

TABLEAU V : Coefficients de linéarisation pour un produit de cinq  $q$ -polynômes de Charlier (5)

$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$	$n_5$	$f_q(\prod_{i=1}^5 C_{n_i,q}^{(a)}(x))$
1	2	2	2	2	$  \begin{aligned}  &+q(q^{15} + 5q^{14} + 16q^{13} + 37q^{12} \\  &+63q^{11} + 73q^{10} + 37q^9 - 49q^8 \\  &-134q^7 - 129q^6 - 27q^5 + 53q^4 \\  &+46q^3 + 11q^2 - 2q - 1)a^5 \\  &+q^2(q^{13} + 4q^{12} + 7q^{11} + 4q^{10} \\  &-8q^9 - 24q^8 - 27q^7 + 7q^6 + 44q^5 \\  &+23q^4 - 16q^3 - 15q^2 - q + 1)a^6 \\  &+q^3(q^9 - q^8 - 4q^7 + 4q^6 + 6q^5 \\  &-6q^4 - 4q^3 + 4q^2 + q - 1)a^7  \end{aligned}  $
2	2	2	2	2	$  \begin{aligned}  &q^4(q^4 + 4q^3 + 6q^2 + 4q + 1)a^2 \\  &+q^3(q^{11} + 8q^{10} + 32q^9 + 84q^8 \\  &+160q^7 + 232q^6 + 257q^5 + 207q^4 \\  &+109q^3 + 30q^2 + q - 1)a^3 \\  &+q^2(q^{16} + 7q^{15} + 29q^{14} + 87q^{13} \\  &+207q^{12} + 404q^{11} + 649q^{10} + 846q^9 \\  &+862q^8 + 626q^7 + 224q^6 - 115q^5 \\  &-215q^4 - 133q^3 - 38q^2 - 2q + 1)a^4 \\  &+q(q^{19} + 6q^{18} + 22q^{17} + 63q^{16} \\  &+145q^{15} + 273q^{14} + 420q^{13} + 508q^{12} \\  &+427q^{11} + 121q^{10} - 309q^9 - 611q^8 \\  &-562q^7 - 228q^6 + 65q^5 + 129q^4 \\  &+65q^3 + 12q^2 - 2q - 1)a^5 \\  &+q^2(q^{18} + 5q^{17} + 16q^{16} + 36q^{15} \\  &+62q^{14} + 77q^{13} + 48q^{12} - 48q^{11} \\  &-181q^{10} - 252q^9 - 166q^8 + 63q^7 \\  &+239q^6 + 182q^5 + 13q^4 - 59q^3 \\  &-33q^2 - 4q + 1)a^6 \\  &+q^3(q^{15} + 4q^{14} + 6q^{13} - 15q^{11} \\  &-24q^{10} - 15q^9 + 15q^8 + 55q^7 + 40q^6 \\  &-36q^5 - 54q^4 - q^3 + 20q^2 + 5q - 1)a^7 \\  &+q^4(q^{10} - 2q^9 - 3q^8 + 8q^7 + 2q^6 \\  &-12q^5 + 2q^4 + 8q^3 - 3q^2 - 2q + 1)a^8  \end{aligned}  $

## INDEX

2l-nombres de Stirling de deuxième espèce.....	49
2l-nombres de Stirling de première espèce.....	49
$\mathcal{A}$ -tableau.....	49
$\mathcal{A}$ -tableau $w$ -distribué.....	60
anti-records exclusifs.....	173
arc extérieur d'une paire imbriquée.....	180
arc inférieur dans la représentation graphique d'une permutation.....	186
arc initial d'un croisement.....	179
arc intérieur d'une paire imbriquée.....	180
arc supérieur dans la représentation graphique d'une permutation.....	186
arc terminal d'un croisement.....	179
bloc fermé.....	130
bloc ouvert.....	130
causer un facteur $a$ .....	134
chef de bloc d'une partition.....	70
chef de cycle d'une permutation.....	69
chemin de Dyck.....	175
chemin de Motzkin coloré.....	164
choix $p_i$ significatif.....	199
coefficient de linéarisation.....	103
coefficients $q$ -binômiaux.....	37
couleur d'un couple $(i_0, j_0) \in \bigcup_{i=1}^k \{i\} \times [n_i]$ .....	116
creux.....	217
creux de cycle.....	232
croisement.....	179
denert $den(\sigma)$ d'une permutation.....	229
distribution Mahonienne.....	168
double descente.....	218
double descente de cycle.....	232
double montée.....	218
double montée de cycle.....	232
éléments saillants inférieurs droits.....	211
éléments saillants inférieurs droits exclusifs.....	173
éléments saillants inférieurs gauches.....	166
éléments saillants supérieurs gauches.....	173
fonctionnelle linéaire symétrique.....	192
forme standard d'une partition partielle.....	70
forme standard d'une partition $\pi$ dans $((\underline{E}, \underline{\sigma}); \pi)$ .....	119
forme standard d'une permutation comme produit de cycles.....	69
forme standard d'une permutation partielle.....	110
histoire de Charlier.....	223
histoire de Laguerre.....	166
histoire de Laguerre incomplète.....	213
histoire de Laguerre subdivisée.....	199

histoire d'Hermitte .....	175
index d'une histoire de Laguerre .....	229
inversion d'une partition ensembliste .....	129
involution $\varphi$ .....	118
involution $\varphi_q$ .....	140
involution $\psi$ .....	119
involution $\psi_q$ .....	135
<i>lag</i> d'une histoire de Laguerre .....	168
<i>lag</i> d'une permutation .....	219
matrice 0-1 .....	16
matrice réduite .....	16
moment d'ordre $n$ .....	102
non-fermeture d'une partition ensembliste .....	129
nombre de non-fermeture d'une partition $rs(\pi)$ .....	129
nombre de Stirling non-centré de deuxième espèce .....	54
nombre de Stirling non-centré de première espèce .....	54
nombre d'inversions d'un entier $inv_\pi(i)$ .....	70
nombre d'inversions d'un entier $inv_\sigma(i)$ .....	69
nombre d'inversions d'une partition .....	129
nombre d'inversions d'une partition partielle .....	70
nombre d'inversions d'une permutation à cycles marqués .....	69
nombre d'inversions d'un tableau 0-1 $\varphi$ .....	13
nombre d'inversions d'un tableau 0-1 faible $\Psi$ .....	68
nombre de non-inversions d'un entier $nin_\pi(i)$ .....	71
nombre de non-inversions d'un entier $nin_\sigma(i)$ .....	69
nombre de non-inversions d'une partition partielle .....	71
nombre de non-inversions d'une permutation à cycles marqués .....	69
nombre de non-inversions d'un tableau 0-1 $\varphi$ .....	13
nombre de non-inversions d'un tableau 0-1 faible $\Psi$ .....	68
opérateur $\Delta$ .....	124
opérateur $\Delta_q$ .....	150
paire imbriquée .....	180
partition partielle .....	70
pas élémentaire partant du niveau $j$ .....	164
permutation partielle .....	104
pic .....	217
pic de cycle .....	232
polynômes de Charlier .....	102
polynômes de Laguerre classiques .....	162
polynômes de Laguerre subdivisés .....	198
polynômes de $q$ -Hermitte continus .....	178
polynômes de $q$ -Hermitte discrets .....	179
polynômes de $q$ -Hermitte de première sorte .....	178
polynômes de $q$ -Hermitte de deuxième sorte .....	179
polynômes de Sheffer .....	230
polynômes de Sheffer généraux .....	230
polynômes orthogonaux défini-positifs .....	230
$p, q$ -analogue des entiers naturels .....	19

$p, q$ -comptage.....	15
$p, q$ -log concavité.....	95
$p, q$ -log concavité forte.....	95
$p, q$ -nombres de Stirling $a, d$ -progressifs de deuxième espèce.....	88
$p, q$ -nombres de Stirling $a, d$ -progressifs de première espèce.....	88
$p, q$ -nombres de Stirling de deuxième espèce.....	14
$p, q$ -nombres de Stirling de première espèce (avec signe).....	32
$p, q$ -nombres de Stirling de première espèce (sans signe).....	15
$p, q$ -nombres de Stirling partiels.....	68
$p, q$ -poids $w_{p,q}(\gamma)$ d'un coloriage $\gamma$ .....	85
$q$ -analogue des entiers naturels.....	1
$q$ -comptage.....	15
$q$ -nombres de Stirling de deuxième espèce.....	14
$q$ -nombres de Stirling de première espèce (avec signe).....	32
$q$ -nombres de Stirling de première espèce (sans signe).....	15
$q$ -polynômes de Sheffer généraux.....	232
$q$ -tableau.....	37
records.....	173
réurrence linéaire à trois termes.....	162
relation d'ordre $\leq_{p,q}$ .....	95
représentation graphique d'une involution sans points fixes.....	175
représentation graphique d'une permutation.....	186
représentation sous forme de mot d'une partition $\pi$ .....	129
séquence décroissante maximale.....	219
sommet pendant.....	177
sous-permutation.....	125
sous-permutation stricte.....	125
squelette d'une partition.....	142
suite de polynômes orthogonaux.....	101
suite des moments.....	102
tableau 0-1.....	13
tableau 0-1 faible.....	67
tableau 0-1 faible coloré.....	84
valuation d'un chemin de Motzkin coloré.....	165
valuation d'un pas élémentaire.....	165
$x$ -décomposition d'une permutation $\sigma$ .....	218