

Publications du **Laboratoire de
Combinatoire et d'
Informatique
Mathématique**

9

Mireille Bousquet-Mélou

q-Énumération de polyominos convexes

Département de mathématiques et d'informatique



Université du Québec à Montréal

Responsable de la collection:

Srećko Brlek

LACIM

Université du Québec à Montréal

C.P. 8888, Succ. A

Montréal, Qc.

Canada H3C 3P8 .

e-mail: brlek@lacim.uqam.ca

Ce numéro constitue la publication d'une thèse soutenue devant jury, pour l'obtention du grade de Docteur.

Composition du Jury

J. BERSTEL

A. BJÖRNER

P. CARTIER

R. CORI

M.P. DELEST

M. MENDES-FRANCE

X.G. VIENNOT

LITP, Un. Paris VI

LRI, Un. de Paris-Sud,

École Normale Supérieure

LABRI, Un. Bordeaux I

LABRI, Un. Bordeaux I

Un. Bordeaux I, Président

LABRI, Un. Bordeaux I

Dépôt légal, deuxième semestre 1991, Bibliothèque nationale du Québec.

ISBN 2-89276-095-X LACIM Montréal

© LACIM, Montréal, Janvier 1991.

Laboratoire de combinatoire et d'informatique mathématique

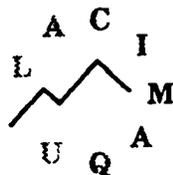
Département de mathématiques et d'informatique

Université du Québec à Montréal

C.P. 8888, Succ. A

Montréal, Qc.

Canada H3C 3P8



THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

pour obtenir le grade de Docteur

Spécialité : **MATHÉMATIQUES et INFORMATIQUE**
Combinatoire

par

Mireille BOUSQUET-MÉLOU

q-ÉNUMÉRATION DE POLYOMINOS CONVEXES

Soutenue le 2 mai 1991, devant la Commission d'Examen :

| | | |
|------|------------------|-------------------|
| MM. | M. MENDÈS FRANCE | <i>Président</i> |
| | J. BERSTEL | <i>Examineurs</i> |
| | A. BJÖRNER | |
| | P. CARTIER | |
| | R. CORI | |
| Mme. | M.P. DELEST | |
| M. | X.G. VIENNOT | |

Michel Mendès France préside ce jury : c'est un très grand plaisir qu'il me fait ainsi, et je l'en remercie vivement.

L'enthousiasme avec lequel Xavier Viennot enseigne la combinatoire m'a donné l'envie de travailler dans ce domaine. Il m'y a accueilli chaleureusement, et ses conseils m'ont été précieux tout au long de ces recherches. Je n'ai guère eu jusqu'ici l'occasion de lui exprimer ma reconnaissance et je voudrais donc lui adresser mes sincères remerciements.

Trois rapporteurs m'ont fait l'honneur de lire ce mémoire avec attention : Jean Berstel, qui m'a toujours écoutée avec une grande gentillesse, Pierre Cartier, qui a manifesté beaucoup d'intérêt pour mes travaux, et Marcel-Paul Schützenberger, dont les idées ont en partie inspiré cette thèse. Il m'est très agréable de les remercier ici, ainsi que Anders Björner, Robert Cori et Marie-Pierre Delest, qui ont accepté de faire partie de ce jury.

Qu'il me soit permis de dire un grand merci à mes collègues informaticiens ou mathématiciens, et en particulier à ceux du groupe de travail de combinatoire, qui m'ont accueillie à Bordeaux avec gentillesse.

Monsieur Bourc'his et mademoiselle Ferrando ont mis leur compétence au service de l'impression de cette thèse, et ce dans des délais très courts. Qu'ils en soient ici remerciés.

J'adresse pour finir une pensée à mes amis de Paris ou Bordeaux, mangeurs de muffins ou scrabbleurs fous, tout simplement parce qu'ils sont là et entretiennent, en l'ignorant peut-être, le moral parfois chancelant des troupes.

SOMMAIRE

| | Pages |
|--|-------|
| Introduction | 1 |
| Chapitre 1. Polyominos parallélogrammes et empilements de segments. | 15 |
| 1. Empilements de segments : premières définitions | 15 |
| 2. Empilements de segments : théorèmes d'inversion | 18 |
| 3. Bijection entre les polyominos parallélogrammes et les demi-pyramides de segments | 19 |
| 4. Énumération des polyominos parallélogrammes | 24 |
| 5. Expressions symétriques pour la série génératrice des polyominos parallélogrammes | 26 |
| 6. Polyominos parallélogrammes et identités de Rogers-Ramanujan | 29 |
| Chapitre 2. Polyominos convexes dirigés et polyominos convexes | 33 |
| 1. Plusieurs familles de polyominos convexes | 33 |
| 2. Énumération des polyominos tas | 37 |
| 3. Énumération de polyominos parallélogrammes dont la hauteur des colonnes extrémales est fixée | 41 |
| 4. Énumération des polyominos convexes dirigés | 47 |
| 5. Énumération des polyominos convexes | 49 |
| Chapitre 3. Séries rationnelles pour les polyominos convexes de largeur donnée (Cas $y = 1$) | 53 |
| 1. Polyominos parallélogrammes et convexes dirigés | 53 |
| 2. Polyominos convexes | 56 |
| Chapitre 4. Empilements de segments et arbres binaires | 67 |
| 1. Prolongement de la bijection f | 68 |
| 2. Empilements de segments et arbres binaires | 72 |
| 3. Définition d'une valuation sur les arbres | 79 |
| 4. Application à l'énumération des polyominos | 82 |
| Chapitre 5. Codage des polyominos convexes dirigés par les mots du grand Dyck | 91 |
| 1. Langages et mots de Dyck | 91 |
| 2. Codage des polyominos convexes dirigés | 94 |
| 3. Énumération | 98 |

| | |
|--|-----|
| Chapitre 6. Codage des polyominos convexes. Système d'équations | 101 |
| 1. Codage | 101 |
| 2. Système d'équations | 106 |
| 3. Cas particulier : $q = 1$ | 110 |
| 4. Dérivées relativement à q | 114 |
| Chapitre 7. Résolution du système | 119 |
| 1. q -automates | 119 |
| 2. Polyominos convexes dirigés | 125 |
| 3. Polyominos convexes de \mathcal{B} | 127 |
| 4. Polyominos convexes | 129 |
| Chapitre 8. Nombres de Catalan et percolation dirigée | 137 |
| 1. Percolation dirigée sur réseau carré | 137 |
| 2. Lemmes préliminaires | 141 |
| 3. Convergence formelle des polynômes | 145 |
| 4. Différences d'ordre un | 146 |
| 5. Différences d'ordre deux | 147 |
| 6. Dénombrements | 154 |
| Annexe. Empilements de segments | 159 |
| 1. Empilements : premières définitions | 159 |
| 2. Structure de monoïde | 161 |
| 3. Monoïde partiellement commutatif | 162 |
| 4. Théorèmes d'inversion | 163 |

INTRODUCTION

L'objet de ce travail est l'énumération de certaines figures planaires, appelées polyominos. Nous abordons ce problème par deux méthodes. La première repose sur la notion d'empilements de pièces, qui est une version géométrique des monoïdes partiellement commutatifs introduits par Cartier et Foata. La seconde est la méthodologie DSV. Elle relie certaines questions d'énumération à la théorie des langages algébriques.

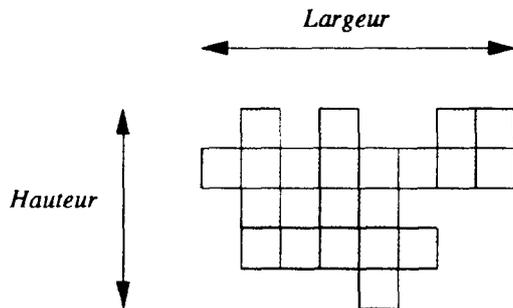
1. LES OBJETS ÉTUDIÉS : LES POLYOMINOS

Considérons le plan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Une *cellule élémentaire* est un carré $[i, i+1] \times [j, j+1]$, où i et j sont des entiers.

Un *polyomino* est une union finie de cellules élémentaires, d'intérieur connexe, et définie à translation près. On définit plusieurs paramètres relatifs à ce polyomino, par exemple sa *hauteur*, sa *largeur*, son *périmètre* et son *aire*, c'est à dire le nombre de cellules élémentaires le composant (Fig.1).

Fig. 1 Un polyomino :

- de hauteur 5,
- de largeur 8,
- de périmètre 36
- d'aire 21.



Les polyominos sont connus et étudiés depuis longtemps. Le livre que Golomb leur a consacré en 1965 [Go1] et les articles de Gardner dans le "Scientific American" en 1958 ont beaucoup contribué à les populariser ([Ga]).

Toute une gamme de problèmes est relative à ces objets. Citons par exemple des problèmes de décidabilité, concernant notamment le *pavage* du plan ou d'un rectangle par des polyominos, étudiés par Conway et Lagarias [Co-La], Beauquier [Be], Beauquier et Nivat [Be-Ni], ou, inversement, celui du *recouvrement* d'un polyomino par un nombre minimal de rectangles (Chaiken, Kleitman, Saks et Shearer [Ch-Kl-Sa-Sh], Masek [Ma]).

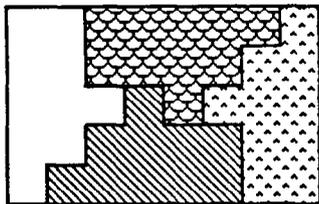


Fig. 2
Pavage d'un rectangle par un polyomino.

Mais c'est à l'énumération de ces objets que nous nous attachons ici. Enumérer les polyominos généraux est un problème majeur en combinatoire. On ne dispose encore à ce jour que de majorations, dues à Klamer et Rivest [Kl-Ri1].

En revanche, plusieurs sous-classes ont pu être dénombrées. La plupart d'entre elles sont définies par des contraintes relevant de deux notions : la *convexité* et l'existence d'une *direction privilégiée*.

Un polyomino est *verticalement convexe* lorsque toutes ses intersections avec les colonnes $[i, i+1] \times \mathbb{R}$ du plan sont convexes. On peut, de façon analogue, définir des polyominos *horizontalement convexes*, mais aussi *diagonalement convexes*. Un polyomino qui est à la fois verticalement et horizontalement convexe sera dit *convexe*. Remarquons que, pour un tel polyomino, la connaissance de la hauteur et de la largeur fournit celle du périmètre.

La notion de *structure dirigée*, quant à elle, provient de la physique statistique, où elle a été introduite en 1982, donnant aussitôt lieu à de nombreux travaux. Nous verrons que des liens étroits existent entre cette discipline et la combinatoire énumérative.

Le tableau ci-contre résume les résultats relatifs à l'énumération des différentes classes de polyominos connus à ce jour. Nous constatons que trois problèmes, principalement, subsistent : tout d'abord l'énumération des polyominos dirigés suivant le périmètre, puis celle des polyominos convexes dirigés suivant l'aire, et enfin le problème soulevé en 1974 par Knuth du dénombrement des polyominos convexes suivant l'aire, pour lequel on ne connaît qu'une estimation asymptotique (Klamer et Rivest [Kl-Ri2] et Bender [Be]).

Cette thèse est consacrée à la résolution de ces deux dernières questions. Plus précisément, nous donnons la série génératrice des polyominos convexes dirigés et celle des polyominos convexes, comptés suivant les trois paramètres hauteur, largeur et aire.

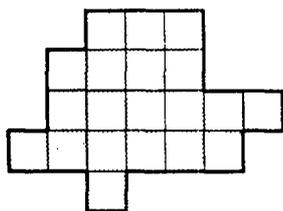


Fig. 3 Un polyomino convexe.

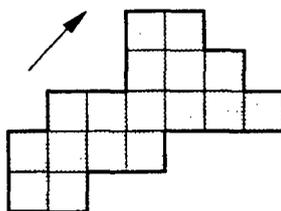


Fig. 4 Un polyomino convexe dirigé.

Les polyominos en physique statistique

La résolution de certains modèles de physique statistique, destinés à décrire par exemple des *transitions de phase*, ou le comportement d'un système au voisinage d'un *point critique*, passe par le dénombrement de familles particulières de polyominos.

| Tableau des énumérations exactes de polyominos | | |
|--|---|--|
| Type de Polyomino | Périmètre | Aire |
| Tas et diagramme de Ferrers | exercice évident | Euler 1748, Gauss 1863 Sylvester 1884 Temperley 1952, 1956 Wright 1968, Derrida, Nadal 1984 |
| Parallélogramme (ou Ferrers gauche) | Polya 1969 Kreweras 1970 Delest, Gouyou-Beauchamps, Vauquelin 1987 (périmètre de liens et de sites) | (cas particulier des <i>quasi-partitions</i> :Auluck 1951, Andrews 1981) Polya 1969, Gessel 1980 Delest, Fedou 1988 (aire + largeur) |
| Convexe dirigé | Chang, Lin 1988 (largeur + longueur) | ? |
| Convexe | Delest, Viennot 1984 Kim, Stanton 1988 Enting, Guttmann 1988,1989 Chang, Lin 1988 Lin 1988 (largeur + longueur) | (<i>estimation asymptotique</i> : Klamer, Rivest 1974, Bender 1974) ? |
| Verticalement convexe | Delest 1987 Brak, Enting, Guttmann 1990 | Klamer 1965, 1967 Stanley 1978, 1986 Delest 1987 (aire + largeur) Privman, Forgacs 1987 Privman, Svrakic 1989 (aire + longueur) |
| Verticalement convexe dirigé | Delest, Dulucq 1987 (périmètre et périmètre dirigé) | Delest, Dulucq 1987 Barucci, Pinzani, Rodella 1990 |
| Diagonalement convexe dirigé | Delest, Fédou 1988 (périmètre dirigé) | Bhat, Bhan, Singh 1988 Privman, Svrakic 1988 |
| Dirigé | ? | Nadal, Derrida, Vannimenus 1982 Hakim, Nadal 1982 Dhar, Phani, Barma 1982 Dhar 1982, 1983 Viennot 1985 Gouyou-Beauchamps, Viennot 1988 (aire + largeur) |

Ces objets apparaissent le plus souvent sous la forme équivalente d'*animaux* tracés sur un réseau carré. On obtient un animal en remplaçant chaque cellule élémentaire d'un polyomino par son centre. Un animal est dit *dirigé* lorsque chacun de ses points peut être atteint depuis un point particulier, appelé *point source*, par un chemin restant dans l'animal et ne faisant des pas que dans deux directions données (Fig.5). Il est possible de définir de même des animaux dirigés à plusieurs points sources.

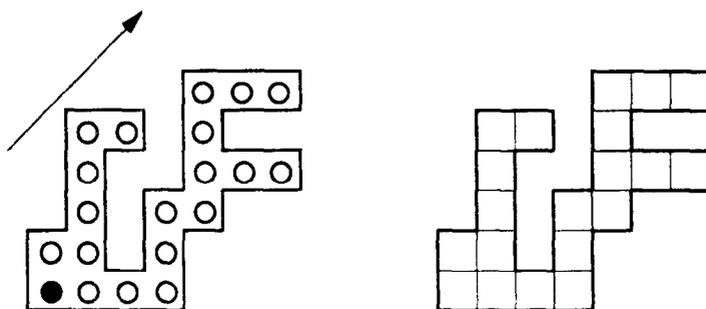


Fig. 5 Un animal dirigé à un point source et le polyomino associé.

Ces animaux dirigés sont très étudiés par les physiciens, en dimension 2 par Derrida, Nadal et Vannimenus [De-Na-Va], Hakim et Nadal [Ha-Na] et en dimension 3 par Dhar [Dh2], qui démontre d'ailleurs l'équivalence de ce modèle avec celui, fort célèbre, des *hexagones durs*, résolu en 1980 par Baxter [Ba1, Ba3, Dh1]. Le modèle des animaux dirigés en dimension 2 a été résolu combinatoirement par Gouyou-Beauchamps et Viennot [Go-Vi, Vi3]. Citons aussi les travaux de Penaud [Pe1, Pe3], ceux de Delest et Dulucq [De-Du] sur les animaux verticalement convexes et dirigés, et ceux de Privman et Svrakic [Pr-Sv], Privman et Forgacs [Pr-Fo], Fedou [Fe2], Penaud [Pe2] sur les animaux diagonalement convexes et dirigés.

Ces animaux sont le plus souvent liés à des modèles de gaz sur réseau, mais aussi au problème de la *percolation (dirigée ou isotrope)*. A noter enfin que l'énumération des animaux dirigés suivant le *périmètre dirigé* résoudrait le problème ouvert de l'énumération des animaux dirigés tracés sur un réseau hexagonal.

Pour une description plus générale des liens entre la physique statistique et la combinatoire, on pourra se reporter à l'article de Viennot [Vi3].

Nous résolvons à deux reprises dans ce travail des conjectures provenant de la physique statistique.

Les deux premières sont dues à Enting et Guttmann [En-Gu], et sont issues d'une approche particulière du *modèle de Potts à q états*, dont la résolution est un problème ouvert. Les deux auteurs construisent, par une méthode dite de *réseau fini*, un développement à basse température de la *fonction de partition* du modèle. La connaissance de la série génératrice des polyominos convexes comptés suivant l'aire fournit un terme correctif et permet de pousser plus loin ce développement.

Les trois autres conjectures que nous résolvons sont dues à Baxter et Guttmann [Ba-Gu]. Elles sont relatives au modèle, lui aussi ouvert, de la *percolation dirigée sur réseau carré* et plus précisément au calcul de la probabilité de percolation. Contrairement aux deux précédentes, ces conjectures sont intrinsèquement liées au modèle. La première d'entre elles est d'ailleurs d'une importance décisive. Nous les démontrons en faisant apparaître des structures voisines de certains polyominos, appelés *polyominos parallélogrammes*.

2. LES OUTILS

Nous abordons l'énumération des polyominos convexes par deux méthodes.

La première repose sur une bijection entre les polyominos parallélogrammes, et certains empilements de segments, à qui leur structure confère une énumération plus facile.

La seconde, devenue classique, repose sur un principe dû à M.P. Schützenberger. Nous l'appellerons ici "méthodologie DSV". Elle permet, à l'origine, d'expliquer l'algébricité d'une série génératrice en codant les objets qu'elle énumère par les mots d'un langage algébrique. Nous utilisons à la fois cette méthodologie et l'un de ses raffinements, introduit très récemment par Delest et Fedou [De-Fe], et s'inspirant de la notion d'*attributs sémantiques*. Il permet de traiter des séries génératrices qui ne sont plus elles-mêmes algébriques, mais sont des *q-analogues* de séries algébriques.

Chacune de ces approches utilise par ailleurs des techniques de *q-calcul*.

2.1. Empilements et monoïde de Cartier-Foata

Toute la première partie de ce travail repose sur une bijection entre certains polyominos, appelés *polyominos parallélogrammes*, et des *empilements de segments*.

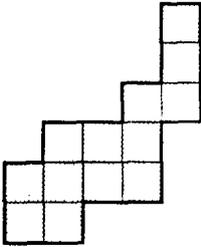


Fig. 6

Un polyomino parallélogramme.

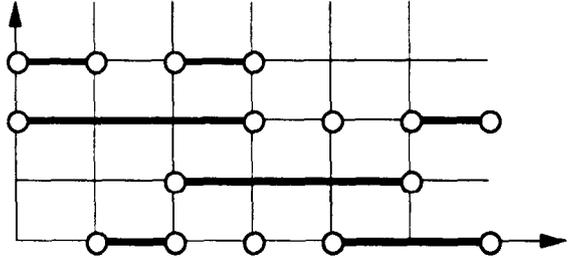


Fig. 7 Un empilement de segments.

La notion d'*empilement de pièces*, due à Viennot [Vi6], est une version géométrique de la théorie des *monoïdes partiellement commutatifs*, introduite en 1969 par Cartier et Foata, à la suite de travaux portant sur les propriétés combinatoires des réarrangements de suites [Ca-Fo].

Depuis, de nombreux liens sont apparus entre cette théorie et des domaines aussi divers que l'*algèbre linéaire* (preuves combinatoires du théorème maître de Mac-Mahon, de la formule d'inversion des matrices, de l'identité de Jacobi ... voir Cartier et Foata [Ca-Fo], Foata [Fo1, Fo2], Viennot [Vi1], Zeilberger [Ze], Lalonde [La]), l'étude des *polynômes orthogonaux généraux* (Viennot [Vi6]), ou la *théorie des graphes* (Gessel [Ge1]). Plus récemment, les monoïdes de commutation ont été utilisés comme modèles pour le *parallélisme* et la *concurrence d'accès à une base de données* ([Co-Mé, Co-Pe, Zi]). Enfin, la résolution de certains modèles de physique statistique (modèle des *hexagones durs*, *animaux dirigés sur réseau carré ou hexagonal*) est équivalente à l'énumération de certains empilements ([Pe1, Pe3]). Dans ce cas, c'est d'ailleurs bien la notion d'empilement qui apparaît naturellement, et non celle de monoïde de commutation ([Vi3]).

L'intérêt de construire une bijection entre les objets que l'on cherche à dénombrer et certains empilements de pièces provient de l'existence de *théorèmes d'inversion*, qui permettent d'énumérer des familles particulières d'empilements. Nous en utilisons ici deux : le premier est

une généralisation de l'inversion de Möbius pour les monoïdes partiellement commutatifs [Ca-Fo], et est dû à Viennot [Vi6]. Le second est nouveau et étend le précédent.

Dans un premier temps, la bijection que nous construisons permet de retrouver, en le précisant, le résultat de Delest et Fedou [De-Fe1], relatif à l'énumération des polyominos parallélogrammes suivant l'aire et la largeur. Par des découpages adéquats, l'énumération des polyominos convexes dirigés et convexes se ramène ensuite à celle des polyominos parallélogrammes dont la hauteur de la première et/ou de la dernière colonne est fixée. C'est de nouveau grâce aux empilements de segments que nous résolvons cette question.

2.2. Langages algébriques et méthodologie DSV

Dans sa version la plus simple, cette méthodologie consiste à construire une bijection (ou *codage*) f entre les objets que l'on veut énumérer et les mots d'un langage algébrique \mathfrak{B} , de telle sorte que la taille d'un objet donné soit la longueur - c'est à dire le nombre de lettres - de son image par f . Si le langage \mathfrak{B} est engendré par une *grammaire algébrique non ambiguë*, la série génératrice formelle $\underline{\mathfrak{B}}$ des mots de \mathfrak{B} , définie par

$$\underline{\mathfrak{B}} = \sum_{u \in \mathfrak{B}} u$$

satisfait un système d'équations en variables non commutatives. Ceci permet d'écrire ensuite un système d'équations algébriques, dont l'une des composantes de la solution est la série génératrice L des objets étudiés. Rappelons que $L = \sum a_n t^n$, où a_n est le nombre d'objets de taille n .

Cette méthode permet tout d'abord de mieux comprendre l'algébricité de séries génératrices déjà connues. Citons par exemple les travaux de Cori [Co1, Co2, Co3], Cori et Richard [Co-Ri], Cori et Vauquelin [Co-Va], relatifs aux cartes planaires. Mais elle permet également d'obtenir de nouveaux résultats d'énumération. Le premier résultat de ce type est le dénombrement des polyominos convexes suivant le périmètre, par Delest et Viennot [De-Vi]. Ce résultat a ensuite été retrouvé par Chang et Lin [Ch-Li]. Nous en cherchons ici un *q-analogue*, sous la forme d'une énumération conjointe suivant le périmètre et l'aire.

Un autre intérêt de cette méthode est de pouvoir générer aléatoirement des objets de taille n donnée, de telle sorte que chacun d'eux apparaisse avec la probabilité $1/a_n$. Il faut pour cela générer uniformément les mots de longueur n d'un langage algébrique. Par exemple, les travaux de Hickey et Cohen [Hi-Co] portent sur ce thème. De telles possibilités intéressent tout particulièrement les physiciens qui peuvent ainsi déterminer expérimentalement certains *coefficients critiques* relatifs au modèle étudié. Des animaux aléatoires de grande taille ont déjà été obtenus, à la suite des travaux de Gouyou-Beauchamps et Viennot [Go-Vi].

Un résumé de cette méthode est présenté par Viennot [Vi4], qui recense aussi un certain nombre de ses applications à l'énumération d'objets planaires (animaux, polyominos, cartes...).

Langage de Dyck

Les langages que nous utilisons sont le plus souvent des versions légèrement modifiées du langage des *mots de Dyck*, encore appelés *systèmes de parenthèses bien formés*.

Ce langage est d'une importance fondamentale en informatique théorique, tout d'abord parce qu'il engendre tous les langages algébriques, mais aussi pour son utilisation dans de nombreux problèmes d'algorithmique (analyse d'algorithmes sur les fichiers par Flajolet, Françon et Vuillemin [Fl-Fr-Vu], étude du nombre minimal de registres pour l'évaluation d'une expression arithmétique par Flajolet, Raoul et Vuillemin [Fl-Ra-Vu], étude du taux de parallélisme par Arquès et Guichet [Ar-Gu]).

Il apparaît aussi dans plusieurs problèmes de combinatoire classique, liés par exemple aux tableaux de Young (Gouyou-Beauchamps [Go]), ou aux fractions continues (Flajolet [Fl]), Viennot [Vi1]), et, sous des formes plus ou moins modifiées, comme codage de différentes figures, notamment les cartes planaires et les polyominos.

Nous utilisons tout d'abord ici la méthodologie DSV dans sa version la plus simple, afin d'expliquer bijectivement l'algébricité de la série génératrice des polyominos convexes dirigés comptés suivant le périmètre, obtenue par Chang et Lin [Ch-Li]. Toutefois, c'est d'un *q-analogue* de cette méthode dont nous avons besoin par la suite pour le dénombrement des polyominos convexes.

2.3. *q*-Analogie de la méthodologie DSV et *q*-calcul

Ce raffinement de la méthodologie DSV a été introduit par Delest et Fedou [De-Fe2], et utilisé avec succès dans le cadre de l'énumération des polyominos parallélogrammes suivant l'aire et la largeur. Nous prolongeons ce travail en utilisant un codage plus général, dont nous déduisons un système de *q-équations aux différences finies*, liant les séries génératrices des polyominos parallélogrammes, convexes dirigés et convexes, comptés suivant la largeur, la hauteur et l'aire.

Il n'existe pas, à l'heure actuelle, de technique générale pour résoudre ce type d'équations. Nous déduisons cependant de ce système, par des méthodes itératives, des développements intéressants pour la série génératrice des polyominos convexes dirigés et celle des polyominos convexes. Une nouvelle notion apparaît dans ces calculs : celle de *q-automate*. Nous parvenons ensuite à la solution du système étudié, en utilisant l'expression de la série génératrice des polyominos parallélogrammes déduite de la bijection avec les empilements.

Ce travail se rattache ainsi à l'étude des *q-séries*, pour laquelle existe une énorme littérature. Citons par exemple le livre classique d'Andrews [An3], et les travaux de Andrews et Askey [An-As] sur les *q-analogues* des polynômes orthogonaux. Le livre récent de Gasper et Rahman [Ga-Ra] présente une bonne description des séries hypergéométriques basiques.

Ces *q-séries* interviennent par ailleurs dans des domaines aussi variés que l'analyse, la théorie des nombres, la physique, et, bien sûr, la combinatoire, comme en atteste le mémoire d'Andrews [An4]. Un autre exemple des liens entre les *q-analogues* et la physique statistique est fourni par Cartier [Ca]. Une de leurs apparitions les plus spectaculaires reste le lien entre les célèbres identités de Rogers-Ramanujan et la résolution, par Baxter, du modèle des *hexagones durs* [Ba1, Ba2, Ba3].

En combinatoire, elles jouent un rôle capital dans l'énumération des *partitions d'entiers* (ou *diagrammes de Ferrers*, voir Andrews [An3]), et interviennent aussi dans bien d'autres problèmes d'énumération (Garsia et Remmel [Ga-Re1], Desarménien et Foata [De-Fo]). Soulignons la très récente apparition de *q-analogues* des fonctions de Bessel dans l'énumération des polyominos parallélogrammes par Delest et Fedou [De-Fe1].

Inversement, la combinatoire permet d'interpréter certaines formules de *q-calcul*, mais également d'en démontrer d'autres, comme par exemple l'évaluation de l'intégrale d'Askey-Wilson par Ismail, Stanton et Viennot [Is-St-Vi], ou la difficile conjecture "*q*-Dyson" par Zeilberger et Bressoud [Ze-Br].

Ce travail soulève finalement au moins deux questions susceptibles de le prolonger.

Tout d'abord, nous obtenons, pour la série génératrice des polyominos convexes, deux formules distinctes, selon la méthode utilisée. Un premier problème consisterait à montrer par le calcul l'égalité de ces deux *q-séries*. Mais il est en fait assez vraisemblable qu'une troisième expression, plus concise que celles que nous obtenons, du même type que celles qui énumèrent les polyominos parallélogrammes et convexes dirigés, existe. Une telle formule reste à trouver.

D'autre part, nous démontrons que la série génératrice des polyominos parallélogrammes, convexes dirigés ou convexes de largeur donnée est une fraction rationnelle, dont nous donnons le dénominateur. Lorsqu'on se contente d'une énumération suivant l'aire de ces objets, les numérateurs de ces fractions paraissent avoir de belles propriétés. En effet, les premiers d'entre eux sont à coefficients positifs, et unimodaux. Ceux relatifs aux polyominos parallélogrammes sont même symétriques. Il serait donc sans doute intéressant d'affiner nos résultats en étudiant de plus près ces polynômes, et en démontrant - éventuellement - ces propriétés.

3. RÉSUMÉ DE LA THÈSE

Les quatre premiers chapitres reposent sur une bijection entre polyominos parallélogrammes et demi-pyramides de segments, décrite dans le chapitre 1. Les quatre suivants sont plutôt des applications de la méthodologie DSV.

Chapitre 1. Empilement de segments et polyominos parallélogrammes

Après avoir défini les empilements de segments et énoncé des théorèmes d'inversion permettant d'énumérer certains d'entre eux, nous décrivons une bijection entre les polyominos parallélogrammes et des empilements de segments particuliers, appelés demi-pyramides. Nous déduisons d'un des théorèmes d'inversion la série génératrice des polyominos parallélogrammes, comptés suivant la largeur, la hauteur et l'aire.

Chapitre 2. Polyominos convexes dirigés et polyominos convexes

Nous ramenons l'énumération des polyominos convexes dirigés et des polyominos convexes à celle des polyominos parallélogrammes dont la hauteur de la première et/ou de la dernière colonne est fixée. De nouveau, les théorèmes d'inversion évoqués plus haut nous permettent d'énumérer ces objets.

Nous obtenons finalement la série génératrice des polyominos convexes dirigés et celle des polyominos convexes, comptés suivant la largeur, la hauteur et l'aire.

Chapitre 3. Séries rationnelles pour les polyominos convexes de largeur donnée (Cas $y = 1$)

Reprenant les résultats obtenus aux chapitres 1 et 2, nous montrons que la série génératrice des polyominos parallélogrammes, convexes dirigés ou convexes de largeur donnée est une fraction rationnelle.

Lorsqu'on se contente d'une énumération de ces objets suivant l'aire, nous donnons, pour chacune des trois classes de polyominos convexes considérées, la valeur du dénominateur de cette fraction.

Nous établissons par ailleurs des formules permettant de calculer par récurrence les numérateurs associés. Les premières valeurs, obtenues grâce au logiciel de calcul formel MAPLE, sont remarquables : ces polynômes sont à coefficients positifs et unimodaux.

Chapitre 4. Empilements de segments et arbres binaires

L'objet de ce chapitre est très voisin de celui du chapitre précédent. Nous recherchons le dénominateur de la série génératrice des polyominos parallélogrammes, convexes dirigés ou convexes de largeur donnée, mais comptés désormais suivant la hauteur et l'aire simultanément.

Nous constatons que la méthode utilisée dans le chapitre précédent, et consistant à exploiter directement les formules obtenues dans les chapitres 1 et 2, est ici inefficace. Nous abordons donc ce problème par une voie différente.

Nous prolongeons d'abord la bijection décrite au chapitre 1 entre les polyominos parallélogrammes et les demi-pyramides de segments à des polyominos convexes plus généraux. Leur image par cette nouvelle bijection sera une demi-pyramide tricolore. Nous décrivons ensuite une transformation - exceptionnellement non bijective! - de ces demi-pyramides en certains arbres binaires. L'énumération des différentes classes de polyominos considérées se ramène ainsi à celle de familles particulières d'arbres convenablement valués.

La valeur du dénominateur de la série génératrice des polyominos parallélogrammes, convexes dirigés ou convexes de largeur donnée se déduit alors facilement de cette interprétation.

Chapitre 5. Codage des polyominos convexes dirigés par les mots du grand Dyck.

Nous présentons ici quelques généralités sur les langages algébriques et décrivons la méthodologie DSV. Nous donnons ensuite une première application de cette méthodologie, en prouvant bijectivement le résultat étonnamment simple suivant : le nombre de polyominos convexes dirigés de périmètre $2n+4$ est le coefficient binomial $\binom{2n}{n}$ (Chang et Lin [Ch-Li]).

Chapitre 6. Codage des polyominos convexes. Système d'équations

Un q -analogue de la méthodologie DSV fournit un système de 6 q -équations aux différences finies, régissant les séries génératrices des polyominos parallélogrammes, convexes dirigés et convexes.

Il n'existe à l'heure actuelle aucune méthode systématique permettant de résoudre ce type d'équations.

Néanmoins, ce système permet d'énumérer suivant hauteur et largeur toutes les classes de polyominos convexes étudiées. Nous redémontrons ainsi un certain nombre de résultats connus. D'autres sont nouveaux.

D'autre part, nous démontrons, à partir de ce système et en utilisant de nouveau le logiciel de calcul formel MAPLE, deux conjectures d'Enting et Guttmann [En-Gu], relatives aux valeurs des dérivées par rapport à q de la série génératrice des polyominos convexes, et intervenant curieusement lors d'une approche particulière du modèle de physique statistique appelé modèle de Potts à q états.

Chapitre 7. Résolution du système

Nous cherchons ici à résoudre le système de q -équations obtenu dans le chapitre précédent. Par des méthodes itératives, nous retrouvons d'abord le développement en fraction continue de la série génératrice des polyominos parallélogrammes déjà obtenu dans le premier chapitre. En supposant connues les autres formules du premier chapitre, ces mêmes méthodes mènent à la série génératrice des polyominos convexes dirigés donnée dans le chapitre 2.

Au contraire, nous parvenons pour la série génératrice des polyominos convexes à une nouvelle expression, différente de celle du chapitre 2.

Chapitre 8. Nombres de Catalan et percolation dirigée

Ce chapitre porte a priori sur un sujet très éloigné de celui des polyominos, puisqu'il s'agit de la preuve de trois conjectures de Baxter et Guttmann [Ba-Gu], portant sur le modèle physique de la percolation dirigée sur réseau carré. Mais ces conjectures font curieusement intervenir les nombres de Catalan, et nous les démontrons en faisant apparaître certaines figures planes, voisines des polyominos parallélogrammes, que nous énumérons de nouveau via la méthodologie DSV.

Références.

- [An1] G.E. ANDREWS, Problems and prospects for basic hypergeometric functions, The theory and application of special functions, R. Askey ed., Academic press, New-York, 1975, 191-224.
- [An2] G.E. ANDREWS, Identities in combinatorics II, A q -analog of the Lagrange inversion theorem, Proc. Amer. Math. Soc. 53 (1975) 240-245.
- [An3] G.E. ANDREWS, The theory of plane partitions, Vol n° 2, Encyclopedia of Math. and its appl., G.C. Rota ed., Add. Wesley Reading, 1976.
- [An4] G.E. ANDREWS, q -Séries : their development and application in Analysis, Number Theory, Combinatorics, Physics, and Computer Algebra, AMS, Library of congress Cataloging-in-Publication Data, 1986.
- [An-As] G.E. ANDREWS, R. ASKEY, Classical orthogonal polynomials, in Polynômes orthogonaux et applications, C. Brezinski, A. Draux, A.P. Magnus, P. Maroni et A. Ronvaux eds., proceeding Bar-le-Duc 1984, Lect. Notes in Math., Springer Verlag, Berlin 1985, 36-62.
- [Ar-Gu] D. ARQUÈS, P. GUICHET, Asymptotic behaviour and comparison of algorithm controlling concurrent acces to a data base, Rapport n°40, Laboratoire de Mathématiques et d'Informatique, Université de Haute Alsace, Mulhouse (1986).
- [Ba1] R. BAXTER, Hard hexagons : exact solution, J. Phys. A 13 (1980) L61-L70.
- [Ba2] R. BAXTER, Rogers-Ramanujan identities in the hard hexagon model, J. Stat. Phys. 26 (1981) 427-452.
- [Ba3] R. BAXTER, Exactly solved models in statistical mechanics, Academic Press, New-York, 1982.
- [Ba-Gu] R. BAXTER, A.J. GUTTMANN, Series expansion of the percolation probability for the directed square lattice, J. Phys. A : Math. Gen. 21 (1988) 3193-3204.
- [Be] D. BEAUQUIER, An undecidable problem about rational sets and contour words of polyominoes, à paraître dans Inf. Proc. Lett.
- [Be-Ni] D. BEAUQUIER, M. NIVAT, Tiling with polyominoes, Rapport LITP, 88-66, Novembre 88.
- [Be] E. BENDER, Convex n -ominoes, Discr. Math. 8 (1974) 219-226.
- [Br-En-Gu] R. BRAK, R.J. ENTING, A.J. GUTTMANN, Exact solution of the row-convex polygon perimeter generating function, J. Phys. A 23 (1990) 2319- 2326.
- [Ca] P. CARTIER, Nouvelles aventures au pays des q -analogues, à paraître dans les comptes rendus du Séminaire Lotharingien de Combinatoire, Université de Strasbourg.

- [Ca-Fo] P. CARTIER, D. FOATA, Problèmes combinatoires de commutations et réarrangements, Lect. Notes in Math., 85, Springer-Verlag, Berlin, 1969.
- [Ch-Kl-Sa-Sh] S. CHAIKEN, D.J. KLEITMAN, M. SAKS, J. SHEARER, Covering regions by rectangles, SIAM J. of Discr. and Alg. Meth. 2 (1981) 394-410.
- [Ch-Li] S.J. CHANG, K.Y. LIN, Rigorous results for the number of convex polygons on the square and honeycomb lattices, J. Phys. A : Math. Gen. 21 (1988) 2635-2642.
- [Co-La] J.H. CONWAY, J.C. LAGARIAS, Tiling with polyominoes and combinatorial group theory, J. Comb. Theor. A 53 (1990) 183-208.
- [Co1] R. CORI, Planar maps and bracketing systems, Combinatorial structures and their applications, Gordon Breach, New-York, 1970.
- [Co2] R. CORI, Sur la rationalité de certaines séries génératrices, Discr. Math. 3 (1972) 215-231.
- [Co3] R. CORI, Un code pour les graphes planaires et ses applications, Astérisque, Soc. Math. France, n°27 (1975).
- [Co-Me] R. CORI, Y. METIVIER, Rational subsets of some partially abelian monoids, Theor. Comp. Sci. 35 (1985) 179-189.
- [Co-Pe] R. CORI, D. PERRIN, Sur la reconnaissabilité dans les monoïdes partiellement commutatifs libres, R. A. I. R. O. Info. Theor. 19 (1985) 21-32.
- [Co-Ri] R. CORI, J. RICHARD, Enumération des graphes planaires à l'aide des séries formelles en variables non commutatives, Disc. Math. 2 (1972) 115-162.
- [Co-Va] R. CORI, B. VAUQUELIN, Planars maps are well labeled trees, Can. J. Math. 33 (1981) 1023-1042.
- [De] M.P. DELEST, Generating functions for column convex polyominoes, J. Comb. Th. A 48 (1988) 12-31.
- [De-Du] M.P. DELEST, S. DULUCQ, Enumeration of directed column-convex animals with given perimeter and area, rapport n° 86-15, Université de Bordeaux I, soumis à Graphs and Combinatorics.
- [De-Fe1] M. DELEST, J.M. FEDOU, Enumeration of skew Ferrers diagrams, à paraître dans Discr. Math.
- [De-Fe2] M. DELEST, J.M. FEDOU, Attribute grammars are useful for combinatorics, Rapport interne n°89-122, Université Bordeaux I.
- [De-Go-Va] M.P. DELEST, D. GOUYOU-DEAUCHAMPS, B. VAUQUELIN, Enumeration of parallelogram polyominoes with given bond and site perimeters, Graphs and Comb. 3 (1987) 325-339.

- [De-Vi] M.P. DELEST, G. VIENNOT, Algebraic languages and polyominoes enumeration, *Theor. Comp.Sci.* 34 (1984) 169-206, North-Holland.
- [De-Na] B. DERRIDA, J.P. NADAL, On a model of directed compact animal, *J. Physique Lett.* 45 701, 1984.
- [De-Na-Va] B. DERRIDA, J.P. NADAL, J. VANNIMENUS, Directed lattices animals in 2 dimensions : numerical and exact results, *J. Phys.* 43 (1982) 1561.
- [De-Fo] J. DESARMENIEN, D. FOATA, Fonctions symétriques et séries hypergéométriques basiques multivariées, *Bull. Soc. Math. France*, 113 (1985) 3-22.
- [Dh1] D. DHAR, Equivalence of the two-dimensional directed animal problem to Baxter hard-square lattice-gas model, *Phys. Rev Lett.* 49 (1982) 959-962.
- [Dh2] D. DHAR, Exact solution of a directed-site animals enumeration in 3 dimensions, *Phys. Rev. Lett.* 59 (1983) 853-856.
- [Du] C. DUBOC, Some properties of commutation in free partially commutative monoids, *Inform. Proc. Lett.* 20 (1985) 1-4.
- [En-Gu] I.G. ENTING, A.J. GUTTMANN, Area-weighted moments of convex polygons on the square lattice, *J. Phys. A : Math. Gen.* 22 (1989) 2639-2642.
- [Fe1] J.M. FEDOU, Grammaires et q -énumération de polyominos, Thèse de Doctorat, Université Bordeaux I, 1989.
- [Fe2] J. M. FEDOU, Exact formulas for fully compact animals, Rapport LaBRI n°89-06, Université Bordeaux I.
- [Fe3] J.M. FEDOU, Enumeration of skew Ferrers diagrams and basic Bessel functions, à paraître dans les actes de "Second conference on lattice paths and combinatorics and applications", Hamilton, 1990.
- [Fl] P. FLAJOLET, Combinatorial aspects of continued fractions, *Discr. Math.* 41 (1982) 145-153.
- [Fl-Fr-Vu] P. FLAJOLET, J. FRANÇON, J. VUILLEMIN, Sequence of operations analysis for dynamic data structures, *J. of Algorithm* 1 (1980) 111-141.
- [Fl-Ra-Vu] P. FLAJOLET, J.C. RAOULT, J. VUILLEMIN, The number of registers required for evaluating arithmetic expressions, *Theor. Comp. Sci.* 9 (1979) 99-125.
- [Fo1] D. FOATA, A non-commutative version of the matrix inversion formula, *Adv. in Math.* 31 (1979) 330-349.
- [Fo2] D. FOATA, A combinatorial proof of Jacobi's identity, *Annals of Discr. Math.* 6 (1980) 125-135.
- [Ga] M. GARDNER, Mathematical games, *Scientific American*, 1958, Sept. 182-192, Nov. 136-142.

- [Ga-Re1] A. GARSIA, J. REMMEL, A combinatorial interpretation of q -derangement and q -Laguerre numbers, *Europ. J. Comb.* 1 (1980) 47-59.
- [Ga-Re2] A. GARSIA, J. REMMEL, A combinatorial view of Andrews' Proof of the L-M-W conjectures, *Europ. J. Comb.* 6 (1985) 335-352.
- [Ga-Ra] GASPER, RAHMAN, *Basic hypergeometric series*, Cambridge University Press, 1989.
- [Ge1] I. GESSEL, Communication personnelle à X.G. Viennot, citée dans [Vi6].
- [Ge2] I. GESSEL, A noncommutative generalization and q -analog of the Lagrange inversion formula, *Trans. Amer. Math. Soc.* 257 (1980) 455-482.
- [Go1] S. GOLOMB, *Polyominoes*, Scribner, New York, 1965.
- [Go2] S. GOLOMB, Tiling with sets of polyominoes, *J. Comb. Theor.* 9 (1970) 60-71.
- [Go3] S. GOLOMB, Polyominoes which tile rectangles, *J. Comb. Theor. A* 51 (1989) 117-124.
- [Go] D. GOUYOU-BEAUCHAMPS, *Codage par des mots et des chemins : problèmes combinatoires et algorithmiques*, Thèse d'Etat, Bordeaux, 1985.
- [Go-Vi] D. GOUYOU-BEAUCHAMPS, X.G. VIENNOT, Equivalence of the two dimensional directed animal problem to a one-dimensional path problem, *Adv. in Appl. Math.* 9 (1988) 334-357 .
- [Ha-Na] V. HAKIM, J.P. NADAL, Exact result for 2D directed lattice animals on a strip of finite width, *J. Phys. A : Math. Gen.* 16 (1983), L 213-L 218.
- [Hi-Co] T. HICKEY, J. COHEN, Uniform random generation of strings in a context-free language, *SIAM J. Comp.* 12 (1983) 645-655.
- [Is-St-Vi] M. ISMAIL, D. STANTON, X.G. VIENNOT, The combinatorics of q -Hermite polynomials and the Askey-Wilson Integral, *Europ. J. Comb.* 8 (1987) 379-392.
- [Kl] D.A. KLARNER, My life among polyominoes, in *The Mathematical Gardner*, 243-262, Wadsworth, Belmont CA, 1981.
- [Kl-Ri1] D.A. KLARNER, R.L. RIVEST, A procedure for improving the upper bound for the number of n -ominoes, *Can. J. Math.* 25 (1973) 585-602.
- [Kl-Ri2] D.A. KLARNER, R.L. RIVEST, Asymptotic bounds for the number of convex n -ominoes, *Discr. Math.* 8 (1974) 31-40.
- [La] P. LALONDE, Contribution à l'étude des empilements, Thèse, Université du Québec à Montréal, novembre 1990.
- [Ma] W. MASEK, Communication personnelle citée dans [Ch-Kl-Sa-Sh].
- [Pe1] J. G. PENAUD, Une nouvelle bijection pour les animaux dirigés, rapport LaBRI n°89-45, Actes du 22^{ème} Séminaire Lotharingien de Combinatoire, Hesselberg, 1989, 93-130.

- [Pe2] J. G. PENAUD, Animaux dirigés diagonalement convexes et arbres ternaires, rapport LaBRI n°90-62.
- [Pe3] J. G. PENAUD, Arbres et Animaux, Mémoire d'habilitation à diriger les recherches, Bordeaux, Mai 1990.
- [Po] G. POLYA, On the number of certain lattice polygons, *J. Comb. Th.* 6 (1969) 102-105.
- [Pr-Fo] V. PRIVMAN, G. FORGACS, Exact solution of the partially directed compact lattice animal model, *J. Phys. A : Math. Gen.* 20 (1987) 543-547.
- [Pr-Sv] V. PRIVMAN, N.M. SVRAKIC, Exact generating function for fully directed compact lattice animals, *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 60, N°12 (1988) 1107-1109.
- [Vi1] X.G. VIENNOT, Une interprétation combinatoire des coefficients des développements en série des fonctions elliptiques de Jacobi, *J. Comb. Th. A* 29 (1980) 121-133.
- [Vi2] X.G. VIENNOT, Une théorie combinatoire des polynômes orthogonaux généraux, Notes de conférences données à l'Université du Québec à Montréal, Septembre-Octobre 1983.
- [Vi3] X.G. VIENNOT, Problèmes combinatoires posés par la physique statistique, Séminaire Bourbaki n°626, 36^{ème} année, in *Astérisque* n°121-122 (1985) 225-246, Soc. Math. France.
- [Vi4] X.G. VIENNOT, Enumerative combinatorics and algebraic languages, *Proceedings FCT'85*, ed. L. Budach, Lect. Notes in Computer Science 199, Springer-Verlag, New-York/Berlin, 1985, 450-464.
- [Vi5] X.G. VIENNOT, A combinatorial theory for general orthogonal polynomials with extensions and applications, in "Polynômes orthogonaux et leurs applications", Lect. Notes in Math. 1171, eds. C. Brezinski, A. Draux, A. Magnus, P. Maroni, A. Ronveaux, pp 139-157, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [Vi6] X.G. VIENNOT, Heaps of pieces I : Basic definitions and combinatorial lemmas, in *Combinatoire énumérative*, eds. G Labelle et P. Leroux, Lect. Notes in Math. 1234, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [Ze] D. ZEILBERGER, A combinatorial approach to matrix algebra, *Discr. Math.* 56 (1985) 61-72.
- [Ze-Br] D. ZEILBERGER, D. M. BRESSOUD, A proof of Andrews' q -Dyson conjecture, *Discr. Math.* 54 (1985) 201-224.
- [Zi] W. ZIELONKA, Notes on finite asynchronous automata and trace languages, *RAIRO Inf. Theor.* 21 (1987) 99-135.

CHAPITRE 1

POLYOMINOS PARALLÉLOGRAMMES ET EMPILEMENTS DE SEGMENTS

Ce premier chapitre décrit une bijection entre les polyominos parallélogrammes et certains *empilements de segments*. La notion d'*empilements de pièces*, formalisée par Viennot [Vi1], est une illustration géométrique de la théorie des *monoïdes partiellement commutatifs libres*, appelés aussi *monoïdes à commutations partielles*, développée par Cartier et Foata [Ca-Fo]. Nous rappelons en annexe les définitions de ces notions, et redémontrons leur équivalence, ainsi que deux théorèmes relatifs à l'énumération des empilements de pièces. Nous y présentons également un nouveau théorème d'énumération, plus général.

Toutefois, dans le cas particulier des empilements de segments, nous donnons ici quelques définitions et énoncés de théorèmes qui seront utiles par la suite.

1. EMPILEMENTS DE SEGMENTS : PREMIÈRES DÉFINITIONS

On s'intéresse ici à l'ensemble \mathcal{P} des segments de la forme $P = [a, b] \times \{n\}$, où $\{a, b, n\} \in \mathbb{N}^3$, $1 \leq a \leq b$. Si $P = [a, b] \times \{n\}$ est un élément de \mathcal{P} , le segment $[a, b]$ sera son *support*, noté $\text{supp}(P)$, et n son *niveau*, noté $\text{niv}(P)$.

Deux éléments P et P' de \mathcal{P} seront dits *en concurrence* si l'intersection de leurs supports est non vide. On notera alors $P \mathcal{C} P'$.

Deux sous-ensembles \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 de \mathcal{P} seront dits *en concurrence* s'il existe au moins un élément de \mathcal{P}_1 en concurrence avec un élément de \mathcal{P}_2 .

Définition 1.1. Un empilement de segments est un sous-ensemble fini E de \mathcal{P} , vérifiant les deux conditions suivantes :

- (i) deux éléments distincts de E en concurrence ne sont jamais situés au même niveau ;
- (ii) pour tout segment P de E , de niveau n non nul, il existe un autre élément de E , en concurrence avec P , de niveau $n-1$.

Tout élément de E sera appelé *pièce* de l'empilement E .

L'ensemble des empilements de segments sera noté \mathcal{S} .

Définition 1.2. Soit E un empilement de segments.

Une pièce de E est *maximale* (resp. *minimale*) si elle n'est en concurrence avec aucune pièce de niveau supérieur (resp. inférieur).

Un empilement *trivial* est soit l'empilement vide, soit un empilement dont toutes les pièces sont à la fois maximales et minimales (c'est à dire encore de niveau zéro).

Une *pyramide* est un empilement n'ayant qu'une pièce maximale.

Remarque. Les pièces minimales d'un empilement sont ses pièces de niveau zéro.

Exemple. L'empilement suivant a quatre pièces maximales et trois pièces minimales.

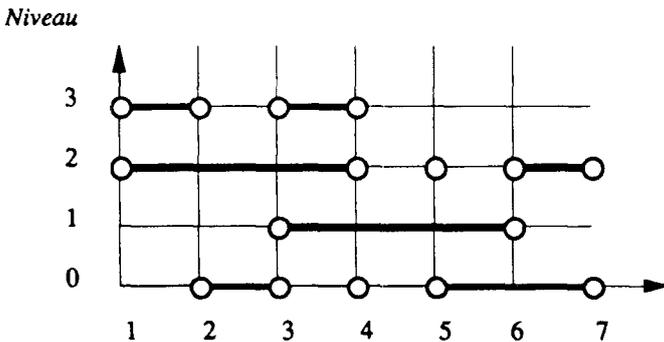


Fig. 1.1 Un empilement de segments.

Nous allons maintenant définir la *superposition* de deux empilements E et F . Elle consiste, intuitivement, à translater verticalement toutes les pièces de F d'une même hauteur supérieure au niveau maximum des pièces de E , puis à "laisser tomber" ces pièces sur celles de E .

Proposition / Définition 1.3. Soient E et F deux empilements, avec $F = \{P_1, \dots, P_k\}$.

a) Il existe des entiers n_1, \dots, n_k , et des ensembles $\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_k$, uniques, vérifiant les conditions suivantes pour tout $i, 1 \leq i \leq k$:

- (i) $\mathcal{N}_i = \{n \mid \exists P \in E, niv(P) = n, P \mathcal{C} P_i\} \cup \{n_i \mid niv(P_j) < niv(P_i), P_j \mathcal{C} P_i\}$;
- (ii) $n_i = 0$ si \mathcal{N}_i est vide,
 $n_i = 1 + \max(\mathcal{N}_i)$ sinon.

b) L'ensemble $E' = E \cup \{supp(P_i) \times \{n_i\}, 1 \leq i \leq k\}$ est un empilement, qui sera appelé *superposition de F sur E* , et noté $E \boxplus F$.

Exemple.

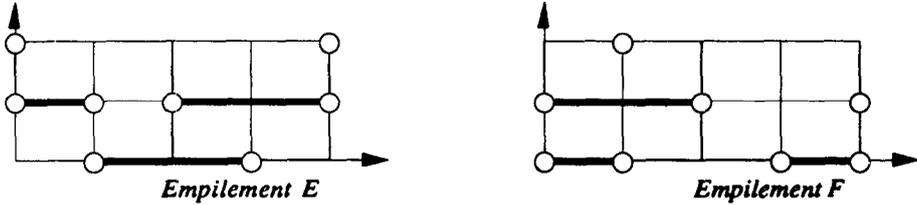
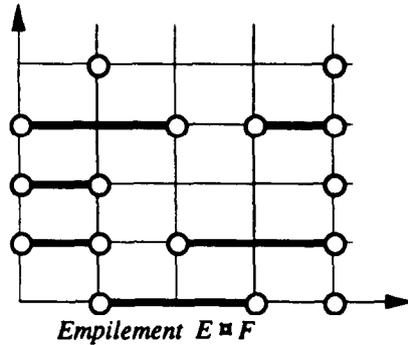


Fig. 1.2 Superposition de deux empilements.



Preuve. a) On construit les n_i et les \mathfrak{N}_i par récurrence montante sur le niveau des pièces de F . Ainsi, si $niv(P_i) = 0$, $\mathfrak{N}_i = \{n / \exists P \in E, niv(P) = n, P \cap P_i\}$, et $n_i = 0$ si \mathfrak{N}_i est vide, et sinon n_i vaut $1 + \max(\mathfrak{N}_i)$.

Supposons avoir construit n_i et \mathfrak{N}_i pour toutes les pièces P_i de niveau strictement inférieur à m , $m \geq 1$. Soit alors P_i une pièce de niveau m ; on connaît, d'après l'hypothèse de récurrence, les valeurs de n_j pour toutes les pièces P_j en concurrence avec P_i et de niveau strictement inférieur. On en déduit les valeurs de \mathfrak{N}_i et de n_i .

b) Vérifions que les conditions (i) et (ii) de la définition 1.1 sont satisfaites.

La condition (ii) est vérifiée du fait de la définition de n_i et \mathfrak{N}_i .

Par ailleurs, considérons deux segments P et P' de E' , distincts et en concurrence. Trois cas sont possibles :

- P et P' sont deux pièces de E ; elles ne sont donc pas au même niveau, puisque E est un empilement ;

- P est une pièce de E et $P' = \text{supp}(P_i) \times \{n_i\}$ provient de l'empilement F . Alors $niv(P)$ est élément de \mathfrak{N}_i et donc $niv(P') = n_i$ est strictement plus grand que $niv(P)$.

- P et P' proviennent de l'empilement F ; on a par exemple $P = \text{supp}(P_i) \times \{n_i\}$, $P' = \text{supp}(P_j) \times \{n_j\}$, avec $niv(P_j) < niv(P_i)$. Alors n_j est élément de \mathfrak{N}_i et donc n_j est strictement plus petit que n_i .

Dans tous les cas, les pièces P et P' sont de niveau distinct, et la condition (i) est satisfaite: l'ensemble E' est bien un empilement. \square

Remarque.

L'opération de superposition, notée \square , est associative ; on utilisera donc par la suite des écritures non parenthésées. Elle possède un élément neutre, qui est l'empilement vide. L'ensemble des empilements de segments, muni de cette opération, est en fait un monoïde partiellement commutatif au sens de Cartier et Foata [Ca-Fo]. Nous démontrons ce résultat en annexe.

En revanche, il est clair que l'opération \square n'est pas commutative.

2. EMPILEMENTS DE SEGMENTS : THÉORÈMES D'INVERSION

Ces théorèmes permettent d'énumérer certaines familles d'empilements relativement à une valuation donnée. Soit \mathbb{K} un corps commutatif, x_1, \dots, x_n des indéterminées ; on appellera valuation toute application

$$v : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{K} [x_1, \dots, x_n],$$

où \mathcal{A} est l'ensemble des segments $[a, b]$, $1 \leq a \leq b$, et vérifiant les conditions :

- pour tout élément s de \mathcal{A} , $v(s)$ est un polynôme en x_1, \dots, x_n sans coefficient constant ;
- pour tout monôme $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, le nombre de segments dont la valuation a une composante non nulle relativement à ce monôme est fini.

La valuation d'une pièce sera alors celle de son support. La valuation d'un empilement E , encore notée $v(E)$, sera le produit des valuations de ses pièces.

Les conditions imposées sur v assurent alors la convergence formelle de la série $\sum v(E)$, où la somme porte sur tous les empilements E de \mathcal{E} . Si \mathcal{E}' est un sous ensemble de \mathcal{E} , la somme des valuations des empilements de \mathcal{E}' converge encore et sera appelée série génératrice des empilements de \mathcal{E}' . De même, la série génératrice alternée des empilements de \mathcal{E}' sera la somme formelle $\sum (-1)^{|E|} v(E)$, prise sur tous les éléments de \mathcal{E}' , où $|E|$ désigne le nombre de pièces de E .

Les théorèmes d'inversion suivants permettent de calculer les séries génératrices de certaines familles d'empilements.

Le premier d'entre eux est l'analogie de l'inversion de Möbius pour les monoïdes partiellement commutatifs de Cartier et Foata [Ca-Fo]. Il permet d'énumérer les empilements généraux. Rappelons que la théorie, devenue classique, de l'inversion de Möbius pour les ensembles partiellement ordonnés a été exposée par Rota [Ro].

Le second est une généralisation due à Viennot [Vi1]. Etant donné un sous-ensemble \mathfrak{M} de \mathcal{A} , on dira, par abus de langage, qu'une pièce est dans \mathfrak{M} si son support s'y trouve. Ce second théorème permet d'énumérer les empilements dont toutes les pièces maximales (ou toutes les pièces minimales) sont dans \mathfrak{M} .

La preuve de ces deux résultats est présentée en annexe. Nous y démontrons aussi un troisième théorème d'inversion, nouveau et généralisant les deux premiers. Etant donnés deux sous-ensembles \mathfrak{M}_1 et \mathfrak{M}_2 de \mathcal{A} , il fournit la série génératrice des empilements ayant toutes leurs pièces maximales dans \mathfrak{M}_1 et toutes leurs pièces minimales dans \mathfrak{M}_2 . Il découle d'un lemme, qui, seul, nous sera utile dans le cadre des empilements de segments. Nous le donnons en (iii) de la proposition suivante.

Proposition 1.4. (i) La série génératrice des empilements de segments est :

$$\sum_{E \in \mathcal{E}} v(E) = \frac{1}{\sum_{F \in \mathcal{T}} (-1)^{|F|} v(F)},$$

où \mathcal{T} est l'ensemble des empilements triviaux, et $|F|$ désigne le nombre de pièces de F .

(ii) Soit \mathfrak{M} un sous-ensemble de \mathcal{A} . La série génératrice des empilements ayant toutes leurs pièces maximales (ou toutes leurs pièces minimales) dans \mathfrak{M} est :

$$\sum_{E / \text{Max}(E) \subset \mathfrak{M}} v(E) = \frac{\sum_{F \in \mathcal{T}(\mathfrak{M})} (-1)^{|F|} v(F)}{\sum_{F \in \mathcal{T}} (-1)^{|F|} v(F)}$$

où $\mathcal{T}(\mathfrak{M})$ est l'ensemble des empilements triviaux à pièces dans le complémentaire de \mathfrak{M} .

(iii) Soient \mathfrak{M}_1 et \mathfrak{M}_2 , deux sous-ensembles de \mathcal{A} . On a l'identité suivante :

$$\frac{\left(\sum_{F \in \mathcal{U}(\mathfrak{M}_1)} (-1)^{|F|} v(F) \right) \left(\sum_{F \in \mathcal{U}(\mathfrak{M}_2)} (-1)^{|F|} v(F) \right)}{\sum_{F \in \mathcal{U}} (-1)^{|F|} v(F)} = \sum_{(E,F)} (-1)^{|F|} v(E \square F),$$

où la somme apparaissant dans le membre de droite est relative aux couples (E, F) d'empilements vérifiant :

- les pièces maximales de E sont dans \mathfrak{M}_1 et ses pièces minimales dans \mathfrak{M}_2 ;
- F est un empilement trivial à pièces dans l'intersection des complémentaires de \mathfrak{M}_1 et \mathfrak{M}_2 ;
- E et F ne sont pas en concurrence.

Remarques.

1) Pour $\mathfrak{M} = \mathcal{A}$, (ii) redonne (i).

2) Si l'intersection des complémentaires de \mathfrak{M}_1 et \mathfrak{M}_2 est vide, (iii) fournit exactement la série génératrice des empilements dont toutes les pièces maximales (resp. minimales) sont dans \mathfrak{M}_1 (resp. \mathfrak{M}_2), car F ne peut être que l'empilement vide. En particulier, si $\mathfrak{M}_2 = \mathcal{A}$, (iii) redonne (ii).

3. BIJECTION ENTRE LES POLYOMINOS PARALLÉLOGRAMMES ET LES DEMI-PYRAMIDES DE SEGMENTS

Notations. On utilise les notations usuelles intervenant dans l'étude des fonctions hypergéométriques basiques :

$$(a)_0 = 1,$$

$$(a)_n = \prod_{i=0}^{n-1} (1 - a q^i), \quad n \geq 1,$$

$$(a)_\infty = \prod_{i \geq 0} (1 - a q^i).$$

On note par ailleurs $[n]!$ le q -analogue de la factorielle de n , soit $\frac{(q)_n}{(1-q)^n}$, ou encore

$$1(1+q)(1+q+q^2)\dots(1+q+\dots+q^{n-1}).$$

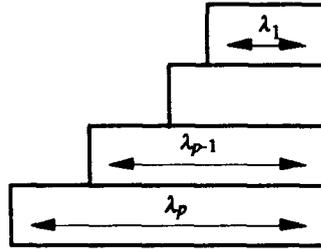
Diagrammes de Ferrers. Polyominos parallélogrammes

Soit P un polyomino. La *hauteur* (resp. *largeur*) de P est son nombre de lignes (resp. colonnes). La *hauteur* d'une colonne de P est son nombre de cellules. La *hauteur à gauche* (resp. *à droite*) de P est la hauteur de sa colonne la plus à gauche (resp. à droite).

Soit n un entier positif. On appelle *partition* de n à p parts toute suite $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$, où $p \geq 0$ et $1 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_p$, telle que $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p = n$.

On représente usuellement les partitions par des *diagrammes de Ferrers* (Fig.1.3). Remarquons qu'un diagramme de Ferrers est un polyomino convexe.

Fig. 1.3
Diagramme de Ferrers associé
à la partition $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$.



Exemple. Le diagramme correspondant à la partition 1, 3, 4, 4 est le suivant.

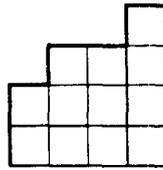


Fig. 1.4

L'énumération des partitions est classique. On peut à ce sujet se référer au livre d'Andrews [An1]. La série génératrice des partitions, comptées suivant leur nombre de parts (par y) et le nombre qu'elles partitionnent (par q) est $\frac{1}{(yq)_\infty}$. C'est bien sûr aussi la série génératrice des diagrammes de Ferrers comptés suivant la hauteur (ou la largeur) et l'aire, par y et q respectivement.

La série génératrice des diagrammes de Ferrers de largeur n (ou encore des partitions dont la plus grande part est n), comptés suivant les mêmes paramètres est $\frac{yq^n}{(yq)_n}$. Celle des diagrammes de Ferrers de largeur inférieure ou égale à n (ou des partitions dont toutes les parts sont inférieures ou égales à n) est $\frac{1}{(yq)_n}$.

On appelle *diagramme de Ferrers gauche* tout couple de diagrammes de Ferrers (P, P') tel que P' soit inclus dans P .

Un *polyomino parallélogramme* est un polyomino dont la frontière est la réunion de deux chemins non vides ne faisant que des pas Nord et Est, et n'ayant pour tous points d'intersection que leurs extrémités (Fig.1.6). Un tel polyomino est convexe. Les polyominos parallélogrammes sont en bijection avec les diagrammes de Ferrers gauches, comme l'indique le schéma suivant.

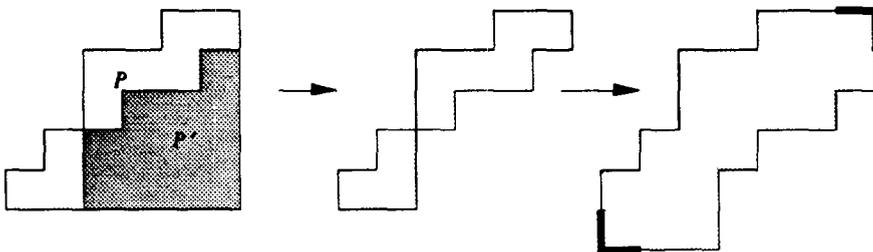


Fig. 1.5 *Bijection entre diagrammes de Ferrers gauches et polyominos parallélogrammes.*

Soit P un polyomino parallélogramme à n colonnes, notées, de gauche à droite, C_1, \dots, C_n . Pour $1 \leq i \leq n$, soit b_i la hauteur de la colonne C_i . Pour $2 \leq i \leq n$, soit a_i le nombre de cellules par lesquelles les colonnes C_i et C_{i-1} sont en contact, et posons $a_1 = 1$ (Fig. 1.6).

On a $a_1 \leq b_1$, et, pour $i \geq 2$, $a_i \leq \min(b_i, b_{i-1})$.

Exemple. Pour le polyomino parallélogramme suivant :

- $n = 8$,
- $(b_1, \dots, b_n) = (3, 4, 3, 4, 4, 2, 2, 2)$,
- $(a_1, \dots, a_n) = (1, 3, 3, 3, 3, 1, 2, 2)$.

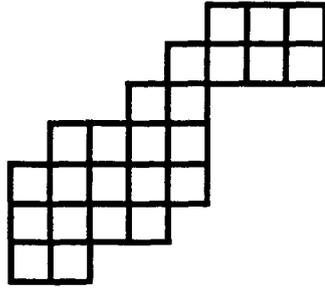


Fig. 1.6

Définition 1.5. Soit f l'application qui, à un polyomino parallélogramme P , associe l'empilement $f(P) = E_n \# \dots \# E_1$, où :

- E_i est l'empilement réduit à la pièce $[a_i, b_i] \times \{0\}$,
- (a_1, \dots, a_n) et (b_1, \dots, b_n) sont les deux n -uplets associés à P comme ci-dessus.

Notation. Si P est un polyomino parallélogramme réduit à une seule colonne de hauteur b , $f(P) = \{[1, b] \times \{0\}\}$.

Si P est un polyomino parallélogramme ayant n colonnes, avec $n \geq 2$, on notera P' le polyomino parallélogramme obtenu en enlevant à P sa colonne la plus à droite, c'est à dire C_n .

Alors $f(P) = \{[a_n, b_n] \times \{0\}\} \# f(P')$, et ceci permet de construire $f(P)$ par récurrence.

Exemple. L'image par f du polyomino de la figure 1.6 est :

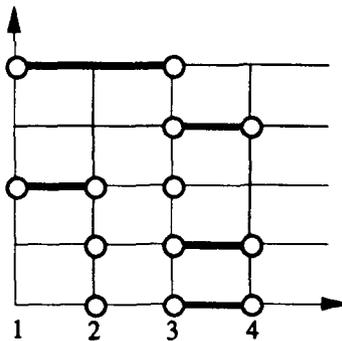


Fig. 1.7 L' image par f du polyomino de la figure 1.6.

Remarquons que sur cet exemple, $f(P)$ est une pyramide, de pièce maximale de support $[1, 3]$. Ce résultat est en fait général.

Définition 1.6. Une *demi-pyramide de segments* est une pyramide de pièce maximale de support $[1, b]$, $b \geq 1$.

Lemme 1.7. Soit P un polyomino parallélogramme à n colonnes.

(i) La pièce $[a_n, b_n] \times \{0\}$ est la plus à gauche des pièces minimales de $f(P)$.

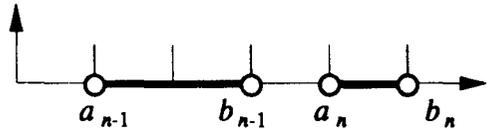
(ii) L'empilement $f(P)$ est une demi-pyramide de segments.

Preuve. On utilise les notations de la définition 1.5 et on raisonne par récurrence sur le nombre de colonnes de P . Si P est réduit à une colonne, les deux résultats sont évidents.

Si P présente n colonnes, avec $n \geq 2$, alors $f(P) = \{ [a_n, b_n] \times \{0\} \} \sqcup f(P')$.

(i) Si la plus à gauche des pièces minimales de $f(P)$ n'est pas $[a_n, b_n] \times \{0\}$, c'est aussi la plus à gauche des pièces minimales de $f(P')$, c'est à dire, par hypothèse de récurrence, $[a_{n-1}, b_{n-1}] \times \{0\}$. Mais alors (Fig.1.8), $b_{n-1} < a_n$, ce qui, d'après les propriétés des n -uplets (a_1, \dots, a_n) et (b_1, \dots, b_n) , est absurde.

Fig. 1.8



(ii) L'empilement $f(P')$ est une demi-pyramide. Si $f(P)$ n'en est pas une, c'est que la pièce rajoutée, $[a_n, b_n] \times \{0\}$ est non seulement minimale, mais aussi maximale. Mais alors toute pièce minimale de $f(P')$ est aussi minimale dans $f(P)$, et située à gauche de $[a_n, b_n] \times \{0\}$, ce qui est absurde d'après (i). □

Proposition 1.8. (i) L'application f définie en 1.5 est une bijection entre les polyominos parallélogrammes et les demi-pyramides de segments.

(ii) Soit P un polyomino parallélogramme :

- la largeur de P est égale au nombre de pièces de $f(P)$;
- la hauteur de P est la somme des longueurs des pièces de $f(P)$, augmentée d'un;
- l'aire de P est la somme des abscisses des extrémités droites des pièces de $f(P)$.

(La longueur d'une pièce de support $[a, b]$ est bien sûr $b-a$).

Preuve. Montrons d'abord (ii), à partir de la définition 1.5 de f .

Soit P un polyomino parallélogramme à n colonnes.

Alors $f(P) = \{ [a_n, b_n] \times \{0\} \} \sqcup \dots \sqcup \{ [a_1, b_1] \times \{0\} \}$, et donc $f(P)$ a bien n pièces.

La hauteur de P est (Fig.1.9) :

$$b_1 + (b_2 - a_2) + \dots + (b_n - a_n),$$

c'est à dire

$$1 + \sum_{i=1}^n (b_i - a_i),$$

ce qui démontre la deuxième assertion.

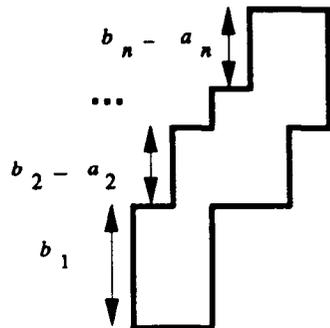


Fig. 1.9

L'aire de P est la somme des hauteurs de ses colonnes, soit $b_1 + b_2 + \dots + b_n$, ce qui fournit le troisième point.

(i) Montrons, par récurrence sur le nombre n de pièces de E , le résultat suivant : si E est une demi-pyramide de segments, il existe un et un seul polyomino parallélogramme P tel que $f(P) = E$.

Si $n = 1$, $E = \{[1, b] \times \{0\}\}$, et le polyomino parallélogramme réduit à une colonne de hauteur b est le seul antécédent de E par f .

Soit $n \geq 2$, et supposons le résultat vrai pour les demi-pyramides à $n-1$ pièces. Soit E une demi-pyramide à n pièces. Soit $[a, b] \times \{0\}$ la plus à gauche de ses pièces minimales, et soit E' l'unique empilement tel que $E = \{[a, b] \times \{0\}\} \sqcup E'$ (cf. lemme 3 de l'annexe). Alors, E' est une demi-pyramide à $n-1$ pièces.

Si P est un polyomino parallélogramme tel que $f(P) = E$, on a, avec les notations usuelles:

$$E = f(P) = \{[a_n, b_n] \times \{0\}\} \sqcup f(P')$$

D'après le lemme 1.7, $[a_n, b_n] \times \{0\}$ est la plus à gauche des pièces minimales de E , donc $a_n = a$ et $b_n = b$. D'autre part, $f(P') = E'$, et par hypothèse de récurrence, ceci détermine P' de façon unique.

Le polyomino P se déduit alors de P' en "collant" une colonne de hauteur b_n à droite de P' , de telle sorte que cette colonne et la dernière colonne de P' , de hauteur b_{n-1} , soient en contact par a_n cellules. Ceci n'est possible que pour $a_n \leq b_{n-1}$. Mais cette inégalité est bien vérifiée, sans quoi la pièce $[a_{n-1}, b_{n-1}] \times \{0\}$ serait minimale dans $f(P)$ et à gauche de $[a, b] \times \{0\}$, ce qui est absurde. \square

Exemple.

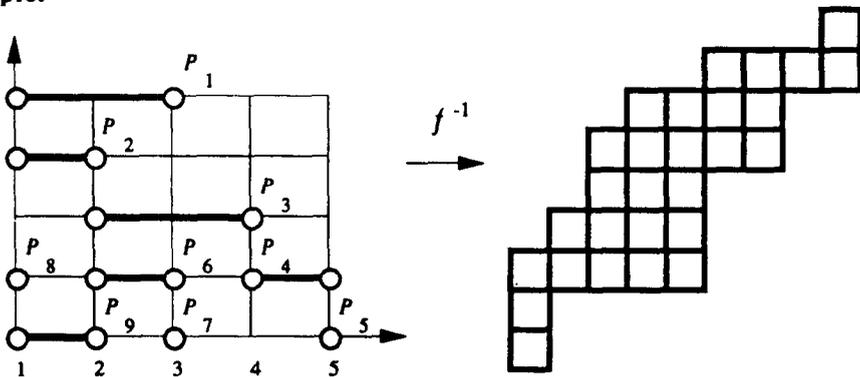


Fig. 1.10 Bijection réciproque de f .

Cette proposition ramène ainsi toute énumération de polyomino parallélogrammes à une énumération de demi-pyramides de segments convenablement valuées. Soit v la valuation définie par $v([a, b]) = x y^{b-a} q^b$.

Corollaire 1.9. Soit $X(x, y, q)$ la série génératrice des polyomino parallélogrammes comptés suivant la largeur (par x), la hauteur (par y), et l'aire (par q). Soit \bar{X} celle des demi-pyramides de segments valués par v . Alors $X = y\bar{X}$.

Nous allons désormais pouvoir appliquer les théorèmes d'inversion rappelés dans le second paragraphe à l'énumération de certaines demi-pyramides de segments - et donc à celle de certains polyominos parallélogrammes -.

Ainsi, nous retrouvons tout d'abord le résultat de Delest et Fedou [De-Fe, Fe2], relatif à l'énumération des polyominos parallélogrammes, en le précisant un peu : en effet, la série génératrice donnée ici prend en compte non seulement le nombre de colonnes et l'aire du polyomino, mais aussi le nombre de ses lignes, ce qui est nouveau. Toutefois, la symétrie de cette série en x et y , qui est évidente, n'apparaît pas dans cette première écriture. Nous donnons alors d'autres expressions pour cette série, dont son développement en fraction continue, dans lesquelles la symétrie en x et y apparaît clairement.

Nous appliquerons ensuite, dans le second chapitre, les théorèmes d'inversion pour évaluer la série génératrice des polyominos parallélogramme dont la hauteur à droite et/ou à gauche est fixée. Nous verrons en effet que le dénombrement des polyominos convexes dirigés et convexes utilise ces résultats.

4. ÉNUMÉRATION DES POLYOMINOS PARALLÉLOGRAMMES

Proposition 1.10. *La série génératrice $X(x, y, q)$ des polyominos parallélogrammes, comptés suivant la largeur (par x), la hauteur (par y), et l'aire (par q) est :*

$$X = -y \frac{\hat{N}}{N},$$

$$\text{avec } \hat{N} = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n x^n q^{\binom{n+1}{2}}}{(q)_{n-1} (yq)_n} \text{ et } N = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^n q^{\binom{n+1}{2}}}{(q)_n (yq)_n}.$$

Preuve. D'après le corollaire 1.9, on est ramené à énumérer les demi-pyramides de segments ; or, un empilement non vide est une demi-pyramide si et seulement si toutes ses pièces maximales sont à support dans l'ensemble $\mathfrak{M} = \{ [1, b], b \geq 1 \}$.

La proposition 1.4 (ii) fournit alors la série génératrice \bar{X} des demi-pyramides de segments sous la forme :

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \frac{\sum_{F \in \mathfrak{U}(\mathfrak{M})} (-1)^{|F|} v(F)}{\sum_{F \in \mathfrak{U}} (-1)^{|F|} v(F)} - 1, \\ &= -\frac{\hat{N}}{N}, \end{aligned}$$

où N est la série génératrice alternée des empilements triviaux et \hat{N} celle des empilements triviaux ayant au moins une pièce dans \mathfrak{M} . Le lemme suivant évalue N et \hat{N} .

Lemme 1.11. (i) *La série génératrice alternée des empilements triviaux est :*

$$N = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^n q^{\binom{n+1}{2}}}{(q)_n (yq)_n}.$$

(ii) La série génératrice alternée des empilements triviaux ayant une pièce à support dans $\{[1, b], b \geq 1\}$ est :

$$\hat{N} = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n x^n q^{\binom{n+1}{2}}}{(q)_{n-1} (yq)_n}.$$

Preuve. Il existe une bijection g entre les empilements triviaux à n pièces et les couples (α, β) de partitions à parts inférieures ou égales à n telle que, si $F = \{[a_i, b_i] \times \{0\}, 1 \leq i \leq n\}$ est un empilement trivial et $g(F) = (\alpha, \beta)$:

- le nombre de parts de β est $\sum_{1 \leq i \leq n} (b_i - a_i)$,
- si $|\alpha|$ (resp. $|\beta|$) désigne le nombre que partitionne α (resp. β), alors

$$\sum_{1 \leq i \leq n} b_i = \binom{n+1}{2} + |\alpha| + |\beta|.$$

En effet, soit $F = \{[a_i, b_i] \times \{0\}, 1 \leq i \leq n\}$, $1 \leq a_1 \leq b_1 < a_2 \leq b_2 < \dots < a_n \leq b_n$.

Posons $b_0 = 0$, et, pour $1 \leq i \leq n$, définissons α_i et β_i par (Fig.1.11) :

$$\begin{cases} \alpha_i = a_i - b_{i-1} - 1, \\ \beta_i = b_i - a_i. \end{cases}$$

On a alors :

$$\begin{cases} a_i = i + \sum_{k=1}^{i-1} (\alpha_k + \beta_k) + \alpha_i \\ b_i = i + \sum_{k=1}^i (\alpha_k + \beta_k) \end{cases} \text{ pour } 1 \leq i \leq n.$$

Les conditions $a_i \leq b_i$ et $b_i < a_{i+1}$ entraînent que $\alpha_i \geq 0$ et $\beta_i \geq 0$ pour tout i .

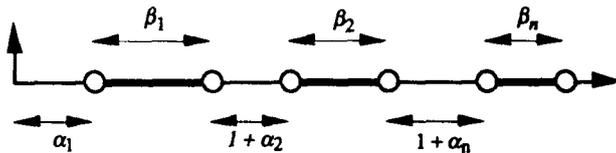


Fig. 1.11

On associe alors à F le couple $g(F) = (\alpha, \beta)$, où α (resp. β) est la partition ayant α_{n-i+1} (resp. β_{n-i+1}) parts égales à i , $1 \leq i \leq n$. On vérifie aisément que l'application g satisfait les propriétés annoncées.

De plus, F a une pièce à support dans $\{[1, b], b \geq 1\}$ si et seulement si $\alpha_1 = 0$, c'est à dire si et seulement si α est à parts inférieures ou égales à $n-1$.

Le lemme découle alors des résultats relatifs à l'énumération des partitions rappelés au début de ce paragraphe. Il entraîne la proposition 1.10.□

Remarque. Lorsque y vaut un, on retrouve le résultat de Delest et Fedou [De-Fe], relatif à l'énumération des polyominos parallélogrammes suivant le nombre de colonnes et l'aire. La série génératrice obtenue s'écrit :

$$X(x, 1, q) = (1 - q) \frac{I_1\left(\frac{xq}{(1-q)^2}; q\right)}{I_0\left(\frac{xq}{(1-q)^2}; q\right)},$$

où $I_m(t; q) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n t^{n+m} q^{\binom{n+m}{2}}}{[n]! [n+m]!}.$

La série I_m est ainsi le q -analogue d'une fonction voisine de la fonction de Bessel d'ordre m . Rappelons que celle-ci est définie par :

$$J_m(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n \left(\frac{t}{2}\right)^{2n+m}}{n! (n+m)!}.$$

5. EXPRESSIONS SYMÉTRIQUES POUR LA SÉRIE GÉNÉRATRICE DES POLYOMINOS PARALLÉLOGRAMMES

Les distributions des deux paramètres largeur et hauteur, sur les polyominos parallélogrammes, sont identiques. Donc la fonction $X(x, y, q)$ doit être symétrique en x et y . Pourtant, cette symétrie n'apparaît pas dans l'expression donnée dans la proposition 1.10 précédente. Toutefois, une transformation simple aboutit à une écriture symétrique en x et y .

Proposition 1.12. *La série génératrice de polyominos parallélogrammes est :*

$$X(x, y, q) = xyq \frac{L(xq, yq)}{L(x, y)},$$

avec $L(x, y) = \sum_{n \geq 0, m \geq 0} \frac{(-1)^{n+m} x^n y^m q^{\binom{n+m+1}{2}}}{(q)_n (q)_m}.$

Lemme 1.13. $(aq)_- = \sum_{m \geq 0} \frac{(-1)^m a^m q^{\binom{m+1}{2}}}{(q)_m}.$

Preuve. Remarquons que $(aq)_-$ est la série génératrice alternée des empilements triviaux de points, c'est à dire de segments de longueur nulle, valués par leur nombre de pièces (par a), et la somme des abscisses des pièces (par q). En reprenant la bijection g définie dans la preuve du lemme 1.11, on constate que ces empilements sont en bijection avec les couples de partitions (α, β) où β est vide. Le résultat s'en déduit. □

Preuve de la proposition 1.12. Il suffit de multiplier par $(yq)_-$ le numérateur \hat{N} et le dénominateur N de l'expression de la proposition 1.10 donnant X .

$$\text{Il vient ainsi : } (yq)_- N = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^n q^{\binom{n+1}{2}} (yq^{n+1})_-}{(q)_n}.$$

En appliquant le lemme 1.13 avec $a = yq^n$, on obtient :

$$\begin{aligned} (yq)_- N &= \sum_{n \geq 0, m \geq 0} \frac{(-1)^{n+m} x^n y^m q^{\binom{n+1}{2}} q^{\binom{m+1}{2}} q^{mn}}{(q)_n (q)_m} \\ &= \sum_{n \geq 0, m \geq 0} \frac{(-1)^{n+m} x^n y^m q^{\binom{n+m+1}{2}}}{(q)_n (q)_m} \\ &= L(x, y). \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} -y(yq)_- \hat{N} &= y \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1} x^n q^{\binom{n+1}{2}} (yq^{n+1})_-}{(q)_{n-1}} \\ &= y \sum_{n \geq 1, m \geq 0} \frac{(-1)^{n+m+1} x^n y^m q^{\binom{n+1}{2}} q^{\binom{m+1}{2}} q^{mn}}{(q)_{n-1} (q)_m} \\ &= xyq L(xq, yq). \quad \square \end{aligned}$$

Lemme 1.14. L'application L définie dans la proposition 1.12 par

$$L(x, y) = \sum_{n \geq 0, m \geq 0} \frac{(-1)^{n+m} x^n y^m q^{\binom{n+m+1}{2}}}{(q)_n (q)_m}$$

est l'unique série formelle solution de la q -équation en H :

$$H(x, y) = (1 - q(x + y)) H(xq, yq) - xyq^3 H(xq^2, yq^2), \quad (E)$$

vérifiant $H(0, 0) = 1$.

Preuve. La fonction $H(x, y) = \sum_{n \geq 0, m \geq 0} x^n y^m H_{n, m}$ est solution de l'équation (E) si et seulement si on a simultanément :

$$(1 - q^n) H_{n, 0} = -q^n H_{n-1, 0} \quad \text{pour } n \geq 1,$$

$$(1 - q^n) H_{0, n} = -q^n H_{0, n-1} \quad \text{pour } n \geq 1,$$

$$(1 - q^{n+m}) H_{n, m} = -q^{n+m} (H_{n-1, m} + H_{n, m-1}) - q^{2n+2m+1} H_{n-1, m-1} \quad \text{pour } n \geq 1 \text{ et } m \geq 1.$$

Ces trois équations sont équivalentes aux trois suivantes :

$$H_{0,n} = H_{n,0},$$

$$H_{n,0} = \frac{(-1)^n q^{\binom{n+1}{2}}}{(q)_n} H_{0,0},$$

$$(1 - q^{n+m})H_{n,m} = -q^{n+m} (H_{n-1,m} + H_{n,m-1}) - q^{2n+2m+1} H_{n-1,m-1} \text{ pour } n \geq 1 \text{ et } m \geq 1.$$

Nous allons prouver que, si $H_{0,0}$ est fixé, les $H_{n,m}$ sont entièrement déterminés par ces équations.

Montrons par récurrence sur i la propriété suivante :

pour tout $n \geq 0$, $H_{n,i}$ et $H_{i,n}$ s'écrivent comme le produit de $H_{0,0}$ par une fraction rationnelle en q .

Ce résultat est vrai pour $i = 0$. Supposons qu'il soit vrai pour l'entier i . La troisième des équations ci-dessus permet alors d'exprimer $H_{n,i+1}$ en fonction de $H_{n,i}$ et $H_{n-1,i}$, qui, par hypothèse, ont la forme désirée, et de $H_{n-1,i+1}$. Une récurrence sur n achève alors la preuve, car $H_{0,i+1}$ est de la forme annoncée. On évalue de même $H_{i,n+1}$ pour tout n .

Donc, si $H_{0,0}$ est une série formelle en q , il existe une unique solution de l'équation (E) telle que $H(0,0) = H_{0,0}$. En particulier, il existe une unique solution de (E) telle que $H(0,0) = 1$.

Pour montrer que cette unique solution est la fonction L , il suffit de vérifier que les

récurrences ci-dessus sont bien satisfaites par les $L_{n,m} = \frac{(-1)^{n+m} q^{\binom{n+m+1}{2}}}{(q)_n (q)_m}$, ce qui se fait simplement. □

Lemme 1.15. *La série $L(x, y)$ définie dans Proposition. 1.12 est égale au déterminant suivant:*

$$\begin{vmatrix} 1 - q(x+y) & xyq^3 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 - q^2(x+y) & xyq^5 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 1 - q^3(x+y) & xyq^7 & 0 \\ \dots & 0 & 1 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Preuve. Il suffit de vérifier que ce déterminant satisfait bien la même équation que L , ce qui s'obtient en le développant par exemple par rapport à la première ligne. □

Corollaire 1.16. *La série génératrice des polyominos parallélogrammes admet le développement en fraction continue suivant :*

$$X(x, y, q) = \frac{xyq}{1 - q(x+y) - \frac{xyq^3}{1 - q^3(x+y) - \frac{xyq^5}{1 - q^5(x+y) - \frac{xyq^7}{1 - \dots}}}}.$$

Preuve. Divisons par $L(xq, yq)$ l'équation du lemme 1.14, appliquée à $H = L$.

Il vient : $\frac{L(x, y)}{L(xq, yq)} = 1 - q(x + y) - xyq^3 \frac{L(xq^2, yq^2)}{L(xq, yq)}$, ce qui s'écrit encore, puisque

$$X = xyq \frac{L(xq, yq)}{L(x, y)} :$$

$$X(x, y, q) = \frac{xyq}{1 - q(x + y) - X(xq, yq, q)} ,$$

et entraîne le développement en fraction continue annoncé. □

Remarque. Ce résultat, dû à Gessel [Ge], se démontre simplement en combinant :

- d'une part la théorie générale de Flajolet [Fl] interprétant les fractions continues de Jacobi comme somme de poids de certains chemins valués, appelés chemins de Motzkin,
- d'autre part la bijection classique entre polyominos parallélogrammes et chemins de Motzkin colorés (voir par exemple Delest, Viennot [De-Vi]), que nous rappelons dans le chapitre 8.

6. POLYOMINOS PARALLÉLOGRAMMES ET IDENTITÉS DE ROGERS-RAMANUJAN

En s'inspirant d'un article de Viennot [Vi2], interprétant les membres de gauche des identités de Rogers-Ramanujan en termes d'empilements de *dominos*, c'est à dire de segments de longueur un, on peut définir certaines classes de polyominos parallélogrammes dont la série génératrice est liée aux identités de Rogers-Ramanujan. Rappelons ces deux remarquables identités :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{q^{n^2}}{(q)_n} = \prod_{n \geq 0} \frac{1}{(1 - q^{5n+1})(1 - q^{5n+4})} ,$$

$$\sum_{n \geq 0} \frac{q^{n^2+n}}{(q)_n} = \prod_{n \geq 0} \frac{1}{(1 - q^{5n+2})(1 - q^{5n+3})} .$$

Proposition 1.17. (i) La série génératrice alternée des empilements triviaux de dominos, valués par la valuation usuelle v est :

$$R_I = \sum_{n \geq 0} \frac{(-xyq)^n q^{n^2}}{(q)_n} .$$

(ii) La série génératrice alternée des empilements triviaux de dominos ne contenant pas la pièce $[1, 2] \times \{0\}$ est :

$$R_{II} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-xyq)^n q^{n^2+n}}{(q)_n} .$$

Preuve. (i) Par la bijection g décrite dans la preuve du lemme 1.11, les empilements triviaux de dominos sont en bijection avec les couples de partitions (α, β) , où β a une part et une seule égale à i , pour $1 \leq i \leq n$. Ceci prouve (i).

(ii) Considérons la translation à droite t définie par :

$$t(\{[a_i, b_i] \times \{0\}, 1 \leq i \leq n\}) = \{[a_i + 1, b_i + 1] \times \{0\}, 1 \leq i \leq n\}.$$

Elle envoie bijectivement les empilements triviaux de dominos sur les empilements triviaux de dominos sans pièce de support $[1, 2]$. De plus, si F a n pièces, $v(t(F)) = q^n v(F)$, ce qui fournit l'expression de R_{II} . \square

Définition 1.18. Un polyomino parallélogramme à n colonnes est *en escalier* si les deux n -uplets le caractérisant définis au début du paragraphe 3, (a_1, \dots, a_n) et (b_1, \dots, b_n) , vérifient :

(i) $b_1 \geq 2$,

(ii) $b_i = a_i + 1$, pour $2 \leq i \leq n$.

Par commodité, on conviendra que le polyomino vide est en escalier.

Exemple. Le polyomino suivant est en escalier.

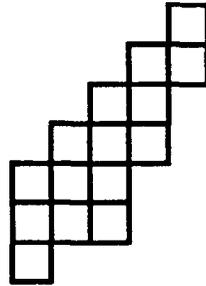


Fig. 1.12
Un polyomino en escalier.

Corollaire 1.19. (i) La série génératrice des polyominos en escalier, comptés suivant la largeur (par x) et l'aire (par q) est $\frac{1}{R_I}$, pris en $y = 1$.

(ii) La série génératrice des polyominos en escalier dont la première colonne est de hauteur 2, comptés suivant les mêmes paramètres, est $\frac{R_{II}}{R_I}$, pris en $y = 1$.

Preuve. (i) Les polyominos parallélogrammes en escalier sont en bijection avec les empilements de dominos. En effet, le polyomino parallélogramme P est en escalier si et seulement si toutes les pièces de la demi-pyramide $f(P)$ sont des dominos, à l'exception de sa pièce maximale, de support $[1, b_1]$, avec $b_1 \geq 2$. En remplaçant cette pièce maximale par la pièce maximale de support $[b_1 - 1, b_1]$, on obtient un empilement de dominos E' . De plus, cette transformation est réversible, car la pièce modifiée, $[b_1 - 1, b_1]$, est la plus à droite des pièces maximales de E' . La valuation (en x et q) de E' est la même que celle de $f(P)$. Le premier résultat s'en déduit par application du premier théorème d'inversion de la proposition 1.4.

(ii) Le polyomino parallélogramme P est en escalier et a sa première colonne de hauteur deux si et seulement si $f(P)$ est une demi-pyramide de dominos. On applique alors le deuxième théorème d'inversion de la proposition 1.4. \square

Remarques. 1) Cette seconde sous-classe de polyominos est en bijection avec les *murs de cercles*, qui apparaissent en physique comme modèles d'agrégats [Pr-Sv]. Cette bijection peut être schématisée comme suit :

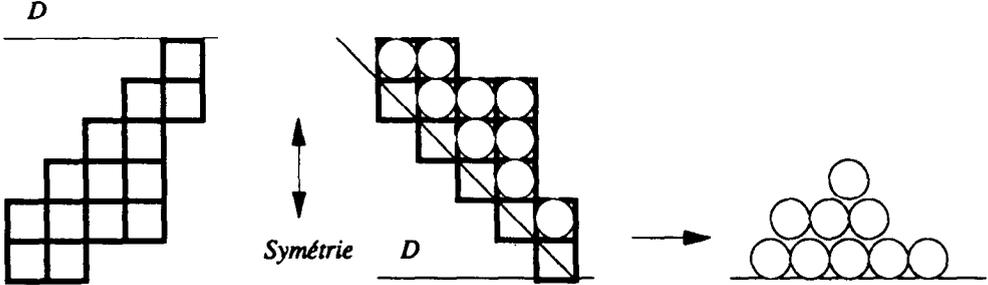


Fig. 1.13 Polyominos en escalier et murs de cercles.

Par ce qui précède, la série génératrice des murs de cercles, comptés suivant le nombre total de cercles (par q) et le nombre de cercles de la base (par x) est exactement le rapport suivant :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-x)^n q^{n+n^2}}{(q)_n} \bigg/ \sum_{n \geq 0} \frac{(-x)^n q^{n^2}}{(q)_n},$$

c'est à dire encore la célèbre fraction continue de Ramanujan,
$$\frac{1}{1 - \frac{xq}{1 - \frac{xq^2}{1 - \frac{xq^3}{1 - \dots}}}}$$

2) Soit n un entier positif. On appelle D -partition de n à p parts toute partition $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ de n où $\lambda_i + 2 \leq \lambda_{i+1}$ pour tout i . Il est alors bien classique que la membre gauche de la première (resp. seconde) identité de Rogers-Ramanujan est la série génératrice des D -partitions (resp. sans part égale à un), comptées suivant le nombre qu'elles partitionnent (par q) et leur nombre de parts (par x). Les résultats de la proposition 1.17 sont équivalents à cette assertion. En effet, les D -partitions sont en bijection avec les empilements triviaux de dominos, comme l'indique le schéma suivant.

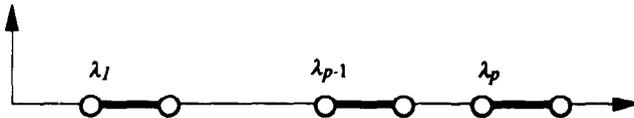


Fig. 1.14 Équivalence entre D -partitions et empilements triviaux de dominos.

3) Soit n un entier positif. On appelle *quasi-partition* de n à p parts toute suite $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$, où $p \geq 0$ et $1 \leq \lambda_i \leq \lambda_{i+1} + 1$ pour tout i , telle que $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p = n$.

Andrews [An2] démontre que
$$\frac{1}{\sum_{n \geq 0} \frac{(-x)^n q^{n^2}}{(q)_n}}$$
 est la série génératrice des quasi-partitions,

comptées suivant leur nombre de parts (par x) et le nombre qu'elles partitionnent (par q). Viennot [Vi2] redémontre bijectivement ce résultat. Cette interprétation est tout à fait équivalente à celle que nous donnons ici. En effet, les quasi-partitions sont trivialement en bijection avec les polyominos parallélogrammes en escalier, comme le suggère le schéma suivant :

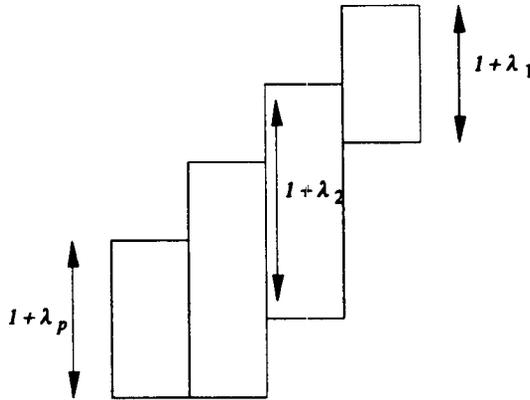


Fig. 1.15 Représentation d'une quasi-partition par un polyomino parallélogramme en escalier.

Références.

- [An1] G.E. ANDREWS, The theory of plane partitions, Vol n° 2, Encyclopedia of Math. and its appl., G.C. Rota ed., Add. Wesley Reading, 1976.
- [An2] G.E. ANDREWS, The Rogers-Ramanujan reciprocal and Minc's partition function, Pacific J. of Math. 95 (1981) 251-256.
- [Ca-Fo] P. CARTIER, D. FOATA, Problèmes combinatoires de commutations et réarrangements, Lect. Notes in Math. 85, Springer-Verlag, Berlin, 1969.
- [De-Fe] M.P. DELEST, J.M. FEDOU, Enumeration of skew Ferrers diagrams, à paraître dans Discr. Math.
- [De-Vi] M.P. DELEST, G. VIENNOT, Algebraic languages and polyominoes enumeration, Theor. Comp.Sci. 34 (1984) 169-206, North-Holland.
- [Fe1] J.M. FEDOU, Grammaires et q -énumération de polyominos, Thèse de Doctorat, Université Bordeaux I, 1989.
- [Fe2] J.M. FEDOU, Enumeration of skew Ferrers diagrams and basic Bessel functions, à paraître dans les actes de "Second conference on lattice paths and combinatorics and applications", Hamilton, 1990.
- [Fl] P. FLAJOLET, Combinatorial aspects of continued fractions, Discr. Math. 41 (1982) 145-153.
- [Ge] I. GESSEL, A noncommutative generalization and q -analog of the Lagrange inversion formula, Trans. Amer. Math. Soc. 257 (1980) 455-482.
- [Pr-Sv] V. PRIVMAN, N.M. SVRAKIC, Directed models of polymers, interfaces and clusters : scaling and finite-size properties, Lect. Notes in Phys. 338 (1989), Springer-Verlag.
- [Ro] G.C. ROTA, On the foundations of combinatorial theory I, Theory of Möbius functions, Zeit. für Wahr 2 (1964) 340-368.
- [Vi1] X.G. VIENNOT, Heaps of pieces I : Basic definitions and combinatorial lemmas, in *Combinatoire énumérative*, eds. G Labelle et P. Leroux, Lect. Notes in Math. 1234, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [Vi2] X.G. VIENNOT, Bijections for the Rogers-Ramanujan reciprocal, J. India. Math. Soc. 52 (1987) 171-173.

CHAPITRE 2

POLYOMINOS CONVEXES DIRIGÉS ET POLYOMINOS CONVEXES

1. PLUSIEURS FAMILLES DE POLYOMINOS CONVEXES

Rappelons qu'un polyomino est convexe lorsque toutes ses intersections avec les colonnes $[i, i+1] \times \mathbb{R}$ et les lignes $\mathbb{R} \times [j, j+1]$ du plan sont convexes.

Soit P un polyomino convexe, et R le plus petit rectangle le contenant. Les périmètres de P et R sont alors égaux, ce qui constitue d'ailleurs une caractérisation des polyominos convexes.

Soit $[N, N']$ (resp. $[W, W']$, $[S, S']$, $[E, E']$) l'intersection de la frontière de P avec le bord supérieur (resp. gauche, inférieur, droit) de R , les points $N, N', W, W', S, S', E, E'$ étant ordonnés suivant le sens trigonométrique de la frontière de R (Fig.2.1).

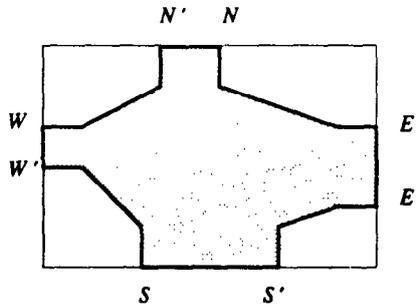


Fig. 2.1 Polyomino convexe.

Les polyominos parallélogrammes sont alors les polyominos convexes qui vérifient $S = W'$ et $N = E'$.

Un *polyomino convexe dirigé à droite* est un polyomino convexe tel que $S = W'$. Un *polyomino convexe dirigé à gauche* est un polyomino convexe tel que $N = E'$.

Un *polyomino tas* est un polyomino convexe tel que $N = E'$ et $S' = E$. On pourrait aussi bien définir les polyominos tas comme les polyominos convexes vérifiant $S = W'$ et $N' = W$.

Décomposition des polyominos convexes dirigés

Soit P un polyomino convexe dirigé à gauche à k colonnes, notées, de gauche à droite, C_1, \dots, C_k . Soit p le plus petit entier tel que P , privé de ses $p-1$ premières colonnes, soit un polyomino parallélogramme. On a alors $1 \leq p \leq k$. Le polyomino parallélogramme P_1 formé des colonnes C_p, \dots, C_k est appelé *polyomino parallélogramme maximal* de P . Soit $n+1$ sa hauteur à gauche, c'est à dire la hauteur de C_p . Le polyomino formé des colonnes C_1, \dots, C_p est un polyomino tas de hauteur $n+1$. En supprimant la cellule inférieure de sa dernière colonne C_p , on obtient un nouveau polyomino tas, P_2 , de hauteur n . De plus :

- la hauteur de P est celle de P_1 ,
- la largeur de P est la somme de celles de P_1 et P_2 , diminuée de un,
- l'aire de P est la somme de celles de P_1 et P_2 , diminuée de n .

(Par commodité, on conviendra ici que le polyomino tas vide est de hauteur et d'aire nulles mais possède une colonne).

L'application d définie par $d(P) = (P_1, P_2)$ est alors une bijection entre les polyominos convexes dirigés dont le polyomino parallélogramme maximal est de hauteur à gauche $n+1$ et les couples (P_1, P_2) formés d'un polyomino parallélogramme P_1 de hauteur à gauche $n+1$ et d'un polyomino tas P_2 , de hauteur n .

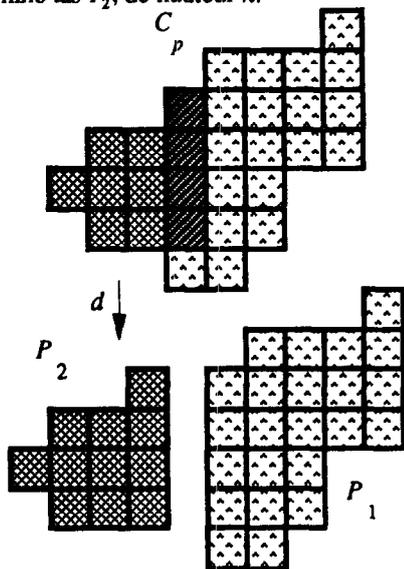


Fig. 2.2
Décomposition d'un polyomino convexe dirigé.
(Ici, $p = 4$ et $n = 4$)

Nous allons énumérer les polyominos convexes dirigés en nous inspirant de cette décomposition. Nous aurons donc besoin de connaître d'une part la série génératrice des polyominos tas de hauteur donnée, et d'autre part celle des polyominos parallélogrammes de hauteur à gauche donnée.

Polyominos convexes

Nous cherchons à énumérer les polyominos convexes par une méthode analogue à celle que nous venons d'évoquer pour les polyominos convexes dirigés, c'est à dire en faisant apparaître des polyominos tas et des polyominos parallélogrammes.

Or, étant donné un polyomino convexe, il existe bien diverses décompositions de celui-ci en deux polyominos tas et un polyomino parallélogramme, mais aucune d'elles ne peut s'appliquer à tous les polyominos convexes. Nous avons donc été amenés à classer ces objets en trois sous-familles \mathcal{A} , \mathcal{A}' et \mathcal{B} , que nous énumérons séparément. En fait, la classe \mathcal{A}' se déduit

bijectivement de la classe \mathcal{Q} , par une transformation simple qui préserve les trois paramètres d'énumération, ce qui nous permet de ramener l'énumération des polyominos convexes à celle des deux sous-familles \mathcal{Q} et \mathcal{B} .

Soit P un polyomino convexe. On considère de nouveau le plus petit rectangle R le contenant, et les points $N, N', W, W', S, S', E,$ et E' définis ci-dessus.

Notations. Etant donné un point M élément de $\{N, N', W, W', S, S', E, E'\}$, D_M désignera la droite verticale passant par M .

Si M et M' sont éléments de $\{N, N', W, W', S, S', E, E'\}$, on notera $D_M \leq D_{M'}$ (resp. $D_M < D_{M'}$) si D_M est située à gauche (resp. strictement à gauche) de $D_{M'}$.

Définition 2.1. L'ensemble \mathcal{Q} sera l'ensemble des polyominos convexes tels que $D_S < D_N$. L'ensemble \mathcal{Q}' sera l'ensemble des polyominos convexes tels que $D_{N'} < D_{S'}$. L'ensemble $\mathcal{Q} \cap \mathcal{Q}'$ sera noté \mathcal{B} .

Lemme 2.2. (i) La réunion de \mathcal{Q} et \mathcal{Q}' est l'ensemble des polyominos convexes.
 (ii) Toute symétrie d'axe vertical échange les éléments de \mathcal{Q} et \mathcal{Q}' et laisse invariants les trois paramètres largeur, hauteur et aire.

Preuve. (i) Raisonnons par l'absurde en considérant un polyomino convexe qui ne serait ni dans \mathcal{Q} , ni dans \mathcal{Q}' . On aurait alors $D_S \geq D_N$ et $D_{N'} \geq D_{S'}$. Mais les inégalités $D_{N'} < D_N$ et $D_S < D_{S'}$ sont toujours vérifiées, et mèneraient alors à $D_{S'} \leq D_{N'} < D_N \leq D_S < D_{S'}$, ce qui est absurde.

(ii) Ce second résultat est trivial. (Rappelons que les polyominos sont définis à translation près). Le second polyomino de la figure 2.3 est l'image du premier par une telle symétrie. \square

Exemples.

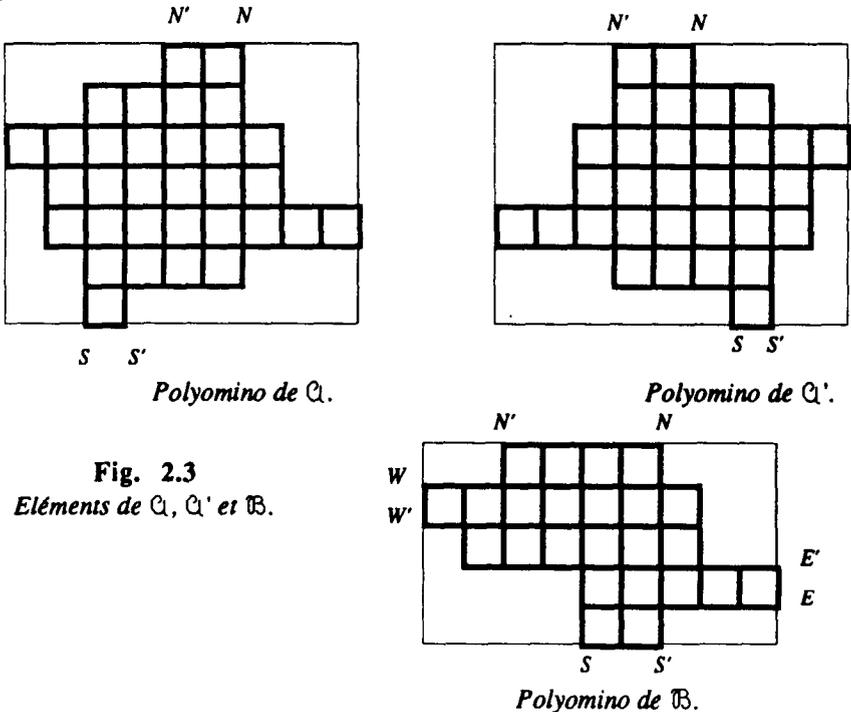


Fig. 2.3
 Eléments de \mathcal{Q} , \mathcal{Q}' et \mathcal{B} .

Remarque. Pour énumérer les polyominos convexes suivant le périmètre, Delest et Viennot [De-Vi] proposent une partition de l'ensemble des polyominos convexes en trois sous-ensembles, définis respectivement par $D_S < D_N$, $D_S = D_N$ et $D_S > D_N$, qu'ils énumèrent séparément. Ils appellent polyominos de type I les éléments de \mathcal{Q} . Mais cette partition, n'utilisant pas de propriété de symétrie, exige trois, et non deux énumérations distinctes.

Notations. On notera $A(x, y, q)$ (resp. $A'(x, y, q)$, $B(x, y, q)$), la série génératrice des éléments de \mathcal{Q} (resp. \mathcal{Q}' , \mathcal{B}), comptés suivant la largeur (par x), la hauteur (par y) et l'aire (par q).

Remarquons que $A(x, y, q) = A'(x, y, q)$.

Corollaire 2.3. La série génératrice $Z(x, y, q)$ des polyominos convexes est

$$Z = 2A - B,$$

où A (resp. B) énumère les polyominos de \mathcal{Q} (resp. \mathcal{B}).

Décomposition des polyominos de \mathcal{Q}

Soit P un polyomino convexe de \mathcal{Q} à k colonnes, notées, de gauche à droite, C_1, \dots, C_k . Soit p le plus petit entier tel que P , privé de ses $p-1$ premières colonnes, soit un polyomino convexe dirigé à droite. De même, soit r le plus grand entier tel que P , privé de ses $k-r$ dernières colonnes, soit un polyomino convexe dirigé à gauche (Fig.2.4).

On a $1 \leq p \leq r \leq k$. Le polyomino P_1 formé des colonnes C_p, \dots, C_r est appelé *polyomino parallélogramme maximal* de P . Soit $n+1$ (resp. $m+1$) sa hauteur à gauche (resp. droite), c'est à dire la hauteur de C_p (resp. C_r).

Le polyomino formé des colonnes C_1, \dots, C_p est un polyomino tas de hauteur $n+1$. En supprimant la cellule inférieure de sa dernière colonne C_p , on forme un autre polyomino tas, P_2 , de hauteur n .

De même, le polyomino formé des colonnes C_r, \dots, C_k est un polyomino tas de hauteur $m+1$. En supprimant la cellule supérieure de sa première colonne C_r , on forme un autre polyomino tas, P_3 , de hauteur m .

De plus :

- la hauteur de P est celle de P_1 ,
- la largeur de P est la somme de celles de P_1 , P_2 et P_3 , diminuée de deux,
- l'aire de P est la somme de celles de P_1 , P_2 et P_3 , diminuée de $m+n$.

(De nouveau, on conviendra que le polyomino tas vide a une colonne).

L'application d définie par $d(P) = (P_1, P_2, P_3)$ est alors une bijection entre les polyominos de \mathcal{Q} dont le polyomino parallélogramme maximal est de hauteur à gauche (resp. à droite) $n+1$ (resp. $m+1$) et les triplets de la forme (P_1, P_2, P_3) formés d'un polyomino parallélogramme P_1 de hauteur à gauche $n+1$ et hauteur à droite $m+1$ et de deux polyominos tas P_2 et P_3 , de hauteur n et m respectivement.

Pour énumérer les polyominos de \mathcal{Q} , nous avons donc besoin de connaître, outre la série génératrice des polyominos tas de hauteur donnée, celle des polyominos parallélogrammes de hauteurs à droite et à gauche fixées.

Quant aux polyominos de \mathcal{B} , nous verrons que connaître la série génératrice des polyominos tas de hauteur donnée suffit pour les énumérer.

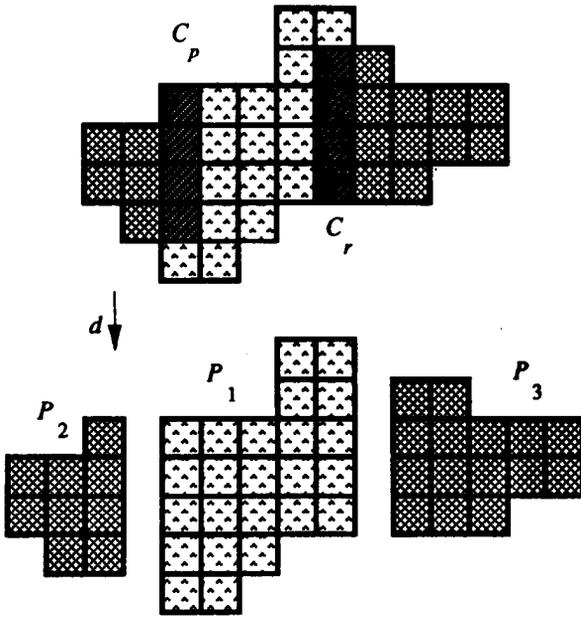


Fig. 2.4
 Décomposition d'un polyomino
 convexe de \mathcal{Q} .
 (Ici, $p = 3$, $r = 7$
 $m = 4$ et $n = 4$)

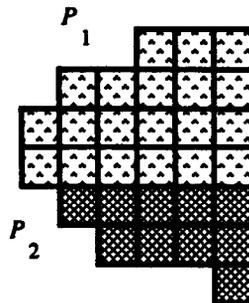
2. ÉNUMÉRATION DES POLYOMINOS TAS

Nous rappelons d'abord l'expression - classique - de la série génératrice des polyominos tas de largeur donnée. Mais, lors de l'énumération des polyominos convexes dirigés, puis des polyominos convexes généraux, c'est de la série génératrice des polyominos tas de hauteur donnée dont nous aurons besoin. Nous démontrons alors une formule qui résout ce problème.

Enumération "classique"

Soit P un polyomino tas à m colonnes - c'est à dire de *largeur* m - ; ce polyomino est la juxtaposition (Fig.2.5) de deux diagrammes de Ferrers P_1 et P_2 tels que P_1 ait m colonnes et P_2 strictement moins de m colonnes. Le nombre de lignes (resp. l'aire) de P est alors la somme des nombres de lignes (resp. aires) de P_1 et P_2 .

Fig. 2.5
 Un polyomino tas.



La série génératrice des diagrammes de Ferrers à m colonnes étant $yq^m / (yq)_m$, et celle des diagrammes de Ferrers ayant au plus $m-1$ colonnes étant $1 / (yq)_{m-1}$, on obtient le résultat suivant, qui précise celui de Wright [Wr] :

Lemme 2.4. La série génératrice $T(x,y,q)$ des polyominos tas comptés suivant la largeur (par x), la hauteur (par y), et l'aire (par q), est :

$$T = \sum_{m \geq 1} \frac{x^m y q^m}{(yq)_{m-1} (yq)_m}.$$

Une nouvelle énumération

La proposition suivante fournit le développement en y de la série T .

Proposition 2.5. La série génératrice $T(x,y,q)$ des polyominos tas comptés suivant la largeur (par x), la hauteur (par y), et l'aire (par q), est donnée par l'égalité :

$$T = \sum_{n \geq 1} \frac{xy^n q^n T_n}{(xq)_n},$$

où T_n est un polynôme en x et q à coefficients entiers positifs, défini par la récurrence suivante :

$$T_0 = 1, T_1 = 1, \\ T_n = 2T_{n-1} + (xq^{n-1} - 1)T_{n-2} \text{ pour } n \geq 2.$$

Preuve. Notons \bar{T}_n le coefficient de y^n dans T , c'est à dire la série génératrice en x et q des polyominos tas de hauteur n .

Soit P un polyomino tas de hauteur n , à m colonnes, notées, de gauche à droite, C_1, \dots, C_m . Exceptionnellement, on munit le plan d'un repère orthonormé tel que P soit inclus dans le rectangle défini par les conditions $0 \leq x \leq m, 0 \leq y \leq n$ (Fig.2.6). Soit alors $\{0\} \times [b_i, s_i]$ la projection de C_i sur l'axe Oy , parallèlement à Ox ; la base (resp. le sommet) de la colonne C_i est b_i (resp. s_i).

Remarquons que l'on a $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_m = 0$, et $s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_m = n$.

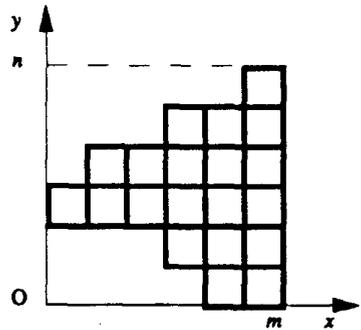


Fig. 2.6

Pour $n \geq 3$, distinguons cinq situations:

- 1) $m = 1$. Le polyomino P est réduit à une colonne ; sa valuation est xq^n .
- 2) $m \geq 2, b_{m-1} = 0, s_{m-1} = n$. En supprimant C_m , on obtient alors un polyomino tas de hauteur n . La série génératrice des polyominos tas relevant de ce second cas est donc $xq^n \bar{T}_n$.
- 3) $m \geq 2, b_{m-1} \geq 1$. En supprimant la cellule inférieure de C_m , on obtient un polyomino tas de hauteur $n-1$, ayant deux colonnes au moins. La série génératrice des polyominos tas relevant de ce troisième cas est donc $q(\bar{T}_{n-1} - xq^{n-1})$.
- 4) $m \geq 2, s_{m-1} \leq n-1$. En supprimant la cellule supérieure de C_m , on obtient un polyomino tas de hauteur $n-1$, ayant deux colonnes au moins. La série génératrice des polyominos tas relevant de ce quatrième cas est donc $q(\bar{T}_{n-1} - xq^{n-1})$.
- 5) $m \geq 2, b_{m-1} \geq 1, s_{m-1} \leq n-1$. En supprimant la cellule supérieure et la cellule inférieure de C_m , on obtient un polyomino tas de hauteur $n-2$, ayant deux colonnes au moins. La série génératrice des polyominos tas relevant de ce cinquième cas est donc $q^2(\bar{T}_{n-2} - xq^{n-2})$.

Finalement, on obtient en regroupant ces cinq cas :

$$(1 - xq^n)\bar{T}_n = 2q\bar{T}_{n-1} - q^2\bar{T}_{n-2}.$$

Lorsque n vaut un (resp. deux), seul les cas 1) et 2) (resp. 1), 2), 3) et 4)) sont possibles; les équations obtenues fournissent alors successivement : $\bar{T}_1 = \frac{xq}{(1-xq)}$, puis $\bar{T}_2 = \frac{xq^2(1+xq)}{(1-xq)(1-xq^2)}$.

On montre alors par récurrence sur n que $\bar{T}_n = \frac{xq^n T_n}{(xq)_n}$, avec $T_1 = 1$, $T_2 = 1 + xq$, et $T_n = 2T_{n-1} + (xq^{n-1} - 1)T_{n-2}$ pour $n \geq 3$. En posant $T_0 = 1$, cette récurrence est vraie pour $n \geq 2$. Elle peut aussi s'écrire $(T_n - T_{n-1}) = (T_{n-1} - T_{n-2}) + xq^{n-1}T_{n-2}$, ce qui permet de montrer que les polynômes $T_n - T_{n-1}$ et T_n sont à coefficients entiers positifs. □

Remarques. 1) Lorsque q vaut un, l'équation fournissant T_n est une récurrence linéaire d'ordre deux. Les méthodes de résolution classiques donnent :

$$T_n(x, 1) = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} x^k.$$

Lorsque x vaut aussi un, on obtient $T_n(1, 1) = 2^{n-1}$, pour $n \geq 1$.

2) Les premières valeurs des T_n sont :

$$\begin{aligned} T_0 &= 1, \\ T_1 &= 1, \\ T_2 &= 1 + xq, \\ T_3 &= 1 + 2xq + xq^2, \\ T_4 &= 1 + 3xq + 2xq^2 + xq^3 + x^2q^4, \\ T_5 &= 1 + 4xq + 3xq^2 + 2xq^3 + xq^4 + 2x^2q^4 + 2x^2q^5 + x^2q^6. \end{aligned}$$

Le coefficient de x^k dans T_n est un donc q -analogue non classique de $\binom{n}{2k}$. Ce coefficient binomial peut être interprété comme le nombre de mots de $\{a, b\}^*$ de longueur n ayant $2k$ occurrences de a . Lorsque q est quelconque, on peut montrer l'identité suivante :

$$T_n(x, q) = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \left(x^k \sum_n q^{p_1 + p_2 + \dots + p_{2k-1}} \right),$$

où, pour k donné, la seconde somme porte sur tous les mots u de $\{a, b\}^*$ de longueur n ayant $2k$ occurrences de a , et p_{2i-1} désigne, pour $1 \leq i \leq k$, la position de la $(2i-1)^{\text{ème}}$ occurrence de a dans le mot u , parcouru de gauche à droite.

Nous reprendrons cette interprétation dans le chapitre 7, en la reliant à une notion de q -automate.

3) Pour $n \geq 1$, le polynôme T_n est égal au déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1-xq & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1-xq^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 2 & 1-xq^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

En effet, on montre, en développant ces déterminants par rapport à la dernière colonne, qu'ils satisfont la même relation de récurrence que les T_n , et les valeurs coïncident pour $n = 1$ et $n = 2$.

On peut aussi les développer par rapport à la première colonne, ce qui fournit

$$T_n(x) = D_{n-1}(xq) + (xq-1)D_{n-2}(xq^2),$$

où $D_n(x)$ est le déterminant suivant :

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} 2 & 1-xq & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1-xq^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 2 & 1-xq^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Enfin, en développant $D_n(x)$ par rapport à la première colonne, il vient

$$D_n(x) = 2D_{n-1}(xq) + (xq-1)D_{n-2}(xq^2),$$

ce qui fournit pour T_n une nouvelle relation de récurrence. Pour $n \geq 2$:

$$qT_n(x) = (1+q)T_{n-1}(xq) + (xq^2-1)T_{n-2}(xq^2).$$

Nous utiliserons ce résultat dans le chapitre 3.

Corollaire 2.6. *La série génératrice des polyominos tas de hauteur inférieure ou égale à n , comptés suivant la largeur (par x) et l'aire (par q) est :*

$$\frac{U_n}{(xq)_n}, \text{ avec } U_n = T_{n+1} - T_n.$$

Preuve. Notons \bar{T}_n (resp. \bar{U}_n) la série génératrice en x et q des polyominos tas de hauteur n (resp. inférieure ou égale à n).

Soit P un polyomino tas de hauteur $n+1$, à m colonnes, notées, de gauche à droite, C_1, \dots, C_m . On munit le plan d'un repère orthonormé tel que P soit inclus dans le rectangle $0 \leq x \leq m, 0 \leq y \leq n+1$. Pour $1 \leq i \leq m$, soit $\{0\} \times [b_i, s_i]$ la projection de C_i sur l'axe Oy parallèlement à Ox .

Distinguons les trois cas suivants :

1) $m = 1$. Le polyomino P est réduit à une colonne de hauteur $n+1$; sa valuation est xq^{n+1} .

2) $m \geq 2, b_{m-1} \geq 1$. Le polyomino obtenu en supprimant la cellule inférieure de C_m est alors un polyomino tas de hauteur n , ayant deux colonnes au moins. La série génératrice des polyominos relevant de ce second cas est donc $q(\bar{T}_n - xq^n)$.

3) $m \geq 2, b_{m-1} = 0$. Le polyomino obtenu en supprimant la colonne C_m est un polyomino tas de hauteur inférieure ou égale à $n+1$. La série génératrice des polyominos relevant de ce troisième cas est donc $xq^{n+1}(\bar{T}_{n+1} + \bar{U}_n)$.

On obtient en regroupant les trois cas l'équation $(1 - xq^{n+1})\bar{T}_{n+1} = q\bar{T}_n + xq^{n+1}\bar{U}_n$.

Mais $\bar{T}_n = \frac{xq^n T_n}{(xq)_n}$ d'après la proposition 2.5, ce dont on déduit $\bar{U}_n = \frac{T_{n+1} - T_n}{(xq)_n}$. \square

Remarque. Il est équivalent d'écrire que $U_n = U_{n-1} + xq^n T_{n-1}$. Cette expression montre que les polynômes U_n convergent - formellement - vers une série U_∞ . Plus précisément, le coefficient de q^{n-1} est le même dans tous les U_{n+m} , pour $m \geq 0$.

Appelons *D-polyomino tas* tout polyomino tas dont deux colonnes consécutives quelconques n'ont jamais ni même base, ni même sommet (Fig.2.7). Il existe une bijection (que nous ne montrons pas ici) entre les polyominos tas de hauteur inférieure ou égale à n et les couples formés d'un diagramme de Ferrers de hauteur inférieure ou égale à n et d'un D-polyomino tas de hauteur inférieure ou égale à n aussi, qui permet de prouver bijectivement le résultat annoncé dans le corollaire 2.6. Le polynôme U_n apparaît alors comme le polynôme énumérateur des D-polyominos tas de hauteur inférieure ou égale à n . Cette interprétation permet de calculer U_∞ , qui

vaut
$$\sum_{n \geq 1} \frac{x^n q^{n^2}}{(q)_{n-1} (q)_n}.$$

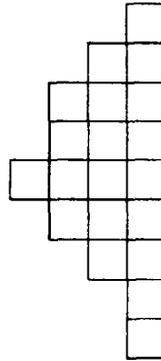


Fig. 2.7
Un D-polyomino tas.

Par passage à la limite lorsque n tend vers l'infini dans le corollaire 2.6, on obtient la formule suivante :

$$\frac{\sum_{n \geq 1} \frac{x^n q^n}{(q)_{n-1} (q)_n}}{\sum_{n \geq 1} \frac{x^n q^{n^2}}{(q)_{n-1} (q)_n}} = \frac{1}{(xq)_\infty}.$$

3. ÉNUMÉRATION DE POLYOMINOS PARALLÉLOGRAMMES DONT LA HAUTEUR DES COLONNES EXTRÊMALES EST FIXÉE

Proposition 2.7. Soit $n \geq 1$. La série génératrice $X^{(n)}$ des polyominos parallélogrammes de hauteur à gauche (ou à droite) n est :

$$X^{(n)} = x y^n q^n \frac{N(xq^n)}{N(x)},$$

avec, comme dans la proposition 1.10 :

$$N(x) = \sum_{j \geq 0} \frac{(-1)^j x^j q^{\binom{j+1}{2}}}{(q)_j (yq)_j}.$$

Preuve. La première colonne du polyomino P est de hauteur n si et seulement si la pièce maximale de $f(P)$ est de support $[1, n]$.

D'après la proposition 1.4 (ii), la série génératrice des demi-pyramides non vides de pièce maximale de support $[1, n]$ est :

$$\frac{\sum_{F \in \mathcal{U}(\{[1, n]\})} (-1)^{|F|} v(F)}{\sum_{F \in \mathcal{U}} (-1)^{|F|} v(F)} - 1 = -\frac{N^{(n)}}{N},$$

où N est de nouveau la série génératrice alternée des empilements triviaux, donnée par le lemme 1.11, et $N^{(n)}$ est celle des empilements triviaux comprenant une pièce de support $[1, n]$.

Soit alors t_n l'application qui, à l'empilement trivial $F = \{[a_i, b_i] \times \{0\}, 1 \leq i \leq k\}$ associe $t_n(F) = \{[1, n] \times \{0\}\} \cup \{[a_i + n, b_i + n] \times \{0\}, 1 \leq i \leq k\}$. Cette application est une bijection entre les empilements triviaux et les empilements triviaux contenant une pièce de support $[1, n]$.

De plus, la valuation de $t_n(F)$ est :

$$\begin{aligned} v(t_n(F)) &= x q^n y^{n-1} q^{kn} v(F) \\ &= x q^n y^{n-1} v(F)_{x \rightarrow x q^n}. \end{aligned}$$

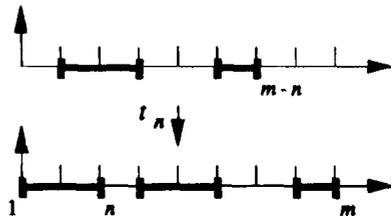


Fig. 2.8

En sommant cette égalité sur tous les empilements triviaux F , il vient :

$$N^{(n)} = -x q^n y^{n-1} N(x q^n).$$

La proposition 2.7 s'en déduit compte tenu de la proposition 1.8. \square

Définition 2.8. Notons $N_m = N_m(x)$ les polynômes en x, y et q définis par la récurrence suivante :

$$\begin{aligned} N_0 &= 0, N_1 = 1, \\ N_m &= (1 + y - x q^{m-1}) N_{m-1} - y N_{m-2} \text{ pour } m \geq 2. \end{aligned}$$

Définition 2.9. Notons N_m^n les polynômes en x, y et q définis à partir des N_m de la façon suivante :

$$\begin{aligned} N_m^n &= 0 \text{ si } m < n, \\ N_m^n &= -x y^{n-1} q^n, \\ N_m^n &= x^2 y^{n-1} q^{n+m} N_{m-n}(x q^n) \text{ si } m > n. \end{aligned}$$

Proposition 2.10. Soient $m \geq 1$ et $n \geq 1$. La série génératrice X_m^n des polyominos parallélogrammes dont la hauteur à gauche (resp. à droite) est n (resp. m) est donnée par l'expression suivante :

$$X_m^n = x^2 y^n q^{m+n} N_m \frac{N(x q^n)}{N(x)} - y N_m^n,$$

où, comme en proposition 1.10,

$$N(x) = \sum_{j \geq 0} \frac{(-1)^j x^j q^{\binom{j+1}{2}}}{(q)_j (yq)_j}.$$

Les N_m et N_m^a sont les polynômes en x, y et q des définitions 2.8 et 2.9.

Remarque. L'égalité $X_m^a = X_m^a$, provenant de l'interprétation de ces séries, n'apparaît pas dans cette expression.

Nous avons besoin, pour montrer cette proposition, de définir un nouveau paramètre sur les empilements.

Définition 2.11. L'encombrement de l'empilement $F = \{[a_i, b_i] \times \{n_i\}, 1 \leq i \leq n\}$ est zéro si F est vide, le plus grand des b_i sinon. On le note $enc(F)$.

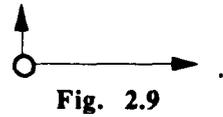
Lemme 2.12. Soit $m \geq 1$. La série génératrice alternée des empilements triviaux d'encombrement m est $-xq^m N_m$, où N_m est le polynôme introduit dans la définition 2.8.

Preuve. Soit F un empilement trivial d'encombrement m .

Rappelons que si $F = \{[a_i, b_i] \times \{n_i\}, 1 \leq i \leq n\}$, alors sa valuation est $x^a y^{\binom{\sum (b_i - a_i)}{1 \leq i \leq n}} q^{\binom{\sum b_i}{1 \leq i \leq n}}$.

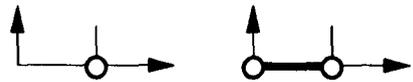
Si $m = 1$, F est l'empilement ci-contre.

Donc $\sum_{F/enc(F)=1} (-1)^{|F|} v(F) = -xq$, et $N_1 = 1$.

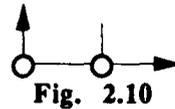


Si $m = 2$, F est l'un des trois empilements ci-contre :

Donc $\sum_{F/enc(F)=2} (-1)^{|F|} v(F) = -xq^2 - xyq^2 + x^2q^3$,



et $N_2 = 1 + y - xq$.



Si $m \geq 3$, écrivons $F = \{P_i, 1 \leq i \leq n\}$, avec

$$P_i = \left[i + \sum_{1 \leq k \leq i-1} (\alpha_k + \beta_k) + \alpha_i, i + \sum_{1 \leq k \leq i} (\alpha_k + \beta_k) \right] \times \{0\}, \quad \alpha_k \geq 0 \text{ et } \beta_k \geq 0 \text{ pour tout } k \text{ et } n + \sum_{1 \leq k \leq n} (\alpha_k + \beta_k) = m \text{ (Fig.2.11). Plusieurs situations sont alors possibles.}$$

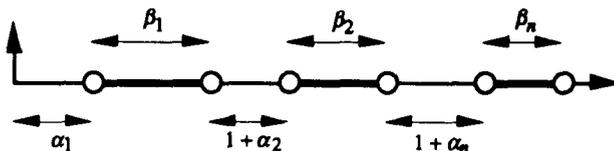
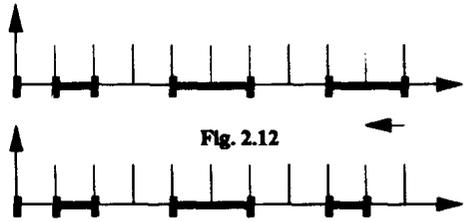


Fig. 2.11

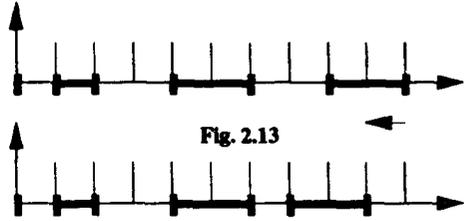
1) $\beta_n \geq 1$.

L'empilement obtenu en substituant $\beta_n - 1$ à β_n est alors un empilement trivial d'encombrement $m-1$. Donc la série génératrice des empilements relevant de ce premier cas est $yq(-xq^{m-1} N_{m-1})$.



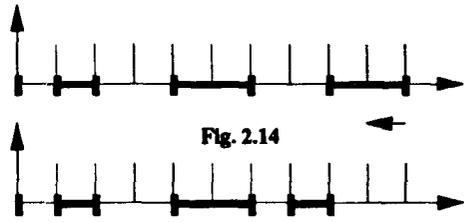
2) $\alpha_n \geq 1$.

L'empilement obtenu en substituant $\alpha_n - 1$ à α_n est alors un empilement trivial d'encombrement $m-1$. Donc la série génératrice des empilements relevant de ce second cas est $q(-xq^{m-1} N_{m-1})$.



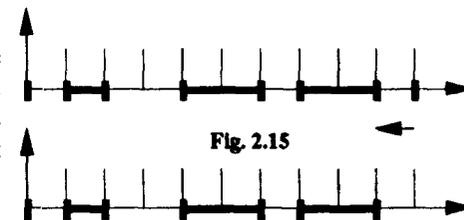
3) $\alpha_n \geq 1$ et $\beta_n \geq 1$.

L'empilement obtenu en substituant $\alpha_n - 1$ à α_n et $\beta_n - 1$ à β_n est alors un empilement trivial d'encombrement $m-2$. Donc la série génératrice des empilements relevant de ce troisième cas est $yq^2(-xq^{m-2} N_{m-2})$.



4) $\alpha_n = \beta_n = 0$.

L'empilement obtenu en enlevant la pièce la plus à droite est un empilement trivial d'encombrement $m-1$. Donc la série génératrice des empilements relevant de ce quatrième cas est $-xq^m(-xq^{m-1} N_{m-1})$.



Finalement, le regroupement des quatre cas montre que la série génératrice des empilements triviaux d'encombrement m est $-xq^m((1+y-xq^{m-1})N_{m-1} - yN_{m-2})$. (Ce terme s'obtient en additionnant les séries génératrices correspondant aux cas 1, 2 et 4, et en soustrayant celle qui provient du cas 3). Ceci démontre le lemme. \square

Remarques. 1) Lorsque x vaut (-1) et y et q valent 1 , N_m est le $2n^{\text{ième}}$ nombre de Fibonacci. Nous donnerons dans le chapitre 7 une interprétation de N_m dans le cas général, en le reliant à une notion de q -automate.

2) Pour $m \geq 2$, on peut écrire :

$$N_m = \begin{vmatrix} 1+y-xq & y & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1+y-xq^2 & y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1+y-xq^{m-2} & y \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1+y-xq^{m-1} \end{vmatrix}$$

En effet, le développement de ces déterminants par rapport à la dernière colonne montre qu'ils satisfont la même récurrence que les N_m , et les premières valeurs coïncident.

Le développement de ce déterminant par rapport à la première colonne fournit en outre une nouvelle relation de récurrence pour les polynômes N_m , que nous utiliserons dans le chapitre 3. Pour $m \geq 2$,

$$N_m(x) = (1 + y - xq)N_{m-1}(xq) - yN_{m-2}(xq^2).$$

Preuve de la proposition 2.10. Soit P un polyomino parallélogramme. Sa première colonne est de hauteur n si et seulement si la pièce maximale de $f(P)$ est de support $[1, n]$.

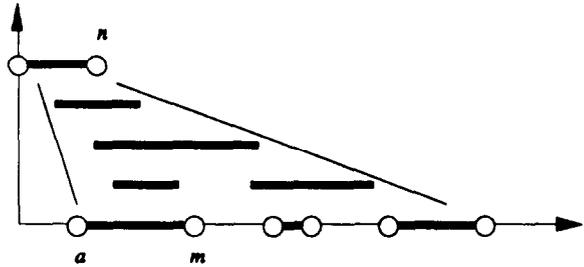
Sa dernière colonne est de hauteur m si et seulement si la plus à gauche des pièces minimales de $f(P)$ est de support $[a, m]$, avec $1 \leq a \leq m$.

Soit \bar{X}_m^n la série génératrice des demi-pyramides de segments

- de pièce maximale de support $[1, n]$,
- dont la plus à gauche des pièces minimales a pour support un élément de l'ensemble $\{[a, m], 1 \leq a \leq m\}$ (Fig. 2.16).

D'après la proposition 1.8, $X_m^n = y\bar{X}_m^n$.

Fig. 2.16



Soit $\mathfrak{M}_{\geq m} = \{[a, b], b \geq m, 1 \leq a \leq b\}$.

Soit $\mathfrak{M}_{< m}$ son complémentaire ; $\mathfrak{M}_{< m} = \{[a, b], b < m, 1 \leq a \leq b\}$.

Soit $\bar{X}_{\geq m}^n$ la série génératrice des demi-pyramides de segments

- de pièce maximale de support $[1, n]$,
- dont les pièces minimales sont dans $\mathfrak{M}_{\geq m}$.

Alors, la série cherchée est $\bar{X}_m^n = \bar{X}_{\geq m}^n - \bar{X}_{\geq m+1}^n$.

Pour évaluer $\bar{X}_{\geq m}^n$, on utilise le troisième théorème d'inversion de la proposition 1.4, avec $\mathfrak{M}_1 = \{[1, n]\}$ et $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_{\geq m}$. Il vient :

$$\frac{\left(\sum_{F \in \mathfrak{U} / [1, n] \notin F} (-1)^{|F|} v(F) \right) \left(\sum_{F \in \mathfrak{U} / \mathfrak{M}_{\geq m}} (-1)^{|F|} v(F) \right)}{\left(\sum_{F \in \mathfrak{U}} (-1)^{|F|} v(F) \right)} = \sum_{(E, F) \in \mathfrak{C}} (-1)^{|F|} v(E \sqcup F),$$

où \mathfrak{C} est l'ensemble des couples (E, F) vérifiant :

- si E n'est pas vide, c'est une demi-pyramide de pièce maximale de support $[1, n]$, dont toutes les pièces minimales sont dans $\mathfrak{M}_{\geq m}$;
- F est un empilement trivial à pièces dans $\mathfrak{M}_{< m}$, ne contenant pas la pièce $[1, n] \times \{0\}$;
- E et F ne sont pas en concurrence.

Si E n'est pas vide, c'est donc une demi-pyramide ayant au moins une pièce minimale de support $[a, b]$, avec $b \geq m$. Mais alors tout empilement trivial F non vide à pièces dans $\mathfrak{M}_{< m}$ est en concurrence avec E . Donc, si E n'est pas vide, $\{F / (E, F) \in \mathfrak{C}\} = \{\emptyset\}$.

Si E est vide, $\{F / (E, F) \in \mathfrak{C}\} = \{F \in \mathfrak{U}(\mathfrak{M}_{\leq m}) / [1, n] \times \{0\} \notin F\}$.

Le théorème donne ainsi :

$$\bar{X}_{2m}^n = \frac{\left(\sum_{F \in \mathfrak{U} / [1, n] \notin F} (-1)^{|F|} v(F) \right) \left(\sum_{F \in \mathfrak{U}(\mathfrak{M}_{\leq m})} (-1)^{|F|} v(F) \right)}{\left(\sum_{F \in \mathfrak{U}} (-1)^{|F|} v(F) \right)} - \sum_{\substack{F \in \mathfrak{U}(\mathfrak{M}_{\leq m}) \\ [1, n] \notin F}} (-1)^{|F|} v(F).$$

Donc $\bar{X}_m^n = \bar{X}_{2m}^n - \bar{X}_{2m+1}^n$,

$$= - \frac{\left(\sum_{F \in \mathfrak{U} / [1, n] \notin F} (-1)^{|F|} v(F) \right) \left(\sum_{F \in \mathfrak{U} / \text{enc}(F)=m} (-1)^{|F|} v(F) \right)}{\left(\sum_{F \in \mathfrak{U}} (-1)^{|F|} v(F) \right)} + \sum_{\substack{F \in \mathfrak{U} / \text{enc}(F)=m \\ [1, n] \notin F}} (-1)^{|F|} v(F).$$

En écrivant $\left(\sum_{F \in \mathfrak{U} / [1, n] \notin F} (-1)^{|F|} v(F) \right) = \left(\sum_{F \in \mathfrak{U}} (-1)^{|F|} v(F) \right) - \left(\sum_{F \in \mathfrak{U} / [1, n] \in F} (-1)^{|F|} v(F) \right)$,

on a finalement

$$\bar{X}_m^n = \frac{\left(\sum_{F \in \mathfrak{U} / [1, n] \in F} (-1)^{|F|} v(F) \right) \left(\sum_{F \in \mathfrak{U} / \text{enc}(F)=m} (-1)^{|F|} v(F) \right)}{\left(\sum_{F \in \mathfrak{U}} (-1)^{|F|} v(F) \right)} - \sum_{\substack{F \in \mathfrak{U} / \text{enc}(F)=m \\ [1, n] \in F}} (-1)^{|F|} v(F).$$

Il ne reste plus qu'à évaluer chacune des séries intervenant dans cette expression. La série génératrice alternée des empilements triviaux, N , est donnée par le lemme 1.11. Celle des empilements triviaux contenant la pièce $[1, n] \times \{0\}$ s'en déduit comme ci-dessus. Par ailleurs, celle des empilements triviaux d'encombremment m est $-xq^m N_m$ d'après le lemme 2.12.

Pour finir, montrons que $\sum_{\substack{F \in \mathfrak{U} / \text{enc}(F)=m \\ [1, n] \in F}} (-1)^{|F|} v(F) = N_m^n$, où N_m^n est le polynôme introduit

dans la définition 2.9.

Considérons les empilements triviaux d'encombremment m contenant la pièce $[1, n] \times \{0\}$:

- si $m < n$, de tels empilements n'existent pas,
- si $m = n$, il n'y en a qu'un, réduit à la pièce $[1, n] \times \{0\}$. Sa valuation (alternée) est $-xy^{n-1}q^n$,
- si $m > n$, un tel empilement est l'image par t_n d'un empilement trivial d'encombremment $m-n$ (Fig. 2.8).

La série génératrice alternée correspondante est donc $(-xy^{n-1}q^n)(-xq^n q^{m-n} N_{m-n}(xq^n))$, soit encore $x^2 y^{n-1} q^{n+m} N_{m-n}(xq^n)$, c'est à dire l'expression de la définition 2.9. \square

4. ÉNUMÉRATION DES POLYOMINOS CONVEXES DIRIGÉS

Proposition 2.13. Soit $Y(x, y, q)$ la série génératrice des polyominos convexes dirigés comptés suivant le nombre de colonnes (par x), de lignes (par y), et l'aire (par q). On a :

$$Y = y \frac{R - \hat{N}}{N},$$

avec

$$N = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^n q^{\binom{n+1}{2}}}{(q)_n (yq)_n}, \quad \hat{N} = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n x^n q^{\binom{n+1}{2}}}{(q)_{n-1} (yq)_n},$$

et

$$R = y \sum_{n \geq 2} \left[\frac{x^n q^n}{(yq)_n} \left(\sum_{m=0}^{n-2} \frac{(-1)^m q^{\binom{m+2}{2}}}{(q)_m (yq^{m+1})_{n-m-1}} \right) \right].$$

Lemme 2.14. Soit $n \geq 0$. La série génératrice des polyominos convexes dirigés dont le polyomino parallélogramme maximal est de hauteur à gauche $n+1$ est :

$$x y^{n+1} q^{n+1} \frac{N(xq^{n+1})}{N} \frac{T_n}{(xq)_n},$$

où $N(x)$ est donné dans la proposition ci-dessus et T_n est le polynôme en x et q défini dans la proposition 2.5.

Preuve. Il suffit de reprendre la décomposition de ces objets décrite dans le paragraphe 1 de ce chapitre, et d'utiliser les résultats des propositions 2.5 et 2.7 :

(i) la série génératrice des polyominos parallélogrammes de hauteur à gauche $n+1$ est :

$$x y^{n+1} q^{n+1} \frac{N(xq^{n+1})}{N} \quad (\text{Proposition 2.7}).$$

(ii) la série génératrice des polyominos tas de hauteur n est : $\frac{x y^n q^n T_n}{(xq)_n}$ (Proposition 2.5). \square

Mais alors, la série génératrice de tous les polyominos convexes dirigés est :

$$Y = \sum_{n \geq 0} x y^{n+1} q^{n+1} \frac{N(xq^{n+1})}{N} \frac{T_n}{(xq)_n},$$

soit encore, compte tenu de la définition de N :

$$\begin{aligned} Y &= \frac{y}{N} \sum_{m \geq 0} \left[\frac{(-1)^m q^{\binom{m+2}{2}}}{(q)_m (yq)_m} \left(\sum_{n \geq 0} x^{m+1} y^n q^{n(m+1)} \frac{T_n}{(xq)_n} \right) \right], \\ &= \frac{y}{N} \sum_{m \geq 0} \left[\frac{(-1)^m q^{\binom{m+2}{2}}}{(q)_m (yq)_m} (x^{m+1} + x^m T(x, yq^m, q)) \right]. \end{aligned}$$

où $T(x, y, q) = \sum_{n \geq 1} \frac{xy^n q^n T_n}{(xq)_n}$ est, d'après la proposition 2.5, la série génératrice des polyominos tas non vides.

Mais on a aussi $T(x, y, q) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n y q^n}{(yq)_{n-1} (yq)_n}$ d'après le lemme 2.4, et donc :

$$Y = \frac{y}{N} \sum_{m \geq 0} \left[\frac{(-1)^m q^{\binom{m+2}{2}}}{(q)_m (yq)_m} \left(x^{m+1} + x^m \sum_{n \geq 1} \frac{x^n y q^{m+n}}{(yq^{m+1})_{n-1} (yq^{m+1})_n} \right) \right],$$

$$= \frac{y}{N} \left[\sum_{m \geq 1} \frac{(-1)^{m+1} x^m q^{\binom{m+1}{2}}}{(q)_{m-1} (yq)_{m-1}} + y \sum_{\substack{m \geq 0 \\ n \geq 1}} \frac{(-1)^m x^{m+n} q^{m+n} q^{\binom{m+2}{2}}}{(q)_m (yq^{m+1})_{n-1} (yq)_{m+n}} \right].$$

Le changement de variables $(m+n, m) \rightarrow (n, m)$ dans la seconde somme mène à :

$$Y = \frac{y}{N} \left[\sum_{m \geq 1} \frac{(-1)^{m+1} x^m q^{\binom{m+1}{2}}}{(q)_{m-1} (yq)_{m-1}} + y \sum_{n \geq 1} \left(\frac{x^n q^n}{(yq)_n} \left(\sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m q^{\binom{m+2}{2}}}{(q)_m (yq^{m+1})_{n-m-1}} \right) \right) \right],$$

et, en regroupant la première somme avec les termes de la seconde somme obtenus pour $m = n - 1$, on obtient finalement le résultat de la proposition 2.13. □

Corollaire 2.15. *La série génératrice $Y(x, 1, q)$ des polyominos convexes dirigés comptés suivant la largeur (par x) et l'aire (par q) est donnée par :*

$$Y(x, 1, q) = \frac{\sum_{n \geq 1} \left(\frac{x^n q^n}{(q)_{n-1} (q)_n} \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m q^{\binom{m}{2}} \right)}{\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^n q^{\binom{n+1}{2}}}{[(q)_n]^2}}.$$

Il suffit de remplacer y par 1 dans l'expression de la proposition 2.13 pour obtenir ce résultat. □

Remarques. 1) On peut encore écrire :

$$Y(x, 1, q) = (1 - q) \frac{\bar{I}_1 \left(\frac{xq}{(1-q)^2}; q \right)}{I_0 \left(\frac{xq}{(1-q)^2}; q \right)},$$

où

$$I_0(t; q) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n t^n q^{\binom{n}{2}}}{([n]!)^2}$$

apparaît aussi dans la série génératrice des polyominos parallélogrammes et

$$\bar{I}_1(t; q) = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{(-1)^n t^{n+1}}{[n]! [n+1]!} \sum_{m=0}^n (-1)^m q^{\binom{m}{2}} \right).$$

Or, lorsque q vaut un,

$$\sum_{m=0}^n (-1)^m q^{\binom{m}{2}} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Donc $\bar{I}_1(t; q)$ est un q -analogue de la partie impaire de la fonction $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n t^{n+1}}{n! (n+1)!}$, voisine de la

fonction de Bessel $J_1(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n \left(\frac{t}{2}\right)^{2n+1}}{n! (n+1)!}$.

2) De nouveau, les distributions des paramètres largeur et hauteur sont identiques sur les polyominos convexes dirigés. Donc la fonction $Y(x, y, q)$ est symétrique en x et y , mais cette symétrie n'apparaît pas dans l'expression de la proposition 2.13. Lors de l'énumération des polyominos parallélogrammes, nous avons montré que les fonctions $y(yq)_- \hat{N}$ et $(yq)_- N$ sont symétriques en x et y . Donc la fonction $(yq)_- R$ doit l'être aussi, mais nous ne disposons pas d'un développement simple, symétrique en x et y .

5. ÉNUMÉRATION DES POLYOMINOS CONVEXES

Proposition 2.16. *La série génératrice Z des polyominos convexes est :*

$$Z = 2y \frac{(R - \hat{N})V}{N} - 2yM - B,$$

avec
$$N = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^n q^{\binom{n+1}{2}}}{(q)_n (yq)_n}, \quad \hat{N} = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n x^n q^{\binom{n+1}{2}}}{(q)_{n-1} (yq)_n},$$

$$R = y \sum_{n \geq 2} \left[\frac{x^n q^n}{(yq)_n} \left(\sum_{m=0}^{n-2} \frac{(-1)^m q^{\binom{m+2}{2}}}{(q)_m (yq^{m+1})_{n-m-1}} \right) \right],$$

$$V = \sum_{m \geq 0} xq^{m+1} \frac{T_m N_{m+1}}{(xq)_m}, \quad M = \sum_{0 \leq n \leq m} N_{m+1}^{n+1} \frac{T_m T_n}{(xq)_m (xq)_n},$$

et enfin
$$B = \sum_{n \geq 1} \frac{xy^n q^n (T_n)^2}{(xq)_{n-1} (xq)_n}.$$

(Les T_n , N_m et N_m^{n+1} sont les polynômes introduits dans la proposition 2.5 et les définitions 2.8 et 2.9 respectivement).

Compte tenu du corollaire 2.3, nous allons énumérer séparément les éléments de \mathcal{Q} , puis ceux de \mathcal{B} .

Énumération des polyominos de \mathcal{Q}

Proposition 2.17. *La série génératrice A des polyominos de \mathcal{Q} est donnée par la relation*

$$A = y \frac{(R - \hat{N})V}{N} - yM,$$

où les séries N, M, R, V et \hat{N} sont définies dans la proposition ci-dessus.

Lemme 2.18. *Soient $m \geq 0$ et $n \geq 0$. La série génératrice des polyominos convexes de \mathcal{Q} dont le polyomino parallélogramme maximal est de hauteur $n+1$ à gauche et $m+1$ à droite est:*

$$\frac{T_m}{(xq)_m} \frac{T_n}{(xq)_n} \left(x^2 y^{n+1} q^{m+n+2} N_{m+1} \frac{N(xq^{n+1})}{N} - y N_{m+1}^{n+1} \right).$$

Preuve. Il suffit de reprendre la décomposition de ces objets décrite en 1, et d'utiliser les résultats des propositions 2.5 et 2.10 :

(i) la série génératrice des polyominos parallélogrammes de hauteur à gauche $n+1$ et hauteur à droite $m+1$ est (Proposition 2.10) :

$$x^2 y^{n+1} q^{m+n+2} N_{m+1} \frac{N(xq^{n+1})}{N} - y N_{m+1}^{n+1}.$$

(ii) la série génératrice des polyominos tas de hauteur n est : $\frac{xy^n q^n T_n}{(xq)_n}$ (Proposition 2.5). \square

Mais alors, la série génératrice de tous les polyominos convexes de \mathcal{Q} est :

$$A = \sum_{n \geq 0} \frac{T_m}{(xq)_m} \frac{T_n}{(xq)_n} \left(x^2 y^{n+1} q^{m+n+2} N_{m+1} \frac{N(xq^{n+1})}{N} - y N_{m+1}^{n+1} \right),$$

$$= \frac{1}{N} \left(\sum_{n \geq 0} xq^{m+1} \frac{T_m N_{m+1}}{(xq)_n} \right) \left(\sum_{n \geq 0} x y^{n+1} q^{n+1} N(xq^{n+1}) \frac{T_n}{(xq)_n} \right) - y \sum_{0 \leq n \leq m} N_{m+1}^{n+1} \frac{T_m T_n}{(xq)_m (xq)_n}.$$

Remarquons que la série $\sum_{0 \leq n \leq m} N_{m+1}^{n+1} \frac{T_m T_n}{(xq)_m (xq)_n}$ est bien convergente, du fait que le polynôme N_{m+1}^{n+1} est multiple de q^{m+1} .

D'autre part, la série $\sum_{n \geq 0} x y^{n+1} q^{n+1} N(xq^{n+1}) \frac{T_n}{(xq)_n}$ a déjà été calculée lors de l'énumération des polyominos convexes dirigés : elle vaut $y(R - \hat{N})$. La proposition 2.16 s'en déduit. \square

Remarque. Les formules obtenues pour l'énumération des polyominos parallélogrammes et des polyominos convexes dirigés s'exprimaient à partir de fonctions (N, R, N) dont on connaissait le développement en x . Ce n'est plus le cas ici, puisque les développements en x de V et M sont inconnus.

Dans le chapitre suivant, nous montrerons que le coefficient de x^n dans V et M est une fraction rationnelle en y et q . Dans le cas où y vaut un, nous donnerons la valeur de son dénominateur. Nous en déduirons la forme de la série génératrice des polyominos convexes à n colonnes, qui est elle aussi une fraction rationnelle en y et q .

Énumération des polyominos de \mathcal{B}

Proposition 2.19. *La série génératrice B des polyominos de \mathcal{B} est donnée par la relation*

$$B = \sum_{n \geq 1} \frac{x y^n q^n (T_n)^2}{(xq)_{n-1} (xq)_n}.$$

(Les polynômes T_n sont définis dans la proposition 2.5).

Preuve. Considérons un polyomino P de \mathcal{B} à k colonnes, C_1, \dots, C_k , de hauteur n . D'après la définition de \mathcal{B} , $D_S < D_N$, $D_N < D_S$. (Fig.2.17), et P a au moins une colonne de hauteur n . Soit C_p (resp. C_r) la plus à gauche (resp. la plus à droite) des colonnes de hauteur n . Les polyominos P_2 et P_3 formés respectivement des colonnes C_1, \dots, C_p et C_r, \dots, C_k sont des polyominos tas de hauteur n n'ayant qu'une colonne de hauteur n . D'autre part, le polyomino P_1 formé des colonnes C_p, \dots, C_r est un rectangle de hauteur n . De plus :

- la hauteur de P est celle de P_1 ,
- le nombre de colonnes de P est la somme des nombres de colonnes de P_1 , P_2 et P_3 , diminuée de deux,
- l'aire de P est la somme des aires de P_1 , P_2 et P_3 , diminuée de $2n$.

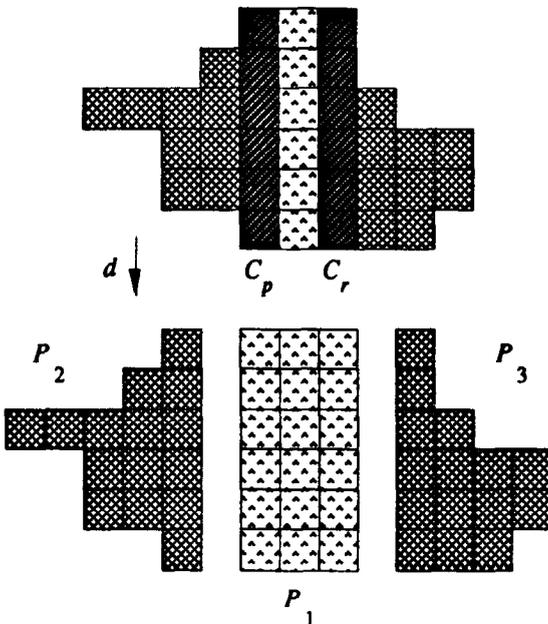


Fig. 2.17
Décomposition des polyominos de \mathcal{B} .
 (Ici, $p = 5$, $r = 7$ et $n = 6$)

L'application d définie par $d(P) = (P_1, P_2, P_3)$ est alors une bijection entre les polyominos de \mathfrak{B} de hauteur n et les triplets (P_1, P_2, P_3) formés d'un rectangle P_1 de hauteur n et de deux polyominos tas de hauteur n , P_2 et P_3 , n'ayant qu'une colonne de hauteur n .

La série génératrice des rectangles de hauteur n est $xy^n q^n / (xq)_n$. Celle des polyominos tas généraux de hauteur n étant $xy^n q^n T_n / (xq)_n$, celle des polyominos tas de hauteur n n'ayant qu'une colonne de hauteur n sera $xy^n q^n T_n / (xq)_{n-1}$. La proposition 2.19 découle alors de ces deux résultats. \square

En regroupant les résultats des propositions 2.17 et 2.19, on parvient à celui de la proposition 2.16. \square

Références.

[De-Vi] M.P. DELEST, X.G. VIENNOT, Algebraic languages and polyominos enumeration, Theor. Comp. Sci. 34 (1984) 169-206, North-Holland.

[Wr] E.M. WRIGHT, Stacks, Quart. J. Math. Oxford (2) 19 (1968) 313-320.

CHAPITRE 3

SÉRIES RATIONNELLES POUR LES POLYOMINOS CONVEXES DE LARGEUR DONNÉE (Cas $y=1$)

Nous reprenons les expressions obtenues pour les séries X, Y et Z énumérant respectivement les polyominos parallélogrammes, convexes dirigés et convexes. Nous nous intéressons à la forme de leur développement en x , c'est à dire, puisque le paramètre x compte la largeur du polyomino, à la série génératrice des polyominos (parallélogrammes, convexes dirigés ou convexes) de largeur donnée. Nous montrons que toutes ces séries sont des fractions rationnelles en y et q , dont nous donnons, dans le cas particulier où y vaut un, le dénominateur. Le cas général (y quelconque) sera traité dans le chapitre suivant, via une autre méthode.

1. POLYOMINOS PARALLÉLOGRAMMES ET CONVEXES DIRIGÉS

Notations. Rappelons que, pour $n \geq 1$, $(a)_n = \prod_{i=0}^{n-1} (1 - aq^i)$.
On convient que $(a)_n = 1$ pour $n \leq 0$.

Proposition 3.1. (i) La série génératrice $X(x,1,q)$ des polyominos parallélogrammes, comptés suivant la largeur (par x) et l'aire (par q) s'écrit sous la forme suivante :

$$X(x,1,q) = \sum_{n \geq 1} x^n q^n \frac{\hat{X}_n}{(q)_{n-1} (q)_n},$$

où \hat{X}_n est élément de $\mathbb{Z}[q]$.

(ii) La série génératrice $Y(x,1,q)$ des polyominos convexes dirigés, comptés suivant la largeur (par x) et l'aire (par q) s'écrit sous la forme suivante :

$$Y(x,1,q) = \sum_{n \geq 1} x^n q^n \frac{\hat{Y}_n}{(q)_{n-1} (q)_n},$$

où \hat{Y}_n est élément de $\mathbb{Z}[q]$.

Preuve. Lorsque y vaut un, d'après les propositions 1.10 et 2.3, chacune des séries X et Y peut s'écrire sous la forme :

$$S = \frac{\sum_{n \geq 1} (xq)^n \frac{P_n}{(q)_{n-1}(q)_n}}{\sum_{n \geq 0} (xq)^n \frac{Q_n}{(q)_n(q)_n}}$$

où P_n et Q_n sont des polynômes de $\mathbb{Z}[q]$. Plus précisément, $P_n = (-1)^{n+1} q^{\binom{n}{2}}$ pour la série X , $P_n = \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m q^{\binom{m}{2}}$ pour la série Y , et $Q_n = (-1)^n q^{\binom{n}{2}}$ dans les deux cas. En particulier, $Q_0 = 1$.

En utilisant l'identité $1/(1+y) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k y^k$, le développement en x de S s'écrit :

$$S = \sum_{n \geq 1} (xq)^n \sum_{\substack{m \geq 1, k \geq 0, m_1 \geq 1, \dots, m_k \geq 1 \\ m + m_1 + \dots + m_k = n}} \frac{(-1)^k P_m Q_{m_1} \dots Q_{m_k}}{(q)_{m-1} (q)_{m_1} \dots (q)_{m_k} (q)_m (q)_{m_1} \dots (q)_{m_k}}$$

Considérons les q -analogues des coefficients multinômiaux, notés $\begin{bmatrix} n \\ n_2, \dots, n_i \end{bmatrix}$ et définis par :

$$\begin{bmatrix} n \\ n_2, \dots, n_i \end{bmatrix} = \frac{(q)_n}{(q)_{n_1} \dots (q)_{n_i}}, \text{ avec } \sum_{1 \leq j \leq i} n_j = n.$$

Ces q -analogues sont des polynômes de $\mathbb{Z}[q]$. On écrit alors:

$$S = \sum_{n \geq 1} x^n q^n \frac{\hat{S}_n}{(q)_{n-1}(q)_n}$$

où
$$\hat{S}_n = \sum_{\substack{m \geq 1, k \geq 0, m_1 \geq 1, \dots, m_k \geq 1 \\ m + m_1 + \dots + m_k = n}} \begin{bmatrix} n-1 \\ m_1, \dots, m_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ m_1, \dots, m_k \end{bmatrix} (-1)^k P_m Q_{m_1} \dots Q_{m_k}$$

est élément de $\mathbb{Z}[q]$, ce qui achève la preuve. \square

Remarques. 1) On a donc $X(x,1,q) = \sum_{n \geq 1} (xq)^n \frac{P_n}{Q_n}$, où P_n et Q_n sont dans $\mathbb{Z}[q]$. Nous venons de montrer que l'on peut choisir $Q_n = (q)_{n-1}(q)_n$. Fedou [Fe1, Fe2] propose une autre valeur pour Q_n , à savoir $\lambda_n = (1-q)^{2n-1} \prod_{i=1}^n [i]^{n/i}$, où $[n/i]$ désigne la partie entière de n/i . Nous retrouverons ce résultat dans le chapitre suivant. Il est possible de décomposer les polynômes λ_n et Q_n en facteurs irréductibles de $\mathbb{Z}[q]$, qui sont ici les polynômes cyclotomiques, et de calculer leur plus grand diviseur commun. Pour $n \geq 8$, celui-ci n'est égal ni à λ_n , ni à Q_n , et donc, d'une certaine façon, aucune de ces deux valeurs n'est optimale.

2) Lorsque y est quelconque, les valeurs obtenues pour les séries X et Y s'écrivent toutes deux $\left(\sum_{n \geq 1} x^n F_n \right) / \left(\sum_{n \geq 0} x^n G_n \right)$, où F_n et G_n sont des fractions rationnelles en y et q ; ceci permet d'affirmer que le coefficient de x^n dans X (ou Y) en est aussi une.

Exemples. A l'aide du logiciel de calcul formel MAPLE, nous avons obtenu pour les premières valeurs des polynômes \hat{X}_n et \hat{Y}_n les résultats suivants :

$$\hat{X}_1 = 1,$$

$$\hat{X}_2 = 1,$$

$$\hat{X}_3 = 1 + q + q^2 + q^3,$$

$$\hat{X}_4 = 1 + 2q + 4q^2 + 6q^3 + 7q^4 + 6q^5 + 4q^6 + 2q^7 + q^8,$$

$$\hat{X}_5 = 1 + 3q + 8q^2 + 17q^3 + 30q^4 + 45q^5 + 58q^6 + 66q^7 + 66q^8 + 58q^9 + 45q^{10} + 30q^{11} + 17q^{12} + 8q^{13} + 3q^{14} + q^{15}.$$

La suite $(\hat{X}_n(1))_{n \geq 0} = (1, 1, 4, 35, 456, \dots)$ obtenue en faisant la somme des coefficients de chacun des polynômes \hat{X}_n apparaît dans un article de Carlitz [Ca]. Elle porte le numéro 1484 dans le livre de Sloane [SI]. Cette suite de polynômes vient d'être interprétée en termes de tresses par Fedou, qui démontre que les \hat{X}_n sont à coefficients positifs et symétriques.

Nous conjecturons que les \hat{X}_n sont unimodaux.

$$\hat{Y}_1 = 1,$$

$$\hat{Y}_2 = 1 + q,$$

$$\hat{Y}_3 = 1 + 3q + 3q^2 + 2q^3 + q^4,$$

$$\hat{Y}_4 = 1 + 5q + 9q^2 + 14q^3 + 18q^4 + 17q^5 + 13q^6 + 7q^7 + 3q^8 + q^9,$$

$$\hat{Y}_5 = 1 + 7q + 17q^2 + 37q^3 + 70q^4 + 109q^5 + 147q^6 + 173q^7 + 180q^8 + 165q^9 + 133q^{10} + 94q^{11} + 57q^{12} + 29q^{13} + 12q^{14} + 4q^{15} + q^{16}.$$

Nous conjecturons que les \hat{Y}_n sont à coefficients positifs et unimodaux.

2. POLYOMINOS CONVEXES

Nous nous proposons maintenant de faire une étude analogue pour la série Z des polyominos convexes. Rappelons la forme de l'expression obtenue dans la proposition 2.16 :

$$Z(x, y, q) = 2y \left[\frac{(R - \hat{N})V}{N} - M \right] - B .$$

Le développement en x des séries N , \hat{N} et R est connu (proposition 2.13), contrairement à celui de V , B ou M . Ces trois dernières séries font intervenir les polynômes T_m et N_m liés respectivement à l'énumération des polyominos tas et des empilements triviaux. En utilisant les relations de récurrence que vérifient ces polynômes, nous allons pouvoir calculer successivement le développement en x de V , B et M . Nous obtiendrons ensuite celui de Z en regroupant ces résultats, démontrant ainsi la proposition suivante.

Proposition 3.2. *La série génératrice $Z(x, 1, q)$ des polyominos convexes, comptés suivant la largeur (par x) et l'aire (par q) s'écrit sous la forme suivante :*

$$Z(x, 1, q) = \sum_{n \geq 1} x^n q^n \frac{\hat{Z}_n}{(q)_{n-2} (q)_{n-1} (q)_n} ,$$

où \hat{Z}_n est élément de $\mathbb{Z}[q]$.

Remarque. Nous montrerons dans le chapitre 4 que, pour $n \geq 2$, \hat{Z}_n est en fait divisible par $(1-q)^{n-2}$, ce qui permettra d'affirmer que la série génératrice des polyominos convexes de largeur n , comptés suivant l'aire, est une fraction rationnelle de dénominateur $[n-2]!(q)_{n-1}(q)_n$.

En reliant les valeurs des polynômes T_m et N_m à celles de certains déterminants, nous avons montré dans le chapitre 2 les relations de récurrence suivantes.

D'une part : $T_0(x) = 1, T_1(x) = 1,$

$$qT_m(x) = (1+q)T_{m-1}(xq) + (xq^2 - 1)T_{m-2}(xq^2), \quad m \geq 2.$$

D'autre part : $N_0(x) = 0, N_1(x) = 1,$

$$N_m(x) = (1+y-xq)N_{m-1}(xq) - yN_{m-2}(xq^2), \quad m \geq 2.$$

Par ailleurs, on déduit de la définition de N_m^n donnée dans la définition 2.9 que $N_m^n(x) = yN_{m-1}^{n-1}(xq)$ pour tout couple d'entiers (m, n) .

Pour obtenir le développement en x de chacune des séries V , B et M , on procède en trois temps, de la manière suivante:

- on dispose, au départ, d'une expression de la série S étudiée de la forme $S(x) = \sum s_m(x)$, où s_m s'écrit en fonction des polynômes T_i , N_i et N_i^j . L'indice m peut être en fait un multi-indice. À l'aide des récurrences établies pour les T_i , N_i et N_i^j , et rappelées ci-dessus, on construit d'abord une équation (ou un système d'équations) liant entre eux les $s_{m-k}(xq^k)$, pour m fixé.
- dans un second temps, cette équation se traduit, par sommation sur m , en une équation portant sur les $S(xq^k)$.
- enfin, on identifie le coefficient de x^n dans chacun des membres de cette équation fonctionnelle, ce qui fournit une relation de récurrence pour les S_n , où S_n désigne le coefficient de x^n dans S .

Notations. Dans la suite de ce chapitre, nous allons écrire de nombreuses équations. Un certain nombre de termes y sont marqués en gras, ce qui ne constitue pas un changement de notations, mais a pour objectif de souligner la forme de l'équation.

Le symbole \mathbb{I}_A désignera la fonction indicatrice de l'événement A .

Développement de la série V

Rappelons que $V(x) = \sum_{m \geq 0} \frac{xq^{m+1}}{(xq)_m} T_m(x) N_{m+1}(x)$ (Proposition 2.16).

Soit V' la série formelle suivante : $V'(x) = \sum_{m \geq 0} \frac{xq^{m+1}}{(xq)_m} T_m(x) [N_{m+1}(x) - N_m(xq)]$.

Pour $n \geq 1$, soit V_n (resp. V'_n) le coefficient de x^n dans V (resp. V'). Pour $n \leq 0$, posons

$$V_n = V'_n = 0.$$

Proposition 3.3. (i) $V_1 = \frac{q}{(1-q)(1-xy)}$ et, pour $n \geq 1$, les coefficients V_n et V'_n sont liés par les relations de récurrence suivantes :

$$(1 - q^{n-1}) (1 - q^n) V_n = (1 - yq^{2n-1})V'_n + q(1 + q^{2n-2})V_{n-1} - qV'_{n-1} - q\mathbb{I}_{n-1},$$

$$(1 - yq^{n-1})(1 - yq^n)V'_n = -q^{n-1}[(1 - q^{n-1}) + q(1 - yq^{n-1})]V_{n-1} + q(1 + yq^{2n-3})V'_{n-1} - q^{2n-2}V_{n-2} + q(1 - y)\mathbb{I}_{n-1}.$$

(ii) Lorsque y vaut un, le développement en x de la série V s'écrit :

$$V(x) = \sum_{n \geq 1} x^n \frac{\hat{V}_n}{(q)_{n-1}(q)_n^2},$$

où \hat{V}_n est élément de $\mathbb{Z}\{q\}$.

Preuve. (i) Pour $m \geq 0$, notons $a_m(x) = T_m(x)N_{m+1}(x)$

$$\text{et } b_m(x) = T_m(x)[N_{m+1}(x) - N_m(xq)].$$

Alors : $a_0(x) = 1, a_1(x) = 1 + y - xq,$

$$b_0(x) = 1, b_1(x) = y - xq.$$

Par ailleurs, pour $m \geq 2$, on obtient, en utilisant les relations de récurrence portant sur T_m et N_m rappelées ci-dessus, le système suivant :

$$qa_m(x) = qb_m(x) + (1+q)a_{m-1}(xq) - (1-xq^2)^2 a_{m-2}(xq^2) - y(1-xq^2)b_{m-2}(xq^2),$$

$$qb_m(x) = -xq(1+q)a_{m-1}(xq) + y(1+q)b_{m-1}(xq) + xq(1-xq^2)(1+yq-xq^2)a_{m-2}(xq^2) + y(xq-y)(1-xq^2)b_{m-2}(xq^2).$$

$$\text{Or } V(x) = \sum_{m \geq 0} \frac{xq^{m+1}}{(xq)_m} a_m(x) \quad \text{et} \quad V'(x) = \sum_{m \geq 0} \frac{xq^{m+1}}{(xq)_m} b_m(x).$$

En multipliant chacune des équations ci-dessus par $xq^{m+1}/(xq)_m$, et en sommant sur $m \geq 2$ les expressions ainsi obtenues, on parvient au système suivant liant V et V' :

$$\begin{aligned} q(1-xq)V(x) &= q(1-xq)V'(x) + (1+q)V(xq) + (xq^2-1)V(xq^2) - yV'(xq^2) - xq^2, \\ q(1-xq)V'(x) &= -xq(1+q)V(xq) + y(1+q)V'(xq) + xq(1+yq-xq^2)V(xq^2) \\ &\quad + y(xq-y)V'(xq^2) + xq^2(1-y). \end{aligned}$$

En identifiant le coefficient de x^n dans chaque membre de ces identités, on obtient alors les deux relations annoncées en (i).

Lorsque x vaut zéro, $T_m = 1$ et $N_m = \frac{1-y^m}{1-y}$ pour tout $m \geq 0$. Ceci permet de démontrer que

$$V_1 = \frac{q}{(1-q)(1-xy)}.$$

D'autre part, on déduit de la seconde des équations de (i) que $V'_1 = \frac{q}{1-yq}$.

Dès lors, ces équations permettent de calculer, par récurrence sur n , les couples (V_n, V'_n) , en appliquant d'abord la seconde relation, puis la première. Elles impliquent aussi que V_n et V'_n sont des fractions rationnelles en y et q .

(ii) Lorsque y vaut un, le coefficient de V_{n-1} dans la seconde équation se factorise. On montre alors, par récurrence sur n , que V_n (resp. V'_n) est une fraction rationnelle en q de dénominateur $(q)_{n-1}(q)_n^2$ (resp. $(q)_{n-2}(q)_{n-1}(q)_n$), ce qui fournit le second résultat. \square

Remarque. Il serait possible d'éliminer V'_{n-1} et V'_n entre les deux équations de (i), et d'aboutir ainsi à une seule relation de récurrence liant entre elles les fractions V_i . En effet, ces deux équations permettent d'exprimer V'_{n-1} et V'_n en fonction de V_n , V_{n-1} et V_{n-2} . En remplaçant, dans l'expression de V'_n , n par $n-1$, on obtient alors deux expressions distinctes pour V'_{n-1} , qu'il suffit d'identifier pour parvenir à une relation de récurrence portant seulement sur les V_i .

Développement de la série B

Rappelons que $B(x) = \sum_{m \geq 1} \frac{xy^m q^m T_m(x)^2}{(xq)_{m-1}(xq)_m}$ (Proposition 2.16).

Pour $n \geq 1$, soit B_n le coefficient de x^n dans B , c'est à dire la série génératrice, en y et q , des polyominos de \mathfrak{B} de largeur n . Pour $n \leq 0$, posons $B_n = 0$.

Proposition 3.4. (i) Pour $n \geq 1$, les coefficients B_n sont liés par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned} (1-yq^{n-2})(1-yq^{n-1})(1-yq^n)B_n &= q[2+q-yq^{n-2}(1+q^2)-y^2q^{2n-3}]B_{n-1} \\ &\quad - q^2(1+2q+yq^{n-1})B_{n-2} + q^4B_{n-3} \\ &\quad + y(1-y)(q-y)\mathbb{I}_{n-1} - yq^2(1+q-yq+y^2q)\mathbb{I}_{n-2} \\ &\quad + yq^4(1+y)\mathbb{I}_{n-3}. \end{aligned}$$

(ii) La série B admet le développement en x suivant :

$$B = \sum_{n \geq 1} x^n y q^n \frac{\overline{B}_n(y, q)}{(yq)_{n-2}(yq)_{n-1}(yq)_n},$$

où \overline{B}_n est un polynôme de $\mathbb{Z}[y, q]$.

De plus, $\overline{B}_1(y, 1) = 1$,

$$\text{et, pour } n \geq 2, \quad \overline{B}_n(y, 1) = \frac{1}{2}(1-y)^{n-2} \sum_{k=0}^n y^k \left[(-1)^{k-1} \binom{n-1}{k-1} + \frac{2n-3k}{n} \binom{2n}{2k} \right].$$

Preuve. Pour $m \geq 0$, notons $a_m(x) = (T_m(x))^2$ et, pour $m \geq 1$, $b_m(x) = T_m(x)T_{m-1}(xq)$.

Pour $m \geq 2$, il vient :

$$\begin{aligned} q^2 a_m(x) &= \left[(1+q)T_{m-1}(xq) + (xq^2-1)T_{m-2}(xq^2) \right]^2, \\ &= (1+q)^2 a_{m-1}(xq) + (1-xq^2)^2 a_{m-2}(xq^2) - 2(1-xq^2)(1+q)b_{m-1}(xq). \end{aligned}$$

D'autre part, pour $m \geq 2$:

$$\begin{aligned} q b_m(x) &= T_{m-1}(xq) \left[(1+q)T_{m-1}(xq) + (xq^2-1)T_{m-2}(xq^2) \right], \\ &= (1+q)a_{m-1}(xq) + (xq^2-1)b_{m-1}(xq). \end{aligned}$$

Il est facile d'éliminer $b_m(x)$ et $b_{m-1}(xq)$ entre ces deux équations. En effet, la première permet d'exprimer $b_{m-1}(xq)$ en fonction de $a_m(x)$, $a_{m-1}(xq)$ et $a_{m-2}(xq^2)$. En remplaçant m par $m-1$ et x par xq , on obtient aussi une expression de $b_{m-2}(xq^2)$ en fonction de $a_{m-1}(xq)$, $a_{m-2}(xq^2)$ et $a_{m-3}(xq^3)$.

En substituant, dans la seconde équation, m par $m-1$ et x par xq , on dispose d'une relation liant $b_{m-1}(xq)$ et $b_{m-2}(xq^2)$. En remplaçant ces deux valeurs par leur expression en fonction des $a_{m-i}(xq^i)$ précédemment obtenue, on parvient finalement à la récurrence suivante : pour $m \geq 3$,

$$\begin{aligned} q^3 a_m(x) &= q(1+q+q^2+xq^3)a_{m-1}(xq) - (1-xq^2)(1+q+q^2+xq^3)a_{m-2}(xq^2) \\ &\quad + (1-xq^2)(1-xq^3)^2 a_{m-3}(xq^3). \end{aligned}$$

$$\text{Or } B(x) = \sum_{m \geq 1} \frac{x y^m q^m a_m}{(xq)_{m-1}(xq)_m}.$$

De plus, $a_0 = a_1 = 1$ et $a_2 = (1+xq)^2$.

En multipliant l'identité ci-dessus par $xy^m q^m / [(xq)_m (xq)_{m-1}]$, et en sommant l'expression ainsi obtenue sur $m \geq 3$, on parvient à l'équation suivante :

$$\begin{aligned} q^3 (1-xq)^2 (1-xq^2) B(x) &= yq(1-xq^2)(1+q+q^2+xq^3) B(xq) \\ &\quad - y^2 (1+q+q^2+xq^3) B(xq^2) + y^3 B(xq^3) \\ &\quad + xyq^3(1-y)(q-y) - x^2 yq^5(1+q-yq+y^2q) \\ &\quad + x^3 yq^7(1+y). \end{aligned}$$

En identifiant le coefficient de x^n dans chaque membre de cette égalité, on obtient la relation de récurrence (i).

Elle fournit $B_1 = \frac{yq}{1-yq}$, puis $B_2 = \frac{yq^2(1+2yq-y^2q^2)}{(1-yq)^2(1-yq^2)}$.

On montre ensuite, par récurrence sur n , que B_n a la forme annoncée en (ii).

En ce qui concerne la valeur de $\bar{B}_n(y,1)$, elle provient de l'expression de $B(x,y,1)$ que nous obtiendrons au chapitre 6 (Proposition 6.7) :

$$B(x,y,1) = xy \frac{(1-x)(1-x-2y+y^2-xy)}{(1-x-y)(1-2x-2y-2xy+x^2+y^2)}.$$

Pour en déduire $\bar{B}_n(y,1)$, on fait le changement de variable $x \rightarrow \bar{t}(1-y)^2$ dans B , et on développe ensuite B suivant \bar{t} . Des calculs tout à fait analogues seront décrits dans le chapitre 6, et c'est pourquoi nous ne détaillerons pas celui-ci. \square

Exemples. Les premiers termes du développement en x de la série B , obtenus à partir de la relation de récurrence du (i), sont :

$$B_1 = \frac{yq}{1-yq}$$

$$B_2 = \frac{yq^2(1+2yq-y^2q^2)}{(1-yq)^2(1-yq^2)}$$

$$B_3 = \frac{yq^3(1+5yq+2yq^2-6y^2q^2-2y^2q^3-y^2q^4-y^3q^5+2y^3q^3)}{(1-yq)^3(1-yq^2)^2(1-yq^3)},$$

et

$$\bar{B}_2(y,1) = 1 + 2y - y^2,$$

$$\bar{B}_3(y,1) = (1-y)(1+8y-y^2),$$

$$\bar{B}_4(y,1) = (1-y)^2(1+18y+16y^2-2y^3-y^4).$$

Développement de la série M

Rappelons que $M(x) = \sum_{0 \leq n \leq m} N_{m+1}^{n+1}(x) \frac{T_m(x)T_n(x)}{(xq)_m(xq)_n}$ (Proposition 2.16).

Notons $C_0(x) = \sum_{m \geq 0} N_{m+1}^1(x) \frac{T_m(x)}{(xq)_m}$,

$$C_1(x) = \frac{1}{1-xq} \sum_{m \geq 1} N_{m+1}^2(x) \frac{T_m(x)}{(xq)_m},$$

et $C_2(x) = \frac{1+xq}{(1-xq)(1-xq^2)} \sum_{m \geq 2} N_{m+1}^3(x) \frac{T_m(x)}{(xq)_m}$.

Pour $n \geq 1$, soit M_n le coefficient de x^n dans $M(x)$. Pour $n \leq 0$, posons $M_n = 0$.

Proposition 3.5. (i) Pour $n \geq 1$, les coefficients M_n sont liés par la relation de récurrence suivante :

$$(1-yq^{n-2})(1-yq^{n-1})(1-yq^n)M_n = q[2+q-yq^{n-2}(1+q^2)-y^2q^{2n-3}]M_{n-1} - q^2(1+2q+yq^{n-1})M_{n-2} + q^4M_{n-3} + \bar{M}_n.$$

où \bar{M}_n est le coefficient de x^n dans la série \bar{M} définie par :

$$\begin{aligned} \bar{M}(x) &= (1-xq)^2(1-xq^2)(C_0(x)+C_1(x)+C_2(x)) \\ &- \frac{y}{q^2}(1-xq^2)(1+q+q^2+xq^3)(C_0(xq)+C_1(xq)) + \frac{y^2}{q^3}(1+q+q^2+xq^3)C_0(xq^2). \end{aligned}$$

ii) Lorsque y vaut un, le développement en x de la série M s'écrit :

$$M(x) = \sum_{n \geq 1} x^n \frac{\hat{M}_n}{(q)_{n-2}(q)_{n-1}(q)_n},$$

où \hat{M}_n est élément de $\mathbb{Z}[q]$.

Preuve. (i) Notons $a_{m,n}(x) = N_{m+1}^{n+1}(x)T_m(x)T_n(x)$ si $m \geq n \geq 0$,

et, $b_{m,n}(x) = N_{m+1}^{n+1}(x)[T_m(x)T_{n-1}(xq)+T_n(x)T_{m-1}(xq)]$ si $m \geq n \geq 1$.

Alors, pour $m \geq n \geq 2$:

$$\begin{aligned} q^2 a_{m,n}(x) &= N_{m+1}^{n+1} [(1+q)T_{m-1}(xq) + (xq^2-1)T_{m-2}(xq^2)] [(1+q)T_{n-1}(xq) + (xq^2-1)T_{n-2}(xq^2)] \\ &= y(1+q)^2 a_{m-1,n-1}(xq) + y^2(1-xq^2)^2 a_{m-2,n-2}(xq^2) - y(1-xq^2)(1+q)b_{m-1,n-1}(xq). \end{aligned}$$

D'autre part, pour $m \geq n \geq 2$:

$$\begin{aligned} q^2 b_{m,n}(x) &= N_{m+1}^{n+1} T_{n-1}(xq) [(1+q)T_{m-1}(xq) + (xq^2-1)T_{m-2}(xq^2)] \\ &\quad + N_{m+1}^{n+1} T_{m-1}(xq) [(1+q)T_{n-1}(xq) + (xq^2-1)T_{n-2}(xq^2)] \\ &= 2y(1+q)a_{m-1,n-1}(xq) + y(xq^2-1)b_{m-1,n-1}(xq). \end{aligned}$$

Comme dans l'étude de la série B , il est facile d'éliminer $b_{m,n}(x)$ et $b_{m-1,n-1}(xq)$ entre ces deux équations, qui sont d'ailleurs très voisines de celles obtenues pour B . En utilisant donc la même technique, on parvient à la récurrence suivante : pour $m \geq n \geq 3$,

$$q^3 a_{m,n}(x) = yq(1+q+q^2+xq^3)a_{m-1,n-1}(xq) - y^2(1-xq^2)(1+q+q^2+xq^3)a_{m-2,n-2}(xq^2) + y^3(1-xq^2)(1-xq^3)^2 a_{m-3,n-3}(xq^3).$$

$$\text{Or } M(x) = \sum_{0 \leq n \leq m} \frac{a_{m,n}}{(xq)_m (xq)_n}.$$

En multipliant l'identité ci-dessus par $1/[(xq)_m (xq)_n]$ et en sommant sur $m \geq n \geq 3$ l'expression ainsi obtenue, on parvient à l'équation suivante :

$$q^3(1-xq)^2(1-xq^2)M(x) = yq(1-xq^2)(1+q+q^2+xq^3)M(xq) - y^2(1+q+q^2+xq^3)M(xq^2) + y^3M(xq^3) + q^3\bar{M}(x),$$

où \bar{M} est défini dans la proposition 3.5. En identifiant le coefficient de x^n dans chaque membre de cette égalité, on obtient la relation de récurrence (i).

Pour montrer (ii), on procède de nouveau par récurrence. Il faut :

- d'une part amorcer cette récurrence en montrant que M_1 et M_2 sont de la forme voulue,
- d'autre part évaluer le terme \bar{M}_n , ou, du moins, montrer que c'est une fraction rationnelle dont le dénominateur, lorsque y vaut un, divise $(q)_{n-3}(q)_{n-2}(q)_{n-1}$.

Nous allons d'abord exprimer $C_0(x)$, $C_1(x)$ et $C_2(x)$ en fonction des séries $V(x)$ et $V'(x)$ étudiées ci-dessus. Rappelons que

$$V(x) = \sum_{m \geq 0} \frac{xq^{m+1}}{(xq)_m} T_m(x) N_{m+1}(x)$$

$$\text{et que } V'(x) = \sum_{m \geq 0} \frac{xq^{m+1}}{(xq)_m} T_m(x) [N_{m+1}(x) - N_m(xq)].$$

D'après la proposition 1.21 :

$$N_{m+1}^1 = -xq \quad \text{si } m = 0,$$

$$N_{m+1}^1 = x^2 q^{m+2} N_m(xq) \quad \text{si } m \geq 1.$$

De même :

$$N_{m+1}^2 = -xyq^2 \quad \text{si } m = 1,$$

$$N_{m+1}^2 = x^2 yq^{m+3} N_{m-1}(xq^2) \quad \text{si } m \geq 2.$$

Enfin :

$$N_{m+1}^3 = -xy^2 q^3 \quad \text{si } m = 2,$$

$$N_{m+1}^3 = x^2 y^2 q^{m+4} N_{m-2}(xq^3) \quad \text{si } m \geq 3.$$

Par ailleurs, pour $m \geq 1$,

$$yN_{m-1}(xq^2) = (1+y-xq)N_m(xq) - N_{m+1}(x),$$

et, pour $m \geq 2$,

$$y^2 N_{m-2}(xq^3) = (1+y+y^2-xq(1+y)(1+q)+x^2 q^3)N_m(xq) - (1+y-xq^2)N_{m+1}(x).$$

On déduit de cet ensemble de relations les égalités suivantes :

$$C_0(x) = xq[V(x) - V'(x) - 1],$$

$$C_1(x) = \frac{xq^2}{1-xq} \left[(y-xq)V(x) - (1+y-xq)V'(x) + xq - \frac{y}{1-xq} \right],$$

et enfin

$$C_2(x) = \frac{xq^3(1+xq)}{(1-xq)(1-xq^2)} \left[(y^2 - xq(1+y+yq) + x^2q^3)V(x) - (1+y+y^2 - xq(1+q)(1+y) + x^2q^3)V'(x) + xq(1+y-xq^2) + \frac{xyq^2}{1-xq} - \frac{y^2(1+xq)}{(1-xq)(1-xq^2)} \right].$$

Il n'est pas nécessaire d'expliciter entièrement \bar{M} pour connaître le dénominateur de \bar{M}_n , lorsque y vaut un. En effet, on déduit des valeurs de $M_0(x)$, $M_1(x)$ et $M_2(x)$ que \bar{M} est de la forme :

$$\bar{M}(x) = x \left[P_0 V(x) + P_1 V(xq) + P_2 V(xq^2) + Q_0 V'(x) + Q_1 V'(xq) + Q_2 V'(xq^2) + F \right],$$

où : $- P_0, P_1, P_2, Q_0, Q_1, Q_2$ sont des polynômes de $\mathbb{Z}[x, y, q]$,

$- F$ est une fraction rationnelle en x, y et q , dont le développement en x s'écrit

$$F = \sum_{n \geq 0} x^n F_n, \quad F_n \text{ étant élément de } \mathbb{Z}[y, q].$$

On peut d'ailleurs calculer $F_0 = (y-q)(1-y)$ et $F_1 = q^2(2+2q+q^2-y(1+q))$. En fait, un calcul précis montre que F est un polynôme de $\mathbb{Z}[x, y, q]$.

Dès lors, si i (resp. j) est le plus grand des degrés de P_0, P_1, P_2 (resp. Q_0, Q_1, Q_2), considérés comme des polynômes en x , le coefficient de x^n dans \bar{M} est de la forme suivante :

$$\sum_{k=1}^{i+1} \alpha_k V_{n-k} + \sum_{k=1}^{j+1} \beta_k V'_{n-k} + F_{n-1},$$

où les α_k , les β_k et F_{n-1} sont des polynômes de $\mathbb{Z}[y, q]$.

Ceci assure que le coefficient de x^n dans \bar{M} est une fraction rationnelle en y et q . D'autre part, lors du développement de la série V , nous avons montré que, lorsque y vaut un, V_m (resp. V'_m) est une fraction rationnelle de dénominateur $(q)_{m-1}(q)_m^2$ (resp. $(q)_{m-2}(q)_{m-1}(q)_m$).

Or, nous cherchons à montrer que, lorsque y vaut un, le dénominateur du coefficient de x^n dans \bar{M} divise $(q)_{n-3}(q)_{n-2}(q)_{n-1}$. Comme c'est le cas pour les dénominateurs des V_{n-k} , pour $k \geq 2$, et des V'_{n-k} , pour $k \geq 1$, il nous suffit de prouver que $\alpha_1 V_{n-1}$ a pour dénominateur un diviseur de $(q)_{n-3}(q)_{n-2}(q)_{n-1}$. Or

$$\alpha_1 = q(1+qy+q^2y^2) - yq^{n-1}(1+yq)(1+q+q^2) + y^2q^{2n-2}(1+q+q^2),$$

et, lorsque y vaut un, α_1 se factorise sous la forme $\alpha_1 = q(1+q+q^2)(1-q^{n-2})(1-q^{n-1})$.

Finalement, le dénominateur de $\alpha_1 V_{n-1}$ divise bien $(q)_{n-3}(q)_{n-2}(q)_{n-1}$.

Restent à calculer M_1 et M_2 . En appliquant la relation de récurrence (i) de la proposition 3.5 à $n=1$, on obtient, compte tenu de la valeur de F_0 :

$$M_1 = -\frac{q}{1-yq}.$$

Pour calculer M_2 , on a besoin de connaître les valeurs de α_1 , β_1 et F_1 . Nous avons déjà donné celles de α_1 et F_1 . On calcule ensuite :

$$\beta_1 = -q(1+q+q^2+yq(1+q)+y^2q^2) + yq^{n-1}(1+q+q^2)(1+q+yq) - y^2q^{2n-2}(1+q+q^2).$$

Il vient $M_2 = \frac{q^3(1-2y+yq)}{(1-q)(1-yq)^2(1-yq^2)}$, et lorsque y vaut un, on a simplement :

$$M_2 = -\frac{q^3}{(1-q)^2(1-q^2)}.$$

Donc M_1 et M_2 sont bien, lorsque y vaut un, de la forme annoncée ; une récurrence achève la preuve de l'assertion (ii) de la proposition 3.5. \square

Nous pouvons maintenant, en regroupant les résultats des propositions 3.3, 3.4 et 3.5, montrer le résultat annoncé en 3.2, relatif au développement en x de la série génératrice des polyominos convexes.

Preuve de la proposition 3.2. Nous pouvons tout d'abord affirmer que le coefficient de x^n dans Z , étant la série génératrice des polyominos convexes de largeur n , comptés suivant l'aire (par q), est multiple de q^n , puisqu'un polyomino à n colonnes a au moins n cellules.

D'autre part, reprenons l'expression suivante de Z :

$$Z(x, y, q) = 2y \left[\frac{(R - \hat{N})V}{N} - M \right] - B.$$

Les développements en x des séries B et M (propositions 3.4 et 3.5) sont en accord avec le résultat annoncé. De plus, lorsque y vaut un, $\frac{R - \hat{N}}{N}$ est la série génératrice des polyominos convexes dirigés (Proposition 2.3). D'après la proposition 3.1, son développement en x s'écrit :

$$Y(x, 1, q) = \sum_{n \geq 1} x^n q^n \frac{\hat{Y}_n}{(q)_{n-1}(q)_n}.$$

En combinant ce résultat avec celui de la proposition 3.3, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{(R - \hat{N})V}{N} &= \left(\sum_{n \geq 1} x^n q^n \frac{\hat{Y}_n}{(q)_{n-1}(q)_n} \right) \left(\sum_{n \geq 1} x^n \frac{\hat{V}_n}{(q)_{n-1}(q)_n^2} \right), \\ &= \sum_{n \geq 2} x^n \sum_{1 \leq m \leq n-1} \frac{q^{n-m} \hat{Y}_{n-m} \hat{V}_m}{(q)_{n-m-1}(q)_{m-1}(q)_{n-n}(q)_m^2}. \end{aligned}$$

Or, puisque les q -analogues des coefficients binômiaux sont des polynômes :

- $(q)_{n-m-1} (q)_{m-1}$ divise $(q)_{n-2}$,
- $(q)_{n-m} (q)_m$ divise $(q)_n$,
- et $(q)_m$ divise $(q)_{n-1}$,

ce qui achève la preuve. \square

Exemples. Nous avons utilisé le logiciel de calcul formel MAPLE pour calculer successivement les premiers termes des développements en x des séries V , B et M . Nous obtenons, pour celui de Z , les résultats suivants :

$$\begin{aligned}\hat{Z}_1 &= 1, \\ \hat{Z}_2 &= 1 + 2q + q^2, \\ \hat{Z}_3 &= (1-q)(1 + 6q + 12q^2 + 12q^3 + 7q^4 + 2q^5), \\ \hat{Z}_4 &= (1-q)^2 (1 + 11q + 43q^2 + 95q^3 + 150q^4 + 186q^5 + 181q^6 \\ &\quad + 137q^7 + 79q^8 + 33q^9 + 10q^{10} + 2q^{11}).\end{aligned}$$

Comme annoncé, nous montrerons dans le chapitre suivant que, pour $n \geq 2$, \hat{Z}_n est divisible par $(1-q)^{n-2}$. Nous conjecturons que les $\hat{Z}_n / (1-q)^{n-2}$ sont à coefficients positifs et unimodaux.

Références.

- [Ca] L. CARLITZ, Integers related with Bessel functions, Proc. Amer. Math. Soc. 14 (1963) 1-9.
- [Fe1] J.M. FEDOU, Grammaires et q -énumération de polyominos, Thèse de Doctorat, Université Bordeaux I, avril 1989.
- [Fe2] J.M. FEDOU, Enumeration of skew Ferrers diagrams and basic Bessel functions, à paraître dans les actes de "Second conference on lattice paths and combinatorics and applications", Hamilton, 1990.
- [SI] N.J.A. SLOANE, A handbook of integer sequences, Academic Press, New-York, 1973.

CHAPITRE 4

EMPILEMENTS DE SEGMENTS ET ARBRES BINAIRES

Nous avons montré dans le chapitre précédent que la série génératrice des polyominos parallélogrammes, convexes dirigés ou convexes de largeur donnée est une fraction rationnelle en y et q .

Considérons, à titre d'exemple, les premiers termes du développement en x de la série génératrice X des polyominos parallélogrammes :

$$\begin{aligned}
 X &= \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1} x^n q^{\binom{n+1}{2}}}{(q)_{n-1} (yq)_n} \bigg/ \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^n q^{\binom{n+1}{2}}}{(q)_n (yq)_n}, \\
 &= \frac{xyq}{(1-yq)} + \frac{x^2 yq^2}{(1-yq)^2 (1-yq^2)} + \frac{x^3 yq^3 (1+yq^2)}{(1-yq)^3 (1-yq^2)(1-yq^3)} \\
 &\quad + \frac{x^4 yq^4 (1+yq^2+yq^3-y^2q^4-y^2q^5-y^3q^7)}{(1-yq)^4 (1-yq^2)^2 (1-yq^3)(1-yq^4)} + \dots
 \end{aligned}$$

Nous remarquons, sur ces premiers termes, que le dénominateur de la fraction rationnelle qui est le coefficient de x^n dans X est un produit de polynômes $(1-yq^k)$, pour $1 \leq k \leq n$, alors que la forme de la série génératrice X laisse penser que ces dénominateurs font aussi intervenir les polynômes $(1-q^k)$, $1 \leq k \leq n$.

Nous montrons ici que cette situation est générale : la série génératrice des polyominos parallélogrammes, convexes dirigés ou convexes de largeur n est une fraction rationnelle en y et q dont le dénominateur admet pour facteurs irréductibles les $(1-yq^k)$, $1 \leq k \leq n$. Nous donnons, plus précisément, la valeur de ce dénominateur pour chacune des trois classes de polyominos considérées.

L'approche choisie ici est différente de celle du chapitre précédent, dans lequel on exploitait les expressions des séries génératrices obtenues dans les chapitres 1 et 2. Nous procédons en deux étapes : nous étendons tout d'abord la bijection f entre polyominos

parallélogrammes et demi-pyramides de segments, décrite au chapitre 1, à tous les polyomino convexes de \mathcal{Q} . Dans un second temps, nous décrivons une application qui transforme les demi-pyramides de segments en arbres binaires. Une valuation adéquate de ces arbres permet alors de relier leur énumération à celle des polyomino convexes. C'est de cette interprétation en termes d'arbres que découlent les résultats sur les dénominateurs des fractions rationnelles annoncés ci-dessus.

1. PROLONGEMENT DE LA BIJECTION f

Nous allons construire une bijection - encore notée f - entre les polyomino convexes de \mathcal{Q} et certaines *demi-pyramides de segments tricolores*, qui prolonge celle définie dans le chapitre 1 pour les polyomino parallélogrammes.

Soit donc P un polyomino de \mathcal{Q} à n colonnes, notées, de gauche à droite, C_1, \dots, C_n .

Soit p le plus petit entier tel que P , privé des ses $p-1$ premières colonnes, soit un polyomino convexe dirigé à droite.

Soit r le plus grand entier tel que P , privé de ses $n-r$ dernières colonnes, soit un polyomino convexe dirigé à gauche. On a $1 \leq p \leq r \leq n$.

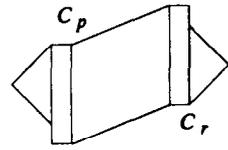


Fig. 4.1

Pour $1 \leq i \leq n$, soit b_i la hauteur de la colonne C_i .

Soit $a_1 = 1$, et, pour $2 \leq i \leq n$, soit a_i le nombre de cellules par lesquelles les colonnes C_{i-1} et C_i sont en contact. Alors, en posant $b_0 = 1$,

- $a_i \leq \min(b_i, b_{i-1})$, pour $1 \leq i \leq n$,
- $a_i = b_{i-1}$, pour $2 \leq i \leq p$,
- $a_i = b_i$, pour $r+1 \leq i \leq n$.

Soit $d_1 = 0$, et, pour $2 \leq i \leq p$, soit d_i la différence entre la base de C_{i-1} et celle de C_i .

On a :

- $a_i + d_i \leq b_i$, pour $1 \leq i \leq p$,
- $d_p \geq 1$ si $p \neq 1$.

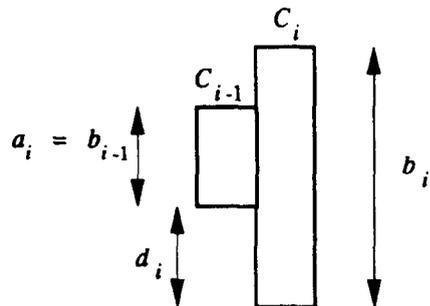


Fig. 4.2

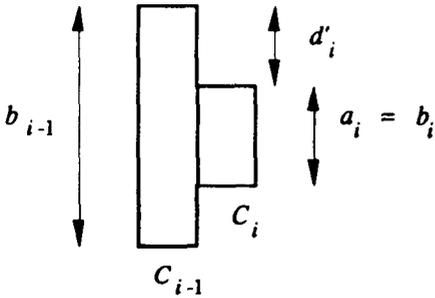


Fig. 4.3

Pour $r+1 \leq i \leq n$, soit d'_i la différence entre le sommet de C_{i-1} et celui de C_i .

On a :

- $a_i + d'_i \leq b_{i-1}$, pour $r+1 \leq i \leq n$,
- $d'_{r+1} \geq 1$ si $r \neq n$.

Exemple. Pour le polyomino convexe ci-contre :

- $n = 9, p = 4, r = 7$,
- $(b_1, \dots, b_n) = (2, 3, 4, 7, 4, 3, 4, 3, 1)$,
- $(a_1, \dots, a_n) = (1, 2, 3, 4, 4, 2, 3, 3, 1)$,
- $(d_1, \dots, d_p) = (0, 0, 1, 1)$,
- $(d'_{r+1}, \dots, d'_n) = (1, 1)$.

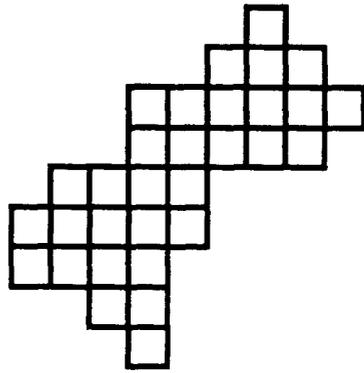


Fig. 4.4

Notations. Soient a, b et d des entiers tels que $1 \leq a \leq a+d \leq b$. On notera $[a, a+d]_R \cup [a+d, b]$ (resp. $[a, a+d]_V \cup [a+d, b]$) le segment bicouleur $[a, b]$, dans lequel le sous-segment $[a, a+d[$ est rouge (resp. vert) et le sous-segment $[a+d, b]$ est noir. Un segment dont la couleur n'est pas précisée par ces notations sera implicitement noir.

Définition 4.1. Soit f l'application de l'ensemble des polyominoes de \mathcal{Q} dans l'ensemble des empilements de segments tricolores définie par $f(P) = E_n \boxtimes \dots \boxtimes E_1$, où :

- E_i est l'empilement réduit à la pièce :

- $P_i = [a_i, b_i] \times \{0\}$ pour $p+1 \leq i \leq r$,
- $P_i = ([a_i, a_i + d_i]_R \cup [a_i + d_i, b_i]) \times \{0\}$ pour $1 \leq i \leq p$,
- $P_i = ([a_i, a_i + d'_i]_V \cup [a_i + d'_i, b_{i-1}]) \times \{0\}$ pour $r+1 \leq i \leq n$,

- les valeurs $n, p, r, (a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n), (d_1, \dots, d_p)$ et (d'_{r+1}, \dots, d'_n) sont associées à P comme décrit ci-dessus.

Remarque. Lorsque P est un polyomino parallélogramme, c'est à dire lorsque p vaut 1 et r vaut n , cette définition de $f(P)$ coïncide bien avec celle donnée au chapitre 1.

Exemple. L'image par f du polyomino de la figure 4.4 est l'empilement suivant (où les segments rouges (resp. verts) sont indiqués en pointillés larges (resp. étroits)).

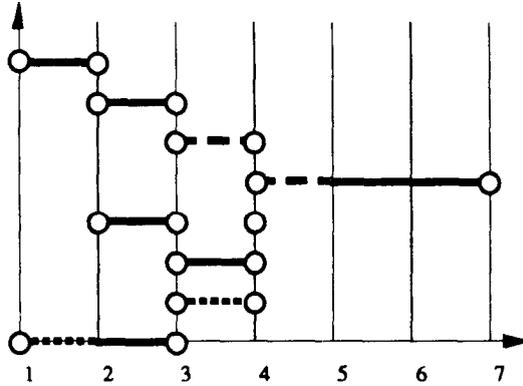


Fig. 4.5 L'image par f du polyomino de la figure 4.4.

Définition 4.2. On appelle *escalier descendant* à p pièces tout empilement E s'écrivant

$$E = \left\{ \left([a_i, a_i + d_i]_{[R \cup [a_i + d_i, a_{i+1}]]} \right) \times \{p - i\}, 1 \leq i \leq p \right\}$$

où $a_1 = 1, a_i \leq a_i + d_i \leq a_{i+1}$ pour tout i et $d_p \geq 1$ si $p \geq 2$.

On appelle *escalier ascendant* à p pièces tout empilement E s'écrivant

$$E = \left\{ \left([a_i, a_i + d_i]_{[V \cup [a_i + d_i, a_{i-1}]]} \right) \times \{p - i\}, 1 \leq i \leq p \right\}$$

où $a_i \leq a_i + d_i \leq a_{i-1}$ pour tout i et $d_1 \geq 1$.

Exemples.

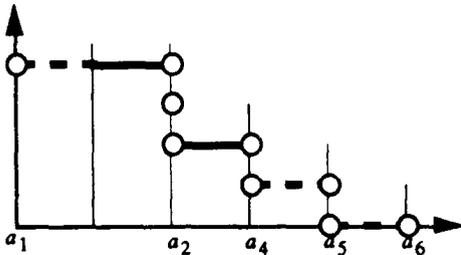


Fig. 4.6 Escalier descendant.



Fig. 4.7 Escalier ascendant.

Remarque. On peut aussi donner la construction suivante pour $f(P)$. Associons de nouveau à P les valeurs $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n), (d_1, \dots, d_p)$ et (d'_{r+1}, \dots, d'_n) définies ci-dessus.

Soit E_2 l'escalier descendant suivant :

$$E_2 = \left\{ \left([a_i, a_i + d_i]_{[R \cup [a_i + d_i, b_i]]} \right) \times \{p - i\}, 1 \leq i \leq p \right\}$$

Alors, la pièce maximale de E_2 est noire (car $d_1 = 0$).

Soit E_3 l'escalier montant suivant :

$$E_3 = \left\{ \left([a_i, a_i + d'_i]_{\downarrow} \cup [a_i + d'_i, b_{i-1}] \right) \times \{n-i\}, r+1 \leq i \leq n \right\}.$$

Enfin, soit E_1 l'empilement de segments $E_1 = \prod_{i=r}^{p+1} \{[a_i, b_i] \times \{0\}\}$.

Alors, $f(P) = E_3 \boxplus E_1 \boxplus E_2$.

Inversement, nous verrons que l'on peut caractériser les images par f des polyominos de \mathcal{Q} de la façon suivante :

Définition 4.3. Soit \mathcal{E} l'ensemble des empilements E s'écrivant $E_3 \boxplus E_1 \boxplus E_2$, où

- (i) E_1 est un empilement de segments noirs, éventuellement vide,
- (ii) E_2 est un escalier descendant de pièce maximale noire,
- (iii) E_3 est un soit vide, soit un escalier ascendant,
- (iv) $E_1 \boxplus E_2$ est une pyramide,
- (v) si la plus à gauche des pièces minimales de $E_1 \boxplus E_2$ est de support $[a, b]$, E_3 est d'encombrement b .

Remarques. 1) Tout empilement de \mathcal{E} est une demi-pyramide.

2) La donnée de E définit sans ambiguïté E_1 , E_2 et E_3 .

3) On sera amené à considérer l'ensemble légèrement plus général $\overline{\mathcal{E}}$ formé des empilements s'écrivant $E_3 \boxplus E_1 \boxplus E_2$, où le triplet (E_1, E_2, E_3) satisfait les cinq conditions du lemme ci-dessus, à l'exception de (ii) qui est simplement remplacée par " E_2 est un escalier descendant".

Lemme 4.4. (i) L'application f définie en 4.1 est une bijection entre les polyominos de \mathcal{Q} et les empilements de \mathcal{E} .

(ii) Soit P un polyomino de \mathcal{Q} . En reprenant les notations ci-dessus :

- la largeur de P est le nombre de pièces de $f(P)$,

- la hauteur de P est $1 + \sum_{1 \leq i \leq r} (b_i - a_i)$,

- l'aire de P est $\sum_{1 \leq i \leq n} b_i$.

Preuve. La preuve est tout à fait analogue à celle de la proposition 1.8. \square

Notations. Soit E une demi-pyramide de $\overline{\mathcal{E}}$ à n pièces, et notons $E = E_3 \boxplus E_1 \boxplus E_2$, où :

- $E_2 = \left\{ \left([a_i, a_i + d_i]_{\downarrow} \cup [a_i + d_i, b_i] \right) \times \{p-i\}, 1 \leq i \leq p \right\}$ avec $a_1 = 1$, $a_i = b_{i-1}$
pour $2 \leq i \leq p$, et $d_p \geq 1$ si $p \geq 2$,

- $E_1 = \prod_{i=r}^{p+1} \{[a_i, b_i] \times \{0\}\}$,

- $E_3 = \left\{ \left([a_i, a_i + d'_i]_{\downarrow} \cup [a_i + d'_i, b_{i-1}] \right) \times \{n-i\}, r+1 \leq i \leq n \right\}$. avec $a_i = b_i$
pour $r+1 \leq i \leq n$ et enfin $d'_{r+1} \geq 1$ si $r < n$.

Soit \bar{v} la valuation des empilements de $\bar{\mathcal{E}}$ définie, avec les notations ci-dessus, par :

$$\bar{v}(E) = x^n y^{\sum a_i} z^{b_1} q^{\sum b_i}$$

Soit v la valuation des empilements de \mathcal{E} définie par :

$$v(E) = x^n y^{\sum a_i} q^{\sum b_i}$$

Alors la série génératrice des polyominos convexes de \mathcal{Q} (resp. parallélogrammes, convexes dirigés) est $y \sum v(E)$, où la somme porte sur les empilements de \mathcal{E} (resp. sur les empilements de $\bar{\mathcal{E}}$ tels que E_3 est vide et E_2 réduit à une pièce, sur les empilements de $\bar{\mathcal{E}}$ tels que E_3 est vide).

2. EMPILEMENTS DE SEGMENTS ET ARBRES BINAIRES

Nous allons ici décrire une application - non bijective! - entre les empilements de $\bar{\mathcal{E}}$ et certains *arbres binaires complets*, après avoir rappelé les définitions de base relatives à ces objets.

On peut les définir de façon récursive : un *arbre binaire complet* A est soit réduit à un *sommet* ω , soit un triplet (ω, A_g, A_d) , où A_g et A_d sont eux-mêmes des arbres binaires complets. Le sommet ω est la *racine* de l'arbre A . Les arbres A_g et A_d sont respectivement le *sous-arbre gauche* et le *sous-arbre droit* de A (ou *issus* du sommet ω). La racine de A_g (resp. A_d) est le *fil gauche* (resp. *droit*) de ω , qui est le *père* de ces deux sommets. Un sommet de l'arbre est une *feuille* s'il n'a pas de fils. Sinon, c'est un *sommet interne*. Le sommet i est *ancêtre* du sommet j si c'est le père de j ou d'un de ses ancêtres. L'*arité* d'un sommet est le nombre de feuilles du sous-arbre dont il est la racine. Si A présente $n+1$ feuilles, il a exactement n sommets internes.

La *hauteur* d'un sommet est le nombre de ses ancêtres. La *hauteur à gauche* (resp. *à droite*) d'un sommet est le nombre de fils gauches dans l'ensemble formé de ce sommet et de ses ancêtres.

La *branche extrême gauche* (resp. *droite*) de A est le singleton $\{\omega\}$ si A n'a qu'un sommet. Sinon, c'est l'union de ce singleton et de la branche extrême gauche (resp. droite) de A_g (resp. A_d).

La *promenade droite* de A est le singleton $\{\omega\}$ si A n'a qu'un sommet. Si ω a un fils droit qui est une feuille, c'est l'union de la promenade droite de A_g et de l'ensemble formé de ω et de son fils droit. Dans les autres cas, c'est l'union de $\{\omega\}$ et de la promenade droite de A_d . On définirait de façon analogue la *promenade gauche*.

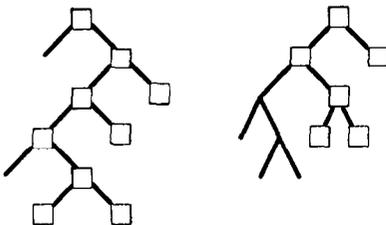


Fig. 4.8 Promenade droite d'un arbre binaire complet. (Les sommets de la promenade sont encadrés).

Remarque. La promenade droite de A est l'ensemble des sommets visités lors d'un parcours en *ordre préfixe inverse* de A jusqu'à l'instant où on rencontre consécutivement deux feuilles - qui seront les deux derniers sommets de la promenade droite -. Ce parcours peut être défini de façon

récursive comme la succession de la lecture de la racine de A , puis du parcours en ordre préfixe inverse de A_d , puis du parcours en ordre préfixe inverse de A_r .

Des exemples particuliers d'arbres binaires sont les *peignes gauches*, dont tous les fils droits sont des feuilles (Fig.4.9). Remarquons que ce sont les seuls arbres dont tous les sommets sont dans la promenade droite.

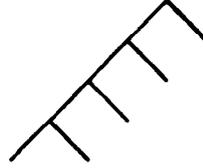


Fig. 4.9 Peigne gauche à 5 feuilles.

On considérera par la suite des arbres binaires complets dont certains sommets sont *marqués*. Ils pourront l'être de deux façons différentes : sommets *cerclés* ou *encadrés*.

Notations. Soient deux arbres marqués A_g et A_d , et deux variables σ et τ dans $\{0, 1\}$; on notera $\Psi_{\sigma, \tau}(A_g, A_d)$ l'arbre binaire complet ayant A_g (resp. A_d) pour sous-arbre gauche (resp. droit) et dont la racine est

- cerclée si et seulement si $\sigma = 1$,
- encadrée si et seulement si $\tau = 1$.

A noter qu'un même sommet peut donc être à la fois encadré et cerclé.

Nous allons donc maintenant définir une application Φ qui, à une demi-pyramide E de $\bar{\mathcal{E}}$ associe un arbre binaire complet marqué, par récurrence sur le nombre de pièces de E . Soit E une demi-pyramide de $\bar{\mathcal{E}}$ à n pièces, et notons $E = E_3 \sqcup E_1 \sqcup E_2$, où :

$$- E_2 = \left\{ \left([a_i, a_i + d_i]_R \cup [a_i + d_i, b_i] \right) \times \{p-i\}, 1 \leq i \leq p \right\} \text{ avec } a_1 = 1, a_i = b_{i-1}$$

pour $2 \leq i \leq p$, et $d_p \geq 1$ si $p \geq 2$,

$$- E_1 = \bigsqcup_{i=r}^{p+1} \left\{ [a_i, b_i] \times \{0\} \right\},$$

$$- E_3 = \left\{ \left([a_i, a_i + d'_i]_V \cup [a_i + d'_i, b_{i-1}] \right) \times \{n-i\}, r+1 \leq i \leq n \right\} \text{ avec } a_i = b_i$$

pour $r+1 \leq i \leq n$ et enfin $d'_{r+1} \geq 1$ si $r < n$.

Si E n'a qu'une pièce, c'est à dire si $n = 1$, alors

$$E = E_2 = \left\{ \left([1, 1 + d_1]_R \cup [1 + d_1, b_1] \right) \times \{0\} \right\}.$$

Si $d_1 = 0$, soit $\Phi(E)$ l'arbre réduit à un sommet non marqué, et si $d_1 \geq 1$, soit $\Phi(E)$ l'arbre réduit à un sommet cerclé.

Si E a plusieurs pièces, soit $a_0 = \min \{ a_i, 2 \leq i \leq n \}$. Alors $a_0 \geq 1$.

Soit $\sigma(E) = 1$ si $1 \leq d_1 \leq a_0 - 1$, et $\sigma(E) = 0$ sinon. Lorsque il n'y a pas d'ambiguïté, nous noterons σ pour $\sigma(E)$.

Soit t l'application qui, à une pièce P , associe l'intersection de $[1, +\infty] \times \mathbb{R}$ avec la pièce obtenue en tradant P d'un pas vers la gauche, et soit $E' = t^{a_0-1}(E)$ (c'est à dire l'intersection de $[1, +\infty] \times \mathbb{R}$ avec le translaté de $a_0 - 1$ pas à gauche de E). Alors E' est élément de $\bar{\mathcal{E}}$ et contient au moins une pièce non maximale de support $[1, b]$, avec $b \geq 1$. Soit P_k celle d'entre elles de plus grand niveau.

Soit $g(E)$ la sous-pyramide de E' de pièce maximale P_k , et $d(E)$ l'unique empilement tel que $E' = g(E) \sqcup d(E)$.

Définition 4.5. Une demi-pyramide de segments est dite *primitive* lorsqu'elle n'a qu'une pièce de support $[1, b]$, avec $b \geq 1$.

Cette pièce est alors sa pièce maximale. Avec les notations précédentes, une demi-pyramide de $\bar{\mathcal{E}}$ est primitive si et seulement si elle n'a qu'une pièce ou si $a_0 \geq 2$.

D'après le choix de P_i , $d(E)$ est une demi-pyramide primitive, élément de $\bar{\mathcal{E}}$. En revanche, $g(E)$ ne sera pas systématiquement élément de $\bar{\mathcal{E}}$. Nous distinguerons trois cas :

1) $d(E)$ contient au moins un segment présentant du vert (Fig.4.10). Alors, si $g(E)$ à k pièces, il s'écrit :

$$g(E) = \{ \{1\} \times \{i\}, 0 \leq i \leq k-2 \} \cup \{ ([1, 1 + d] \cup [1 + d, b]) \times \{k-1\} \}.$$

On définit $\Phi(E) = \Psi_{\alpha,0}(A_k, \Phi(d(E)))$, où A_k est le peigne gauche à k feuilles, non marqué.

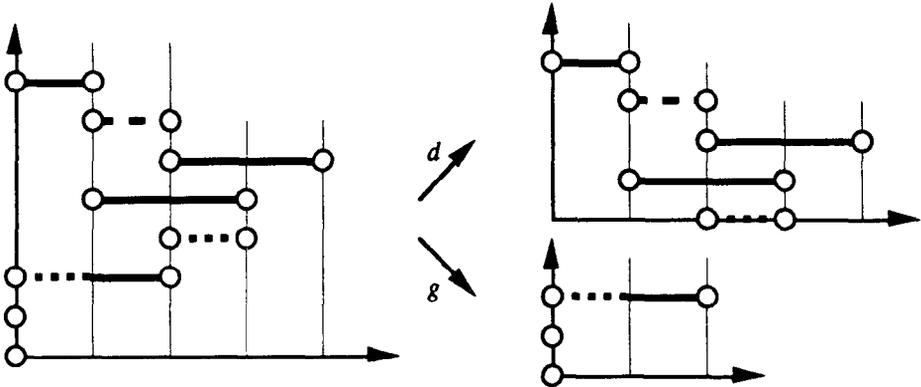


Fig. 4.10

2) Aucun segment de $d(E)$ ne présente du vert, mais la pièce maximale de $g(E)$ en a (Fig.4.11). Alors $g(E)$ a $n-r$ pièces et s'écrit :

$$g(E) = \{ \{1\} \times \{i\}, 0 \leq i \leq n-r-2 \} \cup \{ ([1, 1 + d'_{r+1}] \cup [1 + d'_{r+1}, b]) \times \{n-r-1\} \}.$$

On définit $\Phi(E) = \Psi_{\alpha,1}(A_r, \Phi(d(E)))$, où A_r est le peigne gauche à $n-r$ feuilles.

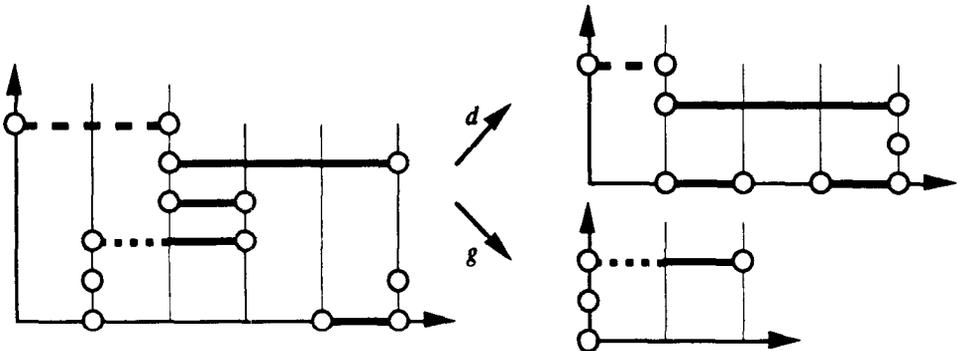


Fig. 4.11

3) Ni les segments de $d(E)$, ni la pièce maximale de $g(E)$ ne présente de vert (Fig.4.12). Dans ce cas, $g(E)$ est élément de $\overline{\mathcal{E}}$, et on définit alors

$$\Phi(E) = \Psi_{\sigma,0}(\Phi(g(E)), \Phi(d(E)))$$

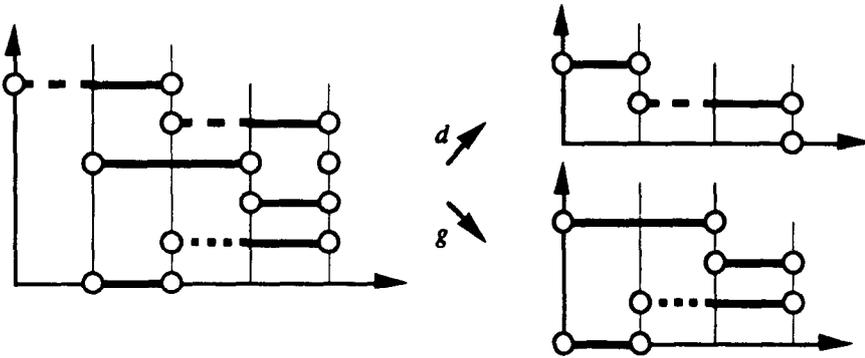


Fig. 4.12

Remarque. C'est seulement dans ce troisième cas que $g(E)$ peut contenir une pièce présentant du rouge. Mais alors, compte tenu de la disposition particulière des pièces présentant du rouge dans les empilements de $\overline{\mathcal{E}}$, $d(E)$ n'a qu'une pièce, qui est un point.

Exemple.

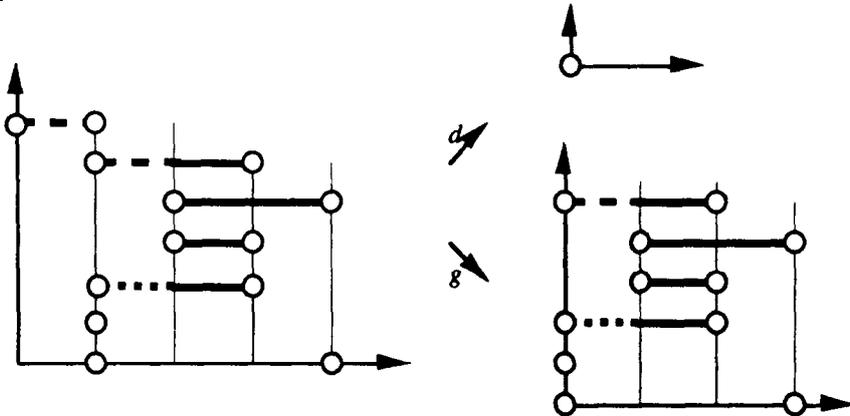


Fig. 4.13

Exemple.

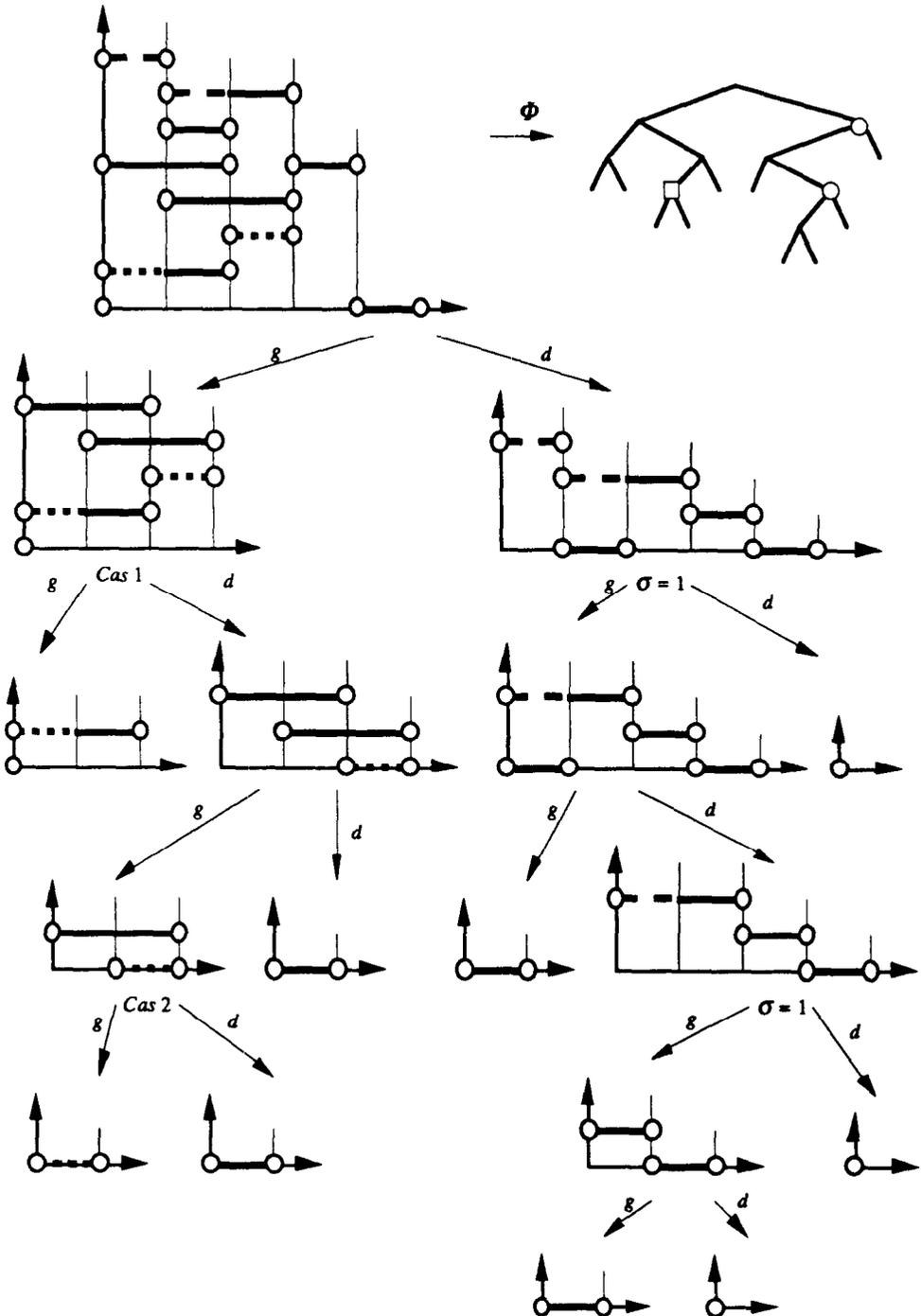


Fig. 4.14 L'application Φ .

Remarque 4.6. Si la pièce maximale de $d(E)$ a du rouge, $\sigma = 0$.

Inversement, soit E_1 une demi-pyramide primitive et E_2 une demi-pyramide, telles que $E' = E_2 \square E_1$ soit élément de $\bar{\mathcal{E}}$. Soit $\sigma_0 = 0$ si la pièce maximale de E_1 a du rouge, et $\sigma_0 = 0$ ou 1 sinon.

L'ensemble des empilements E de $\bar{\mathcal{E}}$ tels que $\sigma(E) = \sigma_0$, $d(E) = E_1$ et $g(E) = E_2$ s'obtient en remplaçant la pièce maximale de E' , soit $([1, 1 + d_1]_R \cup [1 + d_1, b_1]) \times \{n_1\}$, par :

- $([1 - m_1, 1 + d_1]_R \cup [1 + d_1, b_1]) \times \{n_1\}$ si $d_1 \geq 1$,
- $[1 - m_1, b_1] \times \{n_1\}$ si $d_1 = 0$ et $\sigma_0 = 0$,
- $([1 - m_1 - m_2, 1 - m_1]_R \cup [1 - m_1, b_1]) \times \{n_1\}$ si $d_1 = 0$ et $\sigma_0 = 1$,

où $m_1 \geq 0$, $m_2 \geq 1$, puis en traduisant ce nouvel empilement de m_1 pas à droite dans les deux premiers cas (resp. $m_1 + m_2$ dans le dernier). De plus, si E' a n pièces, la série génératrice selon \bar{v} des empilements E ainsi obtenus est

$$\frac{(yzq^n)^{\sigma_0}}{(1 - yzq^n)^{1 + \sigma_0}} \bar{v}(E').$$

Les propositions (i) à (v) du lemme suivant vont servir à caractériser les images par Φ des empilements de $\bar{\mathcal{E}}$. Les propositions (vii) à (ix) permettront de décrire les images par Φ des empilements de $\bar{\mathcal{E}}$ codant les polyominos parallélogrammes et les polyominos convexes dirigés.

Lemme 4.7. Soit E un empilement de $\bar{\mathcal{E}}$, et $A = \Phi(E)$.

- (i) Tous les sommets cerclés de A sont sur sa promenade droite.
- (ii) Pour $i \geq 0$, il y a au plus un sommet cerclé de hauteur à gauche i .
- (iii) Etant donnés deux sommets cerclés quelconques, l'un est ancêtre de l'autre.
- (iv) Il y a au plus un sommet encadré (qui est alors interne).
- (v) S'il y en a un, le chemin \mathcal{T} qui le joint à la racine de A vérifie la propriété suivante : tout sommet de \mathcal{T} dont le fils gauche n'est pas dans \mathcal{T} a pour sous-arbre gauche un peigne gauche non marqué.

De plus, les caractéristiques de A et celles de E sont liées par les propriétés suivantes.

- (vi) Le nombre de pièces de E est le nombre de feuilles de A .
- (vii) Un sommet au plus de la branche extrême droite de A est cerclé. L'un d'eux l'est effectivement si et seulement si la pièce maximale de E présente du rouge.
- (viii) Le nombre de sommets cerclés de A est le nombre de pièces de E ayant du rouge.
- (ix) L'arbre A présente un sommet encadré si et seulement si E possède une pièce ayant du vert.

Preuve. Ces résultats se démontrent par récurrence sur le nombre de pièces de E , en utilisant la définition récursive de Φ .

Si E est réduit à une pièce, ils sont évidents. Si E a au moins deux pièces, soient A_g et A_d les sous-arbres gauche et droit de A . L'assertion (vi) fait l'objet d'une récurrence immédiate.

Démontrons l'assertion (vii). Si la pièce maximale de E n'a pas de rouge, $\sigma = 0$, et la racine de A n'est donc pas cerclée. Mais la pièce maximale de $d(E)$ n'a pas non plus de rouge, et, en appliquant l'hypothèse de récurrence (vii) (que l'on notera, en abrégé, HR(vii)), à $A_d = \Phi(d(E))$, on montre qu'aucun sommet de la branche extrême droite de A n'est cerclé.

Au contraire, si la pièce maximale de E a du rouge :

- soit $\sigma = 1$, auquel cas la racine de A est cerclée,
- soit $\sigma = 0$, auquel cas la pièce maximale de $d(E)$ a du rouge.

On déduit alors de HR(vii), appliqué à $A_d = \Phi(d(E))$, qu'un unique sommet de la branche extrême droite de A est cerclé, ce qui achève de prouver (vii).

Pour montrer (i), (ii) et (iii), distinguons deux cas.

- Un sommet de A_g est cerclé ; l'empilement E relève alors du cas 3) décrit ci-dessus (cf. remarque), et A_d est réduit à une feuille non marquée. Les sommets de A susceptibles d'être cerclés sont sa racine - qui est dans la promenade droite - et les sommets de $A_g = \Phi(g(E))$. Par HR(i), ceux-ci sont dans la promenade droite de A_g , et donc dans celle de A .

- Aucun sommet de A_g n'est cerclé. Les sommets de A susceptibles d'être cerclés sont sa racine (qui est dans la promenade droite) et les sommets de $A_d = \Phi(d(E))$. Par HR(i), ceux-ci sont dans la promenade droite de A_d , et donc dans celle de A .

Dans chacun des cas, l'assertion (iii) s'obtient en appliquant HR(iii) (à A_g ou A_d). L'assertion (ii) se déduit de (vii) et d'une récurrence en remarquant que les sommets de A de hauteur à gauche zéro sont ceux de la branche extrême droite.

Montrons maintenant (viii). Le nombre de pièces de E ayant du rouge est la somme des nombres de pièces ayant du rouge dans $g(E)$ et $d(E)$ - et donc, par HR(viii), le nombre de sommets cerclés dans A_g et A_d - sauf dans le cas où $\sigma = 1$. Dans ce cas, la racine de A est cerclée, et la pièce maximale de $d(E)$ n'a plus de rouge. On achève de prouver (viii) en appliquant HR(viii) à $g(E)$ et $d(E)$.

Pour ce qui est des sommets encadrés, il est clair que, si aucun segment de E n'a de vert, aucun sommet de A ne sera encadré. Au contraire, si un segment de E a du vert, $g(E)$ et/ou $d(E)$ contiendra une pièce ayant du vert (car la pièce maximale de E n'a jamais de vert).

- Si $d(E)$ a un segment ayant du vert, E relève du cas 1) décrit ci-dessus. Alors ni la racine de A , ni les sommets de A_d ne sont encadrés. De plus, $A_d = \Phi(d(E))$ et, par HR(iv) et HR(ix), A_d possède un unique sommet encadré, donc E aussi, ce qui démontre (iv) et (ix).

- Si aucun segment de $d(E)$ n'a de vert, un segment au moins de $g(E)$ en aura. Si la pièce maximale de $g(E)$ en a, E relève du cas 2) décrit ci-dessus, et la racine de A est l'unique sommet encadré. Sinon, la racine de A n'est pas encadrée mais $A_g = \Phi(g(E))$ possède, par HR(iv) et HR(ix), un unique sommet encadré. Il en est donc de même pour A .

Pour finir, montrons (v). Supposons qu'un sommet de A soit encadré et distinguons les trois cas :

- Le sommet encadré est la racine de A . L'empilement E relève du cas 2) et A_g est un peigne gauche, ce qui prouve (v).

- Le sommet encadré est dans A_d . L'empilement E relève du cas 1). Tous les sommets de \mathfrak{C} sont dans A_d , à l'exception de la racine de A dont le sous-arbre gauche est un peigne gauche. On termine en appliquant HR(v) à $A_d = \Phi(d(E))$.

- Le sommet encadré est dans A_g . L'empilement E relève du cas 3). Tous les sommets de \mathfrak{C} sont dans A_g , à l'exception de la racine de A dont le fils gauche est dans \mathfrak{C} . On termine en appliquant HR(v) à $A_g = \Phi(g(E))$. \square

Notations. Soit $\overline{\mathfrak{Z}}$ l'ensemble des arbres binaires complets vérifiant les conditions (i) à (v) du lemme ci-dessus. Soit \mathfrak{Z}_n l'ensemble des arbres de $\overline{\mathfrak{Z}}$ à n feuilles sans sommet cerclé sur la branche principale droite.

Soit \mathfrak{Y}_n l'ensemble des arbres de \mathfrak{Z}_n sans sommet encadré, et enfin \mathfrak{X}_n l'ensemble des éléments de \mathfrak{Y}_n sans sommet cerclé.

3. DÉFINITION D'UNE VALUATION SUR LES ARBRES

Soient \bar{w} et w les deux valuations des éléments de $\bar{\mathcal{Z}}$ définies par :

$$\bar{w}(A) = \sum_{E \in \bar{\mathcal{E}} / \bullet(E) = A} \bar{v}(E) \quad \text{et} \quad w(A) = \sum_{E \in \bar{\mathcal{E}} / \bullet(E) = A} v(E),$$

$$= \bar{w}(A)|_{s=1}.$$

Ces valuations permettent de relier l'énumération des polyominos à celle des arbres, comme indiqué dans la proposition suivante.

Proposition 4.8. *Soit $n \geq 1$. La série génératrice des polyominos à n colonnes est :*

(i) *parallélogrammes :* $X_n = y \sum_{A \in \mathcal{X}_n} w(A).$

(ii) *convexes dirigés :* $Y_n = y \sum_{A \in \mathcal{Y}_n} w(A).$

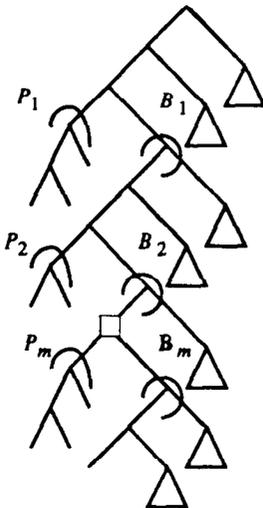
(iii) *convexes de \mathcal{U} :* $A_n = y \sum_{A \in \mathcal{Z}_n} w(A).$

Notations. Soit $A \in \bar{\mathcal{Z}}$, et i un sommet de A . On définit σ_i, ρ_i, μ_i et $\chi_i, \in \{0,1\}$, par :

- $\sigma_i = 1$ si et seulement si le sommet i est cerclé.
- $\rho_i = 1$ si et seulement si le sommet i est interne et non cerclé.
- $\mu_i = 1$ si et seulement si le sommet i est dans la branche extrême gauche de A .
- $\chi_i = 1$ si et seulement si i est une feuille et s'il existe dans A un sommet cerclé dont la hauteur à gauche est strictement plus grande que celle de i .

Soit f_i l'arité du sommet i , c'est à dire le nombre de feuilles du sous-arbre de A de sommet i .

Si A' est le sous-arbre de A de racine i , on note $\sigma_{A'}$ (resp. $f_{A'}, \rho_{A'}, \chi_{A'}$) pour σ_i (resp. f_i, ρ_i, χ_i).



Si A a un sommet encadré, considérons le chemin \mathcal{C} qui joint ce sommet à la racine. Soit i_1, \dots, i_m la liste des sommets de \mathcal{C} dont le fils gauche n'est pas dans \mathcal{C} , classés par hauteur croissante. Alors i_m est précisément le sommet encadré. Pour $1 \leq j \leq m$, soit P_j le sous-arbre gauche issu de i_j . Alors P_j est un peigne gauche. Soit B_j la branche extrême gauche du sous-arbre droit issu de i_j (Fig.4.15), et ρ_B , la valeur de ρ à la racine de B_j .

Fig. 4.15

Proposition 4.9. Soit A l'arbre représenté ci-dessus. Alors

$$\bar{w}(A) = z(xq)^{f_A}(1-yq)^{h_A} \left(\prod_{\substack{\text{fil} \\ \text{droit}}} (yq^{f_i})^{h_i} \right) \left(\prod_{i \in A \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} P_j} \frac{(yz^{\mu_i} q^{f_i})^{\sigma_i}}{(1-yz^{\mu_i} q^{f_i})^{1+\sigma_i}} \right) \\ * \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 + \rho_{B_j} + \sum_{i \in B_j \setminus P_{j+1}} \frac{\sigma_i + yq^{f_i}}{1-yq^{f_i}} \right) \left(\rho_{B_n} + \sum_{i \in B_n} \frac{\sigma_i + yq^{f_i}}{1-yq^{f_i}} \right),$$

où h_A est la hauteur à gauche maximale des sommets cerclés.

Lemme 4.10. Soit A un élément de $\bar{\mathcal{Z}}$. La série génératrice selon \bar{v} des demi-pyramides primitives d'image A par Φ est

$$\sum_{\substack{E \in \bar{\mathcal{Z}}, \Phi(E)=A \\ E \text{ primitive}}} \bar{v}(E) = (zyq^{f_A})^{\rho_A} \bar{w}(A).$$

Preuve. Rappelons qu'une demi-pyramide est primitive si et seulement si elle n'a qu'une pièce ou si, avec les notations utilisées pour définir Φ , $a_0 \geq 2$. Si l'arbre A est réduit à une feuille, tout antécédent de A par Φ est une demi-pyramide primitive.

Si la racine de A est cerclée, soit E un antécédent de A par Φ . Alors $\sigma(E) = 1$ et donc, avec les notations usuelles, $1 \leq d_1 \leq a_0 - 1$. En particulier, $a_0 \geq 2$, et E est primitive.

Dans les autres cas, soit E une demi-pyramide primitive telle que $\Phi(E) = A$. Soit $E' = \iota(E)$. Alors la pièce maximale de E' a du rouge si et seulement si celle de E en a et $\Phi(E) = A$.

Inversement, soit E' un antécédent de A par Φ . Translatons E' d'un pas vers la droite, et prolongeons sa pièce maximale par un segment de support $[1, 2]$, rouge si la pièce maximale de E' présente du rouge, noir sinon. L'empilement E ainsi obtenu est une demi-pyramide primitive telle que $\Phi(E) = A$.

Enfin, la valuation de E est $\bar{v}(E) = zyq^{f_A} \bar{v}(E')$, d'après l'assertion (vi) du lemme 4.7. Le résultat ci-dessus s'en déduit. \square

Proposition 4.11. Soit A un élément de $\bar{\mathcal{Z}}$.

(i) Si A est réduit à une feuille,

$$\bar{w}(A) = z(xq)^{f_A} \frac{(zyq^{f_A})^{\sigma_A}}{(1-zyq^{f_A})^{1+\sigma_A}}.$$

(ii) Sinon, soit A_g (resp. A_d) le sous-arbre gauche (resp. droit) de A .

(a) Si un sommet de A_d est encadré,

$$\bar{w}(A) = z(xq)^{f_A} \frac{(zyq^{f_A})^{\sigma_A}}{(1-zyq^{f_A})^{1+\sigma_A}} \frac{\partial}{\partial z} \left[(zyq^{f_A})^{\rho_{A_d}} \bar{w}(A_d) \right]_{z=1}.$$

(b) Si la racine de A est encadrée,

$$\bar{w}(A) = z(xq)^{f_A} \frac{(zyq^{f_A})^{\sigma_A}}{(1-zyq^{f_A})^{1+\sigma_A}} \frac{\partial}{\partial z} \left[(zyq^{f_A})^{\rho_{A_d}} \frac{\bar{w}(A_d)}{z} \right]_{z=1}.$$

(c) Dans tous les autres cas,

$$\bar{w}(A) = (1-yq)^{z_{A_d}} (yq^{f_{A_d}})^{\rho_{A_d}} \frac{(zyq^{f_A})^{\sigma_A}}{(1-zyq^{f_A})^{1+\sigma_A}} \bar{w}(A_d) w(A_d).$$

Preuve. (i) Si A n'a qu'une feuille, les antécédents de A par Φ sont les empilements réduits à la pièce $([1, 1 + d_1]_R \cup [1 + d_1, b]) \times \{0\}$, avec $d_1 \geq 1$ si la feuille de A est cerclée, $d_1 = 0$ sinon.

$$\text{Donc } \bar{w}(A) = z x q \frac{(z y q)^{\sigma_A}}{(1 - z y q)^{1 + \sigma_A}}.$$

(ii) Si A a plusieurs feuilles, distinguons les trois cas usuels.

(a) Un sommet de A_d est encadré. Alors, d'après le lemme 4.7, A_d est un peigne gauche à k feuilles. Si E est un élément de $\bar{\mathcal{E}}$ tel que $\Phi(E) = A$, E relève du cas 1), $\Phi(d(E)) = A_d$ et $g(E)$ s'écrit :

$$g(E) = \{ \{1\} \times \{i\}, 0 \leq i \leq k - 2 \} \cup \{ ([1, 1 + d] \cup [1 + d, b]) \times \{k - 1\} \}, \text{ avec } d \geq 0.$$

Inversement, soit E_2 l'empilement ci-dessus, et E_1 une demi-pyramide primitive telle que $\Phi(E_1) = A_d$. Alors l'empilement $E' = E_2 \boxplus E_1$ est élément de $\bar{\mathcal{E}}$ si et seulement si l'exposant de z dans $\bar{w}(A_d)$ est b . L'entier d peut alors avoir les valeurs $0, 1, \dots, b-1$. Par ailleurs, l'exposant de z dans $\bar{v}(E')$ sera un.

Compte tenu de la remarque 4.6 et du lemme 4.10, on parvient au résultat (a).

(b) La racine de A est encadrée. Alors, d'après le lemme 4.7, A_d est un peigne gauche à k feuilles. Si E est un élément de $\bar{\mathcal{E}}$ tel que $\Phi(E) = A$, E relève du cas 2), $\Phi(d(E)) = A_d$ et $g(E)$ s'écrit :

$$g(E) = \{ \{1\} \times \{i\}, 0 \leq i \leq k - 2 \} \cup \{ ([1, 1 + d] \cup [1 + d, b]) \times \{k - 1\} \}, \text{ avec } d \geq 1.$$

Inversement, soit E_2 l'empilement ci-dessus, et E_1 une demi-pyramide primitive telle que $\Phi(E_1) = A_d$. Alors l'empilement $E' = E_2 \boxplus E_1$ est élément de $\bar{\mathcal{E}}$ si et seulement si l'exposant de z dans $\bar{w}(A_d)$ est b . L'entier d peut alors prendre les valeurs $1, \dots, b-1$. Par ailleurs, l'exposant de z dans $\bar{v}(E')$ sera un.

Compte tenu de la remarque 4.6 et du lemme 4.10, on parvient au résultat (b).

(c) Dans les autres cas, si E est un élément de $\bar{\mathcal{E}}$ tel que $\Phi(E) = A$, E relève du cas 3), $\Phi(d(E)) = A_d$ et $\Phi(g(E)) = A_d$. Distinguons deux situations.

- Un sommet de A_d est cerclé. Alors, d'après la définition de $\bar{\mathcal{E}}$ et $\bar{\mathcal{Z}}$, A_d est une feuille, et $d(E)$ sera réduit à un point.

Inversement, si $E_1 = \{ \{1\} \times \{0\} \}$ et E_2 est une demi-pyramide telle que $\Phi(E_2) = A_d$, $E' = E_2 \boxplus E_1$ est élément de $\bar{\mathcal{E}}$. Par ailleurs, l'exposant de z dans $\bar{v}(E')$ est le même que dans $\bar{w}(A_d)$. Compte tenu du lemme 4.10, on parvient au résultat (c).

- Aucun sommet de A_d n'est cerclé. Alors, si E_1 est une demi-pyramide primitive telle que $\Phi(E_1) = A_d$ et E_2 est une demi-pyramide telle que $\Phi(E_2) = A_d$, $E' = E_2 \boxplus E_1$ est élément de $\bar{\mathcal{E}}$. Par ailleurs, l'exposant de z dans $\bar{v}(E')$ est le même que dans $\bar{w}(A_d)$. En combinant la remarque 4.6 et le lemme 4.10, on parvient au résultat (c). \square

Preuve de la proposition 4.9.

Les relations de la proposition ci-dessus déterminent \bar{w} de façon unique. Il suffit alors de vérifier que la valuation \bar{w} satisfait bien ces récurrences. \square

Remarque. L'image par Φ des empilements codant les polyominos parallélogrammes est l'ensemble des arbres binaires non marqués ; lorsque y vaut un, on retrouve alors la valuation donnée par Fedou [Fe1, Fe2].

4. APPLICATION A L'ÉNUMÉRATION DES POLYOMINOS

La proposition 4.8 relie l'énumération des polyominos parallélogrammes, convexes dirigés et convexes de \mathcal{Q} à celle des arbres binaires complets marqués, comptés suivant la valuation w décrite en proposition 4.9.

Notation. On notera $\lfloor \frac{n}{i} \rfloor$ la partie entière de n/i .

Proposition 4.12. (i) La série génératrice des polyominos parallélogrammes, comptés suivant la largeur, la hauteur et l'aire, par x, y et q respectivement s'écrit :

$$X(x, y, q) = \sum_{n \geq 1} x^n y q^n \frac{\bar{X}_n(y, q)}{\prod_{k=1}^n (1 - y q^k)^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor}},$$

où \bar{X}_n est un polynôme de $\mathbb{Z}[y, q]$.

De plus : $\bar{X}_1(y, 1) = 1,$

et, pour $n \geq 2,$
$$\bar{X}_n(y, 1) = (1 - y) \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} \sum_{k=0}^{n-2} y^k \frac{1}{n-1} \binom{n-1}{k+1}.$$

(ii) La série génératrice des polyominos convexes dirigés, comptés suivant la largeur, la hauteur et l'aire, par x, y et q respectivement s'écrit :

$$Y(x, y, q) = \sum_{n \geq 1} x^n y q^n \frac{\bar{Y}_n(y, q)}{\prod_{k=1}^n (1 - y q^k)^{\lfloor \frac{n-1}{k} \rfloor + 1}},$$

où \bar{Y}_n est un polynôme de $\mathbb{Z}[y, q]$.

De plus :
$$\bar{Y}_n(y, 1) = (1 - y) \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{n-1} y^k \binom{n-1}{k}^2.$$

(iii) La série génératrice des polyominos convexes, comptés suivant la largeur, la hauteur et l'aire, par x, y et q respectivement s'écrit :

$$Z(x, y, q) = \sum_{n \geq 1} x^n y q^n \frac{\bar{Z}_n(y, q)}{\prod_{k=1}^{n-1} (1 - y q^k)^{\lfloor \frac{n-2}{k} \rfloor + 2} (1 - y q^n)},$$

où \bar{Z}_n est un polynôme de $\mathbb{Z}[y, q]$.

De plus :
$$\bar{Z}_n(y, 1) = (1 - y) \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^n y^k \left[\frac{n(1+k) - 2k}{n} \binom{2n}{2k} - 2n \binom{n-1}{k-1} \binom{n-1}{k} \right].$$

Preuve. Rappelons que l'image par Φ des empilements codant les polyominos parallélogrammes (resp. convexes dirigés, convexes de \mathcal{Q}) de largeur n est l'ensemble \mathfrak{X}_n (resp. $\mathfrak{Y}_n, \mathfrak{Z}_n$). Or, les polynômes $(1 - y q^k)$ sont irréductibles, et il est donc facile de déterminer le plus petit commun multiple des dénominateurs de $w(A)$, lorsque A décrit l'ensemble $\mathfrak{X}_n, \mathfrak{Y}_n$ ou \mathfrak{Z}_n . Il suffit pour cela de déterminer, pour $1 \leq k \leq n$, l'exposant maximal de $(1 - y q^k)$ dans les $w(A)$.

Soit A un élément de \mathcal{Z}_n . La valuation de A selon w est une fraction rationnelle de dénominateur

$$\left(\prod_{i \in A \setminus \bigcup_{j=1}^m P_j} (1-yq^{f_i})^{1+\sigma_i} \right) \left(\prod_{i \in B} (1-yq^{f_i}) \right) / (1-yq)^{h_A},$$

où $B = B_m \cup \{B_j \setminus P_{j+1}, 1 \leq j \leq m-1\}$ et h_A est la hauteur à gauche maximale des sommets cerclés.

En effet, le polynôme $(1-yq)^{h_A}$ divise $\prod_{i \in A \setminus \bigcup_{j=1}^m P_j} (1-yq^{f_i})$: la promenade droite de A contient au moins h_A feuilles, qui ne sont pas dans les peignes P_j , $1 \leq j \leq m$, sans quoi un des P_j aurait un sommet cerclé, ce qui est exclu (Lemme 4.7). Chacune de ces feuilles a pour contribution

$$(1-yq) \text{ dans } \prod_{i \in A \setminus \bigcup_{j=1}^m P_j} (1-yq^{f_i}),$$

et l'expression ci-dessus est donc bien un polynôme en y et q .

Remarquons par ailleurs qu'aucun des sommets de B n'est sur la branche extrême gauche de A et que, pour $1 \leq k \leq n-1$, B contient au plus un sommet d'arité k . En effet, étant donnés deux sommets de B , l'un est ancêtre de l'autre.

De même, en vertu du lemme 4.7, pour $1 \leq k \leq n-1$, un sommet au plus d'arité k est cerclé.

1) $k = 1$

Soit A élément de \mathcal{Z}_n . Alors A a exactement n feuilles. L'exposant de $(1-yq)$ dans $w(A)$ est donc $n + n_c + n_b - n_p - h_A$, où n_c est le nombre de feuilles cerclées, n_b le nombre de feuilles contenues dans B (lorsque un sommet est encadré), et n_p le nombre de feuilles contenues dans les peignes P_j , $1 \leq j \leq m$.

Or, une feuille de A au plus est cerclée : elle est alors de hauteur à gauche supérieure ou égale à un. En particulier, $h_A \geq 1$, et donc $n_c - h_A \leq 0$.

De même, une feuille de A au plus est dans B : mais alors $m \geq 1$, et le peigne P_1 contient au moins une feuille. Donc $n_b - n_p \leq 0$.

Au total, l'exposant de $(1-yq)$ est toujours inférieur ou égal à n . Lorsque A est un arbre binaire non marqué, il est exactement n . Donc l'exposant maximal de $(1-yq)$ dans $w(A)$ est n , que A décrive \mathfrak{X}_n , \mathfrak{Y}_n ou \mathcal{Z}_n .

2) $k \geq 2$

Soit A élément de \mathcal{Z}_n . L'exposant de $(1-yq^k)$ dans $w(A)$ est $n_A + n_c + n_b - n_p$, où n_A est le nombre de sommets de A d'arité k , n_c le nombre de ceux qui sont cerclés, n_b le nombre de ceux qui se trouvent dans B (lorsque un sommet est encadré), et n_p le nombre de ceux contenus dans les peignes P_j , $1 \leq j \leq m$.

Ecrivons $n = ck + r$, où $0 \leq r \leq k-1$ et $c = \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$. Un arbre de \mathcal{Z}_n a au plus c sommets d'arité k . Certains en ont exactement c (Fig.4.16) et sont éléments de \mathfrak{X}_n . Donc l'exposant maximal de $(1-yq^k)$ dans $w(A)$, lorsque A décrit \mathfrak{X}_n , est $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$.



Un arbre à $c+r$ feuilles + c arbres à k feuilles = un arbre à n feuilles et c sommets d'arité k

Fig. 4.16

Considérons un arbre de \mathcal{Y}_n ayant p sommets d'arité k , dont un est cerclé. Ce sommet est alors le plus "à droite" parmi les sommets d'arité k , c'est à dire le premier rencontré lors d'un parcours en ordre préfixe inverse (les autres n'étant certainement pas dans la promenade droite). Par définition de \mathcal{Y}_n , il n'est pas dans la branche extrême droite de A , et il y a donc au moins une feuille à droite de ce sommet. Au total, le nombre de feuilles de l'arbre est au moins $pk+1$, et

$$p \leq \left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor.$$

Inversement, écrivons $n = c'k + r'$, où $c' = \left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor$. Alors $r' \geq 1$, et il est possible de construire (Fig.4.17) un arbre A de \mathcal{Y}_n ayant c' sommets d'arité k , dont un est cerclé. L'exposant de $(1 - yq^k)$ dans le dénominateur de $w(A)$ est alors $\left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor + 1$.



Un arbre à $c'+r'$ feuilles + c' arbres à k feuilles = un arbre à n feuilles et c' sommets d'arité k , dont un est cerclé

Fig. 4.17

Considérons un arbre de \mathcal{Z}_n ayant p sommets d'arité k , dont un est dans B , mais aucun n'est cerclé. Alors $k \leq n-1$. Si un sommet d'arité k au moins est dans un des peignes P_j , $1 \leq j \leq m$, l'exposant de $(1 - yq^k)$ dans $w(A)$ est inférieur ou égal à p , donc à $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$. Sinon, le sommet d'arité k qui est dans B est le plus à gauche des sommets d'arité k . Comme le peigne P_1 contient au moins une feuille, on a de nouveau : $p \leq \left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor$; l'exposant de $(1 - yq^k)$ dans $w(A)$ est alors $p+1$, qui est inférieur ou égal à $\left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor + 1$.

Enfin, considérons un arbre de \mathcal{Z}_n ayant p sommets d'arité k , dont un est dans B , et un (éventuellement le même) est cerclé. De nouveau, pour les raisons évoquées ci-dessus dans l'étude des arbres de \mathcal{Y}_n dont un sommet d'arité k est cerclé, $p \leq \left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor$. De plus, $k \leq n-1$. Si un sommet d'arité k au moins est dans un des peignes P_j , $1 \leq j \leq m$, l'exposant de $(1 - yq^k)$ dans w

(A) est inférieur ou égal à $p+1$, donc à $\left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor + 1$. Sinon, le sommet d'arité k qui est dans B est le plus à gauche des sommets d'arité k et celui qui est cerclé est le plus à droite. Ceci entraîne que le nombre de feuilles de l'arbre est au moins $pk+2$ et que $p \leq \left\lfloor \frac{n-2}{k} \right\rfloor$. L'exposant de $(1-yq^k)$ dans $w(A)$ est alors $p+2$.

Inversement, écrivons $n = c''k + r''$, où $c'' = \left\lfloor \frac{n-2}{k} \right\rfloor$. Alors $r'' \geq 2$, et il est possible de construire (Fig. 4.18) un arbre A de \mathcal{Z}_n ayant c'' sommets d'arité k , dont un est dans B , et un est cerclé. L'exposant de $(1-yq^k)$ dans $w(A)$ est alors $\left\lfloor \frac{n-2}{k} \right\rfloor + 2$.

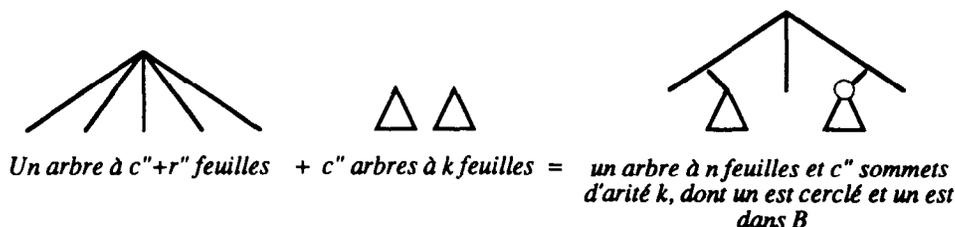


Fig. 4.18

En remarquant que, pour $1 \leq k \leq n-1$, $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor + 1 \leq \left\lfloor \frac{n-2}{k} \right\rfloor + 2$, on conclut alors que l'exposant maximal de $(1-yq^k)$ dans $w(A)$, lorsque A décrit \mathcal{S}_n (resp. \mathcal{Y}_n , \mathcal{Z}_n) est $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ (resp. $\left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor + 1$, $\left\lfloor \frac{n-2}{k} \right\rfloor + 2$). Celui de $(1-yq^n)$ est un dans tous les cas. Ceci fournit donc les assertions (i) et (ii) de la proposition 4.12. Pour l'assertion (iii), il faut regrouper l'étude que nous venons de faire avec les résultats du corollaire 2.8, qui lie les séries Z , A et B , et ceux de la proposition 3.4 qui décrit le développement en x de la série B .

Les résultats relatifs aux valeurs de $\bar{X}_n(y,1)$, $\bar{Y}_n(y,1)$ et $\bar{Z}_n(y,1)$ proviennent des expressions des séries génératrices $X(x,y,1)$, $Y(x,y,1)$ et $Z(x,y,1)$ que nous obtiendrons au chapitre 6 (Proposition 6.7).

En faisant dans chacune de ces séries le changement de variables $x \rightarrow \bar{i}(1-y)^2$ et en calculant ensuite leur développement en \bar{i} (par des méthodes que nous détaillerons au chapitre 6, utilisant essentiellement des décompositions de fractions rationnelles en éléments simples et la formule d'inversion de Lagrange), on remarque qu'elles s'écrivent toutes trois sous la forme suivante :

$$y(1-y) \sum_{n \geq 1} \bar{i}^n P_n$$

où P_n est un polynôme en y dont on connaît la valeur, soit encore

$$\sum_{n \geq 1} x^n y \frac{P_n}{(1-y)^{2n-1}}.$$

Les résultats annoncés s'obtiennent alors en identifiant $y \frac{P_n}{(1-y)^{2n-1}}$ au coefficient de x^n dans X , Y ou Z déduit des expressions ci-dessus, prises lorsque q vaut un. \square

Exemples. Pour calculer les premiers termes du développement en x des séries génératrices des polyominoes parallélogrammes et convexes dirigés, nous disposons des formules donnant X et Y obtenues en proposition 1.10 et 2.3 respectivement.

Pour développer en x la série génératrice Z des polyominoes convexes, il faut reprendre l'expression de Z du chapitre 2, et utiliser les relations de récurrence du chapitre 3 permettant de calculer le développement des séries V , B et M .

On parvient aux trois résultats suivants, sur lesquels on peut vérifier les assertions de la proposition ci-dessus.

Notons X_n (resp. Y_n , Z_n) le coefficient de x^n dans la série X (resp. Y , Z), c'est à dire la série génératrice des polyominoes parallélogrammes (resp. convexes dirigés, convexes) de largeur n , comptés suivant la hauteur (par y) et l'aire (par q).

(i) Les premières valeurs des X_n sont :

$$X_1 = \frac{yq}{1-yq},$$

$$X_2 = \frac{yq^2}{(1-yq)^2(1-yq^2)},$$

$$X_3 = \frac{yq^3(1+yq^2)}{(1-yq)^3(1-yq^2)(1-yq^3)},$$

$$X_4 = \frac{yq^4(1+yq^2+yq^3-y^2q^4-y^2q^5-y^3q^7)}{(1-yq)^4(1-yq^2)^2(1-yq^3)(1-yq^4)}.$$

(ii) Les premières valeurs des Y_n sont :

$$Y_1 = \frac{yq}{1-yq},$$

$$Y_2 = \frac{yq^2(1+yq)}{(1-yq)^2(1-yq^2)},$$

$$Y_3 = \frac{yq^3(1+2yq+yq^2-y^2q^2-y^2q^3-y^2q^4-y^3q^5)}{(1-yq)^3(1-yq^2)^2(1-yq^3)}.$$

(iii) Les premières valeurs des Z_n sont :

$$Z_1 = \frac{yq}{1-yq},$$

$$Z_2 = \frac{yq^2(1+yq)^2}{(1-yq)^2(1-yq^2)},$$

$$Z_3 = \frac{yq^3(1+5yq+2yq^2+4y^2q^2+2y^2q^3-y^2q^4-2y^3q^3-4y^3q^4-5y^3q^5-2y^4q^6)}{(1-yq)^3(1-yq^2)^2(1-yq^3)}.$$

Remarques. 1) Nous verrons au chapitre 6 que le polynôme

$$y \sum_{k=0}^{n-2} y^k \frac{1}{n-1} \binom{n-1}{k} \binom{n-1}{k+1} \quad (\text{resp. } y \sum_{k=0}^{n-1} y^k \binom{n-1}{k}^2)$$

qui apparaît dans $y\bar{X}_n(y,1)$ (resp. $y\bar{Y}_n(y,1)$) est le polynôme énumérateur des polyominos parallélogrammes (resp. convexes dirigés) de périmètre $2n$ (resp. $2n+2$) suivant la largeur, comptée par y . Ce curieux résultat provient de la valeur de la série X (resp. Y) dans laquelle on a fait le changement de variables $x \rightarrow \bar{i}(1-y)^2$. Nous ne disposons pas d'une interprétation combinatoire de cette "stabilité". En revanche, on n'observe pas la même propriété pour la série génératrice des polyominos convexes.

2) Lorsque y vaut un, cette utilisation des arbres binaires fournit aussi une valeur pour le dénominateur de la série génératrice des polyominos parallélogrammes, convexes dirigés ou convexes de largeur n donnée. Comparons ces valeurs avec celles obtenues au chapitre 3.

Pour les polyominos parallélogrammes, la proposition 3.1 fournit le dénominateur :

$$\begin{aligned} d_n^{(1)} &= (q)_{n-1} (q)_n \\ &= (1-q)^{2n-1} [n-1]! [n]! . \end{aligned}$$

L'interprétation par les arbres binaires donne une autre valeur, déjà obtenue par Fedou [Fe 1, 2] :

$$d_n^{(2)} = (1-q)^{2n-1} \prod_{1 \leq k \leq n} [k]^{n^k} .$$

Pour comparer ces deux polynômes, nous avons calculé leur décomposition en éléments irréductibles, qui sont ici les polynômes cyclotomiques Φ_i . Rappelons qu'on peut les définir par

$$q^n - 1 = \prod_{i \text{ divise } n} \Phi_i(q) .$$

On obtient :

$$d_n^{(1)} = (1-q)^{2n-1} \prod_{2 \leq i \leq n} \Phi_i^{a_i} ,$$

et

$$d_n^{(2)} = (1-q)^{2n-1} \prod_{2 \leq i \leq n} \Phi_i^{b_i} ,$$

avec $a_i = \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-1}{i} \right\rfloor$ et $b_i = c_0 + \sum_{c=2}^{c_0} \left\lfloor \frac{c_0}{c} \right\rfloor$, où $c_0 = \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$.

On peut comparer a_i et b_i dans tous les cas :

- si i divise n :

- si $i = n$, ou $i = n/2$, ou $i = n/3$, alors $a_i = b_i$;

- sinon, $b_i - a_i > 0$ et, i étant fixé, cette différence tend vers l'infini avec n

- si i ne divise pas n :

- si $i > n/4$, alors $a_i = b_i + 1$;

- si $n/6 < i < n/4$, alors $a_i = b_i$;

- si $i < n/6$, alors $b_i - a_i > 0$ et, i étant fixé, cette différence tend vers l'infini avec n

Ces résultats montrent qu'aucun des deux dénominateurs $d_n^{(1)}$ et $d_n^{(2)}$ n'est optimal : pour $n \geq 8$, aucun d'eux ne divise l'autre. Qualitativement, le polynôme $d_n^{(1)}$ présente un facteur Φ_i "en trop" - par rapport à $d_n^{(2)}$ - lorsque i est assez grand (plus précisément $i > n/4$ et i ne divise pas n), et le polynôme $d_n^{(2)}$ a "beaucoup trop" de Φ_i - par rapport à $d_n^{(1)}$ - lorsque i est petit devant n (plus précisément lorsque i divise n et $n/i \geq 4$ ou lorsque i ne divise pas n et $i < n/6$).

Pour les polyominos convexes dirigés, la proposition 3.1 fournit le dénominateur :

$$d_n^{(1)} = (q)_{n-1} (q)_n \\ = (1-q)^{2n-1} [n-1]! [n]!$$

Le passage par les arbres binaires mène à

$$d_n^{(2)} = (1-q)^{2n-1} \prod_{1 \leq k \leq n} [k]^{(n-1)/k+1}$$

Ce résultat utilise le fait que le polynôme $(1-q)$ apparaît élevé à une puissance au plus égale à $2n-1$ dans chacun des dénominateurs des $w(A)$, lorsque A décrit \mathcal{Y}_n . Pour montrer cela, il suffit de remarquer que h_A est toujours supérieur ou égal au nombre de sommets cerclés (on peut associer à chaque sommet cerclé, de hauteur à gauche h , l'unique feuille de la promenade droite de hauteur à gauche $h-1$). En remarquant que :

$$\left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor + 1 = \begin{cases} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor & \text{si } k \text{ divise } n, \\ \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + 1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

on montre que $d_n^{(2)} = d_n^{(1)} \prod_{k \text{ ne divise pas } n} [k]$. On déduit alors de cette formule, grâce aux résultats obtenus

dans la comparaison de $d_n^{(1)}$ et $d_n^{(2)}$ que $d_n^{(1)}$ divise toujours $d_n^{(2)}$. Les résultats obtenus par les méthodes du chapitre 3 sont donc alors plus précis que ceux que nous venons d'établir (pris lorsque y vaut un).

Pour les polyominos convexes, la proposition 3.2 fournit le dénominateur :

$$d_n^{(1)} = (q)_{n-2} (q)_{n-1} (q)_n$$

Le passage par les arbres binaires mène à :

$$d_n^{(2)} = (1-q)^{2n-1} [n] \prod_{1 \leq k \leq n-1} [k]^{(n-2)/k+2}$$

En effet, on vérifie, par une remarque analogue à celle faite ci-dessus, que le polynôme $(1-q)$ apparaît de nouveau élevé à une puissance inférieure ou égale à $2n-1$ dans chacun des dénominateurs des $w(A)$, lorsque A décrit \mathcal{Z}_n .

Alors, $d_n^{(1)} = d_n^{(2)}$ si $n = 1$,

et $d_n^{(1)} \prod_{1 \leq k \leq n-2} [k]^{(n-2)/k-1} = (1-q)^{n-2} d_n^{(2)}$ sinon.

Ceci démontre le résultat annoncé dans le chapitre 3 : le dénominateur $d_n^{(1)}$ peut être affiné en $d_n^{(1)}/(1-q)^{n-2}$, et la série génératrice des polyominos convexes de largeur n , comptés suivant l'aire, est une fraction rationnelle de dénominateur $[n-2]! (q)_{n-1} (q)_n$. Ce dénominateur est alors à la fois plus précis que $d_n^{(1)}$ et $d_n^{(2)}$. □

Références.

- [Fe1] J.M. FEDOU, Grammaires et q -énumération de polyominos, Thèse de Doctorat, Université Bordeaux I, avril 1989.
- [Fe2] J.M. FEDOU, Enumeration of skew Ferrers diagrams and basic Bessel functions, à paraître dans les actes de "Second conference on lattice paths and combinatorics and applications", Hamilton, 1990.

CHAPITRE 5

CODAGE DES POLYOMINOS CONVEXES DIRIGÉS PAR LES MOTS DU GRAND DYCK

Nous donnons ici une première illustration de la méthodologie DSV, consistant à *coder* les objets que l'on cherche à énumérer par les mots d'un *langage algébrique*. Le codage construit ici permet de retrouver bijectivement le résultat étonnamment simple de Chang et Lin [Ch-Li] : le nombre de polyominos convexes dirigés de périmètre $2n+4$ est le coefficient binomial $\binom{2n}{n}$. En revanche, il serait très difficile d'étudier le paramètre aire par cette bijection. Nous proposerons un codage plus adéquat dans le chapitre suivant.

1. LANGAGES ET MOTS DE DYCK

Soit A un ensemble, et A^* l'ensemble des *mots* s'écrivant $u = a_1 \dots a_k$, où, pour tout i , la lettre a_i est élément de A . On munit A^* de l'opération de *concaténation* qui associe au couple (u, v) le mot uv obtenu en juxtaposant u et v . L'ensemble A est appelé un *alphabet*, et A^* est le *monoïde libre engendré par A* .

On considère l'algèbre $\mathbb{Z}\langle\langle A \rangle\rangle$ des *séries formelles non commutatives* de la forme

$$\sum_{u \in A^*} n_u u,$$

où les n_u sont éléments de \mathbb{Z} , et u décrit l'ensemble A^* . Cette algèbre est munie de l'addition usuelle et du produit déduit du produit de concaténation des mots.

Soit \mathfrak{B} un langage inclus dans A^* . La *série génératrice formelle* des mots de \mathfrak{B} est

$$\underline{\mathfrak{B}} = \sum_{u \in \mathfrak{B}} u.$$

Lorsque \mathfrak{D} est engendré par une *grammaire algébrique non ambiguë*, la série \mathfrak{D} satisfait un système d'équations algébriques - en variables non commutatives -.

L'exemple le plus classique de langage algébrique est celui des *mots de Dyck*, (aussi appelé *langage de Dyck restreint à deux lettres* ou *systèmes de parenthèses bien formés*) noté \mathcal{D} . Un mot de Dyck u est un mot non vide de $\{x, \bar{x}\}^*$, vérifiant les deux conditions suivantes :

- (i) $|\mu|_x = |\mu|_{\bar{x}}$,
- (ii) si $u = v w$, $|\nu|_x \geq |\nu|_{\bar{x}}$,

où $|\mu|_x$ désigne le nombre d'occurrences de x dans u .

Un *mot du grand Dyck* (ou *mot de Dyck bilatère sur deux lettres*) est un mot de $\{x, \bar{x}\}^*$ vérifiant la première de ces conditions. Le nombre de mots du grand Dyck de longueur $2n$ est bien sûr $\binom{2n}{n}$

Pour écrire l'équation satisfaite par la série génératrice formelle des mots de Dyck, remarquons qu'un tel mot se factorise de façon unique sous la forme $xu\bar{x}v$, où u et v sont soit vides, soit des mots de Dyck. Il est équivalent de dire que \mathcal{D} est engendré par la grammaire algébrique donnée par les quatre règles de dérivation suivantes :

- $D \rightarrow x \bar{x}$,
- $D \rightarrow x D \bar{x}$,
- $D \rightarrow x \bar{x} D$,
- $D \rightarrow x D \bar{x} D$.

L'équation $\mathcal{D} = x \bar{x} + x \mathcal{D} \bar{x} + x \bar{x} \mathcal{D} + x \mathcal{D} \bar{x} \mathcal{D}$ s'en déduit.

Soit u un mot de Dyck ; on appelle *pic* de u tout facteur $x \bar{x}$ dans u , qui s'écrit alors $u = v x \bar{x} w$. La *hauteur* de ce pic est $1 + |\nu|_x - |\nu|_{\bar{x}}$.

On appelle *creux* de u tout facteur $\bar{x} x$ de u , qui s'écrit alors $u = v \bar{x} x w$. La *hauteur* de ce creux est $|\nu|_x - |\nu|_{\bar{x}}$.

Les mots de Dyck peuvent être représentés par des *chemins de Dyck* (Fig.5.1) en codant par un pas Nord-Est chaque lettre x et par un pas Sud-Est chaque lettre \bar{x} . L'existence de cette représentation explique le choix de la terminologie "pic" et "creux".

Exemple. Le chemin de Dyck associé au mot $x x \bar{x} x \bar{x} \bar{x} x x x \bar{x} \bar{x} x \bar{x} \bar{x} \bar{x}$ est le suivant. Il présente quatre pics et trois creux. Les hauteurs des pics sont, de gauche à droite, 2, 2, 4, 3. Celles des creux sont 2, 1, 3.

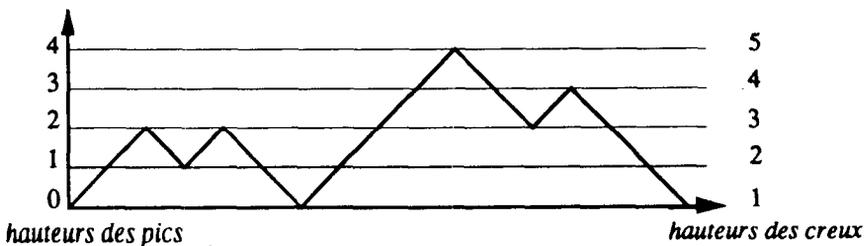


Fig. 5.1 Un chemin de Dyck.

Mots de Dyck et polyominos parallélogrammes

Les mots de Dyck de longueur $2n$ sont en bijection avec les polyominos parallélogrammes de périmètre $2n+2$. Nous rappelons ici le codage g décrivant cette bijection, proposé par Delest et Viennot [De-Vi]. Delest a par la suite construit un codage plus général, s'appliquant aux polyominos verticalement convexes [De]. Nous l'utiliserons dans le chapitre suivant.

Soit P un polyomino parallélogramme à n colonnes, notées, de gauche à droite, C_1, \dots, C_n . Nous reprenons les deux suites (a_2, \dots, a_n) et (b_1, \dots, b_n) définies dans le paragraphe 3 du premier chapitre. Pour tout i , l'entier b_i est la hauteur de la colonne C_i . Pour $2 \leq i \leq n$, l'entier a_i est le nombre de cellules par lesquelles les colonnes C_i et C_{i-1} sont en contact (Fig.5.2).

On a $a_i \leq \min(b_i, b_{i-1})$ pour $i \geq 2$.

L'image par g de P est alors l'unique mot de Dyck à n pics et $n-1$ creux tel que la liste des hauteurs des pics (resp. creux) soit (b_1, \dots, b_n) (resp. (a_2, \dots, a_n)). Le nombre de pics de $g(P)$ est ainsi la largeur de P .

Exemple. Pour le polyomino parallélogramme suivant :

- $n = 8$,
- $(b_1, \dots, b_n) = (3, 4, 3, 4, 4, 2, 2, 2)$,
- $(a_2, \dots, a_n) = (3, 3, 3, 3, 1, 2, 2)$.

L'image de ce polyomino par g est le mot associé au chemin de Dyck ci-dessous.

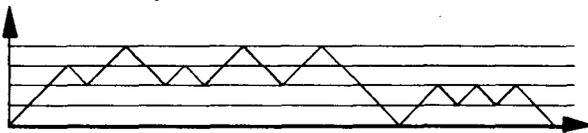
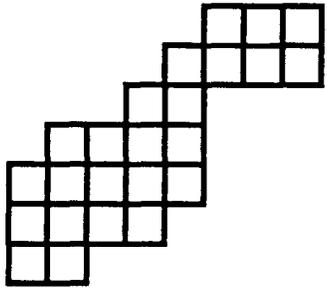


Fig. 5.2 Codage d'un polyomino parallélogramme par un mot de Dyck.

Mots du grand Dyck

L'ensemble des mots du grand Dyck est noté \mathcal{D}' . Ces mots se représentent par des chemins du grand Dyck (Fig.5.3).

On désigne par s le morphisme de monoïde de $\{x, \bar{x}\}^*$ défini par $s(x) = \bar{x}$ et $s(\bar{x}) = x$.

Soit u un mot du grand Dyck ; u admet une unique factorisation de la forme :

$u = u_0 s(v_0) u_1 s(v_1) \dots u_{k-1} s(v_{k-1}) u_k$, où $k \geq 0$ et :

- u_0 et u_k sont soit vides, soit des mots de Dyck,
- u_1, \dots, u_{k-1} et v_0, \dots, v_{k-1} sont des mots de Dyck.

On appelle alors *pic* de u tout pic de l'un des mots u_i ou v_i .

Le codage des polyominos convexes dirigés que nous allons proposer repose plutôt sur l'existence d'une autre factorisation. Soit u un mot du grand Dyck ; on peut distinguer deux cas :

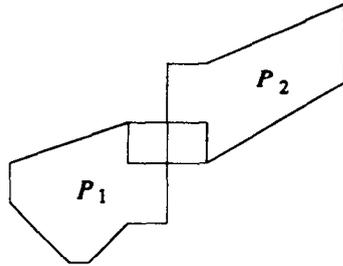
- soit $u = s(v)$, où v est soit vide, soit un mot de Dyck,
- soit $u = w x u \bar{x} s(v)$, où u et v sont soit vides, soit des mots de Dyck, et w est un mot du grand Dyck.

2) $p = k$, ou $a \geq 3$. Deux colonnes consécutives de P' sont toujours en contact par trois cellules au moins. On dira que P est un polyomino *épais*. Nous verrons que ces polyominos sont en bijection avec les polyominos convexes dirigés généraux.

Si $p < k$ et $a \leq 2$, soit $r = \min \{i \geq p+1 / a_i \leq 2\}$. Alors a_r vaut un ou deux.

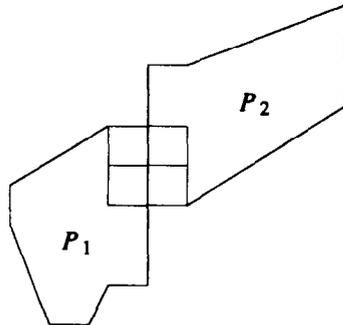
3) $a_r = 1$. Le polyomino P est obtenu en juxtaposant un polyomino épais P_1 , formé des colonnes C_1, \dots, C_{r-1} , et un polyomino parallélogramme quelconque P_2 , formé des colonnes C_r, \dots, C_k , de telle sorte que P_1 et P_2 soient en contact par une cellule. On notera $P = (P_1, P_2)_1$. Le périmètre de P est alors la somme de ceux de P_1 et P_2 , diminuée de deux.

Fig. 5.6 $P = (P_1, P_2)_1$.



4) $a_r = 2$. Le polyomino P est obtenu en juxtaposant un polyomino épais P_1 , formé des colonnes C_1, \dots, C_{r-1} , et un polyomino parallélogramme P_2 ayant au moins deux cellules en première colonne, formé des colonnes C_r, \dots, C_k , de telle sorte que P_1 et P_2 soient en contact par deux cellules. On notera $P = (P_1, P_2)_2$. Le périmètre de P est alors la somme de ceux de P_1 et P_2 , diminuée de quatre.

Fig. 5.7 $P = (P_1, P_2)_2$.



Nous allons maintenant décrire une bijection entre les polyominos épais et les polyominos convexes dirigés, qui permettra ensuite de définir récursivement le codage des polyominos convexes dirigés.

Définition 5.1. Soit ∂ l'application de l'ensemble des polyominos épais dans l'ensemble des polyominos convexes dirigés définie de la manière suivante : soit P un polyomino épais à k colonnes, et P' son polyomino parallélogramme maximal, formé des colonnes C_p, \dots, C_k . Alors $\partial(P)$ est le polyomino obtenu en supprimant :

- la cellule inférieure de C_p ,
- les deux cellules inférieures des colonnes C_{p+1}, \dots, C_k .

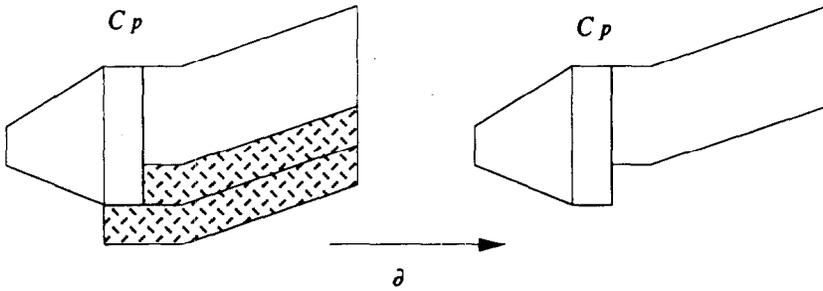


Fig. 5.8 L'application ∂ .

Remarque. Les polyominos épais sont exactement ceux pour lesquels les transformations décrites ci-dessus mènent à un polyomino convexe dirigé de même largeur.

Proposition 5.2. L'application ∂ décrite dans la définition précédente est une bijection entre les polyominos épais et les polyominos convexes dirigés. De plus, si P est un polyomino épais, le périmètre de $\partial(P)$ est celui de P , diminué de deux.

Preuve. Décrivons la bijection réciproque de ∂ .

Soit P' un polyomino convexe dirigé à k colonnes, notées C_1, \dots, C_k , et soit p le plus grand entier tel que le polyomino formé des colonnes C_1, \dots, C_p soit un polyomino tas. Soit P le polyomino obtenu en ajoutant une cellule en bas de la colonne C_p et deux cellules en bas des colonnes C_{p+1}, \dots, C_k . Alors $\partial(P) = P'$.

La seconde assertion provient de la remarque suivante : la largeur de $\partial(P)$ est celle de P , et la hauteur de $\partial(P)$ est celle de P , diminuée de un. □

Remarque. Si P est un polyomino parallélogramme épais, $\partial(P)$ est aussi un polyomino parallélogramme, dont la hauteur à gauche est celle de P , diminuée de un. Au contraire, si P est un polyomino épais de défaut d non nul, $\partial(P)$ sera un polyomino convexe dirigé de défaut $d-1$.

Soit alors ϕ l'application qui, au polyomino convexe dirigé P , associe P lui-même si P est simple, $\partial(P)$ si P est épais, et P_1 si P s'écrit $(P_1, P_2)_1$ ou $(P_1, P_2)_2$. Alors, pour tout P , il existe un entier n tel que $\phi^n(P)$ soit un polyomino parallélogramme simple.

On peut maintenant définir le codage h des polyominos convexes dirigés, en utilisant la bijection g entre les polyominos parallélogrammes et les mots de Dyck appelée dans le paragraphe 1.

Définition 5.3. Soit h l'application de l'ensemble des polyominos convexes dirigés dans celui des mots du grand Dyck, définie de la façon suivante. Soit P un polyomino convexe dirigé. Quatre cas se présentent :

- 1) P est un polyomino parallélogramme simple ; son codage par g s'écrit $x \bar{x} v$, où v est soit vide, soit un mot de Dyck. Alors $h(P) = s(v)$.
- 2) P est un polyomino épais. Alors $h(P) = h(\partial(P)) x \bar{x}$.
- 3) P s'écrit $(P_1, P_2)_1$, où P_1 est un polyomino épais et P_2 un polyomino parallélogramme. Alors $h(P) = h(\partial(P_1)) x \bar{x} s(g(P_2))$.
- 4) P s'écrit $(P_1, P_2)_2$, où P_1 est un polyomino épais et P_2 un polyomino parallélogramme non simple ; le mot $g(P_2)$ admet une seule factorisation du type $x u \bar{x} v$, où u est un mot de Dyck et v est soit vide, soit un mot de Dyck. Alors $h(P) = h(\partial(P_1)) x u \bar{x} s(v)$.

Exemple. Le polyomino P_0 ci-dessous est épais. Soit $P_1 = \partial(P_0)$. Alors $P_1 = (P_2, P_3)_2$. Le polyomino P_2 est épais. Le polyomino $P_4 = \partial(P_2)$ est simple. L'image par h du polyomino P_0 est le mot représenté par le chemin du grand Dyck qui le suit.

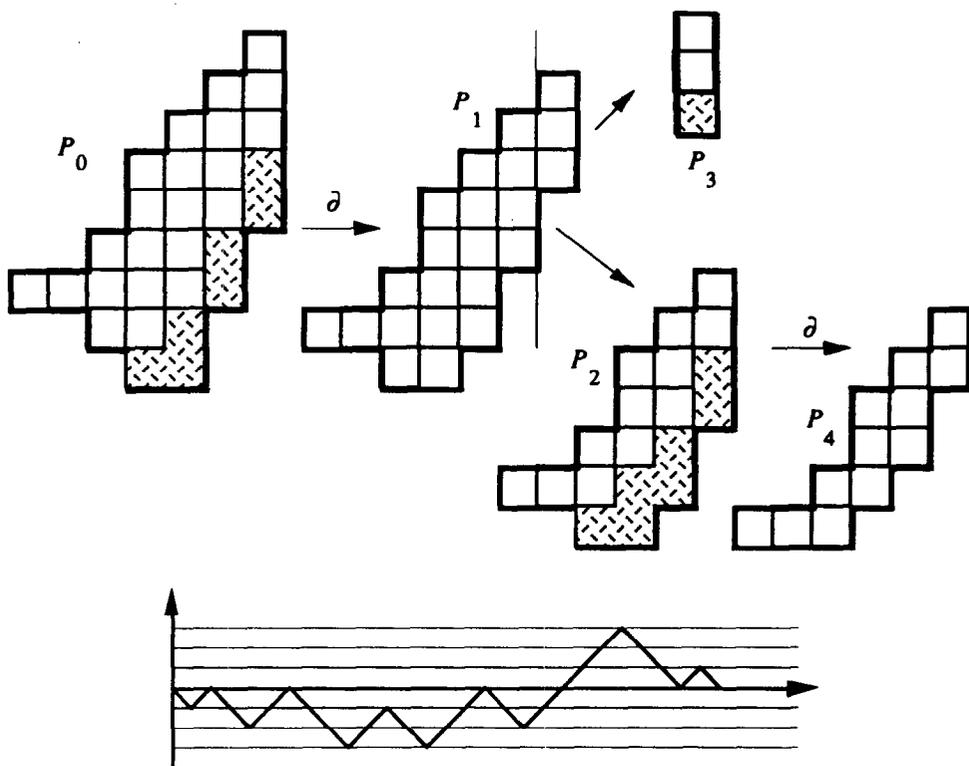


Fig. 5.9 La bijection h .

Définition 5.4. Soit u un mot du grand Dyck factorisé sous la forme $u = u_0 s(v_0) u_1 s(v_1) \dots u_{k-1} s(v_{k-1}) u_k$, où $k \geq 0$ et :

- u_0 et u_k sont soit vides, soit des mots de Dyck,
- u_1, \dots, u_{k-1} et v_0, \dots, v_{k-1} sont des mots de Dyck.

Un *pseudo-pic* de u est un pic de l'un des mots v_i , ou un pic de hauteur supérieure ou égale à deux de l'un des mots u_i .

Proposition 5.5. L'application h décrite dans la définition 5.3 est une bijection entre les polyominos convexes dirigés et les mots du grand Dyck. De plus, si $h(P) = u$:

- le périmètre de P est la longueur de u , augmentée de quatre,
- la largeur de P est le nombre de pseudo-pics de u , augmenté de un.

Preuve. Décrivons tout d'abord la bijection réciproque de h .

Soit w un mot du grand Dyck de longueur $2n$, et supposons que l'on sache construire $h^{-1}(u)$ pour tous les mots u de longueur inférieure ou égale à $2(n-1)$.

1) Si $w = s(v)$, où v est soit vide, soit un mot de Dyck, $h^{-1}(w)$ est le polyomino parallélogramme $g^{-1}(x \bar{x} v)$.

2) Si $w = w_1 x \bar{x}$, où w_1 est un mot du grand Dyck, $h^{-1}(w) = \partial^{-1} \circ h^{-1}(w_1)$.

3) Si $w = w_1 x \bar{x} s(v)$, où w_1 est un mot du grand Dyck et v un mot de Dyck, $h^{-1}(w) = (\partial^{-1} \circ h^{-1}(w_1), g^{-1}(v))_1$.

4) Enfin, si $w = w_1 x u \bar{x} s(v)$, où w_1 est un mot du grand Dyck, u un mot de Dyck, et v soit le mot vide, soit un mot de Dyck, $h^{-1}(w) = (\partial^{-1} \circ h^{-1}(w_1), g^{-1}(xu\bar{x}v))_2$.

Démontrons par récurrence le résultat relatif au périmètre. Rappelons que, si P est un polyomino parallélogramme, la longueur de $g(P)$ est le périmètre de P , diminué de deux. Soit P un polyomino convexe dirigé de périmètre $2n$.

Si $n = 2$, P est réduit à une cellule : c'est donc un polyomino simple, et $h(P)$ est le mot vide, de longueur nulle.

Si $n \geq 3$, supposons avoir montré le résultat pour les polyominos de longueur $2i$, $1 \leq i \leq n-1$. Traitons séparément chacun des quatre cas envisagés dans la définition 5.3.

1) Le résultat est immédiat.

2) Le polyomino $\partial(P)$ est de périmètre $2n-2$ (Proposition 5.2). La longueur de $h(\partial(P))$ est $2n-6$, d'après l'hypothèse de récurrence, et donc $h(P)$ est de longueur $2n-4$.

3) Soit $2n_1$ le périmètre de P_1 et $2n_2$ celui de P_2 . Alors $2n = 2n_1 + 2n_2 - 2$. D'après l'hypothèse de récurrence, la longueur de $h(\partial(P_1))$ est $2n_1 - 6$. Celle de $g(P_2)$ est $2n_2 - 2$. Donc celle de $h(P)$ sera $2n_1 + 2n_2 - 6$, soit $2n - 4$.

4) Avec les mêmes notations que ci-dessus, $2n = 2n_1 + 2n_2 - 4$. D'après l'hypothèse de récurrence, la longueur de $h(\partial(P_1))$ est $2n_1 - 6$. Celle de $xu\bar{x}s(v)$ est $2n_2 - 2$. Donc celle de $h(P)$ sera $2n_1 + 2n_2 - 8$, soit $2n - 4$.

La même récurrence permet de montrer l'assertion relative à la largeur, en utilisant le fait que, si P est un polyomino parallélogramme, la largeur de P est le nombre de pics de $g(P)$. \square

3. ÉNUMÉRATION

Notons $D(t^2, x)$ la série génératrice des mots de Dyck comptés suivant la longueur (par t) et le nombre de pics (par x).

De même, soit $D'(t^2, x)$ la série génératrice des mots du grand Dyck comptés suivant la longueur (par t) et le nombre de pseudo-pics (par x).

Soit enfin $Y(x, y, 1)$ la série génératrice des polyominos convexes dirigés comptés suivant la largeur et la hauteur (par x et y respectivement).

Proposition 5.6. *Les valeurs des séries définies ci-dessus sont :*

$$(i) D(t^2, x) = \frac{1 - t^2(1+x) - \sqrt{1 - 2t^2(1+x) + t^4(1-x)^2}}{2t^2}.$$

$$(ii) D'(t^2, x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2t^2(1+x) + t^4(1-x)^2}}.$$

$$(iii) Y(x, y, 1) = \frac{xy}{\sqrt{1 - 2x - 2y - 2xy + x^2 + y^2}}.$$

Preuve. (i) La série formelle des mots de Dyck vérifie l'équation

$$\underline{D} = x \bar{x} + x \underline{D} \bar{x} + x \bar{x} \underline{D} + x \underline{D} \bar{x} \underline{D},$$

qui implique $D = x t^2 + t^2 D + x t^2 D + t^2 D^2$.

Cette équation est algébrique de degré deux et son unique solution développable en série entière autour de zéro est la valeur de D annoncée en (i).

(ii) La série génératrice formelle des mots du grand Dyck satisfait l'équation

$$\underline{D}' = \emptyset + s(\underline{D}) + \underline{D}' x \bar{x} + \underline{D}' x \underline{D} \bar{x} + \underline{D}' x \bar{x} s(\underline{D}) + \underline{D}' x \underline{D} \bar{x} s(\underline{D}),$$

où $s(\underline{D})$ désigne la série formelle $\sum_{u \in \underline{D}} s(u)$.

Il vient

$$D' = 1 + D + t^2 D' + t^2 D D' + t^2 D D' + t^2 D^2 D',$$

soit encore

$$D' = \frac{1+D}{1-t^2(1+D)^2}$$

ce qui entraîne le second résultat.

(iii) D'après la proposition 5.5, la série génératrice des polyominos convexes dirigés comptés suivant le périmètre (par t) et la largeur (par x) est $t^4 x D'(t^2, x)$. En particulier, le nombre de polyominos convexes dirigés de périmètre $2n+4$ est $\binom{2n}{n}$.

Le changement de variables $(t^2, x) \rightarrow (y, x/y)$ mène alors à la série énumérant les polyominos convexes dirigés suivant la largeur et la hauteur, comptées respectivement par x et y . \square

Références.

- [Ch-Li] S.J. CHANG, K.Y. LIN, Rigorous results for the number of convex polygons on the square and honeycomb lattices, *J. Phys. A : Math. Gen.* 21 (1988) 2635-2642.
- [De] M.P. DELEST, Generating functions for column-convex polyominoes, *J. Comb. Theor. A* 48 (1988) 12-31.
- [De-Vi] M.P. DELEST, X.G. VIENNOT, Algebraic languages and polyominoes enumeration, *Theor. Comp. Sci.* 34 (1984) 169-206, North-Holland.

CHAPITRE 6

CODAGE DES POLYOMINOS CONVEXES SYSTÈME D'ÉQUATIONS

Nous abordons ici l'énumération des polyominos convexes par la méthodologie DSV. Nous utilisons pour coder ces objets le codage g proposé par Delest [De] pour les polyominos verticalement convexes. L'image par g de l'ensemble des polyominos parallélogrammes (ou convexes dirigés, ou convexes de \mathcal{A} , ou convexes de \mathcal{B}) est un langage engendré par une *grammaire algébrique non ambiguë*. Cette propriété permet alors d'écrire un système d'équations régissant les *séries génératrices formelles* des mots de ces langages. Nous en déduisons un second système, formé de q -équations qui font intervenir les séries génératrices des polyominos parallélogrammes, convexes dirigés et convexes, comptés suivant les trois paramètres usuels : largeur, hauteur, aire.

1. CODAGE

Mots de Dyck colorés

Nous avons introduit dans le chapitre précédent les mots de Dyck. Le codage des polyominos verticalement convexes présenté ci-dessous fait intervenir des mots un peu plus généraux, que nous appellerons *mots de Dyck colorés*. Un *mot de Dyck coloré* est un mot non vide de $\{x, \bar{x}, y, \bar{y}\}^*$ vérifiant les deux conditions suivantes :

$$(i) |u|_x + |u|_y = |u|_{\bar{x}} + |u|_{\bar{y}},$$

$$(ii) \text{ si } u = vw, |v|_x + |v|_y \geq |v|_{\bar{x}} + |v|_{\bar{y}}.$$

On représentera ces mots par des *chemins de Dyck colorés*, en codant chaque lettre x (resp. y) par un pas Nord-Est noir (resp. Nord-Est rouge), et chaque lettre \bar{x} (resp. \bar{y}) par un pas Sud-Est noir (resp. Sud-Est rouge).

Soit u un mot de Dyck coloré. On appelle *pic* de u tout facteur $a\bar{b}$ dans u , où a et b sont éléments de $\{x, y\}^*$. Le mot u s'écrit alors $vabw$; la *hauteur* de ce pic est $1 + |v|_x + |v|_y - |v|_{\bar{x}} - |v|_{\bar{y}}$.

Exemple. Le mot de Dyck coloré $u = x x y x \bar{x} \bar{x} x \bar{y} \bar{y} x y x y \bar{x} \bar{x} \bar{x} \bar{x} y \bar{y}$ présente quatre pics, de hauteurs respectives 4, 3, 5, 1, et est représenté par le chemin suivant, dans lequel on indique par des tirets les segments rouges.

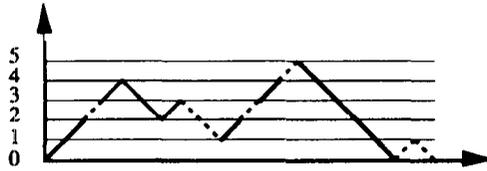


Fig. 6.1 Chemin de Dyck coloré.

Polyominos verticalement convexes

Rappelons qu'un polyomino est dit verticalement convexe lorsque toutes ses intersections avec les colonnes $[i, i+1] \times \mathbb{R}$ du plan sont convexes (Fig. 6.2).

Décrivons d'abord le codage proposé par Delest [De] pour les polyominos verticalement convexes (dont les polyominos convexes sont un cas particulier).

Soit P un polyomino verticalement convexe de hauteur n , à m colonnes, notées, de gauche à droite, C_1, \dots, C_m . On munit le plan d'un repère orthonormé tel que P soit inclus dans le rectangle défini par $0 \leq x \leq m, 0 \leq y \leq n$ (Fig.6.2). Pour $1 \leq i \leq m$, soit $\{0\} \times [b_i, s_i]$ la projection de la colonne C_i sur l'axe Oy , parallèlement à Ox . La base (resp. le sommet, la hauteur) de C_i est b_i (resp. $s_i, s_i - b_i$).

Soient $\alpha_0 = 0, \alpha_m = s_m - b_m - 1$, et, pour $1 \leq i \leq m-1, \alpha_i = b_{i+1} - b_i$.

Soient $\beta_0 = s_1 - b_1 - 1, \beta_m = 0$, et, pour $1 \leq i \leq m-1, \beta_i = s_{i+1} - s_i$. Les deux $(m+1)$ -uplets $(\alpha_0, \dots, \alpha_m)$ et $(\beta_0, \dots, \beta_m)$ suffisent à caractériser P .

Soit alors $\gamma : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \{x, \bar{x}, y, \bar{y}\}^*$, définie par

$$\begin{aligned}
 (\alpha, \beta) &\rightarrow \bar{x}^\alpha x^\beta && \text{si } \alpha \geq 0 \text{ et } \beta \geq 0, \\
 &\bar{x}^\alpha \bar{y}^{|\beta|} && \text{si } \alpha \geq 0 \text{ et } \beta \leq 0, \\
 &y^{|\alpha|} x^\beta && \text{si } \alpha \leq 0 \text{ et } \beta \geq 0, \\
 &\bar{y}^{|\beta|} y^{|\alpha|} && \text{si } \alpha \leq 0 \text{ et } \beta \leq 0.
 \end{aligned}$$

Définition 6.1. Soit g l'application de l'ensemble des polyominos verticalement convexes dans l'ensemble des mots de $\{x, \bar{x}, y, \bar{y}\}^*$ définie par :

$$g(P) = \gamma(\alpha_0, \beta_0) x \bar{x} \gamma(\alpha_1, \beta_1) x \bar{x} \dots x \bar{x} \gamma(\alpha_m, \beta_m),$$

où $(\alpha_0, \dots, \alpha_m)$ et $(\beta_0, \dots, \beta_m)$ sont les deux $(m+1)$ -uplets associés à P comme ci-dessus.

Définition 6.2. Soit \mathcal{V} le sous-ensemble de $\{x, \bar{x}, y, \bar{y}\}^*$ formé des mots de Dyck bicolores u s'écrivant $u_0 x \bar{x} u_1 x \bar{x} \dots x \bar{x} u_m$, avec $m \geq 1$, et vérifiant les trois conditions suivantes :

- (a) $u_0 \in \{x\}^*$;
- (b) $u_m \in \{\bar{x}\}^*$;
- (c) $u_i \in \{\bar{x}\}^* \{x\}^* \cup \{\bar{x}\}^* \{\bar{y}\}^* \cup \{y\}^* \{x\}^* \cup \{\bar{y}\}^* \{y\}^*$ pour $1 \leq i \leq m-1$.

Polyominos convexes dirigés

Un polyomino verticalement convexe est un polyomino convexe dirigé à gauche (Fig.6.3.2) si et seulement si il existe un entier $p \geq 0$ tel que :

- $\alpha_i \leq 0$ pour $0 \leq i \leq p$ et $\alpha_i \geq 0$ pour $i \geq p+1$,
- $\beta_i \geq 0$ pour tout i .

Donc l'image par g de l'ensemble des polyominos convexes dirigés à gauche est l'ensemble \mathcal{E} des mots de Dyck bicolores s'écrivant $u_0 x \bar{x} u_1 x \bar{x} \dots x \bar{x} u_m$, et vérifiant l'ensemble $C_{\mathcal{E}}$ des trois conditions suivantes :

$$C_{\mathcal{E}} \quad \begin{array}{l} (a) u_0 \in \{x\}^*, \\ (b) u_m \in \{\bar{x}\}^*, \\ (c) \exists p \geq 0 \text{ tel que } u_i \in \{y\}^* \{x\}^* \text{ pour } 0 \leq i \leq p \text{ et } u_i \in \{\bar{x}\}^* \{x\}^* \text{ pour } p+1 \leq i \leq m. \end{array}$$

De façon analogue, on montre que l'image par g de l'ensemble des polyominos convexes dirigés à droite est l'ensemble \mathcal{E}' des mots de Dyck bicolores s'écrivant $u_0 x \bar{x} u_1 x \bar{x} \dots x \bar{x} u_m$, et vérifiant l'ensemble $C_{\mathcal{E}'}$ des trois conditions suivantes :

$$C_{\mathcal{E}'} \quad \begin{array}{l} (a) u_0 \in \{x\}^*, \\ (b) u_m \in \{\bar{x}\}^*, \\ (c) \exists r \leq m \text{ tel que } u_i \in \{\bar{x}\}^* \{x\}^* \text{ pour } 0 \leq i \leq r-1 \text{ et } u_i \in \{\bar{x}\}^* \{\bar{y}\}^* \text{ pour } r \leq i \leq m. \end{array}$$

Polyominos convexes de \mathcal{Q}

Un polyomino verticalement convexe est un polyomino convexe de \mathcal{Q} (Fig.6.3.3) si et seulement si il existe deux entiers p et r , $0 \leq p < r \leq m$, tels que :

- $\alpha_i \leq 0$ pour $0 \leq i \leq p$ et $\alpha_i \geq 0$ pour $i \geq p+1$,
- $\beta_i \geq 0$ pour $0 \leq i \leq r-1$ et $\beta_i \leq 0$ pour $r \leq i \leq m$.

Donc l'image par g de l'ensemble des polyominos convexes de \mathcal{Q} est l'ensemble \mathcal{F} des mots de Dyck bicolores s'écrivant $u_0 x \bar{x} u_1 x \bar{x} \dots x \bar{x} u_m$, et vérifiant l'ensemble $C_{\mathcal{F}}$ des trois conditions suivantes :

$$C_{\mathcal{F}} \quad \begin{array}{l} (a) u_0 \in \{x\}^*, \\ (b) u_m \in \{\bar{x}\}^*, \\ (c) \exists p \text{ et } r, 0 \leq p < r \leq m, \text{ tels que } u_i \in \{y\}^* \{x\}^* \text{ pour } 0 \leq i \leq p, u_i \in \{\bar{x}\}^* \{x\}^* \\ \text{pour } p+1 \leq i \leq r-1 \text{ et } u_i \in \{\bar{x}\}^* \{\bar{y}\}^* \text{ pour } r \leq i \leq m. \end{array}$$

Polyominos convexes de \mathcal{B}

Un polyomino verticalement convexe est un polyomino convexe de \mathcal{B} (Fig.6.3.4) si et seulement si il existe deux entiers p et r , $0 \leq p < r \leq m$, tels que :

- $\alpha_i \leq 0$ et $\beta_i \geq 0$ pour $0 \leq i \leq p$,
- $\alpha_i \geq 0$ et $\beta_i \leq 0$ pour $r \leq i \leq m$,
- $\alpha_i = \beta_i = 0$ pour $p+1 \leq i \leq r-1$.

Donc l'image par g de l'ensemble des polyominos convexes de \mathcal{B} est l'ensemble \mathcal{G} des mots de Dyck bicolores s'écrivant $u_0 x \bar{x} u_1 x \bar{x} \dots x \bar{x} u_m$, et vérifiant l'ensemble $C_{\mathcal{G}}$ des trois conditions suivantes :

$$C_{\mathcal{G}} \quad \begin{array}{l} (a) u_0 \in \{x\}^*, \\ (b) u_m \in \{\bar{x}\}^*, \\ (c) \exists p \text{ et } r, 0 \leq p < r \leq m, \text{ tels que } u_i \in \{y\}^* \{x\}^* \text{ pour } 0 \leq i \leq p, u_i = \emptyset \text{ pour } \\ p+1 \leq i \leq r-1 \text{ et } u_i \in \{\bar{x}\}^* \{\bar{y}\}^* \text{ pour } r \leq i \leq m. \end{array}$$

Exemple. Nous donnons ici l'image par g d'un polyomino parallélogramme, d'un polyomino convexe dirigé à gauche, d'un polyomino convexe de \mathcal{Q} et d'un polyomino convexe de \mathcal{B} .

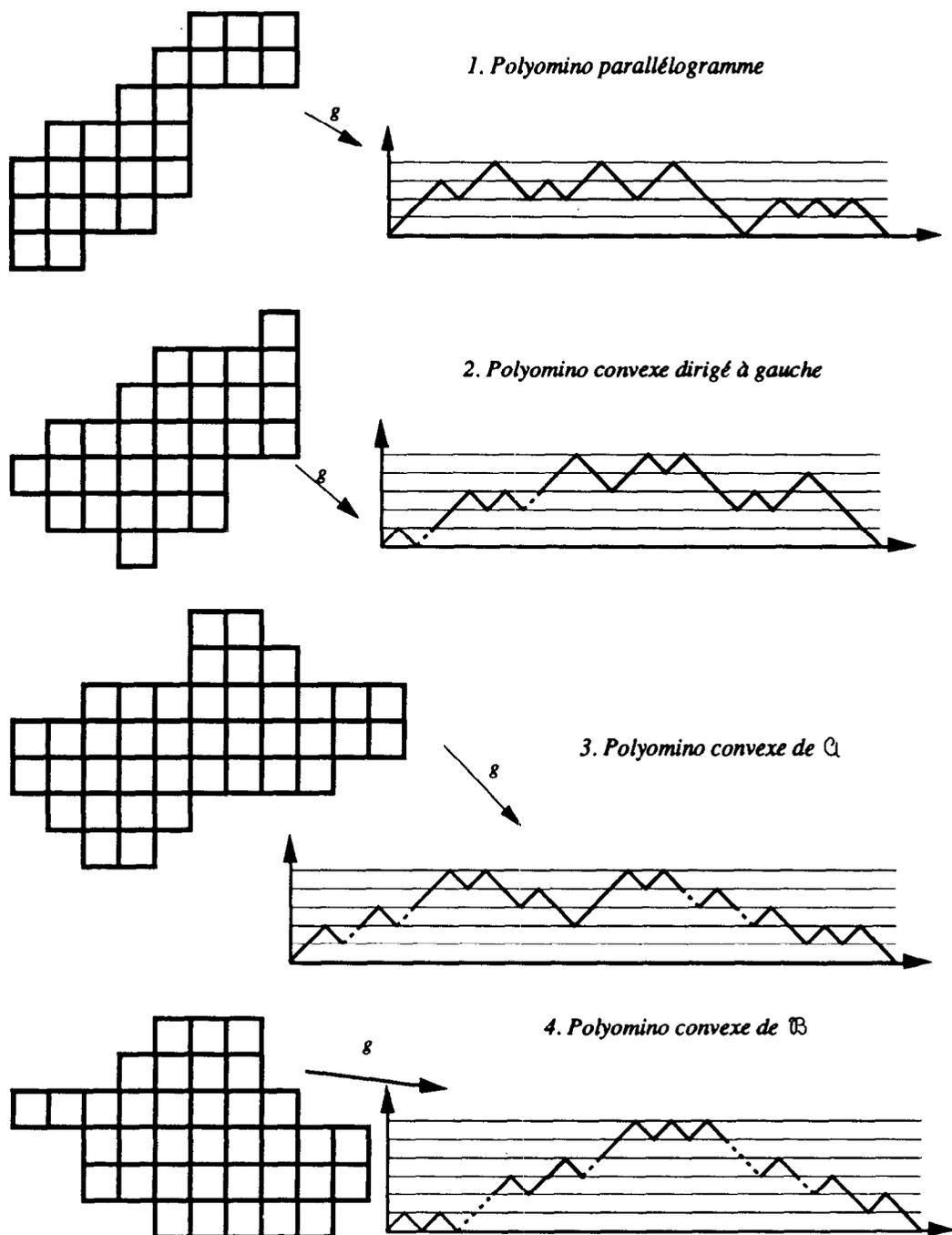


Fig. 6.3 Codage par g de polyominos convexes.

Notations. On désignera par $\underline{\mathcal{D}}$ (resp. $\underline{\mathcal{E}}, \underline{\mathcal{E}'}, \underline{\mathcal{F}}, \underline{\mathcal{G}}$) la série génératrice formelle des mots de \mathcal{D} (resp. $\mathcal{E}, \mathcal{E}', \mathcal{F}, \mathcal{G}$). On notera $D(t^2, x, q)$ (resp. $E(t^2, x, q), E'(t^2, x, q), F(t^2, x, q), G(t^2, x, q)$) la série génératrice des mots de \mathcal{D} (resp. $\mathcal{E}, \mathcal{E}', \mathcal{F}, \mathcal{G}$), valués par $v(u) = t^{\ell} x^p q^s$, où :

- ℓ est la longueur de u ,
- p est le nombre de pics de u ,
- s est la somme des hauteurs des pics de u .

Remarquons que l'application qui associe au mot a_1, \dots, a_n le mot $\sigma(a_n) \dots \sigma(a_1)$, où $\sigma(x) = \bar{x}$, $\sigma(\bar{x}) = x$, $\sigma(y) = \bar{y}$, et $\sigma(\bar{y}) = y$, échange les mots de \mathcal{E} et ceux de \mathcal{E}' . Ceci entraîne que $E = E'$.

En regroupant le corollaire 2.3 et la proposition 6.3, on obtient le :

Lemme 6.4. Avec les notations ci-dessus, les séries génératrices des polyominos parallélogrammes, convexes dirigés, convexes de \mathcal{A} , convexes de \mathcal{B} et convexes, comptés suivant la largeur, la hauteur et l'aire par x, y et q respectivement, sont :

$$X(x, y, q) = yD(y, x/y, q),$$

$$Y(x, y, q) = yE(y, x/y, q),$$

$$A(x, y, q) = yF(y, x/y, q),$$

$$B(x, y, q) = yG(y, x/y, q),$$

$$Z(x, y, q) = 2yF(y, x/y, q) - yG(y, x/y, q).$$

2. SYSTÈME D'ÉQUATIONS

Équations en variables non commutatives

Pour obtenir ces équations, portant sur les séries génératrices formelles des mots des langages $\mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{E}', \mathcal{F}$ et \mathcal{G} , nous allons introduire d'autres langages, un peu plus généraux. La généralisation porte sur les lettres de la première *montée* ou de la dernière *descente* des mots.

Ainsi, \mathcal{E}_1 (resp. $\mathcal{F}_1, \mathcal{G}_1$) sera l'ensemble des mots de Dyck bicolores satisfaisant les conditions (b) et (c) de $C_{\mathcal{E}}$ (resp. $C_{\mathcal{F}}, C_{\mathcal{G}}$). La série génératrice formelle des mots de \mathcal{E}_1 (resp. $\mathcal{F}_1, \mathcal{G}_1$) sera notée $\underline{\mathcal{E}}_1$ (resp. $\underline{\mathcal{F}}_1, \underline{\mathcal{G}}_1$) et la série génératrice de ces mots, comptés suivant la valuation v définie ci-dessus sera \underline{E}_1 (resp. $\underline{F}_1, \underline{G}_1$).

De même, \mathcal{E}'_2 (resp. $\mathcal{F}_2, \mathcal{G}_2$) sera l'ensemble des mots de Dyck bicolores satisfaisant les conditions (a) et (c) de $C_{\mathcal{E}'}$ (resp. $C_{\mathcal{F}}, C_{\mathcal{G}}$). La série génératrice formelle des mots de \mathcal{E}'_2 (resp. $\mathcal{F}_2, \mathcal{G}_2$) sera notée $\underline{\mathcal{E}}'_2$ (resp. $\underline{\mathcal{F}}_2, \underline{\mathcal{G}}_2$) et la série génératrice de ces mots, comptés suivant la valuation v , sera \underline{E}'_2 (resp. $\underline{F}_2, \underline{G}_2$).

Remarquons que $E_1 = E'_2, F_1 = F_2$ et $G_1 = G_2$.

Enfin, \mathcal{F}_3 (resp. \mathcal{G}_3) sera l'ensemble des mots de Dyck bicolores satisfaisant la condition (c) de $C_{\mathcal{F}}$ (resp. $C_{\mathcal{G}}$). La série génératrice formelle des mots de \mathcal{F}_3 (resp. \mathcal{G}_3) sera notée $\underline{\mathcal{F}}_3$ (resp. $\underline{\mathcal{G}}_3$) et la série génératrice de ces mots, comptés suivant la valuation v , sera \underline{F}_3 (resp. \underline{G}_3).

Mots de Dyck

Un mot de Dyck se factorise de façon unique sous la forme $x u \bar{x} v$, où u et v sont soit vides, soit eux-mêmes des mots de Dyck. Il vient :

$$\underline{\mathcal{D}} = x \bar{x} + x \bar{x} \underline{\mathcal{D}} + x \underline{\mathcal{D}} \bar{x} + x \underline{\mathcal{D}} \bar{x} \underline{\mathcal{D}} .$$

Mots de \mathcal{E} et \mathcal{E}_1

Un mot de \mathcal{E} se factorise de façon unique sous la forme $x u \bar{x} v$, où :

- si u est vide, v est soit vide, soit un mot de \mathcal{E}_1 ,
- sinon, u est élément de \mathcal{E} et v est soit vide, soit un mot de Dyck.

De même, un mot de \mathcal{E}_1 , s'il n'est pas dans \mathcal{E} , s'écrit $y u \bar{x} v$, où u est un mot de \mathcal{E}_1 , et v est soit vide, soit un mot de Dyck. On a donc :

$$\underline{\mathcal{E}} = x \bar{x} + x \bar{x} \underline{\mathcal{E}}_1 + x \underline{\mathcal{E}} \bar{x} + x \underline{\mathcal{E}} \bar{x} \underline{\mathcal{D}},$$

$$\underline{\mathcal{E}}_1 = \underline{\mathcal{E}} + y \underline{\mathcal{E}}_1 \bar{x} + y \underline{\mathcal{E}}_1 \bar{x} \underline{\mathcal{D}}.$$

De façon analogue, on obtient :

$$\underline{\mathcal{E}}' = x \bar{x} + \underline{\mathcal{E}}'_2 x \bar{x} + x \underline{\mathcal{E}}' \bar{x} + \underline{\mathcal{D}} x \underline{\mathcal{E}}' \bar{x},$$

$$\underline{\mathcal{E}}'_2 = \underline{\mathcal{E}}' + x \underline{\mathcal{E}}'_2 \bar{y} + \underline{\mathcal{D}} x \underline{\mathcal{E}}'_2 \bar{y}.$$

Mots de \mathcal{F} , \mathcal{F}_1 , \mathcal{F}_2 et \mathcal{F}_3

Un mot w de \mathcal{F} admet une unique écriture du type $w = x u \bar{x} v$ ou $w = x u \bar{y} v$, où u et v sont soit vides, soit des mots de Dyck bicolores. Plus précisément :

- si $w = x u \bar{y} v$, le mot u est élément de \mathcal{F}_2 et v est élément de $\{x \bar{x}\}^*$, c'est à dire que v s'écrit $(x \bar{x})^n$, avec $n \geq 1$,
- si $w = x u \bar{x} v$,
 - soit u est vide, auquel cas v est soit vide, soit un élément de \mathcal{F}_1 ,
 - soit u est élément de \mathcal{E} , auquel cas v est soit vide, soit élément de \mathcal{E}' ,
 - soit u est élément de \mathcal{F}/\mathcal{E} , et v est alors élément de $\{x \bar{x}\}^*$, c'est à dire que v s'écrit $(x \bar{x})^n$, avec $n \geq 0$.

Il vient :

$$\underline{\mathcal{F}} = x \bar{x} + x \bar{x} \underline{\mathcal{F}}_1 + x \underline{\mathcal{E}} \bar{x} (\emptyset + \underline{\mathcal{E}}') + x (\underline{\mathcal{F}} - \underline{\mathcal{E}}) \bar{x} \{x \bar{x}\}^* + x \underline{\mathcal{F}}_2 \bar{y} \{x \bar{x}\}^*.$$

Des remarques analogues pour les mots de \mathcal{F}_1 , \mathcal{F}_2 , et \mathcal{F}_3 mènent à :

$$\underline{\mathcal{F}}_1 = \underline{\mathcal{F}} + y \underline{\mathcal{E}}_1 \bar{x} (\emptyset + \underline{\mathcal{E}}') + y (\underline{\mathcal{F}}_1 - \underline{\mathcal{E}}_1) \bar{x} \{x \bar{x}\}^* + y \underline{\mathcal{F}}_3 \bar{y} \{x \bar{x}\}^*.$$

$$\underline{\mathcal{F}}_2 = \underline{\mathcal{F}} + (\emptyset + \underline{\mathcal{E}}) x \underline{\mathcal{E}}'_2 \bar{y} + \{x \bar{x}\}^* x (\underline{\mathcal{F}}_2 - \underline{\mathcal{E}}'_2) \bar{y} + \{x \bar{x}\}^* y \underline{\mathcal{F}}_3 \bar{y}.$$

$$\underline{\mathcal{F}}_3 = \underline{\mathcal{F}}_2 + y \underline{\mathcal{E}}_1 \bar{x} (\emptyset + \underline{\mathcal{E}}'_2) + y (\underline{\mathcal{F}}_1 - \underline{\mathcal{E}}_1) \bar{x} \{x \bar{x}\}^* + y \underline{\mathcal{F}}_3 \bar{y} \{x \bar{x}\}^*.$$

Mots de \mathcal{G} , \mathcal{G}_1 , \mathcal{G}_2 et \mathcal{G}_3

Des factorisations analogues fournissent :

$$\underline{\mathcal{G}} = x \bar{x} + x \bar{x} \underline{\mathcal{G}}_1 + x \underline{\mathcal{G}} \bar{x} \{x \bar{x}\}^* + x \underline{\mathcal{G}}_2 \bar{y} \{x \bar{x}\}^*,$$

$$\underline{\mathcal{G}}_1 = \underline{\mathcal{G}} + y \underline{\mathcal{G}}_1 \bar{x} \{x \bar{x}\}^* + y \underline{\mathcal{G}}_3 \bar{y} \{x \bar{x}\}^*,$$

$$\underline{\mathcal{G}}_2 = \underline{\mathcal{G}} + \{x \bar{x}\}^* x \underline{\mathcal{G}}_2 \bar{y} + \{x \bar{x}\}^* y \underline{\mathcal{G}}_3 \bar{y},$$

$$\underline{\mathcal{G}}_3 = \underline{\mathcal{G}}_2 + y \underline{\mathcal{G}}_1 \bar{x} \{x \bar{x}\}^* + y \underline{\mathcal{G}}_3 \bar{y} \{x \bar{x}\}^*.$$

Équations en variables commutatives

Pour déduire du système précédent des équations portant sur les séries génératrices selon la valuation v des langages étudiés, il faut regarder comment se comportent les trois paramètres d'énumération : longueur (ℓ), nombre de pics (p) et somme des hauteurs des pics (s), vis à vis des deux opérations de *concaténation* et de *décalage*. Rappelons que la valuation d'un mot de Dyck coloré est $v(u) = t^\ell x^p q^s$.

Concaténation. Soient u et v des mots de Dyck colorés :

$$- \ell(uv) = \ell(u) + \ell(v),$$

$$- p(uv) = p(u) + p(v),$$

$$- s(uv) = s(u) + s(v),$$

et donc $v(uv) = v(u)v(v)$.

Décalage. Soient a et b des éléments de $\{x, y\}$, et u un mot de Dyck coloré :

$$- \ell(aub) = \ell(u) + 2,$$

$$- p(aub) = p(u),$$

$$- s(aub) = s(u) + p(u), \text{ et donc } v(aub) = t^2 v(u) \Big|_{x \rightarrow xq}.$$

Ces remarques mènent à la proposition suivante, dans laquelle on note S pour $S(t^2, x, q)$ et $S(xq)$ pour $S(t^2, xq, q)$:

Proposition 6.5. *Les séries génératrices $D, E, E_1, F, F_1, F_3, G, G_1$ et G_3 définies plus haut sont liées par le système suivant :*

$$D = t^2 xq(1 + D) + t^2(1 + D)D(xq),$$

$$\begin{cases} E = t^2 xq + t^2 xqE_1 + t^2(1 + D)E(xq), \\ E_1 = E + t^2(1 + D)E_1(xq), \end{cases}$$

$$\begin{cases} F = t^2 xq + t^2 xqF_1 + t^2 \left(E - \frac{t^2 xq}{1 - t^2 xq} \right) E(xq) + \frac{t^2}{1 - t^2 xq} F(xq) + \frac{t^4 xq}{1 - t^2 xq} F_1(xq), \\ F_1 = F + t^2 \left(E - \frac{t^2 xq}{1 - t^2 xq} \right) E_1(xq) + \frac{t^2}{1 - t^2 xq} F_1(xq) + \frac{t^4 xq}{1 - t^2 xq} F_3(xq), \\ F_3 = F_1 + t^2 \left(E_1 - \frac{t^2 xq}{1 - t^2 xq} \right) E_1(xq) + \frac{t^2}{1 - t^2 xq} F_1(xq) + \frac{t^2}{1 - t^2 xq} F_3(xq). \end{cases}$$

$$\begin{cases} G = t^2 xq + t^2 xqG_1 + \frac{t^2}{1-t^2 xq}G(xq) + \frac{t^4 xq}{1-t^2 xq}G_1(xq), \\ G_1 = G + \frac{t^2}{1-t^2 xq}G_1(xq) + \frac{t^4 xq}{1-t^2 xq}G_3(xq), \\ G_3 = G_1 + \frac{t^2}{1-t^2 xq}G_1(xq) + \frac{t^2}{1-t^2 xq}G_3(xq). \end{cases}$$

Compte tenu du lemme 6.4, cette proposition conduit à un système de q -équations liant les séries génératrices des polyominos parallélogrammes, convexes dirigés et convexes. Soient Y_1 , Z_1 , Z_3 , B_1 et B_3 les séries formelles suivantes :

$$Y_1(x, y, q) = yE_1(y, x/y, q),$$

$$Z_1(x, y, q) = 2yF_1(y, x/y, q) - yG_1(y, x/y, q),$$

$$Z_3(x, y, q) = 2yF_3(y, x/y, q) - yG_3(y, x/y, q),$$

$$B_1(x, y, q) = yG_1(y, x/y, q),$$

$$B_3(x, y, q) = yG_3(y, x/y, q).$$

Proposition 6.6. Les séries génératrices X , Y et Z des polyominos parallélogrammes, convexes dirigés et convexes satisfont le système suivant :

$$X(x) = \frac{xyq}{1-xq} + \frac{y+X}{1-xq} X(xq),$$

$$\begin{pmatrix} Y \\ Y_1 \end{pmatrix}(x) = \frac{xyq}{1-xq} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{y+X}{1-xq} \begin{pmatrix} 1 & xq \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ Y_1 \end{pmatrix}(xq),$$

$$\begin{pmatrix} Z \\ Z_1 \\ Z_3 \end{pmatrix}(x) = \frac{xyq}{1-xq} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{y+X} \begin{pmatrix} V^2 \\ VW \\ W^2 \end{pmatrix} + \frac{y}{(1-xq)^2} \begin{pmatrix} 1 & 2xq & x^2q^2 \\ 1 & 1+xq & xq \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ Z_1 \\ Z_3 \end{pmatrix}(xq),$$

$$\text{où } V = Y - \frac{xyq}{1-xq} \text{ et } W = Y_1 - \frac{xyq}{1-xq}.$$

D'autre part, la série génératrice des polyominos convexes de \mathfrak{B} est fournie par :

$$\begin{pmatrix} B \\ B_1 \\ B_3 \end{pmatrix}(x) = \frac{xyq}{1-xq} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{y}{(1-xq)^2} \begin{pmatrix} 1 & 2xq & x^2q^2 \\ 1 & 1+xq & xq \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ B_1 \\ B_3 \end{pmatrix}(xq).$$

Preuve. On obtient un premier système d'équations portant sur les séries X , Y , Z et B en faisant le changement de variables $(t^2, x) \rightarrow (y, x/y)$ dans les équations de la proposition précédente et en utilisant le lemme 6.4 et les séries formelles introduites ci-dessus. L'équation relative à X est alors celle annoncée dans le corollaire ; elle est indépendante des autres. Les autres équations se

répartissent en trois groupes : le premier porte sur Y et Y_1 et fait intervenir la série X . Le second porte sur Z , Z_1 et Z_3 et fait intervenir Y et Y_1 . Le dernier, relatif à B , B_1 et B_3 , est autonome.

Pour obtenir l'écriture ci-dessus, il faut parvenir à remplacer les séries de la forme $S(x)$ apparaissant dans les membres de droite des équations par des séries du type $S(xq)$. Indiquons brièvement comment on procède en prenant l'exemple du premier groupe d'équations. Il s'écrit :

$$\begin{cases} Y = xyq + xqY_1 + (y+X)Y(xq), & (E_1) \\ Y_1 = Y + (y+X)Y_1(xq). & (E_2) \end{cases}$$

En reportant dans (E_2) la valeur de Y donnée par (E_1) , il vient :

$$Y_1 = \frac{xyq}{1-xq} + \frac{y+X}{1-xq} (Y(xq) + Y_1(xq)).$$

On obtient ensuite la valeur annoncée pour Y dans la proposition en remplaçant Y_1 par cette expression dans (E_1) .

On procède de façon analogue pour les deux autres groupes. (Précisons que pour faire apparaître V et W dans le second groupe, on utilise les identités du premier).□

Nous disposons ainsi d'un système de q -équations liant les séries génératrices des polyominos parallélogrammes, convexes dirigés et convexes. Nous verrons dans le chapitre suivant dans quelle mesure on sait les résoudre. Dans l'immédiat, nous allons montrer que ce système fournit la solution de tous les problèmes d'énumération de polyominos convexes relativement à la largeur, la hauteur, ou le périmètre. La plupart des résultats que nous obtiendrons sont déjà connus. Toutefois, ceux relatifs aux polyominos de \mathfrak{B} sont nouveaux et assez remarquables : en particulier, la série génératrice des éléments de \mathfrak{B} est rationnelle.

Une autre application de ce système est la preuve de deux conjectures de Enting et Guttmann [En-Gu] donnant la valeur des deux premières dérivées par rapport à q de la série génératrice des polyominos convexes, comptés suivant le périmètre et l'aire, prises en $q=1$. Curieusement, cette série intervient dans une approche particulière du *modèle de Potts à q états*. Celle-ci consiste à calculer les premiers termes du développement en série de la *fonction de partition*, à basse température, par une méthode dite de *réseau fini*. Connaître la série génératrice des polyominos convexes permet de calculer le $(n+1)$ ème terme de ce développement lorsqu'on a obtenu, par la méthode en question, les n premiers. Dans la pratique, Enting et Guttmann se contentent d'un développement limité à l'ordre deux de la série $Z(t^2, t^2, q)$, ce qui explique leur intérêt pour la valeur des deux premières dérivées de Z .

3. CAS PARTICULIER : $q = 1$

Lorsque q vaut un, le système donné dans la proposition 6.6 se simplifie considérablement. La première équation est alors algébrique de degré deux. Elle permet le calcul de la série X . Connaissant X , le premier groupe est un système linéaire de Cramer en Y et Y_1 .

Connaissant Y et Y_1 , le second groupe est à son tour un système de Cramer en Z , Z_1 et Z_3 .

Quant au troisième groupe, c'est encore un système linéaire de Cramer ; il est indépendant des autres équations.

On déduit immédiatement de ces remarques que les séries X , Y et Z , prises en $q=1$, sont algébriques, tandis que la série B est rationnelle. Plus précisément, la résolution des équations mène à la proposition suivante.

Proposition 6.7. *La série génératrice des polyominos parallélogrammes (resp. convexes dirigés, convexes, convexes de \mathfrak{B}), comptés suivant la largeur (par x) et la hauteur (par y) est X (resp. Y, Z, B) où :*

$$X = \frac{1 - x - y - \sqrt{\Delta}}{2},$$

$$Y = \frac{xy}{\sqrt{\Delta}},$$

$$Z = \frac{xy}{\Delta^2} (1 - 3x - 3y + 3x^2 + 3y^2 + 5xy - x^3 - y^3 - x^2y - xy^2 - xy(x-y)^2) - \frac{4x^2y^2}{\Delta^{3/2}},$$

$$B = xy \frac{(1-x)(1-x-2y+y^2-xy)}{(1-x-y)\Delta},$$

avec $\Delta = 1 - 2x - 2y - 2xy + x^2 + y^2$.

Le premier résultat est bien connu. Les deux suivants ont déjà été obtenus par Chang et Lin [Ch-Li]. Ce sont d'ailleurs eux qui ont introduit les polyominos convexes dirigés. Le dernier résultat, lui, est nouveau.

Les séries génératrices comptant les polyominos suivant le périmètre seul (par t) s'obtiennent à partir de celles de cette proposition par le changement de variables $x \rightarrow t^2$ et $y \rightarrow t^2$. Leur développement en t fournit alors le nombre de polyominos parallélogrammes, convexes dirigés, convexes ou convexes de \mathfrak{B} de périmètre donné.

Proposition 6.8. (i) *Le nombre de polyominos parallélogrammes de périmètre $2n+2$ est le $n^{\text{ième}}$ nombre de Catalan, soit $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.*

(ii) *Le nombre de polyominos convexes dirigés de périmètre $2n+4$ est $\binom{2n}{n}$.*

(iii) *Le nombre de polyominos convexes de périmètre $2n+8$ est $(2n+1)4^n - 4(2n+1)\binom{2n}{n}$.*

(iv) *Le nombre de polyominos de \mathfrak{B} de périmètre $2n+8$ est $6 \cdot 4^n + 2^n$.*

Proposition 6.9. (i) *Le nombre de polyominos parallélogrammes à p colonnes et q lignes est :*

$$\frac{1}{p+q-1} \binom{p+q-1}{p} \binom{p+q-1}{q}.$$

(ii) *Le nombre de polyominos convexes dirigés à p colonnes et q lignes est :*

$$\binom{p+q-2}{p-1} \binom{p+q-2}{q-1}.$$

(iii) *Le nombre de polyominos convexes à p colonnes et q lignes est :*

$$\frac{pq-1}{p+q-2} \binom{2p+2q-4}{2p-2} - 2(p+q-2) \binom{p+q-3}{p-1} \binom{p+q-3}{q-1}.$$

(iv) Le nombre de polyominos de \mathcal{B} à p colonnes et q lignes est :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{2p+q-3}{p+q-2} \binom{2p+2q-4}{2p-2} + \binom{p+q-3}{p-1} \right).$$

Preuve. (i) La série génératrice des polyominos parallélogrammes comptés suivant le périmètre (par t) et la largeur (par x) est :

$$\tilde{X} = \frac{1-t^2(1+x) - \sqrt{\tilde{\Delta}}}{2},$$

où $\tilde{\Delta} = 1 - 2t^2(1+x) + t^4(1-x)^2$.

Elle vérifie l'équation $\frac{\tilde{X}}{t^2} = t^2 \phi\left(\frac{\tilde{X}}{t^2}\right)$, où $\phi(u) = (1+u)(x+u)$.

Une inversion de Lagrange mène alors à :

$$\tilde{X} = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{t^{2n+2}}{n} \sum_{k=1}^n x^k \binom{n}{k-1} \binom{n}{k} \right),$$

dont on déduit le résultat annoncé. On obtient aussi :

$$\sqrt{\tilde{\Delta}} = 1 - t^2(1+x) - 2 \sum_{n \geq 1} \left(\frac{t^{2n+2}}{n} \sum_{k=1}^n x^k \binom{n}{k-1} \binom{n}{k} \right).$$

Posons $s = t^2$; en dérivant cette identité relativement à s , il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sqrt{\tilde{\Delta}}}{\partial s} &= \frac{t^2(1-x)^2 - (1+x)}{\sqrt{\tilde{\Delta}}} \\ &= -(1-x) - 2 \sum_{n \geq 1} \left(t^{2n} \frac{n+1}{n} \sum_{k=1}^n x^k \binom{n}{k-1} \binom{n}{k} \right), \end{aligned}$$

dont on déduit $\frac{1}{\sqrt{\tilde{\Delta}}} = \sum_{n \geq 0} \left(t^{2n} \sum_{k=0}^n x^k \binom{n}{k}^2 \right)$.

Enfin, en dérivant une seconde fois par rapport à s , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sqrt{\tilde{\Delta}}}{\partial^2 s} &= \frac{-4x}{\tilde{\Delta}^{3/2}} \\ &= -2 \sum_{n \geq 1} \left(t^{2n-2} (n+1) \sum_{k=1}^n x^k \binom{n}{k-1} \binom{n}{k} \right). \end{aligned}$$

(ii) La série génératrice des polyominos convexes dirigés comptés suivant le périmètre (par t) et la largeur (par x) est, compte tenu du développement de $1/\sqrt{\tilde{\Delta}}$ donné ci-dessus :

$$\frac{t^4 x}{\sqrt{\tilde{\Delta}}} = \sum_{n \geq 2} \left(t^{2n} \sum_{k=1}^{n-1} x^k \binom{n-2}{k-1}^2 \right),$$

ce qui mène au résultat annoncé.

(iii) La série génératrice des polyominos convexes comptés suivant la largeur (par x) et la hauteur (par y) est $xyR_1 - R_2$ où

$$R_1 = \frac{1}{\Delta^2} (1 - 3x - 3y + 3x^2 + 3y^2 + 5xy - x^3 - y^3 - x^2y - xy^2 - xy(x-y)^2)$$

et
$$R_2 = \frac{4x^2y^2}{\Delta^{3/2}}.$$

On déduit de l'expression obtenue en (i) pour $\frac{-4x}{\Delta^{3/2}}$ que

$$R_2 = 2 \sum_{p \geq 2, q \geq 2} x^p y^q (p+q-2) \binom{p+q-3}{p-1} \binom{p+q-3}{q-1}.$$

Par ailleurs, en posant $x = u^2$ et $y = v^2$, R_1 devient une fraction rationnelle en u dont la décomposition en éléments simples s'écrit :

$$R_1 = \frac{1}{4} (m(u, v) + m(-u, v) + m(u, -v) + m(-u, -v)),$$

avec
$$m(u, v) = \frac{1}{2} \left[\frac{2-v}{1-u-v} + \frac{v(1-v)}{(1-u-v)^2} \right].$$

Or
$$\frac{1}{1-u-v} = \sum_{p \geq 0, q \geq 0} u^p v^q \binom{p+q}{p}.$$

En dérivant par rapport à u cette identité, on obtient :

$$\frac{1}{(1-u-v)^2} = \sum_{p \geq 0, q \geq 0} u^p v^q (p+q+1) \binom{p+q}{p}.$$

Il vient :
$$R_1 = \sum_{p \geq 0, q \geq 0} u^{2p} v^{2q} \frac{pq+p+q}{p+q} \binom{2p+2q}{2p},$$

ce qui fournit finalement l'expression donnée dans la proposition 6.9, compte tenu de la valeur de R_2 .

(iv) La série génératrice des polyominos de \mathfrak{B} est $B = xy(1-x)R$, où

$$R = \frac{1-x-2y+y^2-xy}{(1-x-y)\Delta}.$$

En posant de nouveau $x = u^2$ et $y = v^2$, R devient une fraction rationnelle en u , dont la décomposition en éléments simples s'écrit :

$$R = \frac{1}{4} (m(u, v) + m(-u, v) + m(u, -v) + m(-u, -v)) + \frac{1}{2(1-u^2-v^2)},$$

avec maintenant
$$m(u, v) = \frac{1}{2v(1-u-v)}.$$

Ceci permet alors de calculer le coefficient de $x^p y^q$ dans B et mène à la formule annoncée. \square

Remarques. 1) Le premier résultat, lié aux nombres de Narayana, est bien connu. Le troisième a déjà été obtenu par Gessel à partir de l'expression de la série génératrice des polyominos convexes donnée par Chang et Lin, mais par une méthode différente, utilisant des formules qui découlent des propriétés classiques des polynômes de Gegenbauer [Ge]. Les deux autres formules sont nouvelles.

2) La symétrie des trois premières expressions en p et q était prévisible, puisque les paramètres hauteur et largeur ont même distribution sur les polyominos parallélogrammes, convexes dirigés ou convexes. L'absence de symétrie de la dernière expression était d'ailleurs tout aussi prévisible, pour des raisons analogues.

3) Enfin, il est amusant de noter que, d'après le second résultat de la proposition 6.9, le nombre de polyominos convexes dirigés de hauteur et largeur données est toujours un carré. Une preuve bijective de cette formule inattendue reste à trouver.

4) Les valeurs des numérateurs des séries génératrices des polyominos parallélogrammes, convexes dirigés ou convexes de largeur donnée, annoncées dans la proposition 4.12 s'obtiennent au terme de calculs analogues à ceux décrits ci-dessus.

4. DÉRIVÉES RELATIVEMENT A q

En dérivant les six équations du système fournissant la série génératrice Z des polyominos convexes, on peut calculer par récurrence les valeurs de ses dérivées successives par rapport à q , prises en $q=1$. Nous donnons le système d'équations permettant ce calcul, et retrouvons ainsi les valeurs des deux premières dérivées, conjecturées par Enting et Guttmann [En-Gu].

Lemme 6.10. Soit $S(X, Q)$ une série formelle à deux variables X et Q , à coefficients dans un anneau A . Pour $m \geq 0$ et $n \geq 0$, notons

$$\frac{\partial^{m+n} S}{\partial X^m \partial Q^n}$$

les fonctions dérivées partielles par rapport à X et Q . Pour $n \geq 0$, on a :

$$\frac{\partial^n}{\partial q^n} [S(xq, q)] = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i \frac{\partial^n S}{\partial X^i \partial Q^{n-i}}(xq, q).$$

Preuve. Par récurrence sur n . \square

Notations. Le système d'équations de la proposition 6.6 s'écrit :

$$(1-xq)X = xyq + (y+X)X(xq),$$

$$(1-xq)Y = xyq \binom{1}{1} + (y+X)N(q)Y(xq),$$

$$(1-xq)^2 Z = xyq(1-xq) \binom{1}{1}{1} + \mathcal{V} + yM(q)Z(xq),$$

$$\text{avec } \mathcal{Y} = \begin{pmatrix} Y \\ Y_1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Z} = \begin{pmatrix} Z \\ Z_1 \\ Z_3 \end{pmatrix}, \quad N(q) = \begin{pmatrix} 1 & xq \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M(q) = \begin{pmatrix} 1 & 2xq & x^2q^2 \\ 1 & 1+xq & xq \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{et enfin } \mathcal{V} = \frac{2}{y+X} \begin{pmatrix} v^2 \\ vw \\ w^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = (1-xq)\mathcal{Y} - xyq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Etant donnée une série formelle S en x, y et q (resp. un vecteur dont les composantes sont éléments de $\mathbb{R}[[x,y,q]]$), une matrice dont les coefficients sont éléments de $\mathbb{R}[[x,y,q]]$, on notera $S^{m,n}$ pour $\frac{\partial^{m+n} S}{\partial x^m \partial q^n}(x,y,1)$, $S^{(n)}$ pour $\frac{\partial^n S}{\partial q^n}(x,y,1)$, et simplement S pour $S(x,y,1)$.

Remarquons qu'il suffit de connaître $S^{0,n}$ pour calculer les valeurs de $S^{m,n}$, pour $m \geq 1$, par simples dérivations de $S^{0,n}$ par rapport à x .

En utilisant le lemme précédent et la formule de Leibnitz donnant les dérivées multiples d'un produit, on calcule ensuite la dérivée $n^{\text{ième}}$ de chacune des équations ci-dessus. On obtient alors un nouveau système permettant de calculer, pour tout n , la valeur de la dérivée $n^{\text{ième}}$ par rapport à q de la série Z , prise en $q=1$, soit $Z^{0,n}$.

On conviendra que si $m < 0$ ou $n < 0$, $S^{m,n}$ est nul. On notera I_2 (resp. I_3) la matrice identité de dimension deux (resp. trois), et le symbole \mathbb{I}_A désignera la fonction indicatrice de l'événement A .

Proposition 6.11. *Le système suivant permet de calculer $X^{0,n}$, $\mathcal{Y}^{0,n}$ et $\mathcal{Z}^{0,n}$, par récurrence sur $n \geq 1$.*

$$(1-x-y-2X)X^{0,n} = xy\mathbb{I}_{n=1} + nxX^{0,n-1} + (y+X) \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} x^i X^{i,n-i} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^i \binom{n}{i} \binom{i}{j} x^i X^{0,n-i} X^{j,i-j},$$

$$[(1-x)I_2 - (y+X)N]\mathcal{Y}^{0,n} = xy \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbb{I}_{n=1} + nx\mathcal{Y}^{0,n-1} + (y+X)N \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} x^i \mathcal{Y}^{i,n-i} + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^i \binom{n}{i} \binom{i}{j} x^i [X^{0,n-i}N + (n-i)(y+X)^{0,n-1-i} N^{(1)}] \mathcal{Y}^{j,i-j},$$

$$\begin{aligned} [(1-x)^2 I_3 - yM]\mathcal{Z}^{0,n} &= [xy(1-2x)\mathbb{I}_{n=1} - 2x^2y\mathbb{I}_{n=2}] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathcal{V}^{(n)} + 2nx(1-x)\mathcal{Z}^{0,n-1} \\ &- n(n-1)x^2\mathcal{Z}^{0,n-2} + yM \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} x^i \mathcal{Z}^{i,n-i} + nyM^{(1)} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^i \mathcal{Z}^{i,n-1-i} \\ &+ \frac{n(n-1)}{2} yM^{(2)} \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} x^i \mathcal{Z}^{i,n-2-i}, \end{aligned}$$

$$\text{avec } \mathcal{V}^{(n)} = 2 \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i \binom{n}{i} \binom{i}{j} \left(\frac{1}{y+X} \right)^{(n-i)} \begin{pmatrix} v^{(j)} v^{(i-j)} \\ v^{(j)} w^{(i-j)} \\ w^{(j)} w^{(i-j)} \end{pmatrix},$$

$$\left(\frac{1}{y+X} \right)^{(n)} = -\frac{1}{y} \left(x \mathbb{I}_{n-1} + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i X^{i,n-i} \right),$$

$$\text{et enfin } \begin{pmatrix} v^{(m)} \\ w^{(m)} \end{pmatrix} = (1-x) \mathcal{Y}^{0,m} - n x \mathcal{Y}^{0,m-1} - x y \binom{1}{1} \mathbb{I}_{m \geq 1} \text{ pour } m \geq 0.$$

Preuve. Ce système s'obtient en dérivant n fois chacune des équations, et en remplaçant ensuite q par 1. En remarquant que la première équation du système initial peut se mettre sous la forme

$$\frac{1}{y+X} = \frac{1}{y} (1-xq - X(xq)),$$

on parvient à l'écriture ci-dessus pour la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $1/(y+X)$.

Comme $(1-x-y-2X)$ est non nul, et les matrices $[(1-x)I_2 - (y+X)N]$ et $[(1-x)^2 I_3 - yM]$ inversibles, ce système permet effectivement de calculer par récurrence $X^{0,n}$, $\mathcal{Y}^{0,n}$ et $Z^{0,n}$.

On montre alors facilement que, pour tout $n \geq 0$, chaque composante de $Z^{0,n}$ est algébrique, et, plus précisément, s'écrit $\frac{P_0 + P_1 \sqrt{\Delta}}{Q}$, où P_0 , P_1 et Q sont des polynômes en x et y , et $\Delta = 1 - 2x - 2y - 2xy + x^2 + y^2$. □

Nous parvenons ainsi aux résultats suivants, obtenus en programmant le système d'équations précédent sur le logiciel de calcul formel MAPLE.

Proposition 6.12. *La dérivée première par rapport à q de la série génératrice Z des polyominos convexes, prise en $q=1$, est :*

$$\frac{\partial Z}{\partial q}(x, y, 1) = \frac{xyP(x, y)}{\Delta^4} + \frac{4x^2 y^2 (1+x-y)(1-x+y)}{\Delta^{3/2}},$$

avec :

$$P(x, y) = 1 - 6x - 6y + 15x^2 + 15y^2 + 20xy - 20x^3 - 20y^3 - 18x^2y - 18xy^2 \\ + 15x^4 + 15y^4 - 8x^3y - 8xy^3 + 28x^2y^2 - 6x^5 - 6y^5 + 22x^4y + 22xy^4 \\ - 40x^3y^2 - 40x^2y^3 + x^6 + y^6 - 12x^5y - 12xy^5 - 5x^4y^2 - 5x^2y^4 \\ + 64x^3y^3 + 2xy(x-y)^2(x+y)(x^2 + 10xy + y^2) + 2x^2y^2(x-y)^4.$$

En particulier,

$$\frac{\partial Z}{\partial q}(t, t, 1) = \frac{t^2(1-12t+50t^2-76t^3+42t^4-48t^5+32t^6)}{(1-4t)^4} + \frac{4t^4}{(1-4t)^{3/2}},$$

ce qui démontre la première des conjectures d'Enting et Guttmann.

En ce qui concerne la dérivée seconde, nous parvenons à calculer les valeurs préliminaires, à savoir $\mathcal{Y}^{2,0}$, $\mathcal{Y}^{1,1}$, $\mathcal{Y}^{0,2}$, $\mathcal{Z}^{2,0}$ et $\mathcal{Z}^{1,1}$. Toutefois, la puissance de l'ordinateur dont nous disposons actuellement ne nous permet pas de calculer $\mathcal{Z}^{0,2}$. Mais, en remplaçant x et y par t , le calcul est beaucoup plus léger, et nous parvenons à :

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial q^2}(t, t, 1) = 2 \frac{t^3(2 + 5t - 224t^2 + 1306t^3 - 3352t^4 + 4536t^5 - 3424t^6 + 1664t^7 - 512t^8)}{(1-4t)^6} - 2 \frac{t^4(29 - 172t + 356t^2 - 312t^3 + 120t^4)}{(1-4t)^{9/2}}.$$

Ce résultat, sans être aussi précis que le précédent, démontre la seconde des conjectures d'Enting et Guttmann.

Références.

- [Ch-Li] S.J. CHANG, K.Y. LIN, Rigorous results for the number of convex polygons on the square and honeycomb lattices, *J. Phys. A : Math. Gen.* 21 (1988) 2635-2642.
- [De] M.P. DELEST, Generating functions for column-convex polyominoes, *J. Comb. Theor. A* 48 (1988) 12-31.
- [En-Gu] I.G. ENTING, A.J. GUTTMANN, Area-weighted moments of convex polygons on the square lattice, *J. Phys. A : Math. Gen.* 22 (1989) 2639-2642.
- [Ge] I. GESSEL, On the number of convex polyominoes, Preprint 1990.

CHAPITRE 7

RÉSOLUTION DU SYSTÈME

Nous reprenons ici le système de q -équations relatif aux séries génératrices X, Y, Z et B des polyominos parallélogrammes, convexes dirigés, convexes et convexes de \mathfrak{B} obtenu dans le chapitre précédent. Des méthodes itératives, que nous relierons à une notion de q -automate, fournissent des développements en série de Y, Z et B , en fonction de X . Nous interprétons chaque terme de ces développements comme série génératrice de certains polyominos convexes.

Le développement de B est identique à celui obtenu au chapitre 2. D'autre part, en utilisant les résultats du premier chapitre portant sur la série X , le développement de Y permet de retrouver la valeur de la série génératrice des polyominos convexes dirigés de la proposition 2.13. En revanche, l'expression de Z fournie par ces méthodes itératives diffère de celle obtenue dans le second chapitre.

1. q -AUTOMATES

De manière intuitive, un q -automate est un automate (au sens classique) pour lequel les mots w qu'il accepte sont pondérés par un facteur $q^{\theta(w)}$ rendant compte de la somme des "instants" auxquels ont lieu certaines transitions distinguées. Plus précisément :

Définition 7.1. Un q -automate \mathcal{A} est un 6-uplet (E, e, F, A, T, S) , dans lequel :

- E est un ensemble fini non vide, dont les éléments sont appelés *états* de l'automate,
- F est un sous-ensemble non vide de E , dont les éléments sont appelés *états finaux* de \mathcal{A} ,
- e est un élément de E , appelé *état initial* de l'automate,
- A est un alphabet,
- T est un ensemble fini de *transitions*, c'est à dire de triplets (i, j, a) où i et j sont des états, a une lettre de A , et S est un sous-ensemble de T . Les éléments de S sont appelés q -*transitions*.

Définition 7.2. Soit \mathcal{Q} un q -automate. Un chemin ω de \mathcal{Q} de longueur n est une suite (t_1, \dots, t_n) de n transitions de T , telle que $t_k = (i_k, i_{k+1}, a_k)$ pour $1 \leq k \leq n$. On dit que ω va du sommet i_1 au sommet i_{n+1} . On note $u(\omega)$ le mot $a_1 \dots a_n$, et $\theta(\omega)$ l'entier $\sum_{k/i_k \in S} k$, qui est donc la somme des "instants" auxquels ont lieu les q -transitions.

Un mot w de A^* est *accepté* par l'automate \mathcal{Q} s'il existe un chemin ω de \mathcal{Q} tel que, avec les notations ci-dessus, i_1 soit égal à e , i_{n+1} soit élément de F et $w = u(\omega)$.

L'automate \mathcal{Q} est *déterministe* si et seulement si, pour tout couple (i, a) de $E \times A$, il existe au plus un état j tel que (i, j, a) soit élément de T . Alors, pour chaque mot w qu'accepte l'automate, il n'existe qu'un seul chemin ω satisfaisant les conditions ci-dessus.

La q -matrice de transition (en variables non commutatives) associée au q -automate \mathcal{Q} est la matrice carrée

$$\mathfrak{M}(q) = (\mathfrak{M}_{ij})_{(i,j) \in E^2}, \quad \text{où} \quad \mathfrak{M}_{ij} = q \sum_{a/(i,j,a) \in S} a + \sum_{a/(i,j,a) \in T \setminus S} a.$$

Remarquons que la donnée de $\mathfrak{M}(q)$ équivaut à celle de T et S . Cette matrice est à coefficients dans l'anneau $(\mathbb{Z}[q])\langle\langle A \rangle\rangle$ des séries de la forme

$$\sum_{w \in A^*} p_w w,$$

où p_w est un polynôme en q à coefficients dans \mathbb{Z} .

Soit C un ensemble de chemins de \mathcal{Q} . La q -série génératrice formelle (en variables non commutatives) des éléments de C est

$$\sum_{\omega \in C} q^{\theta(\omega)} u(\omega).$$

Notations. Pour $n \geq 1$, on note $\mathfrak{M}^{[n]}$ par la matrice carrée $\mathfrak{M}(q)\mathfrak{M}(q^2)\dots\mathfrak{M}(q^n)$, et on convient que $\mathfrak{M}^{[0]}$ est la matrice identité de même dimension que \mathfrak{M} .

Lemme 7.3. Soit $n \geq 0$, \mathcal{Q} un q -automate et i et j deux états de \mathcal{Q} . La q -série génératrice formelle des chemins de longueur n allant de i à j est $\mathfrak{M}^{[n]}_{ij}$.

Preuve. Ce résultat se montre facilement par récurrence sur n . \square

Lorsque l'automate considéré est déterministe, on peut, de façon analogue, définir la q -série génératrice non commutative d'un ensemble R de mots reconnus par \mathcal{Q} : c'est la série formelle

$$\sum_{w \in R} q^{\theta(w)} w$$

où, pour un mot w donné, ω est le seul chemin permettant de lire w , et $\theta(w) = \theta(\omega)$.

Le lemme ci-dessus peut alors être traduit en un résultat portant sur la q -série génératrice formelle de mots de longueur donnée acceptés par \mathcal{Q} .

Nous considérerons aussi, de façon tout à fait analogue, des automates valués, afin d'obtenir des résultats portant sur des séries formelles en variables commutatives. Soit \mathcal{Q} un q -automate, et v une valuation des transitions de \mathcal{Q} , c'est à dire une application de T dans $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_p]$, où \mathbb{K} est un anneau commutatif et x_1, \dots, x_p sont des indéterminées. La q -matrice de transition (en variables commutatives) de l'automate est alors la matrice carrée

$$M(q) = (M_{ij})_{(i,j) \in E^2}, \quad \text{où } M_{ij} = q \sum_{t \in S} v(t) + \sum_{t \in T \cup S} v(t).$$

La *q-série génératrice (commutative)* d'un ensemble C de chemins de \mathcal{Q} est la série formelle

$$\sum_{\omega \in C} q^{\theta(\omega)} v(\omega),$$

où la valuation d'un chemin ω , notée $v(\omega)$, est le produit des valuations des transitions qui le composent. En notant $M^{[n]}$ la matrice $M(q)M(q^2)\dots M(q^n)$, la *q-série génératrice (commutative)* des chemins de longueur n allant de i à j est $M^{[n]}_{ij}$.

En combinant ces deux remarques, on peut parler, pour un automate valué déterministe, de *q-série génératrice commutative* d'un ensemble de mots acceptés par \mathcal{Q} .

Une valuation adéquate permet généralement d'écrire les produits de matrices de la forme $M(t)M(tq)\dots M(tq^{n-1})$, apparaissant usuellement dans les *q-calculs*, comme une matrice $M^{[n]}$.

Cette notion de *q-automate* devrait s'avérer utile pour la résolution de systèmes de *q-équations aux différences finies*. Nous ne développons pas ici de théorie générale. Nous donnons seulement quelques exemples issus de ce travail, montrant le caractère unificateur de la notion de *q-automate*.

Le premier exemple est lié aux *D-partitions* déjà évoquées dans le premier chapitre (paragraphe 6). Les trois suivants permettent d'interpréter les polynômes T_n et N_n , introduits dans le second chapitre, comme *q-séries génératrices commutatives* de mots reconnus par un *q-automate*. Nous représenterons, de façon classique, les automates par des graphes orientés.

Exemple 1. Soit \mathcal{Q} le *q-automate* défini par $E = \{1, 2\}$, $e = 1$, $F = \{2\}$, valué comme indiqué en figure 7.1 (entre parenthèses), et dont la *q-matrice* de transition $\mathfrak{M}(q)$ est :

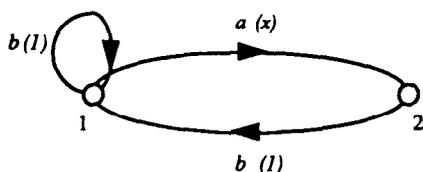


Fig. 7.1 $\mathfrak{M}(q) = \begin{pmatrix} b & qa \\ b & 0 \end{pmatrix}$.

Cet automate est déterministe et accepte tous les mots de $\{a, b\}^*$ sans facteur *aa* et finissant par *a*. Il existe une bijection ϕ entre ces mots et les *D-partitions* (cf. premier chapitre), définie par $\phi(w) = \lambda$, où :

- le mot w s'écrit $b^{n_1} a b^{n_2} a \dots b^{n_k} a$, avec $n_i \geq 0$ et $n_i \geq 1$ pour $2 \leq i \leq k$,
- la *D-partition* λ est $(1 + n_1, 2 + n_1 + n_2, \dots, k + n_1 + \dots + n_k)$.

De plus, $\theta(w)$ est le nombre que partitionne λ , et le nombre d'occurrences de *a* dans w est le nombre de parts de λ . Ces propriétés montrent que la *q-série génératrice (commutative)* des mots reconnus par \mathcal{Q} est

$$\sum_{n \geq 1} \frac{x^n q^{n^2}}{(q)_n}.$$

Exemple 2. Soit \mathcal{Q} le *q-automate* défini par $E = \{1, 2\}$, $e = 1$, $F = \{1, 2\}$, valué comme indiqué sur la figure 7.2, et dont la *q-matrice* de transition $\mathfrak{M}(q)$ est :

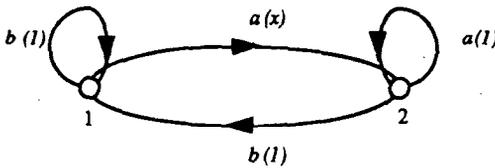


Fig. 7.2 $\mathfrak{M}(q) = \begin{pmatrix} b & qa \\ b & a \end{pmatrix}$.

Cet automate est déterministe et accepte tous les mots de $\{a, b\}^*$. La q -série génératrice commutative de ces mots les énumère suivant leur nombre de séquences de a (compté par x) et la somme des positions des premières occurrences des séquences de a (compté par q). Notons l'analogie de ce second paramètre avec l'indice du Major, défini pour les permutations comme la somme des positions des descentes.

La q -matrice de transition (commutative) de \mathcal{U} est $N(q) = \begin{pmatrix} 1 & qx \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Lemme 7.4. Pour $n \geq 0$, soient α_n et β_n les éléments de $\mathbb{N}[x, q]$ définis par

$$\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix} (x) = N^{[n]} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alors, pour tout $n \geq 0$, $\alpha_n = T_{n+1}$, où les polynômes T_n sont définis en proposition 2.5.

Preuve. D'après le lemme 7.3, le polynôme α_n est la q -série génératrice des mots de $\{a, b\}^*$ de longueur n . On a donc tout d'abord $\alpha_0 = 1$ et $\alpha_1 = 1 + xq$. Pour $n \geq 2$, considérons les mots w de $\{a, b\}^*$ de longueur n . On peut les classer en trois sous-ensembles.

- 1) Le mot w s'écrit $w'b..l$: la q -série génératrice des mots relevant de ce premier cas est α_{n-1} .
- 2) Le mot w s'écrit $w'ba..$: la q -série génératrice des mots relevant de ce second cas est $xq^n \alpha_{n-2}$.
- 3) Le mot w s'écrit $w'aa..$: la q -série génératrice des mots relevant de ce troisième cas est aussi celle des mots de longueur $n-1$ finissant par a , soit, d'après le résultat du cas 1), $\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2}$.

Au total, $\alpha_n = 2\alpha_{n-1} + (xq^n - 1)\alpha_{n-2}$, et ceci démontre le résultat, compte tenu de la définition des polynômes T_n donnée en proposition 2.5. \square

Exemple 3. Nous avons annoncé dans le second chapitre une autre interprétation de T_n comme polynôme énumérateur de certains mots. Nous allons la retrouver ici, en donnant au passage un nouvel exemple de q -automate.

Soit \mathcal{U} le q -automate défini par $E = \{1, 2\}$, $e = 1$, $F = \{1, 2\}$, valué comme indiqué en figure 7.3, et dont la q -matrice de transition $\mathfrak{M}(q)$ est :

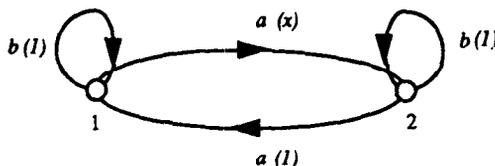


Fig. 7.3 $\mathfrak{M}(q) = \begin{pmatrix} b & qa \\ a & b \end{pmatrix}$.

Cet automate est déterministe et accepte tous les mots de $\{a, b\}^*$. Soit w un de ces mots. Le paramètre $\theta(w)$ vaut $\sum_{i \text{ impair}} p_i$, où p_i est la position de la $i^{\text{ème}}$ occurrence de la lettre a . La q -matrice de transition de \mathcal{U} est de nouveau

$$N(q) = \begin{pmatrix} 1 & qx \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'après le lemme 7.3, la première composante de $N^{[n-1]} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, soit T_n , est la q -série génératrice des mots w de $\{a, b\}^*$ de longueur $n-1$. Elle énumère ces mots suivant les paramètres $\theta(w)$, (compté par q), et $\left\lfloor \frac{|w|_a + 1}{2} \right\rfloor$ (compté par x), où $|w|_a$ désigne le nombre d'occurrences de a dans w et $[r]$ la partie entière du réel r .

En ajoutant à w la lettre finale a (resp. b) si w possède un nombre impair (resp. pair) d'occurrences de a , on parvient à la caractérisation de T_n annoncée dans le second chapitre :

$$T_n = \sum_w x^{\lfloor \frac{|w|_a + 1}{2} \rfloor} q^{\theta(w)},$$

où w décrit l'ensemble des mots de $\{a, b\}^*$ de longueur n ayant un nombre pair d'occurrences de a , et p_i désigne toujours la position dans w de la $i^{\text{ème}}$ occurrence de la lettre a .

Exemple 4. Soit enfin \mathcal{Q} le q -automate défini par $E = \{1, 2\}$, $e = 1$, $F = \{1, 2\}$, valué comme indiqué en figure 7.4, et dont la q -matrice de transition $\mathfrak{M}_b(q)$ est :

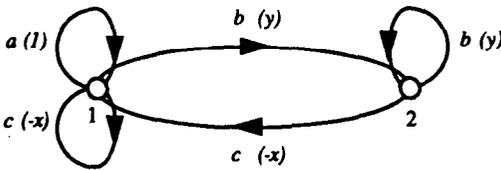


Fig. 7.4 $\mathfrak{M}_b(q) = \begin{pmatrix} a + qc & b \\ qc & b \end{pmatrix}.$

L'ensemble des mots acceptés par \mathcal{Q} (qui est déterministe) est l'ensemble des mots de $\{a, b, c\}^*$ sans facteur ba . Or, il existe une bijection f entre ceux de ces mots qui sont de longueur $n-1$ et les empilements triviaux de segments (cf. chapitre 2) d'encombrement n , telle que, si $f(w) = E$, alors $q^{\theta(wc)} v(wc) = v(E)$, où v est la valuation alternée des empilements triviaux définie dans le second chapitre.

Cette bijection consiste à coder le segment $[i, j]$ par $b^{j-i}c$, et les sommets n'appartenant à aucun segment par la lettre a . La dernière lettre du mot ainsi obtenu, qui est c , est ensuite supprimée (Fig.7.5).

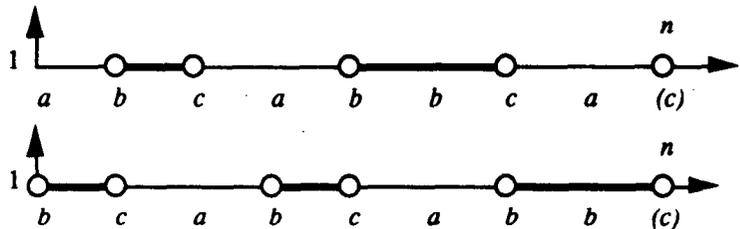


Fig. 7.5

L'existence de cette bijection entraîne que la q -série génératrice (commutative) des mots de longueur $n-1$ acceptés par \mathcal{Q} est le polynôme N_n lié à l'énumération des empilements triviaux de segments (lemme 2.12).

Nous allons maintenant passer à la résolution du système d'équations de la proposition 6.6 proprement dite. Nous écrirons ce système sous la forme suivante :

$$X(x) = \frac{xyq}{1-xq} + \frac{y+X}{1-xq} X(xq),$$

$$\mathcal{Y}(x) = \frac{xyq}{1-xq} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{y+X}{1-xq} N(x)\mathcal{Y}(xq),$$

$$\mathcal{Z}(x) = \frac{xyq}{1-xq} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{y+X} \begin{pmatrix} V^2 \\ VW \\ W^2 \end{pmatrix} + \frac{y}{(1-xq)^2} M(x)\mathcal{Z}(xq),$$

$$\mathcal{B}(x) = \frac{xyq}{1-xq} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{y}{(1-xq)^2} M(x)\mathcal{B}(xq),$$

avec $\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} Y \\ Y_1 \end{pmatrix}, \mathcal{Z} = \begin{pmatrix} Z \\ Z_1 \\ Z_3 \end{pmatrix}, \mathcal{B} = \begin{pmatrix} B \\ B_1 \\ B_3 \end{pmatrix}, N(x) = \begin{pmatrix} 1 & xq \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2xq & x^2q^2 \\ 1 & 1+xq & xq \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Il est facile de vérifier que la valeur de X donnée en proposition 1.10 vérifie la première de ces équations. On peut aussi remarquer que cette équation s'écrit

$$X(x, y) = \frac{xyq + yX(xq, y)}{1-xq - X(xq, y)},$$

où $X(x, y)$ désigne maintenant $X(x, y, q)$.

La série X étant symétrique en x et y , on a de même :

$$X(x, y) = \frac{xyq + xX(x, yq)}{1-yq - X(x, yq)},$$

et, en substituant x par xq dans cette équation, il vient :

$$X(xq, y) = \frac{xyq^2 + xqX(xq, yq)}{1-yq - X(xq, yq)}.$$

En remplaçant, dans la première des ces équations, $X(xq, y)$ par la valeur ci-dessus, on parvient finalement à

$$X(x, y) = \frac{xyq}{1-q(x+y) - X(xq, yq)},$$

dont on déduit le développement en fraction continue de X donné dans le corollaire 1.16.

2. POLYOMINOS CONVEXES DIRIGÉS

Notations. Soit $S(x, y, q)$ une série formelle de $\mathbb{R}[[x, y, q]]$ (ou une matrice carrée à coefficients dans $\mathbb{R}[[x, y, q]]$).

Soit $S^{[0]} = 1$ (ou la matrice identité de même dimension que S si S est une matrice), et, pour $n \geq 1$, soit

$$S^{[n]} = S(x)S(xq)\dots S(xq^{n-1}),$$

où on note $S(xq^i)$ pour $S(xq^i, y, q)$.

Remarquons que, pour la matrice $N = \begin{pmatrix} 1 & xq \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, on a l'identité $N^{[n]} = N^{[n]}$, où la notation $N^{[n]}$ est celle utilisée dans le premier paragraphe de ce chapitre, pour tout $n \geq 0$.

Considérons alors l'équation en \mathcal{Y} ci-dessus. Elle exprime $\mathcal{Y}(x)$ en fonction de $\mathcal{Y}(xq)$. En remplaçant x par xq , on obtient donc une expression de $\mathcal{Y}(xq)$ en fonction de $\mathcal{Y}(xq^2)$. On peut alors, dans l'équation initiale portant sur $\mathcal{Y}(x)$, substituer $\mathcal{Y}(xq)$ par cette valeur. En répétant ce procédé, on aboutit au résultat suivant : pour $n \geq 1$,

$$\mathcal{Y}(x) = \left(\sum_{m=1}^n \frac{xyq^m (y+X)^{[m-1]}}{(xq)_m} N^{[m-1]} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{(y+X)^{[n]}}{(xq)_n} N^{[n]} \mathcal{Y}(xq^n).$$

Or la série $(y+X)$ est sans coefficient constant. Donc la suite des $(y+X)^{[n]}$ tend formellement vers zéro lorsque n tend vers l'infini. Par passage à la limite sur n , on obtient finalement la proposition suivante :

Proposition 7.5. La valeur du vecteur $\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} Y \\ Y_1 \end{pmatrix}$ est :

$$\mathcal{Y}(x) = \sum_{m \geq 1} \frac{xyq^m (y+X)^{[m-1]}}{(xq)_m} N^{[m-1]} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nous allons maintenant nous intéresser aux séries $(y+X)^{[n]}$, afin d'interpréter ce développement, qui permettra ensuite de retrouver la valeur de Y obtenue au chapitre 2.

Lemme 7.6. Soit $m \geq 1$. La série $xyq^m (y+X)^{[m]}$ est la série génératrice des polyominos parallélogrammes de hauteur à gauche m , comptés suivant la largeur (par x), la hauteur (par y) et l'aire (par q).

Preuve. Reprenons le codage g défini dans le chapitre 6, qui envoie bijectivement les polyominos parallélogrammes sur les mots de Dyck.

Un polyomino parallélogramme P est de hauteur à gauche m si et seulement si le premier pic de $g(P)$ est de hauteur m . Le mot $g(P)$ admet alors une unique factorisation de la forme

$x^m \bar{x} u_1 \bar{x} u_2 \bar{x} \dots \bar{x} u_m$, où u_1, u_2, \dots, u_m sont soit vides, soit des mots de Dyck.

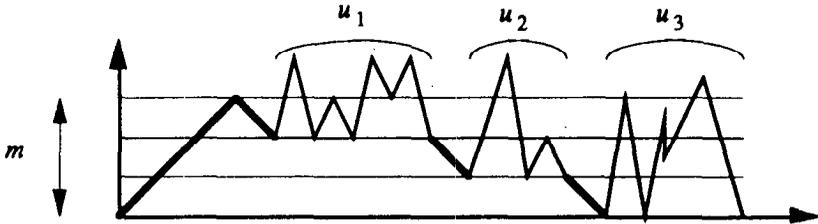


Fig. 7.6 Mot de Dyck dont le premier pic est de hauteur $m = 3$.

En reprenant les notations du chapitre 6, la série génératrice de ces mots, comptés suivant la longueur (par t), le nombre de pics (par x) et la somme des hauteurs des pics (par q) est donc

$$t^{2m} x q^m (1 + D(x))(1 + D(xq)) \dots (1 + D(xq^{m-1})), \text{ soit } xq^m (t^2 + t^2 D)^{[m]}.$$

D'après la proposition 6.3, la série génératrice des polyomino parallélogrammes de hauteur à gauche m , comptés suivant le périmètre (par t), la largeur (par x) et l'aire (par q) est alors $t^2 x q^m (t^2 + t^2 D)^{[m]}$. Le changement de variables $(t^2, x) \rightarrow (y, x/y)$ fournit la série génératrice de ces objets comptés suivant les trois paramètres usuels (largeur, hauteur, aire) sous la forme $xq^m (y + X)^{[m]}$, ce qui achève la preuve. \square

Mais nous disposons d'une autre expression pour la série génératrice des polyomino parallélogrammes de hauteur à gauche m (proposition 2.7), qui permet d'explicitier $(y + X)^{[m]}$.

Corollaire 7.7. On a l'identité suivante :

$$(y + X)^{[m]} = y^m \frac{N(xq^m)}{N(x)},$$

où
$$N(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^n q^{\binom{n+1}{2}}}{(q)_n (yq)_n}.$$

Compte tenu de la proposition 7.5 et des lemmes 7.4 et 7.6, la série génératrice des polyomino convexes dirigés, qui est la première composante du vecteur \mathcal{Y} , s'écrit :

$$Y(x) = \sum_{m \geq 1} yq \left(xq^{m-1} (y + X)^{[m-1]} \right) \frac{T_m}{(xq)_m},$$

où, pour $m \geq 1$, $xq^{m-1} (y + X)^{[m-1]}$ est la série génératrice des polyomino parallélogrammes de hauteur à gauche $m-1$.

(Par commodité, on convient ici que le polyomino parallélogramme vide a une colonne).

Soit P un polyomino convexe dirigé à k colonnes, notées, de gauche à droite, C_1, \dots, C_k . Soit i le plus grand entier tel que le polyomino formé des colonnes C_1, \dots, C_i soit un polyomino tas. Ce polyomino sera noté P_2 et appelé *polyomino tas maximal* de P .

Le polyomino formé des colonnes C_i, \dots, C_k est un polyomino parallélogramme. En supprimant la cellule inférieure de C_i , on obtient un nouveau polyomino parallélogramme P_1

(éventuellement vide), appelé *polyomino parallélogramme minimal* de P (Fig.7.7). L'application d définie par $d(P) = (P_1, P_2)$ envoie bijectivement les polyominos convexes dirigés dont le polyomino tas maximal est de hauteur m sur les couples formés d'un polyomino parallélogramme P_1 de hauteur à gauche $m-1$ et d'un polyomino tas P_2 de hauteur m .

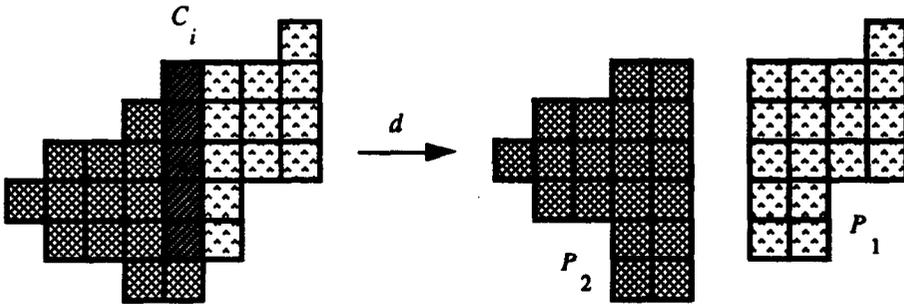


Fig. 7.7 Décomposition d'un polyomino convexe dirigé.

De plus :

- la hauteur de P est celle de P_1 , augmentée de un,
- la largeur de P est la somme de celles de P_1 et P_2 , diminuée de un,
- l'aire de P est la somme de celles de P_1 et P_2 , diminuée de $m-1$.

Or, la série génératrice des polyominos tas de hauteur m est $xy^m q^m T_m / (xq)_m$ (Proposition 2.5).

Celle des polyominos parallélogrammes de hauteur à gauche $m-1$ étant $xq^{m-1} (y + X)^{|m-1|}$, on peut donner l'interprétation combinatoire suivante du développement de Y :

Proposition 7.8. Dans le développement $Y(x) = \sum_{m \geq 1} xyq^m (y + X)^{|m-1|} \frac{T_m}{(xq)_m}$ de la série génératrice Y des polyominos convexes dirigés, le coefficient énumère ceux d'entre eux dont le polyomino tas maximal est de hauteur m .

Remarques. 1) Pour calculer, dans le chapitre 2, la série génératrice des polyominos convexes dirigés, nous nous sommes appuyés sur un "découpage" des polyominos différent : il consistait à isoler non pas le plus grand, mais le plus petit polyomino tas. Mais nous aurions aussi bien pu choisir la décomposition qui vient d'être décrite.

2) En utilisant le corollaire 7.7 exprimant $(y + X)^{|m|}$, on peut d'ailleurs effectuer un calcul tout à fait analogue à celui de la preuve de la proposition 2.13 fournissant la valeur de Y ; on retrouve ainsi l'expression de Y donnée par cette proposition.

3. POLYOMINOS CONVEXES DE \mathfrak{B}

On procède de nouveau par des itérations, en exprimant le vecteur $\mathfrak{B}(x)$ en fonction de $\mathfrak{B}(xq^n)$. Par passage à la limite en n , on obtient la proposition suivante :

Proposition 7.9. La valeur du vecteur $\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} B \\ B_1 \\ B_3 \end{pmatrix}$ est :

$$\mathfrak{B}(x) = \sum_{m \geq 1} \frac{xy^m q^m}{(xq)_{m-1} (xq)_m} M^{[m-1]} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'interprétation combinatoire de ce développement est ici évidente : les coefficients de M étant des polynômes en x et q , la première composante du vecteur

$$\frac{xy^m q^m}{(xq)_{m-1} (xq)_m} M^{[m-1]} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

est la série génératrice des polyominos de \mathfrak{B} de hauteur m .

Or, nous disposons déjà d'une expression de cette série génératrice, obtenue en proposition 2.19 : elle vaut

$$\frac{xy^m q^m (T_m)^2}{(xq)_{m-1} (xq)_m}.$$

Comment s'explique le lien entre les matrices $M^{[m]}$ et les polynômes T_m ?

Les matrices $M^{[m]}$ possèdent une remarquable propriété, qui les lie d'ailleurs aux matrices $N^{[m]}$ apparaissant dans le développement de la série génératrice des polyominos convexes dirigés.

Lemme 7.10. Soient V_0 et W_0 deux séries formelles de $\mathbb{R}[[x, y, q]]$.

Soit $\mathcal{V}_0(x)$ le vecteur $\begin{pmatrix} V_0^2 \\ V_0 W_0 \\ W_0^2 \end{pmatrix}(x)$. Pour $m \geq 0$, on définit $\mathcal{V}_m(x) = M^{[m]} \mathcal{V}_0(xq^m)$.

Alors, pour tout $m \geq 0$, il existe deux séries formelles de $\mathbb{R}[[x, y, q]]$, notées V_m et W_m , telles que

$$\mathcal{V}_m(x) = \begin{pmatrix} V_m^2 \\ V_m W_m \\ W_m^2 \end{pmatrix}(x).$$

De plus, ces deux séries se déduisent de V_0 et W_0 par

$$\begin{pmatrix} V_m \\ W_m \end{pmatrix}(x) = N^{[m]} \begin{pmatrix} V_0 \\ W_0 \end{pmatrix}(xq^m), \text{ où } N(x) = \begin{pmatrix} 1 & xq \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Preuve. Ce résultat se montre sans difficulté par récurrence sur n . \square

En l'appliquant au cas particulier où $V_0 = W_0 = 1$, il prouve que

$$M^{[m-1]} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{m-1}^2 \\ \alpha_{m-1} \beta_{m-1} \\ \beta_{m-1}^2 \end{pmatrix} (x), \quad \text{où} \quad \begin{pmatrix} \alpha_m \\ \beta_m \end{pmatrix} (x) = N^{[m]} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les polynômes α_m et β_m sont ceux qui apparaissent dans le développement du vecteur \mathcal{Y} . Nous avons montré dans le lemme 7.4 que $\alpha_m = T_{m+1}$, ce qui permet de lier les matrices $M^{[m]}$ et les polynômes T_m et de retrouver le résultat de la proposition 2.19.

Nous réutiliserons ce lemme dans l'étude du développement de la série Z .

4. POLYOMINOS CONVEXES

Par des méthodes itératives analogues à celles déjà utilisées pour développer \mathcal{Y} et \mathcal{B} , on obtient la proposition suivante :

Proposition 7.11. La valeur du vecteur $Z = \begin{pmatrix} Z \\ Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}$ est :

$$Z(x) = \sum_{m \geq 1} \frac{xy^m q^m}{(xq)_{m-1} (xq)_m} M^{[m-1]} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \sum_{m \geq 0} \frac{y^m}{(xq)_m^2 (y + X(xq^m))} M^{[m]} \begin{pmatrix} V^2 \\ VW \\ W^2 \end{pmatrix} (xq^m).$$

On reconnaît, dans la première série, la valeur du vecteur \mathcal{B} (Proposition 7.9). Comme la série génératrice des polyominos convexes est $Z = 2A - B$, on peut alors affirmer que la première composante du vecteur

$$\sum_{m \geq 0} \frac{y^m}{(xq)_m^2 (y + X(xq^m))} M^{[m]} \begin{pmatrix} V^2 \\ VW \\ W^2 \end{pmatrix} (xq^m)$$

est la série génératrice des polyominos de $\mathcal{Q} \setminus \mathcal{B}$, c'est à dire des polyominos de \mathcal{Q} qui ne sont pas dans \mathcal{B} .

Par ailleurs, on se trouve ici dans le cadre d'application du lemme 7.10, ce qui fournit l'expression suivante pour la série génératrice des polyominos de $\mathcal{Q} \setminus \mathcal{B}$.

Proposition 7.12. La série génératrice des polyominos de $\mathcal{Q} \setminus \mathcal{B}$ est :

$$\sum_{m \geq 0} \frac{y^m V_m^2}{(xq)_m^2 (y + X(xq^m))}$$

où, pour $m \geq 0$, on définit les deux séries V_m et W_m par $\begin{pmatrix} V_m \\ W_m \end{pmatrix} (x) = N^{[m]} \begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix} (xq^m)$.

Nous allons maintenant interpréter combinatoirement ce développement. De nouveau, on considère la décomposition d des polyominos convexes dirigés décrite ci-dessus, consistant à isoler le polyomino tas maximal. On désigne par (P_1, P_2) l'image par d d'un polyomino convexe dirigé P .

Lemme 7.13. Soit $m \geq 0$.

(i) La série $\frac{y^m V_m}{(xq)_m}$ est la série génératrice des polyominos convexes dirigés P vérifiant les deux conditions suivantes :

- (a) le polyomino tas maximal P_2 de P est de hauteur supérieure ou égale à $m+2$,
- (b) deux colonnes consécutives quelconques de P_1 sont en contact par $m+1$ cellules au moins.

(ii) La série $\frac{y^{m+1} V_m}{(xq)_m (y + X(xq^m))}$ est la série génératrice des polyominos convexes dirigés P vérifiant les deux conditions suivantes :

- (a') le polyomino tas maximal P_2 de P est de hauteur supérieure ou égale à $m+2$,
- (b') deux colonnes consécutives quelconques de P_1 sont en contact par $m+2$ cellules au moins.

Preuve. Rappelons que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix}(x) &= \mathfrak{Y}(x) - \frac{xyq}{1-xq} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ &= \frac{y+X}{1-xq} N \mathfrak{Y}(xq), \end{aligned} \quad \text{d'après l'équation portant sur } \mathfrak{Y}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} V_m \\ W_m \end{pmatrix}(x) &= N^{[m]} \begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix}(xq^m), \\ &= \frac{y+X(xq^m)}{1-xq^{m+1}} N^{[m+1]} \mathfrak{Y}(xq^{m+1}). \end{aligned}$$

D'autre part, nous avons vu que, au terme de m itérations de l'équation en \mathfrak{Y} , on obtient :

$$\mathfrak{Y}(x) = \left(\sum_{n=1}^{m+1} \frac{xyq^n (y+X)^{[n-1]}}{(xq)_n} N^{[n-1]} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{(y+X)^{[m+1]}}{(xq)_{m+1}} N^{[m+1]} \mathfrak{Y}(xq^{m+1}).$$

Au vu de l'interprétation de ce développement donnée en proposition 7.8, on peut donc affirmer que

$$\frac{(y+X)^{[m+1]}}{(xq)_{m+1}} N^{[m+1]} \mathfrak{Y}(xq^{m+1}) = \frac{(y+X)^{[m]}}{(xq)_m} V_m(x)$$

est la série génératrice des polyominos convexes dirigés dont le tas maximal est de hauteur supérieure ou égale à $m+2$.

Soit donc Q un polyomino convexe dirigé dont le tas maximal est de hauteur supérieure ou égale à $m+2$. Nous allons le décomposer en un polyomino convexe dirigé P vérifiant les conditions (a) et (b) (resp. (a') et (b')) du lemme, et un polyomino parallélogramme P' de hauteur à gauche m (resp. $m+1$).

En effet, notons C_1, \dots, C_k les colonnes du polyomino parallélogramme minimal de Q . Pour $2 \leq i \leq k$, soit a_i le nombre de cellules par lesquelles les colonnes C_{i-1} et C_i sont en contact, et posons $a_{k+1} = m$. Soit j le plus petit entier tel que a_j soit inférieur ou égal à m (resp. $m+1$).

La colonne C_{j-1} est alors de hauteur supérieure ou égale à $m+1$ (resp. $m+2$).

Soit P le polyomino obtenu en privant Q des colonnes C_j, \dots, C_k . Ce polyomino vérifie les conditions (a) et (b) (resp. (a') et (b')) du lemme.

Soit P' le polyomino parallélogramme formé des colonnes C_j, \dots, C_k et des m (resp. $m+1$) cellules supérieures de C_{j-1} . La hauteur à gauche de P' est m (resp. $m+1$).

L'application γ définie par $\gamma(Q) = (P, P')$ est une bijection entre les polyominos convexus dirigés dont le tas maximal est de hauteur supérieure ou égale à $m+2$ et les couples formés d'un polyomino convexe dirigé P vérifiant les conditions (a) et (b) (resp. (a') et (b')), et d'un polyomino parallélogramme P' de hauteur à gauche m (resp. $m+1$).

De plus :

- la largeur de Q est la somme de celles de P et P' , diminuée de un,
- la hauteur de Q est la somme de celles de P et P' , diminuée de m (resp. $m+1$),
- l'aire de Q est la somme de celles de P et P' , diminuée de m (resp. $m+1$).

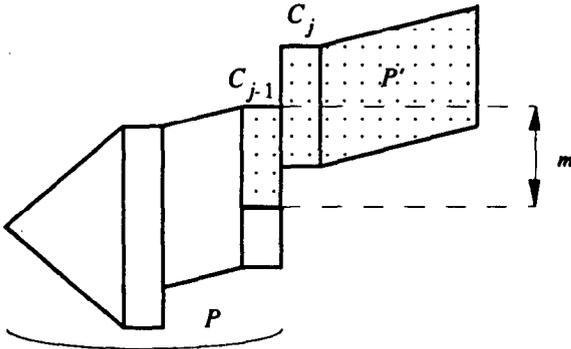


Fig. 7.8
La décomposition γ .

Or, la série génératrice des polyominos parallélogrammes de hauteur à gauche m est $xq^m (y + X)^{\lfloor m \rfloor}$ (lemme 7.6) et celle des polyominos convexus dirigés dont le tas maximal est de hauteur supérieure ou égale à $m+2$ est

$$\frac{(y + X)^{\lfloor m \rfloor}}{(xq)_m} V_m(x).$$

Donc celle des polyominos convexus dirigés vérifiant les conditions (a) et (b) (resp. (a') et (b'))

du lemme sera $\frac{y^m V_m}{(xq)_m}$ (resp. $\frac{y^{m+1} V_m}{(xq)_m (y + X(xq^m))}$). \square

Nous allons désormais pouvoir interpréter chaque terme du développement donné dans la proposition 7.12.

Soit P un polyomino convexe de $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{B}$ à k colonnes, notées, de gauche à droite, C_1, \dots, C_k . Soit i le plus grand entier tel que le polyomino formé des colonnes C_1, \dots, C_i soit un polyomino tas. Soit j le plus petit entier tel que le polyomino formé des colonnes C_j, \dots, C_k soit un polyomino

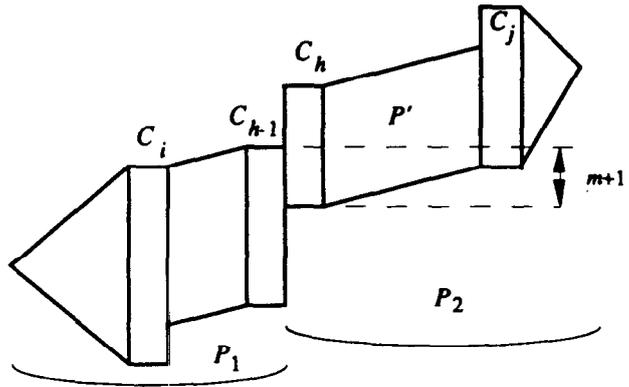
tas. Alors $1 \leq i < j \leq k$. Le polyomino formé des colonnes C_i, \dots, C_j est un polyomino parallélogramme. En supprimant la cellule inférieure de C_i et la cellule supérieure de C_j , on obtient un nouveau polyomino parallélogramme, ayant au moins deux colonnes, que l'on appellera *polyomino parallélogramme minimal* de P .

Pour $i+1 \leq n \leq j$, soit a_n le nombre de cellules par lesquelles les colonnes C_{n-1} et C_n sont en contact. Soit enfin $m+1 = \min \{a_n, i+1 \leq n \leq j\}$ et $h = \max \{n / a_n = m+1\}$.

Alors, le polyomino P_1 formé des colonnes C_1, \dots, C_{h-1} est un polyomino convexe dirigé vérifiant les conditions (a) et (b) du lemme 7.13 ci-dessus.

Le polyomino P_2 formé des colonnes C_h, \dots, C_k est un polyomino convexe dirigé vérifiant les conditions (a') et (b') du lemme 7.13.

Fig. 7.9
Décomposition d'un polyomino de \mathcal{Q}/\mathcal{B} .



De plus :

- la largeur de P est la somme de celles de P_1 et P_2 ,
- la hauteur de P est somme de celles de P_1 et P_2 , diminuée de $m+1$,
- l'aire de P est la somme de celles de P_1 et P_2 .

Avec les notations ci-dessus, la transformation qui associe à P le couple (P_1, P_2) est une bijection entre les polyominos de \mathcal{Q}/\mathcal{B} tels que $\min \{a_n\} = m+1$ et les couples formés d'un polyomino P_1 vérifiant les conditions (a) et (b) du lemme 7.13 et d'un polyomino P_2 vérifiant les conditions (a') et (b').

On déduit du lemme 7.13 l'interprétation suivante pour le développement donné en proposition 7.12 :

Proposition 7.14. Dans le développement $\sum_{n \geq 0} \frac{y^n V_n^2}{(xq)_n^2 (y + X(xq^n))}$ de la série génératrice

des polyominos convexes de \mathcal{Q}/\mathcal{B} , le coefficient énumère ceux tels que le nombre minimal de cellules en commun entre deux colonnes consécutives du polyomino parallélogramme minimal soit $m+1$.

Remarque. Comme c'était déjà le cas pour les polyominos convexes dirigés, le "découpage" du polyomino convexe sous-jacent au développement déduit du système d'équations est différent de celui que nous avons utilisé au chapitre 2 pour calculer la série génératrice des polyominos convexes : celui-ci consistait à isoler un "gros" polyomino parallélogramme et deux "petits" polyominos tas, tandis qu'ici le polyomino convexe se divise en deux polyominos convexes dirigés.

Pour finir, nous allons utiliser les résultats des chapitres 1 et 2 pour expliciter les séries V_m , et donc ce nouveau développement.

Lemme 7.15. Soit $m \geq 1$. La série génératrice des polyominos tas de hauteur supérieure ou égale à $m+1$, comptés suivant la largeur, la hauteur et l'aire, par x, y et q respectivement, est :

$$T_{2m+1}(x, y, q) = \frac{y^{m+1}}{(xq)_m} (T_{m+1} \bar{T}(xq^m) - y T_m \bar{T}(xq^{m+1})),$$

où T_m est le polynôme défini en proposition 2.5 par la récurrence :

$$T_0 = 1, T_1 = 1,$$

$$T_n = 2T_{n-1} + (xq^{n-1} - 1)T_{n-2}, \text{ pour } n \geq 2,$$

et
$$\bar{T}(x) = \sum_{i \geq 1} \frac{x^i q^i}{(yq)_i^2}.$$

Preuve. Considérons un polyomino tas de hauteur supérieure ou égale à $m+1$, à k colonnes, notées, de gauche à droite, C_1, \dots, C_k . Soit h le plus petit entier tel que C_h soit de hauteur supérieure ou égale à $m+1$ (Fig. 7.10). Distinguons deux cas :

Premier cas. La différence entre la base de C_h et le sommet de C_{h-1} est inférieure ou égale à m (Fig.7.10), ou $h = 1$.

Soit alors P_1 le polyomino tas formé des colonnes C_h, \dots, C_k . Toutes ses colonnes sont de hauteur supérieure ou égale à $m+1$.

Soit P_2 le polyomino tas formé des colonnes C_1, \dots, C_{h-1} et des m cellules inférieures de C_h : le polyomino P_2 est un polyomino tas de hauteur m .

Le polyomino P s'obtient par superposition de P_1 et P_2 .

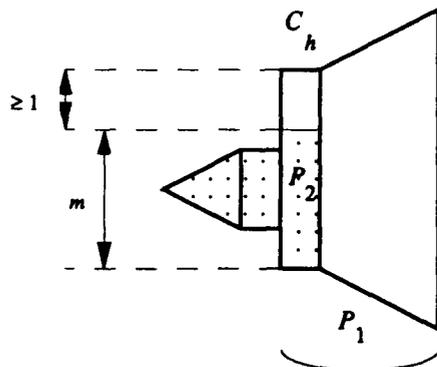


Fig. 7.10
Premier cas de la preuve
du lemme 7.15.

Or, la série génératrice des polyominos tas dont toutes les colonnes sont de hauteur supérieure ou égale à $m+1$ est

$$y^m T(xq^m) \quad \text{où} \quad T(x) = \sum_{i \geq 1} \frac{x^i y q^i}{(yq)_{i-1} (yq)_i}$$

est la série génératrice des polyominos tas.

Celle des polyominos tas de hauteur m est (proposition 2.5)

$$\frac{xy^m q^m T_m}{(xq)_m}$$

Donc celle des polyominos tas relevant de ce premier cas est

$$\frac{y^m T_m}{(xq)_m} T(xq^m)$$

Deuxième cas. La différence entre la base de C_h et le sommet de C_{h-1} est supérieure ou égale à $m+1$ (Fig.7.11) et $h \geq 2$.

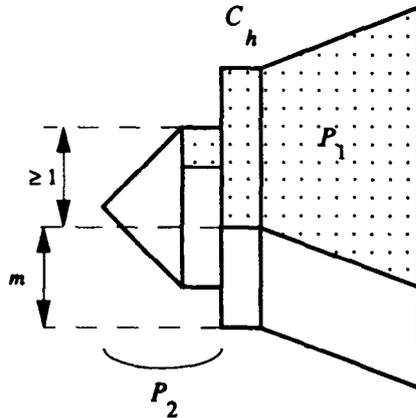
Le polyomino tas P_2 formé des colonnes C_1, \dots, C_{h-1} est de hauteur inférieure ou égale à m . D'après le corollaire 2.6, la série génératrice de ces objets, comptés suivant la largeur (par x) et l'aire (par q) est $U_m / (xq)_m$, où $U_m = T_{m+1} - T_m$.

Soit d'autre part P_1 le polyomino tas obtenu en supprimant les m cellules inférieures des colonnes C_h, \dots, C_k et en conservant la cellule supérieure de C_{h-1} . Alors P_1 est un polyomino tas à deux colonnes au moins, dont la première est réduite à une case. La série génératrice de ces objets est

$$\sum_{i \geq 2} \frac{x^i y q^i}{(yq)_{i-1}^2}$$

(Ce résultat s'obtient en considérant ces polyominos comme superposition de deux diagrammes de Ferrers, cf. lemme 2.4).

Fig. 7.11
Second cas de la preuve du lemme 7.15.



Le polyomino P s'obtient alors en ajoutant m cases à chacune des colonnes de P_1 , hormis la première, et en superposant ensuite P_1 et P_2 , de telle sorte que l'unique cellule de la première colonne de P_1 coïncide avec la cellule supérieure de la dernière colonne de P_2 .

La série génératrice des polyominos tas relevant de ce second cas est donc

$$\frac{1}{xq} \frac{U_m}{(xq)_m} \sum_{i \geq 2} \frac{x^i y^{m+1} q^{m(i-1)} q^i}{(yq)_{i-1}^2}$$

soit encore

$$\frac{y^{n+1}}{(xq)_n} (T_{m+1} - T_m) \bar{T}(xq^m),$$

où \bar{T} est la fonction définie dans le lemme.

Le résultat s'obtient en regroupant les deux cas. \square

Proposition 7.16. *Le développement de la série génératrice des polyominos de $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{B}$ induit par le système d'équations (proposition 7.12) s'écrit encore*

$$\sum_{n \geq 1} \frac{y^{m+2}}{(xq)_n^2 N(xq^{n-1}) N(xq^n)} (T_{m+1} S(xq^n) - y T_m S(xq^{m+1}))^2,$$

$$\text{où } N(x) = \sum_{j \geq 0} \frac{(-1)^j x^j q^{\binom{j+1}{2}}}{(q)_j (yq)_j}, \quad S(x) = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{x^n q^n}{(yq)_n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j q^{\binom{j}{2}}}{(q)_j (yq^{j+1})_{n-j}} \right),$$

et les polynômes T_m sont définis par la récurrence

$$T_0 = 1, T_1 = 1,$$

$$T_n = 2T_{n-1} + (xq^{n-1} - 1)T_{n-2}, \text{ pour } n \geq 2.$$

Preuve. La série génératrice des polyominos de $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{B}$ est, d'après la proposition 7.12 :

$$\sum_{m \geq 0} \frac{y^m V_m^2}{(xq)_m^2 (y + X(xq^m))}$$

où $\frac{(y+X)^{[m]}}{(xq)_m} V_m(x)$ est la série génératrice des polyominos convexes dirigés dont le tas maximal est de hauteur supérieure ou égale à $m+2$.

D'après la proposition 7.8 et le corollaire 7.7, cette série s'écrit aussi :

$$\sum_{i \geq m+2} \frac{xy^i q^i T_i}{(xq)_i} \frac{N(xq^{i-1})}{N(x)},$$

soit encore, compte tenu de la valeur de N , de l'interprétation des polynômes T_m et après inversion de l'ordre des sommations :

$$\frac{1}{N(x)} \sum_{j \geq 0} \frac{(-1)^j x^j q^{\binom{j}{2}}}{(q)_j (yq)_j} T_{2m+2}(x, yq^j, q).$$

En utilisant l'expression de T_{2m+2} déduite du lemme 7.15, il vient

$$\frac{(y+X)^{[m]}}{(xq)_m} V_m = \frac{y^{m+2}}{(xq)_{m+1} N(x)} \sum_{i \geq 1, j \geq 0} \frac{(-1)^j x^{i+j} q^{\binom{j}{2}} q^{(m+2)(i+j)}}{(q)_j (yq)_{i+j} (yq^{j+1})_i} (T_{m+2} - yq^{i+j} T_{m+1}),$$

et le changement de variables $(i+j, j) \rightarrow (n, j)$ mène ensuite à

$$\frac{(y+X)^{[m]}}{(xq)_m} V_m = \frac{y^{m+2}}{(xq)_{m+1} N(x)} (T_{m+2} S(xq^{m+1}) - y T_{m+1} S(xq^{m+2})),$$

où S est la fonction définie dans la proposition ci-dessus.

Mais, d'après le corollaire 7.7, $(y + X)^{[m]} = y^m \frac{N(xq^m)}{N(x)}$.

Donc
$$\frac{V_m}{(xq)_m} = \frac{y^2}{(xq)_{m+1} N(xq^m)} (T_{m+2} S(xq^{m+1}) - y T_{m+1} S(xq^{m+2})).$$

De même,

$$\begin{aligned} \frac{V_m}{(xq)_m (y + X(xq^m))} &= \frac{(y + X)^{[m]} V_m}{(y + X)^{[m+1]} (xq)_m} \\ &= \frac{y^2}{(xq)_{m+1} N(xq^{m+1})} (T_{m+2} S(xq^{m+1}) - y T_{m+1} S(xq^{m+2})). \end{aligned}$$

La proposition 7.16 se déduit finalement de ces deux résultats. \square

Nous pouvons maintenant regrouper les résultats de cette proposition et de la proposition 2.19 pour obtenir une nouvelle expression de la série génératrice des polyominos convexes.

Proposition 7.17. *La série génératrice Z des polyominos convexes s'écrit :*

$$Z = 2 \sum_{m \geq 1} \frac{y^{m+2}}{(xq)_m^2 N(xq^{m-1}) N(xq^m)} (T_{m+1} S(xq^m) - y T_m S(xq^{m+1}))^2 + \sum_{m \geq 1} \frac{xy^m q^m (T_m)^2}{(xq)_{m-1} (xq)_m},$$

où les séries S et N et les polynômes T_m sont définis dans la proposition ci-dessus.

CHAPITRE 8

NOMBRES DE CATALAN ET PERCOLATION DIRIGÉE

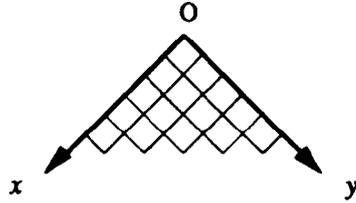
Nous démontrons dans ce chapitre trois conjectures de Baxter et Guttmann, relatives au problème ouvert de la percolation dirigée sur réseau carré, et faisant curieusement intervenir les nombres de Catalan. Nous expliquons l'apparition de ces nombres en reliant cette étude à l'énumération de certaines figures, voisines des polyominoes parallélogrammes.

1. PERCOLATION DIRIGÉE SUR RÉSEAU CARRÉ

La percolation (dirigée ou non) est un thème très étudié en physique, par exemple comme modélisation de polymères, ou de réseaux poreux. Grossièrement, le problème est le suivant : étant donné un réseau géométrique infini dont les arêtes ont une probabilité p d'être *passantes*, $1-p$ d'être *non passantes*, quelle est la probabilité pour qu'il existe un *amas infini*, c'est à dire un ensemble infini et connexe d'arêtes passantes? On dit qu'il y a percolation lorsque cet amas existe. Dans le cas d'une percolation *dirigée*, des conditions sont imposées sur l'orientation des arêtes de l'amas.

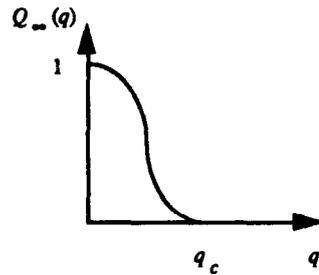
Cette description correspond à une percolation dite *de liens* ; on peut définir de manière analogue une percolation *de sites*, en considérant les sommets plutôt que les arêtes du réseau.

Dans le cas de la percolation dirigée sur le réseau carré infini \mathcal{Z} (Fig.8.1) étudiée par Baxter et Guttmann [Ba-Gu], mais aussi Bleas [Bl], Kinzel [Ki], Essam et De'Bell [Es-De], Essam, De'Bell et Guttmann [Es-De-Gu], on peut concevoir le problème dans les termes suivants : un fluide circule sur le réseau, de haut en bas, depuis l'*origine* O , en empruntant seulement des *arêtes passantes*. L'état des arêtes est régi par la loi suivante : une arête a est passante avec la probabilité p , non passante avec la probabilité $q = 1-p$, son état étant indépendant de celui des autres arêtes. Il y a *percolation* lorsque le fluide peut se propager à l'infini, ou encore lorsqu'il n'est arrêté à aucun *niveau*. Le problème est alors le calcul de la probabilité de percolation.

Fig. 8.1 Le réseau \mathfrak{B} .

Cette probabilité, notée Q_- , est une fonction décroissante de q . Certaines expériences, portant sur des systèmes physiques que ce modèle est censé représenter, ont permis de supposer que la forme de cette fonction est la suivante.

Fig. 8.2
La probabilité de percolation.



En particulier, il existe une valeur q_c , appelée *probabilité critique*, au delà de laquelle il n'y a jamais percolation. En effet, lorsque q vaut un, toutes les arêtes sont non passantes et il ne peut évidemment pas y avoir percolation. L'objectif de Baxter et Guttmann est d'obtenir l'approximation la plus fine possible de q_c .

Les valeurs de la probabilité de percolation et de q_c ne sont pas connues de façon explicite. Toutes les méthodes utilisées à ce jour pour les évaluer sont numériques. Le travail de Baxter et Guttmann fournit les 41 premiers termes du développement en série entière en zéro de Q_- , alors que, jusque là, seuls les 8 premiers termes étaient connus (Blease [B1]). Cette amélioration leur permet d'affiner la valeur de q_c et de conjecturer les valeurs d'un certain nombre d'*exposants critiques*, décrivant notamment le comportement de Q_- au voisinage de q_c .

La construction de ce développement repose sur la remarque suivante : la probabilité $Q_-(q)$ est, pour tout q , la limite analytique de la probabilité $Q_n(q)$ pour que le fluide atteigne le niveau n (l'origine du réseau étant par convention au niveau un). Or, en calculant les premières valeurs des Q_n , de remarquables propriétés apparaissent, faisant intervenir les célèbres *nombres de Catalan*. Ces propriétés ont été conjecturées par Baxter et Guttmann et utilisées pour obtenir le développement de Q_- . Nous démontrons dans ce chapitre trois de ces conjectures.

Calculons les premiers polynômes Q_n .

On a : $Q_1(q) = 1,$

et $Q_2(q) = 1 - q^2.$

En effet, le second niveau n'est pas atteint si et seulement si les deux arêtes issues de l'origine sont non passantes. La probabilité de cet événement est q^2 .

Remarquons que, étant donnée une configuration d'arêtes sur le réseau infini, la possibilité ou l'impossibilité que le fluide atteigne le niveau n ne dépend que de l'état des arêtes situées au dessus de ce niveau.

On obtient ensuite :

$$Q_3(q) = 1 - q^2 - 2q^3(1-q) - q^4(1-q)^2$$

$$= 1 - q^2 - 2q^3 + q^4 + 2q^5 - q^6.$$

En effet, les configurations d'arêtes telles que le niveau 3 ne soit pas atteint sont les quatre suivantes.



Fig. 8.3 Le signe \cap désigne une arête non passante.

Les valeurs suivantes, obtenues par Baxter et Guttmann, sont :

$$Q_4 = 1 - q^2 - 2q^3 - 4q^4 + 6q^5 + 11q^6 - 10q^7 - 10q^8 + 10q^9 + 2q^{10} - 4q^{11} + q^{12},$$

$$Q_5 = 1 - q^2 - 2q^3 - 4q^4 - 8q^5 + \dots$$

On remarque que le coefficient de q^n semble se stabiliser : pour $m \geq 0$, il est le même dans tous les Q_{n+m} . Cette hypothèse constitue la première des conjectures de Baxter et Guttmann.

Plus précisément, ils ont conjecturé, après avoir calculé par ordinateur les valeurs de Q_n pour $n \leq 29$, les trois relations suivantes.

Notons $Q_n = \sum_{k \geq 0} a_k^n q^k$.

Alors : (α) $a_n^m = a_{n+m}^m$ pour tout $m \geq 0$,

(β) $a_{n+1}^n - a_{n+1}^{n+1} = C_n$,

et (γ) $a_{n+2}^n - a_{n+2}^{n+1} = 2C_n - C_{n+1}$,

où $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ est le $n^{\text{ième}}$ nombre de Catalan.

La preuve de ces trois assertions fait l'objet de ce chapitre.

La relation (α) est essentielle : en effet, elle assure l'existence d'une limite formelle des polynômes Q_n , soit :

$$Q(q) = \sum_{n \geq 0} a_n^n q^n.$$

Cette limite est prise comme nouvelle définition de la probabilité de percolation (on suppose qu'elle coïncide avec Q_∞ au moins au voisinage de zéro).

Moyennant cette hypothèse, qui identifie la limite formelle et la limite analytique des polynômes Q_n , le développement en série entière de Q_∞ est exactement la série Q . Le but de Baxter et Guttmann est alors de calculer le plus grand nombre possible de coefficients a_n^n .

Appelons *différence d'ordre i au niveau n* l'entier $d_i^n = a_{n+i}^n - a_{n+i}^{n+1}$.

Si, pour $1 \leq i \leq k$, on dispose d'une expression de d_i^n valable pour tout n , il est possible de calculer, à partir du polynôme Q_n , les valeurs des a_{n+i}^{n+i} , pour $1 \leq i \leq k$.

En effet : $a_{n+i}^{n+i} = a_{n+i}^n - d_1^{n+i-1} - d_2^{n+i-2} - \dots - d_i^n$.

On obtient ainsi k termes supplémentaires de la série finale Q , sans avoir calculé Q_{n+1}, \dots, Q_{n+k} , dont le calcul devient vite lourd.

Baxter et Guttmann ont ainsi conjecturé les valeurs des différences d'ordre 1 à 12. Toutes s'expriment comme des fonctions de plus en plus complexes de coefficients binomiaux et de nombres de Catalan. Elles leur ont permis d'extrapoler les valeurs des 29 premiers coefficients de Q - obtenus par le calcul - aux 41 premiers.

Remarque. Il est capital d'utiliser le paramètre q plutôt que le paramètre $p=1-q$, car cette propriété de convergence formelle n'apparaît pas avec le paramètre p .

Nous allons pour terminer définir un vocabulaire adapté à ce problème. Nous démontrerons ensuite dans le second paragraphe quelques lemmes préliminaires. Les paragraphes 3, 4, 5 seront consacrés aux preuves des propositions (α) , (β) et (γ) , tandis que le paragraphe 6 regroupe les dénombrements intervenant dans ces preuves ainsi que quelques dénombrements annexes.

Définition 8.1. Le *niveau* du sommet s de coordonnées (x, y) est $N(s) = 1+x+y$.
Le *niveau* de l'arête α joignant les sommets s et t est $\min(N(s), N(t))$.
Le *sous-réseau* \mathfrak{F}_n de \mathfrak{F} est formé des sommets de niveau inférieur ou égal à n .

Définition 8.2. Une *configuration* E sur un sous-réseau \mathfrak{R} de \mathfrak{F} est un ensemble d'arêtes de \mathfrak{R} . Une *arête passante* de E est un élément de E .
Une *arête non passante* de E est un élément du complémentaire de E .

Définition 8.3. Etant donnée une configuration E , un *chemin* de E de longueur p est un p -uplet d'arêtes de E , (a_1, \dots, a_p) , où les extrémités de l'arête a_i sont les sommets s_i et s_{i+1} . Ce chemin est dit *dirigé* si $N(s_{i+1}) = N(s_i) + 1$ pour $1 \leq i \leq p-1$.

Si E est une configuration sur \mathfrak{F}_n , un *chemin passant* de E est un chemin dirigé de E de longueur $n-1$; nécessairement, s_1 est l'origine et $N(s_n) = n$.

Lorsqu'un tel chemin existe, on dira que E *mène* au niveau n (noté $E \rightarrow n$).

Définition 8.4. La *zone passante* de E est l'ensemble des arêtes de E contenues dans un chemin dirigé de E issu de l'origine. C'est physiquement l'ensemble des arêtes accessibles par le fluide.

Exemple.

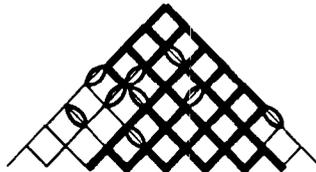


Fig. 8.4 La zone passante est indiquée en gras.

Pour $n \geq 1$, l'expression de Q_n est alors :

$$Q_n = \sum_{E \rightarrow n} (1-q)^{|E|} q^{N_n - |E|},$$

où E décrit l'ensemble des configurations de \mathfrak{F}_n menant au niveau n , $|E|$ désigne le cardinal de E , et N_n est le nombre d'arêtes de \mathfrak{F}_n , soit $n(n-1)$.

En utilisant la formule du binôme, cette expression devient :

$$Q_n = \sum_{E \rightarrow n} q^{N_n - |E|} \sum_{k=0}^{|E|} \binom{|E|}{k} (-1)^k q^k.$$

En considérant que le coefficient binomial qui apparaît correspond au choix de k arêtes passantes de E qui deviennent non passantes pour une nouvelle configuration F incluse dans E , il vient :

$$Q_n = \sum_{k=0}^{N_n} q^k \sum_{F \mid |^{\circ} F| = k} \left(\sum_{\substack{E \rightarrow n \\ E \supset F}} (-1)^{|E| - |F|} \right),$$

où :

- F décrit l'ensemble des configurations sur \mathfrak{F}_n à k arêtes non passantes,
- E décrit l'ensemble des configurations de \mathfrak{F}_n menant au niveau n et contenant F .

Notation. On note

$$A(F) = \sum_{\substack{E \rightarrow n \\ E \supset F}} (-1)^{|E| - |F|},$$

de telle sorte que

$$Q_n = \sum_{k=0}^{N_n} q^k \sum_{F \mid |^{\circ} F| = k} A(F).$$

2. LEMMES PRÉLIMINAIRES

Définition 8.5. Soit F une configuration sur \mathfrak{F}_n . Les configurations minimales associées à F sont les éléments minimaux (pour l'inclusion) de l'ensemble des configurations contenant F et menant au niveau n .

Définition 8.6. Soit F une configuration sur \mathfrak{F}_n , et E_1, \dots, E_p des configurations minimales associées à F . Une arête α non passante de F est dite *indifférente pour* E_1, \dots, E_p si pour tout $i \leq p$, l'arête α est non passante dans E_i .

Une arête α non passante de F est dite *indifférente* si elle l'est pour toutes les configurations minimales de F .

Cette notion facilite dans certains cas le calcul de $A(F)$. En effet, soit α une arête de F indifférente pour E_1, \dots, E_p , et considérons l'ensemble \mathcal{E} des configurations contenant au moins une des E_i . A toute configuration E de \mathcal{E} ne contenant pas l'arête α , on peut associer la configuration $E' = E \cup \{\alpha\}$, qui est aussi dans \mathcal{E} . Cette transformation est une bijection entre l'ensemble des éléments de \mathcal{E} ne contenant pas l'arête α et l'ensemble de ceux qui la contiennent. L'existence de cette bijection entraîne que :

$$\sum_{E \in \mathcal{E}} (-1)^{|E| - |F|} = 0.$$

Donc, si F admet une arête indifférente, $A(F) = 0$.

En particulier, soit F une configuration menant au niveau n . Elle est alors sa propre configuration minimale. Si F n'a pas d'arête non passante, $A(F) = 1$. Sinon, toute arête non passante de F est indifférente et $A(F) = 0$.

L'expression de Q_n utilisée par la suite sera donc :

$$Q_n = 1 + \sum_{k=1}^{N_n} q^k \cdot \sum_{\substack{F \rightarrow n \\ |F|=k}} A(F).$$

Le schéma des preuves des trois relations (α) , (β) et (γ) est le même, et est calqué sur l'expression de Q_n ci-dessus. Pour évaluer a_{n+r}^{n+m} ($r = 0, 1, \text{ ou } 2$), on considère toutes les configurations F sur \mathfrak{S}_{n+m} à $n+r$ arêtes non passantes, et on les classe selon leur contribution $A(F)$ dans a_{n+r}^{n+m} :

- certaines ont une contribution nulle ;
- d'autres fournissent le terme a_{n+r}^n ;
- les configurations restantes vont fournir, lorsque m vaut 1, la valeur de la différence d'ordre r . Celles-là seront décrites de façon précise et énumérées via une bijection avec certains mots d'un langage algébrique. Elles sont de plus en plus variées et délicates à décrire au fur et à mesure que l'ordre r augmente. C'est pourquoi la preuve des conjectures de Baxter et Guttmann sur les différences d'ordre supérieur ou égal à 3 ne semble pas envisageable par cette méthode.

Parmi les configurations fournissant la valeur de la différence d'ordre r , certaines ont une zone passante très voisine d'un polyomino parallélogramme. Nous les définissons ci-dessous. Leur rôle sera précisé dans les paragraphes suivants.

Définition 8.7. Soit E une configuration sur \mathfrak{S}_n menant au niveau n , \mathfrak{C} un chemin passant de E , et P un sommet de \mathfrak{C} de niveau strictement inférieur à n , de coordonnées (x, y) . Si le sommet de coordonnées $(x+1, y)$ (resp. $(x, y+1)$) n'est pas dans \mathfrak{C} , la droite principale issue de P est le segment $[P, P']$, où P' a pour coordonnées (n, y) (resp. (x, n)).

Fig. 8.5 Les droites principales issues d'un chemin passant.



Lemme 8.8. Soit F une configuration sur \mathfrak{S}_n atteignant le niveau n en k points. Si $k \geq 1$:

- 1) F comporte au moins $n-k$ arêtes non passantes.
- 2) Si F a exactement $n-k$ arêtes non passantes, les k points de niveau n atteints sont contigus ; la zone passante de F est l'ensemble des arêtes situées entre deux chemins passants, appelés chemins extrémaux de la configuration F .
- 3) Soit $P_{n,k}$ le nombre de configurations à $n-k$ arêtes non passantes atteignant n en k points.

Alors $P_{n,1} = C_n$,
 et $P_{n,2} = C_{n+1} - 2C_n$.

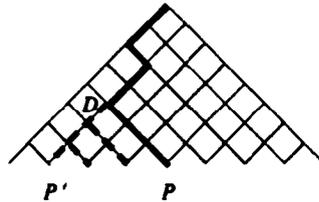
Preuve. 1) On suppose $k \geq 1$, donc F admet au moins un chemin passant \mathfrak{C} . Ce chemin a pour extrémité inférieure un point P de niveau n . De \mathfrak{C} sont issues $n-1$ droites principales ; chacune d'elles mène à un des $n-1$ points de niveau n autres que P . Or, $n-k$ de ces points ne sont pas

atteints par la configuration F . Donc chacune des $n-k$ droites principales correspondantes porte au moins une arête non passante.

2) Supposons que F ait exactement $n-k$ arêtes non passantes. Ces arêtes sont toutes situées sur les droites principales issues de \mathfrak{C} , et les points de niveau n atteints autres que P sont les extrémités des droites principales ne comportant pas d'arête non passante.

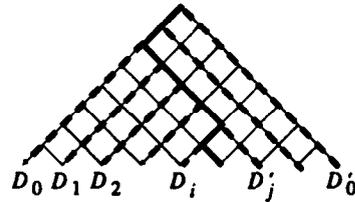
Si $k \geq 2$, une au moins de ces droites n'en porte pas. Soit D une telle droite. Elle mène à un point P' de niveau n . Mais alors, la configuration F atteint tous les points de niveau n situés entre P et P' (Fig.8.6). Ceci prouve que les k points atteints sont contigus.

Fig. 8.6



Notons les P_1, \dots, P_k (on inclut désormais le cas où k vaut 1). Notons D_0, \dots, D_i (resp. D'_0, \dots, D'_j) les droites principales issues de \mathfrak{C} et parallèles à Ox (resp. Oy), de telle sorte que les points de D_m (resp. D'_m) soient d'ordonnée m (resp. d'abscisse m) (Fig.8.7).

Fig. 8.7



Alors, si m (resp. m') de ces droites portent une arête non passante, ce sont forcément D_0, \dots, D_{m-1} , (resp. $D'_0, \dots, D'_{m'-1}$) pour des raisons analogues à celles que nous venons de décrire. Les extrémités de ces droites ne sont alors pas atteintes par F . Pour $0 \leq p \leq m-1$ (resp. $m'-1$), soit n_p (resp. n'_p) le niveau de l'arête de D_p (resp. D'_p). Alors $n_0 > n_1 > \dots > n_{m-1}$.

En effet, s'il existait p tel que $n_{p+1} \geq n_p$, le point situé à l'extrémité de D_{p+1} serait atteint par F (Fig.8.8).

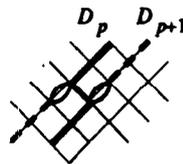


Fig. 8.8

De même, $n'_0 \geq n'_1 > \dots > n'_{m'-1}$. Il existe alors un unique chemin passant \mathfrak{C}_g de E tel que l'arête de plus bas niveau de chacune des droites principales parallèles à Ox qui en sont issues soit non passante (Fig. 8.9). Ce chemin est le *chemin extrémal gauche* de E .

De même, il existe un unique chemin passant \mathfrak{C}_d de E tel que l'arête de plus bas niveau de chacune des droites principales parallèles à Oy qui en sont issues soit non passante ; \mathfrak{C}_d est le *chemin extrémal droit* de E .

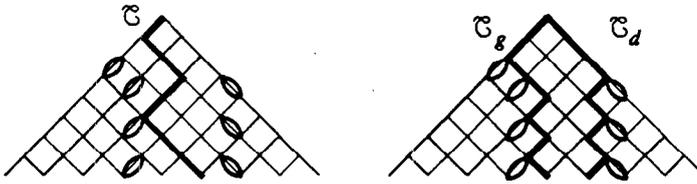


Fig. 8.9 Détermination des chemins extrémaux.

Inversement, il suffit de se donner une paire de chemins passants, n'ayant d'autre point commun que leur origine, et, éventuellement, leur point d'arrivée, pour déterminer une telle configuration. Les configurations ainsi obtenues sont appelées configurations parallélogrammes.

3) Le dénombrement des configurations parallélogrammes sera fait dans le paragraphe 6. □

Exemples.



Fig. 8.10 Configurations parallélogrammes.

Sur ces figures, seuls sont indiqués les chemins passants extrémaux (en gras).

Définition 8.9. Une configuration parallélogramme sur \mathcal{B}_n est une configuration à $n-k$ arêtes non passantes atteignant le niveau n en k points ($k \geq 1$), c'est à dire vérifiant la condition 2) du lemme 8.8.

Définition 8.10. Une configuration de type I sur \mathcal{B}_n est une configuration parallélogramme atteignant le niveau n en un point.

La zone passante de E est alors pratiquement un polyomino parallélogramme (à une translation près des chemins extrémaux vers l'extérieur). Une bijection, tout à fait analogue à celle qui transforme en polyomino parallélogramme un diagramme de Ferrers gauche (cf. chapitre 1, paragraphe 3) permet de passer des configurations de type I aux polyominos parallélogrammes.

Exemple. Il y a $C_3 = 5$ configurations de type I sur \mathcal{B}_3 et $C_4 - 2C_3 = 4$ configurations parallélogrammes atteignant le niveau 3 en deux points.



Fig. 8.11 Configurations parallélogrammes sur \mathcal{B}_3 .

Les deux définitions suivantes se rapportent aux configurations parallélogrammes et interviendront dans le calcul des différences d'ordre deux.

Définition 8.11. Un *brin* d'une configuration parallélogramme est une arête commune aux deux chemins extrémaux délimitant la zone passante.

Un *palier* d'une configuration parallélogramme est une arête parallèle à Ox dans le chemin extrémal droit ou parallèle à Oy dans le chemin extrémal gauche, et située plus bas que le point de contact le plus bas des deux chemins extrémaux.

Exemple. La première configuration de la figure 8.9 présente un brin mais aucun palier ; la seconde a un brin et un palier.

Lemme 8.12. Soient $n \geq 1, m \geq 1$, et F une configuration sur \mathfrak{B}_{n+m} , à $n+i$ arêtes non passantes, ne menant pas à $n+m$. Alors $F = F' \cup F''$, où F' est une configuration sur \mathfrak{B}_n , et F'' une configuration sur $\mathfrak{B}_{n+m} \setminus \mathfrak{B}_n$. Si la configuration F' atteint le niveau n en k points, alors $k \leq \max(i, 0)$.

Preuve. Supposons $k \geq 1$. D'après le lemme 8.8, F' a au moins $n-k$ arêtes non passantes. Mais, puisque F ne mène pas au niveau $n+m$, F'' a au moins $2k$ arêtes non passantes. S'il y en a exactement $2k$, deux sont issues de chaque point de niveau n atteint.

Nécessairement, $n-k + 2k \leq n+i$, et $k \leq i$. \square

3. CONVERGENCE FORMELLE DES POLYNOMES Q_n

Proposition 8.13. Le coefficient de q^n est le même dans tous les polynômes Q_{n+m} pour $m \geq 0$.

Preuve. On utilise l'expression de Q_n donnée dans le paragraphe 2.

Soient $n \geq 1, m \geq 1$, et F une configuration sur \mathfrak{B}_{n+m} , à n arêtes non passantes, ne menant pas au niveau $n+m$.

La configuration F s'écrit $F = F' \cup F''$, où F' est une configuration sur \mathfrak{B}_n , F'' une configuration sur $\mathfrak{B}_{n+m} \setminus \mathfrak{B}_n$; d'après le lemme 8.12, F' ne mène pas au niveau n et F'' est quelconque.

Si $E = E' \cup E''$ est une configuration minimale associée à F , E' mène au niveau n . Inversement, si E' contient F' et mène au niveau n , alors $E' \cup F''$ a au plus $n-1$ arêtes non passantes et atteint le niveau n . D'après le lemme 8.12, $E' \cup F''$ mène au niveau $n+m$.

Les configurations minimales associées à F s'écrivent donc $E' \cup F''$, où E' est minimale pour F' .

Si les n arêtes non passantes de F sont dans F' , la configuration F'' est la configuration pleine et :

$$\sum_{\substack{E \rightarrow n+m \\ E \supset F}} (-1)^{|E|H^F|} = \sum_{\substack{E' \rightarrow n \\ E' \supset F'}} (-1)^{|E'|H^{F'}|}.$$

Si la configuration F'' n'est pas la configuration pleine, toute arête non passante de F'' est indifférente et $A(F) = 0$.

Finalement :

$$\begin{aligned}
 a_n^{n+m} &= \sum_{\substack{F \rightarrow n+m \\ |^*F|=n}} \left(\sum_{\substack{E \rightarrow n+m \\ E \supset F}} (-1)^{|E|-|F|} \right) \\
 &= \sum_{\substack{F' \rightarrow n \\ |^*F|=n}} \left(\sum_{\substack{E' \rightarrow n \\ E' \supset F'}} (-1)^{|E'|-|F'|} \right) = a_n^n. \quad \square
 \end{aligned}$$

Cette remarquable propriété assure l'existence de la limite formelle des Q_n :

$$Q = \sum_{n \geq 0} a_n^n q^n,$$

qui est assimilée à la probabilité de percolation. C'est désormais à partir de cette série que travaillent les physiciens, afin d'approcher la valeur q_c . Le polynôme Q_n fournit les n premiers coefficients de Q , et les différences d'ordre 1 et 2 les deux coefficients suivants, sans calcul supplémentaire.

4. DIFFÉRENCES D'ORDRE UN

Proposition 8.14. *La différence d'ordre un au niveau n est :*

$$a_{n+1}^n - a_{n+1}^{n+1} = C_n.$$

Soit F une configuration sur \mathfrak{S}_{n+1} , ayant $n+1$ arêtes non passantes et ne menant pas au niveau $n+1$. La configuration F s'écrit $F = F' \cup F''$, où F' est une configuration sur \mathfrak{S}_n , F'' une configuration sur $\mathfrak{S}_{n+1} \setminus \mathfrak{S}_n$. La configuration F' atteint le niveau n en k points. Le lemme 8.12 donne : $k = 0$ ou $k = 1$. Distinguons ces deux situations.

Lemme 8.15. *La contribution dans a_{n+1}^{n+1} des configurations $F = F' \cup F''$ pour lesquelles F' n'atteint pas le niveau n est a_{n+1}^n .*

Preuve. Les configurations minimales associées à F s'écrivent de nouveau $E' \cup F''$, où E' est minimale pour F' . En effet, si E' atteint n , la configuration $E' \cup F''$ a au plus n arêtes non passantes et atteint donc le niveau $n+1$, d'après le lemme 8.12.

Il y a là encore deux possibilités :

- soit les $n+1$ arêtes non passantes de F sont dans F' ; la configuration F'' est la configuration pleine, et :

$$\sum_{\substack{E \rightarrow n+1 \\ E \supset F}} (-1)^{|E|-|F|} = \sum_{\substack{E' \rightarrow n \\ E' \supset F'}} (-1)^{|E'|-|F'|};$$

- soit F'' n'est pas la configuration pleine ; toute arête non passante de F'' est alors indifférente, et $A(F) = 0$. \square

Lemme 8.16. *Soit $F = F' \cup F''$, ayant $n+1$ arêtes non passantes, n'atteignant pas le niveau $n+1$, et telle que F' atteigne le niveau n en un point. Alors F' est une configuration de type I (définie en 8.10) et $A(F) = -1$.*

Preuve. La répartition des arêtes non passantes est nécessairement la suivante : $n-1$ sont dans F' et deux dans F'' . D'après les définitions 8.9 et 8.10, F' est donc une configuration de type I. D'autre part, F' étant choisie, les deux arêtes non passantes de F'' sont les deux arêtes issues du point en lequel F' atteint le niveau n .

Les configurations minimales $E = E' \cup E''$ associées à F sont de deux sortes :

- une arête non passante de F' devient passante dans E' , de telle sorte que le niveau n est atteint en deux points ; chaque arête non passante de F'' est indifférente pour ces configurations ;
- ou bien une des deux arêtes non passantes de F'' est rendue passante dans E'' .

Donc :

$$\sum_{\substack{E \rightarrow n+1 \\ E \supset F}} (-1)^{|E|+|F|} = \sum_{E' \supset F'} (-1)^{|E'|+|F'|} = -1. \quad \square$$

Preuve de la proposition 8.14. D'après le lemme 8.8, il y a C_n configurations de type I sur \mathfrak{B}_n . Donc, d'après le lemme ci-dessus, la contribution dans a_{n+1}^{n+1} des configurations telles que F' atteigne le niveau n est $-C_n$.

On obtient la proposition en regroupant les deux cas décrits. \square

5. DIFFÉRENCES D'ORDRE DEUX

Proposition 8.17. La valeur de la différence d'ordre deux au niveau n est :

$$a_{n+2}^n - a_{n+2}^{n+1} = 2C_n - C_{n+1}.$$

Soit F une configuration sur \mathfrak{B}_{n+1} , à $n+2$ arêtes non passantes, ne menant pas au niveau $n+1$. La configuration F s'écrit $F = F' \cup F''$, où F' est une configuration sur \mathfrak{B}_n , F'' une configuration sur $\mathfrak{B}_{n+1} \setminus \mathfrak{B}_n$. La configuration F' atteint le niveau n en k points. Le lemme 8.12 donne : $k = 0, k = 1$ ou $k = 2$. Distinguons ces trois situations.

5.1. Premier cas. La configuration F' n'atteint pas le niveau n .

De nouveau, on cherche à caractériser les configurations minimales associées à F . Mais la situation est un peu plus complexe que dans les deux cas précédents.

Définition 8.18. Une configuration de type II sur \mathfrak{B}_n est une configuration s'écrivant $E \setminus \{a\}$, où E est une configuration de type I et a un brin de E .

Remarquons qu'une configuration de type II n'atteint pas le niveau n .

Exemple. La configuration F suivante est de type II. La configuration E associée est tracée à côté.

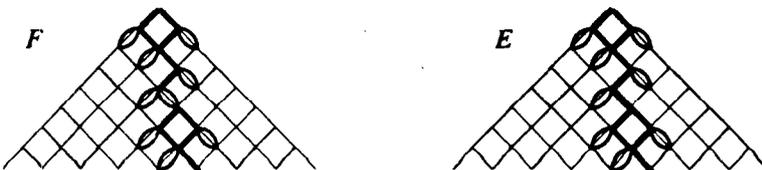


Fig. 8.12 Configuration de type II.

Lemme 8.19. *Le nombre de configurations de type II sur \mathfrak{B}_n est $2(C_{n+1} - 2C_n)$.*

Preuve. Montrons tout d'abord que, étant donnée une configuration F de type II, il existe une unique configuration E de type I telle que $F = E \setminus \{a\}$, où a est un brin de E , en raisonnant par l'absurde. Soient E_1 et E_2 deux configurations de type I, distinctes, telles que :

- $E_1 = F \cup \{a_1\}$,
- $E_2 = F \cup \{a_2\}$, où a_1 et a_2 sont des brins de E_1 et E_2 respectivement.

L'arête a_2 est alors une arête non passante de F , distincte de a_1 , donc une arête non passante de E_1 . Deux cas se présentent :

- si le niveau de a_2 était inférieur ou égal à celui de a_1 , la configuration E_2 atteindrait le niveau n en plusieurs points (Fig.8.13, second schéma), ce qui, pour une configuration de type I, est absurde ;
- si le niveau de a_2 était supérieur strictement à celui de a_1 , la configuration E_2 n'atteindrait pas le niveau n (Fig.8.13, dernier schéma), ce qui est tout aussi absurde.

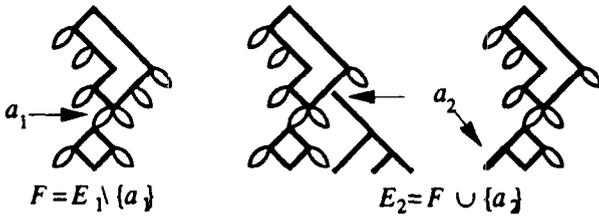


Fig. 8.13

Donc $a_1 = a_2$ et ceci démontre l'unicité de E . Les configurations F de type II sur \mathfrak{B}_n sont donc en bijection avec les configurations E de type I sur \mathfrak{B}_n dont un brin α est marqué, que nous désignerons par le couple (E, α) .

On peut associer à ce couple une configuration parallélogramme H sur \mathfrak{B}_n atteignant le niveau n en deux points, de telle sorte que chacune d'entre elles soit obtenue deux fois. Ceci démontrera alors le lemme, en utilisant le résultat 8.8. 3).

Les chemins extrémaux de H se déduisent de ceux de E de la façon suivante.

- Si α est de direction Ox , le chemin extrémal de gauche de H est le même que celui de E . D'autre part, soit $(a_1, \dots, a_p, \alpha, a_{p+2}, \dots, a_{n-1})$ le chemin extrémal de droite de E , où les arêtes sont numérotées par niveau croissant. Le chemin extrémal de droite de H est $(a_1, \dots, a_p, \alpha', a'_{p+2}, \dots, a'_{n-1})$, où la direction de α' est Oy , et $(a'_{p+2}, \dots, a'_{n-1})$ est obtenu en tradant $(a_{p+2}, \dots, a_{n-1})$ vers la droite, de façon à bien reconstituer un chemin continu.

- Si α est de direction Oy , le chemin extrémal de droite de H est le même que celui de E . D'autre part, soit $(a_1, \dots, a_p, \alpha, a_{p+2}, \dots, a_{n-1})$ le chemin extrémal de gauche de E . Le chemin de gauche de H est $(a_1, \dots, a_p, \alpha', a'_{p+2}, \dots, a'_{n-1})$, où la direction de α' est Ox , et $(a'_{p+2}, \dots, a'_{n-1})$ est obtenu en tradant $(a_{p+2}, \dots, a_{n-1})$ vers la gauche, de façon à bien reconstituer un chemin continu.

Inversement, chaque configuration H de ce type est obtenue deux fois (Fig.8.14), et engendre donc deux configurations de type II. \square

Exemple. Les deux configurations F_1 et F_2 suivantes ont la même image H .

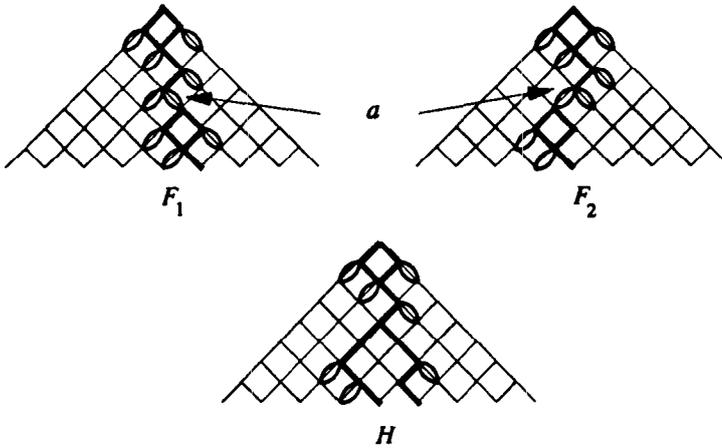


Fig. 8.14

Proposition 8.20. Soit $F = F' \cup F''$ une configuration sur \mathfrak{B}_{n+1} , ayant $n+2$ arêtes non passantes, telle que F' n'atteigne pas le niveau n .

1) Si F' est de type II, $A(F) = 1$.

2) Si F' n'est pas de type II, les configurations minimales de F s'écrivent simplement $E' \cup F''$, où E' est une configuration minimale associée à F' .

Preuve. Soit $F = F' \cup F''$, où F' n'atteint pas le niveau n . Soit E' une configuration minimale associée à F' ; la configuration $E' \cup F''$ a au plus $n+1$ arêtes non passantes. Donc, soit elle atteint le niveau $n+1$, soit elle n'atteint le niveau n qu'en un point et n'atteint pas le niveau $n+1$ (lemme 8.12).

1) Si $E' \cup F''$ n'atteint pas le niveau $n+1$, la configuration E' a $n-1$ arêtes non passantes et mène au niveau n . C'est donc une configuration de type I (définition 8.10). De son côté, F'' a deux arêtes non passantes, issues du point en lequel E' atteint le niveau n .

La configuration F se déduit alors de $E' \cup F''$ en rendant non passante une seule des arêtes passantes de E' , de telle sorte que F' ne mène pas au niveau n . Nécessairement, l'arête choisie sera un brin, sans quoi un des deux chemins extrémaux de E' resterait passant dans F' . Donc F' est de type II.

Les configurations minimales associées à F sont :

- les configurations s'écrivant $G' \cup F''$ où G' est une configuration minimale associée à F' , distincte de E' . Les arêtes non passantes de F'' sont indifférentes pour ces configurations.
- les configurations s'écrivant $E' \cup E''$ où E'' se déduit de F'' en rendant passante une de ses deux arêtes non passantes.

Donc $A(F) = 1$.

2) Si F' n'est pas de type II, soit E' contenant F' et menant au niveau n . La configuration $E' \cup F''$ atteint alors le niveau $n+1$, et les configurations minimales de F sont bien celle décrites dans la proposition. \square

Corollaire 8.21. *La contribution dans a_{n+2}^{n+1} des configurations F pour lesquelles F' n'atteint pas le niveau n est :*

$$a_{n+2}^n + 2(C_{n+1} - 2C_n).$$

Preuve. En regroupant le lemme 8.19 et le premier résultat de la proposition 8.20, on montre d'abord que la contribution dans a_{n+2}^{n+1} des configurations F pour lesquelles F' est de type II est $2(C_{n+1} - 2C_n)$.

Puis, en utilisant le second résultat de la proposition 8.20, on montre que la contribution dans le terme a_{n+2}^{n+1} des autres configurations F est comme précédemment a_{n+2}^n . \square

5.2 Second cas. La configuration F' atteint le niveau n en un point.

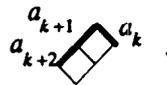
Les configurations qui apparaissent ici relèvent en quelque sorte de la première étape dans la complexification des configurations de type I. Elles atteignent aussi le niveau n en un seul point, mais ont n arêtes non passantes, alors que les configurations de type I en ont $n-1$ seulement.

Définition 8.22. Une configuration de type III sur \mathfrak{S}_n est une configuration ayant n arêtes non passantes et atteignant le niveau n en un point, dont la zone passante est l'ensemble des arêtes comprises entre deux chemins \mathfrak{C}_g et \mathfrak{C}_d , tels que \mathfrak{C}_g soit situé à gauche de \mathfrak{C}_d et que le couple $(\mathfrak{C}_g, \mathfrak{C}_d)$ vérifie l'une des deux conditions (i) et (ii) suivantes.

(i) Soit \mathfrak{C}_d est un chemin passant, et \mathfrak{C}_g s'écrit $(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_{n+1})$, où (a_1, \dots, a_{k-1}) et $(a_{k+3}, \dots, a_{n+1})$ sont des chemins dirigés, le second pouvant être vide, et (a_k, a_{k+1}, a_{k+2}) est la séquence suivante :



(ii) Soit \mathfrak{C}_g est chemin passant, et \mathfrak{C}_d s'écrit $(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_{n+1})$, où (a_1, \dots, a_{k-1}) et $(a_{k+3}, \dots, a_{n+1})$ sont des chemins dirigés, le second pouvant être vide, et (a_k, a_{k+1}, a_{k+2}) est la séquence suivante :



Exemple.

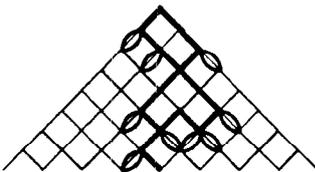


Fig. 8.15
Une configuration de type III.

Définition 8.23. Une configuration de type IV sur \mathfrak{S}_n est une configuration E ayant n arêtes non passantes, atteignant le niveau n en un point et vérifiant :

- la zone passante de E est l'ensemble des arêtes comprises entre deux chemins passants ;
- il existe une arête α non passante de E , bordant l'un de ces chemins, telle que $E \cup \{\alpha\}$ soit de type I .

direction Ox (resp. Oy) et (a'_1, \dots, a'_{p-1}) est le chemin obtenu en translatant (a_1, \dots, a_{p-1}) vers l'extérieur, de façon à bien reconstituer un chemin continu.

L'arête marquée dans la configuration H' sera l'arête de direction Ox (resp. Oy) de plus grand niveau dans (a'_1, \dots, a'_{p-1}) .

La figure H' n'est pas exactement une configuration sur \mathfrak{S}_n , car son chemin extrémal droit (resp. gauche) aboutit hors de \mathfrak{S}_n ; cependant, quelques transformations suffisent à ramener H' à une configuration parallélogramme sur \mathfrak{S}_n .

Sommairement :

- on prolonge d'abord vers le haut les deux chemins extrémaux de H' , de telle sorte que leur extrémité soit commune ;
- on repère ensuite le sommet de plus petit niveau où ces chemins extrémaux se rencontrent (en dehors de leur point de départ commun) ;
- on échange enfin les parties des chemins situées au dessus et en dessous de ce point (Fig.8.18). Alors la structure obtenue est du type cherché, moyennant la suppression de l'arête inférieure de chaque chemin. □

Exemple.

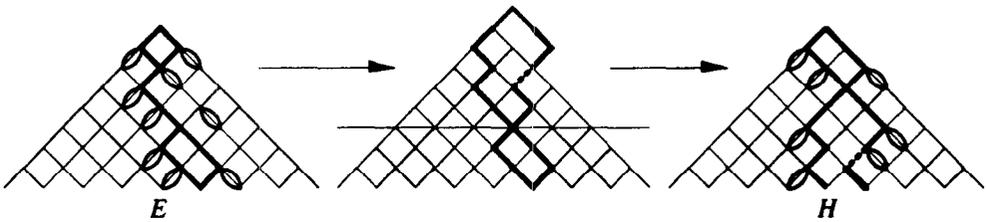


Fig. 8.18 Transformation des configurations de type IV.

Proposition 8.25. Soit F une configuration sur \mathfrak{S}_{n+1} , ayant $n+2$ arêtes non passantes, n'atteignant pas le niveau $n+2$ et s'écrivant $F = F' \cup F''$, où F' est une configuration sur \mathfrak{S}_n qui atteint le niveau n en un point. Alors :

- si F' est de type III, $A(F) = -1$;
- si F' est de type IV, $A(F) = 1$;
- dans les autres cas, $A(F) = 0$.

Preuve. D'après le lemme 8.8, F' a au moins $n-1$ arêtes non passantes. Les arêtes non passantes peuvent donc être réparties de deux façons entre F' et F'' .

1) Soit F' possède $n-1$ arêtes non passantes et F'' en possède trois. Alors une des trois est indifférente et $A(F) = 0$.

2) Soit F' possède n arêtes non passantes et F'' en possède deux, dont la position est imposée par le choix de F' .

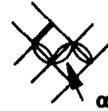
Parmi les configurations minimales de F , certaines atteignent le niveau n en plus d'un point. Les autres sont obtenues en rendant passante une des arêtes non passantes de F'' ; toute arête non passante de F' est indifférente pour ces configurations.

Donc $A(F) = \sum (-1)^{|E'| - |F'|}$, où E' décrit l'ensemble des configurations contenant F' et atteignant le niveau n en deux points.

Décrivons la configuration F' . Elle atteint le niveau n en un point et possède n arêtes non passantes. Soit \mathcal{C} un chemin passant de F' ; chacune des $n-1$ droites principales qui en sont issues comporte une arête non passante. Deux cas se présentent alors.

2a) Une des arêtes non passantes de F' , notée α , n'est pas sur les droites principales. Si $F' \cup \{\alpha\}$ est une configuration de type I, alors l'arête α est indifférente pour F et $A(F) = 0$.

Sinon, il existe deux droites principales voisines dont les arêtes non passantes sont situées au même niveau, et ceci impose la place de α .



Un des chemins limitant la zone passante de F' n'est pas dirigé; la configuration F' est de type III sur \mathcal{B}_n . Dès qu'une arête non passante de F' devient passante, le niveau n est atteint en un second point. Donc $A(F) = -1$.

2b) Toutes les arêtes non passantes de F' sont dans des droites principales. Soit D la droite principale qui en contient deux, notées b_1 et b_2 , de telle sorte que le niveau de b_1 soit inférieur à celui de b_2 .

Soient $E_1 = F' \cup \{b_2\}$ et $E_2 = F' \cup \{b_1\}$ les deux configurations obtenues en rendant passante une des arêtes non passantes de D .

Alors l'une d'elles au moins est de type I, sans quoi F' atteindrait le niveau n en plusieurs points.

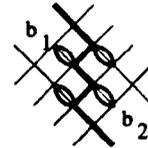


Fig. 8.19

Si E_1 (resp. E_2) n'est pas de type I, alors b_1 (resp. b_2) est une arête indifférente et $A(F) = 0$.

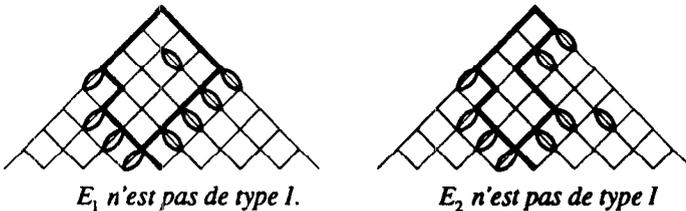


Fig. 8.20

Dans le cas où E_1 et E_2 sont de type I, F' est alors de type IV sur \mathcal{B}_n . Les configurations minimales - pour l'inclusion - atteignant le niveau n en deux points sont :

- d'une part celles obtenues en rendant passante l'arête non passante d'une des $n-2$ droites principales n'en comportant qu'une (chaque arête non passante de D est indifférente pour l'ensemble de ces configurations),
- d'autre part celle obtenue en rendant passantes b_1 et b_2 .

Donc pour ces configurations F , $A(F) = 1$.

On obtient désormais la proposition 8.25 en regroupant tous les cas envisagés. \square

Du lemme 8.24 et de la proposition 8.25, on déduit maintenant le corollaire suivant.

Définition 8.29. Un *facteur gauche de mot de Motzkin coloré de hauteur k* est un mot u de $\{x, \bar{x}, r, v\}^*$ tel que :

- (i) il existe u' tel que $u u'$ soit un mot de Motzkin coloré,
- (ii) $|\mu|_x = |\mu|_{\bar{x}} + k$.

Un tel mot admet une unique factorisation sous la forme $u_0 x u_1 x \dots x u_k$, où u_0, u_1, \dots, u_k sont des mots de Motzkin colorés, que l'on appellera *factorisation canonique* de u .

Ces facteurs vont servir à coder les configurations parallélogrammes et on peut les représenter par des *facteurs gauches de chemin de Motzkin colorés de hauteur k* .

Proposition 8.30. Les configurations parallélogrammes sur \mathcal{B}_n (définies en 8.9) ayant $n-k$ arêtes non passantes sont en bijection avec les facteurs gauches de mots de Motzkin colorés de longueur $n-1$ et de hauteur $k-1$.

Preuve. Il est possible de coder par un facteur gauche de mot de Motzkin coloré le couple $(\mathcal{C}_a, \mathcal{C}_d)$ des chemins extrémaux de la configuration.

Soit (a, b) un couple d'arêtes de même niveau, tel que a soit située à gauche de b . Définissons la lettre $f(a, b)$ par les conditions suivantes :

- $f(a, b) = x$ si l'arête a est de direction Ox et l'arête b de direction Oy ;
- $f(a, b) = \bar{x}$ si l'arête a est de direction Oy et l'arête b de direction Ox ;
- $f(a, b) = r$ si l'arête a et l'arête b sont de direction Oy ;
- $f(a, b) = v$ si l'arête a et l'arête b sont de direction Ox .

Soit alors E une configuration parallélogramme dont $\mathcal{C}_a = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ est le chemin extrémal gauche, $\mathcal{C}_d = (b_1, b_2, \dots, b_{n-1})$ le chemin extrémal droit.

Soit $f(E)$ le mot $f(a_1, b_1) f(a_2, b_2) \dots f(a_{n-1}, b_{n-1})$. Le fait que les chemins \mathcal{C}_a et \mathcal{C}_d ne se traversent pas assure que $f(E)$ est un facteur gauche de mot de Motzkin coloré. Sa longueur est $n-1$, et si E atteint le niveau n en k points, sa hauteur est $k-1$. Ce codage définit une bijection entre les deux types d'objets considérés. \square

Observons ce que deviennent les paramètres que nous avons définis sur les configurations parallélogrammes.

Le nombre de brins de E est le nombre de pas situés sur l'axe Ox dans le chemin représentant le mot $f(E)$.

Si E atteint le niveau n en plusieurs points, alors $f(E)$ se factorise sous la forme $u x u'$, où u est un mot de Motzkin coloré et u' un facteur gauche. Le nombre de paliers de E est $|\mu|_x + |\mu|_r + 2|\mu|_{\bar{x}}$. Remarquons que, si $f(E)$ est de hauteur un, ce nombre est exactement la longueur de u' .

Exemples. Le codage de la première configuration de la figure 8.9 est $x x r \bar{x} \bar{x} r x \bar{x}$. Celui de la seconde configuration de cette même figure 8.9 est $x v r \bar{x} v x v$.

Notation. La série génératrice des nombres de Catalan sera notée $C(t)$. Elle vérifie l'équation fonctionnelle : $C = 1 + t C^2$.

La plupart des résultats de la proposition suivante, relatifs à l'énumération des mots de Motzkin colorés ou de leurs facteurs gauches, sont classiques.

Proposition 8.31. (i) La série génératrice $M(t)$ des mots de Motzkin colorés, comptés suivant leur longueur (par t) est :

$$M(t) = \frac{C(t) - 1}{t},$$

$$= C^2(t).$$

(ii) La série génératrice $\bar{M}(t, x)$ des facteurs gauches de mots de Motzkin colorés, comptés suivant leur longueur (par t) et leur hauteur (par x), est :

$$\bar{M}(t, x) = \frac{C^2(t)}{1 - txC^2(t)}.$$

(iii) La série génératrice $M_k(t)$ des facteurs gauches de mots de Motzkin colorés de hauteur k , comptés suivant la longueur (par t) est :

$$M_k(t) = \frac{1}{t} (C(t) - 1)^{k+1}.$$

(iv) La série génératrice $X(t, x)$ des chemins de Motzkin colorés comptés suivant leur longueur (par t) et leur nombre de pas situés sur l'axe Ox (par x) est :

$$X(t, x) = \frac{1}{1 - t(2x + tC^2(t))}.$$

(v) La série génératrice des facteurs gauches de mots de Motzkin de hauteur un, de factorisation canonique $u x u'$, comptés suivant la longueur (par t) et la longueur de u' (par x) est :

$$F(t, x) = tC^2(t)C^2(tx).$$

Preuve. (i) Soit u un mot de Motzkin coloré. Il se factorise de façon unique sous l'une des formes suivantes :

- u est le mot vide ;
- $u = r u'$, où u' est un mot de Motzkin coloré ;
- $u = v u'$, où u' est un mot de Motzkin coloré ;
- $u = x u' \bar{x} u''$, où u' et u'' sont des mots de Motzkin colorés.

La série génératrice formelle \mathfrak{M} de ces mots vérifie donc l'équation suivante :

$\mathfrak{M} = \emptyset + r \mathfrak{M} + v \mathfrak{M} + x \mathfrak{M} \bar{x} \mathfrak{M}$, qui entraîne $M = 1 + 2tM + t^2M^2$, où M désigne la série génératrice des mots de Motzkin colorés comptés suivant la longueur (par t). Parmi les deux solutions de cette équation fonctionnelle, une seule est définie en 0. C'est $(C(t) - 1)/t$.

(ii) Soit u un facteur gauche de mot de Motzkin coloré. Si u est de hauteur non nulle, il s'écrit $u' x u''$, où u' est un mot de Motzkin coloré et u'' un autre facteur gauche.

Notons \mathfrak{M}' la série formelle des facteurs gauches de mots de Motzkin colorés. Alors $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}' + \mathfrak{M}' x \mathfrak{M}'$, ce qui entraîne $\bar{M} = M + txM\bar{M}$ et achève de prouver (ii), compte tenu du (i).

(iii) Ce résultat s'obtient par exemple en développant en x l'expression de $\bar{M}(t, x)$.

iv) Reprenons la factorisation des mots de Motzkin déjà utilisée pour montrer (i). Elle mène à l'équation $X = 1 + 2txX + t^2MX$, dont on déduit aisément (iv).

(v) Un facteur gauche de mot de Motzkin coloré de hauteur un s'écrit $u x u'$, où u et u' sont des mots de Motzkin colorés. Ceci donne l'équation $F(t, x) = tM(t)M(tx)$, qui entraîne (v). \square

La proposition 8.30 permet de transcrire ces résultats en résultats relatifs à l'énumération des configurations parallélogrammes. Si E est une telle configuration sur \mathfrak{X}_n , atteignant le niveau n en k points, on dira que E est de hauteur n et de base k . Ces configurations ont déjà été étudiées par Shapiro [Sh].

Corollaire 8.32. (i) La série génératrice $P(t, x)$ des configurations parallélogrammes, comptées suivant leur hauteur (par t) et leur base (par x) est :

$$P(t, x) = \frac{1}{1 - txC^2(t)} - 1.$$

(ii) La série génératrice $P_k(t)$ des configurations parallélogrammes de base k est :

$$P_k(t) = (C(t) - 1)^k.$$

En particulier :

$$P_1(t) = C(t) - 1,$$

$$P_2(t) = (C(t) - 1)^2$$

$$= 1 - 2C(t) + (C(t) - 1)/t,$$

ce qui prouve la partie 3) du lemme 8.8.

(iii) La série génératrice $B(t, x)$ des configurations de type I comptées suivant leur hauteur (par t) et leur nombre de brins (par x) est :

$$B(t, x) = \frac{t}{1 - t(2x + tC^2(t))}.$$

Le nombre de configurations de type II de hauteur n est $2(C_{n+1} - 2C_n)$.

(iv) La série génératrice $T(t, x)$ des configurations parallélogrammes de base deux, comptées suivant leur hauteur (par t) et leur nombre de paliers (par x) est :

$$T(t, x) = t^2 C^2(t) C^2(tx).$$

Le nombre de configurations de type III (ou de type IV) de hauteur n est :

$$\sum_{m=2}^{n-1} (m-1) C_m C_{n-m}.$$

Preuve. (iii) Nous avons montré (lemme 8.19) que les configurations de type II sur \mathfrak{S}_n sont en bijection avec les configurations de type I sur \mathfrak{S}_n dont un brin est marqué. La valeur de la dérivée en x de la série $B(t, x)$, prise en $x=1$ fournit donc la série génératrice des configurations de type II, soit $2(C(t) - 1)^2$; on retrouve ainsi le lemme 8.19.

(iv) D'après 8.24, le dénombrement des configurations de type III et IV équivaut à celui des configurations parallélogrammes de base deux, dont un palier est marqué. La valeur de la dérivée en x de la série $T(t, x)$, prise en $x=1$, fournit donc la série génératrice des configurations de type III et IV. \square

Exemple. Il y a quatorze configurations de type III sur \mathfrak{S}_4 : les sept configurations tracées sur la figure 8.22 et leurs symétriques./

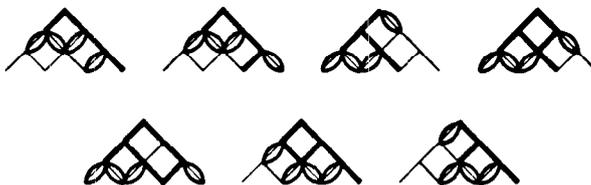


Fig. 8.22 Configurations de type III sur \mathfrak{S}_4 .

Références.

- [Ba-Gu] R.J. BAXTER, A.J. GUTTMANN, Series expansion of the percolation probability for the directed square lattice, *J. Phys. A : Math. Gen.* 21 (1988) 3193-3204.
- [Bl] J. BLEASE, Series expansion for the directed bond percolation problem, *J. Phys. C : Solid State Phys.* 10 (1977) 917-924.
- [Es-De] J.W. ESSAM, K. DE'BELL, Estimates of the site percolation probability exponents for some directed lattices, *J. Phys. A : Math. Gen.* 16 (1983) 3145-3147.
- [Es-De-Gu] J.W. ESSAM, K. DE'BELL, A.J. GUTTMANN, On two-dimensional directed percolation, *J. Phys. A : Math. Gen.* 21 (1988) 3815-3832.
- [Ki] W. KINZEL, *Annals of the Israel Physical Society* 5 (1983) 425-445.
- [Sh] L.W. SHAPIRO, A Catalan triangle, *Discr. Math.* 14 (1976) 83-90.

ANNEXE

EMPILEMENTS DE PIÈCES

Résumé. Nous présentons ici les bases de la théorie des *empilements de pièces* de Viennot [Vi4]. Après avoir défini ces objets et muni l'ensemble des empilements d'une structure de monoïde, nous montrons l'équivalence de cette notion avec celle de *monoïde partiellement commutatif* (Cartier et Foata [Ca-Fo]). Nous donnons également trois *théorèmes d'inversion* permettant d'énumérer certaines familles d'empilements.

Introduction. La notion d'*empilement de pièces*, due à Viennot [Vi4], est une version géométrique de la théorie des *monoïdes partiellement commutatifs*, introduite en 1969 par Cartier et Foata, à la suite de travaux portant sur les propriétés combinatoires des réarrangements de suites [Ca-Fo].

Depuis, de nombreux liens sont apparus entre cette théorie et des domaines aussi divers que l'*algèbre linéaire* (preuves combinatoires du théorème maître de Mac-Mahon, de la formule d'inversion des matrices, de l'identité de Jacobi ... voir Cartier et Foata [Ca-Fo], Foata [Fo1, 2], Zeilberger [Ze], Lalonde [La]), l'étude des *polynômes orthogonaux généraux* (Viennot [Vi3]), ou la *théorie des graphes* (Gessel [Ge]). Plus récemment, les monoïdes de commutation ont été utilisés comme modèles pour le *parallélisme* et la *concurrence d'accès à une base de données* ([Co-Mé], [Co-Pe], [Zi]). Enfin, la résolution de certains modèles de physique statistique (modèle des *hexagones durs*, *animaux dirigés sur réseau carré ou hexagonal*) est équivalente à l'énumération de certains empilements ([Pe1, 2]). Dans ce cas, c'est d'ailleurs bien la notion d'empilement qui apparaît naturellement, et non celle de monoïde de commutation ([Vi2]).

1. EMPILEMENTS : PREMIÈRES DÉFINITIONS

Soit \mathcal{A} un ensemble muni d'une relation binaire \mathfrak{C} , réflexive et symétrique. Deux éléments S_1 et S_2 de \mathcal{A} sont dits *en concurrence* si $S_1 \mathfrak{C} S_2$.

On considère l'ensemble \mathcal{P} des couples $P = (S, n)$, où S est élément de \mathcal{A} et n est un entier naturel. Un tel couple sera appelé une *pièce*. On dira que S est le *support* de P , noté $\text{supp}(P)$, et que n est son *niveau*, noté $\text{niv}(P)$.

Deux pièces P_1 et P_2 sont *en concurrence* si leur supports sont en concurrence. On note alors $P_1 \mathcal{C} P_2$. Deux sous-ensembles \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 de \mathcal{A} sont *en concurrence* s'il existe une pièce de \mathcal{A}_1 en concurrence avec une pièce de \mathcal{A}_2 .

Définition 1. Un *empilement* E est un sous-ensemble fini de \mathcal{P} , satisfaisant les deux conditions suivantes :

- (i) deux pièces distinctes de E en concurrence n'ont jamais le même niveau,
- (ii) si une pièce P de E est de niveau n non nul, il existe dans E une pièce P' , en concurrence avec P et de niveau $n-1$.

L'ensemble des empilements de pièces à support dans \mathcal{A} sera noté $\mathcal{E}(\mathcal{A})$, où plus simplement \mathcal{E} s'il n'y a pas de confusion possible.

Soit E un empilement. La relation de concurrence \mathcal{C} induit sur E une relation d'ordre qui en fait un ensemble partiellement ordonné. Cette relation d'ordre est définie comme suit.

Soit \mathcal{R} la relation binaire définie de la façon suivante :

$$(P_1, P_2) \in E^2, (P_1 \mathcal{R} P_2) \Leftrightarrow (P_1 \mathcal{C} P_2 \text{ et } \text{niv}(P_1) \leq \text{niv}(P_2)).$$

Alors \mathcal{R} est réflexive et antisymétrique. De plus, s'il existe des pièces P_0, \dots, P_k telles que $P_0 \mathcal{R} P_1 \mathcal{R} \dots \mathcal{R} P_k \mathcal{R} P_0$, alors $P_i = P_0$ pour tout i . Ces conditions garantissent que la *clôture transitive* de \mathcal{R} est une relation d'ordre ; on la notera \leq , ou \leq^E s'il n'y a pas d'ambiguïté. Rappelons que cette clôture transitive est, parmi toutes les relations transitives dont le graphe contient celui de \mathcal{R} , celle dont le graphe est le plus petit (pour l'inclusion). Alors $P \leq P'$ si et seulement si il existe $P_0 = P, P_1, \dots, P_k = P'$, éléments de E , tels que $P_{i-1} \mathcal{C} P_i$ et $\text{niv}^E(P_{i-1}) \leq \text{niv}^E(P_i)$, pour $1 \leq i \leq k$.

Les pièces *minimales* (resp. *maximales*) de E (relativement à la relation d'ordre \leq^E) sont celles qui ne sont en concurrence avec aucune pièce de niveau inférieur (resp. supérieur). Remarquons que les pièces minimales sont simplement celles de niveau nul.

Une *pyramide* est un empilement n'ayant qu'une pièce maximale.

Un *empilement trivial* est soit l'empilement vide, soit un empilement dont toutes les pièces sont à la fois maximales et minimales, c'est à dire de niveau nul. L'ensemble des empilements triviaux sera noté \mathcal{T} .

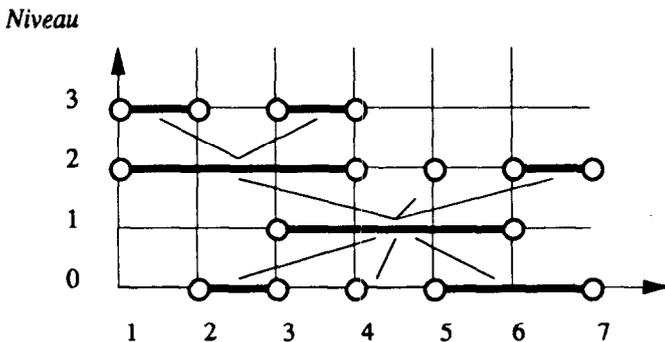


Fig. 1 Empilement de segments.
et diagramme de Hasse associé à la relation d'ordre sous-jacente.

2. STRUCTURE DE MONOÏDE

On définit sur l'ensemble $\mathcal{E}(\mathcal{A})$ des empilements un *produit* - ou *superposition* - d'empilements, qui confère à $\mathcal{E}(\mathcal{A})$ une structure de monoïde. *Superposer* l'empilement F sur l'empilement E consiste, intuitivement, à translater verticalement toutes les pièces de F d'une même hauteur supérieure au niveau maximum des pièces de E , puis à "laisser tomber" ces pièces sur celles de E .

Proposition / Définition 2. Soient E et F deux empilements, avec $F = \{P_1, \dots, P_k\}$.

a) Il existe des entiers n_1, \dots, n_k , et des ensembles $\mathfrak{N}_1, \dots, \mathfrak{N}_k$, uniques, vérifiant les conditions suivantes pour tout i , $1 \leq i \leq k$:

$$(i) \quad \mathfrak{N}_i = \{n \mid \exists P \in E, \text{niv}(P) = n, P \mathfrak{C} P_i\} \cup \{n_j \mid \text{niv}(P_j) < \text{niv}(P_i), P_j \mathfrak{C} P_i\};$$

$$(ii) \quad n_i = 0 \text{ si } \mathfrak{N}_i \text{ est vide,}$$

$$n_i = 1 + \max(\mathfrak{N}_i) \text{ sinon.}$$

b) L'ensemble $E' = E \cup \{(supp(P_i), n_i), 1 \leq i \leq k\}$ est un empilement, qui sera appelé *superposition de F sur E* , et noté $E \square F$.

Preuve. a) On construit les n_i et les \mathfrak{N}_i par récurrence montante sur le niveau de P_i .

Ainsi, si $\text{niv}(P_i) = 0$, $\mathfrak{N}_i = \{n \mid \exists P \in E, \text{niv}(P) = n, P \mathfrak{C} P_i\}$. Alors $n_i = 0$ si \mathfrak{N}_i est vide, et sinon n_i vaut $1 + \max(\mathfrak{N}_i)$.

Supposons avoir construit n_i et \mathfrak{N}_i pour toutes les pièces P_i de niveau strictement inférieur à m , $m \geq 1$. Soit alors P_i une pièce de niveau m ; on connaît, par hypothèse de récurrence, les valeurs de n_j pour toutes les pièces P_j en concurrence avec P_i et de niveau strictement inférieur. On en déduit les valeurs de \mathfrak{N}_i et de n_i .

b) Vérifions que les conditions (i) et (ii) de la définition 1 sont satisfaites.

La condition (ii) est vérifiée du fait de la définition de n_i et \mathfrak{N}_i .

Par ailleurs, considérons deux segments P et P' de E' , distincts et en concurrence. Trois cas sont possibles :

- P et P' sont deux pièces de E ; elles ne sont donc pas au même niveau, puisque E est un empilement ;

- P est une pièce de E et $P' = (supp(P_i), n_i)$ provient de l'empilement F . Alors $\text{niv}(P)$ est élément de \mathfrak{N}_i , et donc $\text{niv}(P') = n_i$ est strictement plus grand que $\text{niv}(P)$.

- P et P' proviennent de l'empilement F ; on a par exemple $P = (supp(P_i), n_i)$ et $P' = (supp(P_j), n_j)$, avec $\text{niv}(P_j) < \text{niv}(P_i)$. Alors n_j est élément de \mathfrak{N}_i et donc n_j est strictement plus petit que n_i .

Dans tous les cas, les pièces P et P' sont de niveau distinct, et la condition (i) est satisfaite: l'ensemble E' est bien un empilement. \square

Remarquons que si P et P' sont des pièces de $E \square F$ telles que $P' \leq_{E \square F} P$ et si P est élément de E , P' l'est aussi.

L'opération de superposition est associative et possède un élément neutre, qui est l'empilement vide. L'ensemble $\mathcal{E}(\mathcal{A})$ est ainsi pourvu d'une structure de monoïde.

Le lemme suivant décrit sous quelles conditions un empilement est factorisable.

Lemme 3. Soit G un empilement. Soit E un facteur gauche de l'ensemble partiellement ordonné G , c'est à dire un sous-ensemble de G vérifiant la condition suivante :

pour tout couple (P, P') de $E \times G$ tel que $P' \leq P$, la pièce P' est élément de E .

Alors E est un empilement, et il existe un unique empilement F tel que $E \square F = G$.

Preuve. Montrons d'abord que E est un empilement, en vérifiant les conditions (i) et (ii) de la définition 1.

La condition (i) est immédiatement satisfaite, puisque E est un sous-ensemble de l'empilement G .

Si P est un élément de E de niveau n non nul, il existe - dans G - une pièce P' de niveau $n-1$, en concurrence avec P . Mais, d'après la propriété vérifiée par E , la pièce P' sera aussi dans E .

Soit F' l'ensemble $G \setminus E$. Ecrivons $F' = \{P'_1, \dots, P'_k\}$, où $P'_i = (S_i, n_i)$. S'il existe un empilement F tel que $E \square F = G$, alors F s'écrit $\{P_1, \dots, P_k\}$, où $P_i = (S_i, m_i)$, et n_i a la valeur définie par la proposition précédente.

Mais alors les entiers m_i sont déterminés de façon unique par les deux relations :

- $m_i = 0$ si \mathfrak{M}_i est vide, $m_i = 1 + \max(\mathfrak{M}_i)$ sinon,
- $\mathfrak{M}_i = \{m_j / P'_j \subset P'_i \text{ et } n_j < n_i\}$.

Inversement, si les m_i sont définis de cette façon, F est toujours un empilement.

Pour démontrer que $G = E \square F$, il faut utiliser l'hypothèse portant sur E ; elle garantit que pour i donné, les pièces de E en concurrence avec P'_i sont de niveau inférieur à n_i . \square

Remarque. Ce lemme entraîne la *régularité à gauche* de tout élément E de $\mathcal{S}(\mathcal{A})$: soient F et F' deux empilements tels que $E \square F = E \square F'$, alors $F = F'$. On pourrait montrer de manière analogue que E est aussi *régulier à droite*.

3. MONOÏDE PARTIELLEMENT COMMUTATIF

Soit A un ensemble, et A^* le *monoïde libre engendré* par A , c'est à dire l'ensemble des mots u s'écrivant $u = a_1 \dots a_k$, où, pour tout i , a_i est élément de A , muni de l'opération de *concaténation* qui associe au couple (u, v) le mot uv obtenu en juxtaposant u et v . Les lettres du mot u sont a_1, \dots, a_k . L'ensemble A est appelé un *alphabet*.

Soit C une relation binaire sur A , antiréflexive ($a \not\subset a$ pour toute lettre a) et symétrique. Alors C induit sur A^* une relation d'équivalence, notée \equiv , définie de la façon suivante : parmi toutes les relations d'équivalence compatibles avec la structure de monoïde de A (c'est à dire telles que si $u \equiv u'$ et $v \equiv v'$, alors $uv \equiv u'v'$), et dont le graphe contient $\{(ab, ba) / a C b\}$, c'est celle dont graphe est le plus petit (au sens de l'inclusion). On vérifie facilement qu'une telle relation existe, et que deux éléments u et v de A^* sont équivalents si et seulement si une suite de transpositions de deux lettres consécutives a et b telles que $a C b$ transforme u en v . Deux lettres a et b *commutent* si et seulement si $a C b$.

Exemple. $A = \{a, b, c, d\}$. La relation symétrique et antiréflexive C est définie par son graphe $\{(a, b), (b, a), (a, c), (c, a)\}$. Alors les mots $abcd$ et $bcad$ sont équivalents.

Définition 4. Le *monoïde libre partiellement commutatif*, ou *monoïde à commutations partielles* engendré par C sur A^* est le monoïde quotient de A^* par la relation d'équivalence \equiv . On le note $Co(A, C)$.

Montrons que la notion de monoïde partiellement commutatif est équivalente à celle d'empilement de pièces. Soit \mathcal{A} un ensemble de supports, muni d'une relation de concurrence \mathfrak{C} . Choisissons pour alphabet A l'ensemble \mathcal{A} . La relation binaire C définie sur A par $S C S' \Leftrightarrow S \mathfrak{C} S'$ est symétrique et antiréflexive. On peut donc construire le monoïde partiellement commutatif $Co(\mathcal{A}, C)$.

Proposition 5. Soit Φ le morphisme de monoïde de \mathcal{A}^* dans l'ensemble $\mathfrak{E}(\mathcal{A})$ des empilements de pièces à support dans \mathcal{A} défini de la façon suivante :

$$\text{soit } S_1 \dots S_n \text{ un élément de } \mathcal{A}^*, \text{ alors } \Phi(S_1 \dots S_n) = \prod_{i=1}^n \{(S_i, 0)\}.$$

Le morphisme Φ est compatible avec la relation d'équivalence \equiv définie sur \mathcal{A}^* , et son morphisme quotient $\bar{\Phi}$ est un isomorphisme de monoïde de $Co(\mathcal{A}, C)$ sur $\mathfrak{E}(\mathcal{A})$.

Preuve. 1) Soient u et v deux mots équivalents de \mathcal{A}^* ; alors $\Phi(u) = \Phi(v)$. En effet, si deux lettres S et S' commutent, alors $S \mathfrak{C} S'$, et donc :

$$\{(S, 0)\} \square \{(S', 0)\} = \{(S', 0)\} \square \{(S, 0)\} = \{(S, 0), (S', 0)\},$$

ou encore $\Phi(SS') = \Phi(S'S)$.

Étant donnés deux mots u_0 et u_1 de \mathcal{A}^* , on a alors $\Phi(u_0 S S' u_1) = \Phi(u_0 S' S u_1)$. Le résultat annoncé s'en déduit en rappelant que, si u et v sont équivalents, une suite de transpositions de deux lettres consécutives et qui commutent transforme u en v .

2) Inversement, soient u et v tels que $\Phi(u) = \Phi(v) = E$. Montrons que $u \equiv v$. Remarquons d'abord que les longueurs de u et v sont égales (c'est le nombre de pièces de E), et raisonnons par récurrence sur cette longueur commune n .

Si n vaut un, le résultat est évident. Si $n \geq 2$, soit S la première lettre de u : alors $u = Su'$. Une des pièces minimales de E est alors de support S . Mais puisque $E = \Phi(v)$, une occurrence de S dans v commute avec toutes les lettres de v placées à sa gauche. En effet, si S était en concurrence avec une lettre S' placée à sa gauche, la pièce associée à S dans E serait située au dessus de celle associée à S' . Donc v est équivalent à un mot de la forme Sv' .

On a donc $\Phi(Sv') = \Phi(u) = \Phi(Su')$. Mais d'après le lemme 3 ci-dessus, il existe un empilement unique E' tel que $E = \{(S, 0)\} \square E'$. Dès lors $E' = \Phi(u') = \Phi(v')$, et d'après l'hypothèse de récurrence, $u' \equiv v'$, et donc $u \equiv v$. \square

Ainsi, la notion d'empilement de pièces est une illustration géométrique de la théorie des monoïdes libres partiellement commutatifs. Elle permet de visualiser et d'éclaircir un certain nombre de théorèmes, et particulièrement les *théorèmes d'inversion* que nous allons exposer.

4. THÉORÈMES D'INVERSION

Ces théorèmes permettent d'énumérer certaines familles d'empilements relativement à une valuation donnée.

Soit K un corps commutatif, x_1, \dots, x_n des indéterminées ; on appellera *valuation* toute application

$$v : \mathcal{A} \longrightarrow K[x_1, \dots, x_n],$$

vérifiant les deux conditions suivantes :

- pour tout élément S de \mathcal{A} , $v(S)$ est un polynôme en x_1, \dots, x_n sans coefficient constant ;
- pour tout monôme $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, le nombre de supports dont la valuation a une composante non nulle relativement à ce monôme est fini.

La *valuation* d'une pièce sera alors celle de son support. La *valuation* d'un empilement E , encore notée $v(E)$, sera le produit des valuations de ses pièces.

Les conditions imposées sur v assurent alors la convergence formelle de la série $\sum v(E)$, où la somme porte sur tous les empilements E de $\mathcal{E}(\mathcal{A})$. Si \mathcal{E}' est un sous ensemble de $\mathcal{E}(\mathcal{A})$, la somme des valuations des empilements de \mathcal{E}' converge encore et sera appelée *série génératrice des empilements de \mathcal{E}'* .

Le premier théorème que nous allons démontrer est analogue à l'inversion de Möbius pour les monoïdes partiellement commutatifs ([Ca-Fo]) et permet d'énumérer tous les empilements de $\mathcal{E}(\mathcal{A})$. Un second théorème, dû à Viennot [Vi4], le généralise : étant donné un sous-ensemble \mathfrak{M} de \mathcal{A} , on dit, par abus de langage, qu'une pièce est dans \mathfrak{M} si son support s'y trouve. Ce second théorème fournit alors la série génératrice des empilements dont toutes les pièces maximales - ou minimales - sont dans \mathfrak{M} .

Notation. $Max(E)$ (resp. $Min(E)$) désignera l'ensemble des pièces maximales (resp. minimales) de E .

Théorème 6. (i) La série génératrice des empilements de $\mathcal{E}(\mathcal{A})$ est :

$$\sum_{E \in \mathcal{E}} v(E) = \frac{1}{\sum_{F \in \mathcal{T}} (-1)^{|F|} v(F)},$$

où \mathcal{T} est l'ensemble des empilements triviaux, et $|F|$ désigne le nombre de pièces de F .

(ii) Soit \mathfrak{M} un sous-ensemble de \mathcal{A} . La série génératrice des empilements ayant toutes leurs pièces maximales (ou toutes leurs pièces minimales) dans \mathfrak{M} est :

$$\sum_{E / Max(E) \subset \mathfrak{M}} v(E) = \frac{\sum_{F \in \mathcal{T}(\mathfrak{M}^c)} (-1)^{|F|} v(F)}{\sum_{F \in \mathcal{T}} (-1)^{|F|} v(F)}$$

où $\mathcal{T}(\mathfrak{M}^c)$ est l'ensemble des empilements triviaux à pièces dans le complémentaire de \mathfrak{M} .

Preuve. Nous allons simplement montrer le second résultat, puisqu'il implique le premier (il suffit de choisir $\mathfrak{M} = \mathcal{A}$). En regroupant les couples (E, F) donnant la même superposition E' , on parvient à l'identité :

$$\left(\sum_{E / Max(E) \in \mathfrak{M}} v(E) \right) \left(\sum_{F \in \mathcal{T}} (-1)^{|F|} v(F) \right) = \sum_{E'} \left(v(E') \sum_{(E, F)} (-1)^{|F|} \right),$$

dans laquelle E' décrit l'ensemble des empilements pouvant s'écrire $F \square E$, E et F vérifiant les deux conditions suivantes :

- E est un empilement à pièces maximales dans \mathfrak{M} ,
- F est un empilement trivial,

et la seconde somme porte justement sur les couples (E, F) permettant cette écriture, pour E' donné.

Soit donc $E' = F \square E$, où E et F satisfont les deux conditions ci-dessus. Alors F est inclus dans l'ensemble des pièces minimales de E' . D'autre part, F contient l'ensemble F_0 formé des pièces minimales de E' qui sont en même temps maximales et dans le complémentaire de \mathfrak{M} : ces pièces ne peuvent en effet provenir de E .

Inversement, si F_1 contient F_0 et est inclus dans l'ensemble des pièces minimales de E' , l'unique empilement E_1 tel que $E' = F_1 \square E_1$ (lemme 3) a ses pièces maximales dans \mathfrak{M} . Or

$$\sum_{F_0 \subset F_1 \subset \text{Min}(E')} (-1)^{|F_1|} = 0,$$

sauf si $F_0 = \text{Min}(E')$, ce qui équivaut à dire que E' est un empilement trivial à pièces dans ${}^c\mathfrak{M}$, et entraîne le théorème. \square

Remarque. Une des commodités de la notion d'empilement de pièces est ce concept de pièce minimale (resp. maximale), plus facile à visualiser que celui de lettre commutant avec toutes les lettres placées à sa gauche (resp. droite) qui lui correspond pourtant par l'isomorphisme Φ décrit en proposition 5.

Dans le même ordre d'idées, Cartier et Foata [Ca-Fo] démontrent que chaque mot u du monoïde partiellement commutatif $Co(A, C)$ admet une unique *forme normale*, c'est à dire un représentant de u de la forme $u_1 u_2 \dots u_n$, où :

- pour $1 \leq i \leq n$, u_i est élément du monoïde A^* ,
- pour $1 \leq i \leq n$, toutes les lettres de u_i commutent entre elles,
- pour $2 \leq i \leq n$, et pour toute lettre a de u_i , il existe une lettre de u_{i-1} ne commutant pas avec a .

Alors u_i est le mot obtenu en concaténant les supports des pièces de niveau $i-1$ de l'empilement $\Phi(u)$.

Nous proposons ici un troisième théorème, nouveau et impliquant les deux précédents. Etant donnés deux sous-ensembles \mathfrak{M}_1 et \mathfrak{M}_2 de \mathcal{A} , il fournit la série génératrice des empilements ayant toutes leurs pièces maximales dans \mathfrak{M}_1 et toutes leurs pièces minimales dans \mathfrak{M}_2 .

Lemme 7. Soient \mathfrak{M}_1 et \mathfrak{M}_2 deux sous-ensembles de \mathcal{A} . On a l'identité suivante :

$$\frac{\left(\sum_{F \in \mathfrak{U}({}^c\mathfrak{M}_1)} (-1)^{|F|} v(F) \right) \left(\sum_{F \in \mathfrak{U}({}^c\mathfrak{M}_2)} (-1)^{|F|} v(F) \right)}{\sum_{F \in \mathfrak{U}} (-1)^{|F|} v(F)} = \sum_{(E,F)} (-1)^{|F|} v(E \square F),$$

où la somme apparaissant dans le membre de droite est relative aux couples (E, F) d'empilements vérifiant les trois conditions suivantes (Fig.2) :

- les pièces maximales de E sont dans \mathfrak{M}_1 et ses pièces minimales dans \mathfrak{M}_2 ;
- F est un empilement trivial à pièces dans l'intersection des complémentaires de \mathfrak{M}_1 et \mathfrak{M}_2 ;
- E et F ne sont pas en concurrence.

Preuve. D'après la proposition précédente,

$$\frac{\sum_{F \in \mathfrak{U}({}^c\mathfrak{M}_1)} (-1)^{|F|} v(F)}{\sum_{F \in \mathfrak{U}} (-1)^{|F|} v(F)}$$

est la série génératrice des empilements à pièces maximales dans \mathfrak{M}_1 . On a donc l'identité :

$$\frac{\left(\sum_{F \in \mathcal{U}(\mathfrak{M}_1)} (-1)^{|F|} \nu(F) \right) \left(\sum_{F \in \mathcal{U}(\mathfrak{M}_2)} (-1)^{|F|} \nu(F) \right)}{\sum_{F \in \mathcal{U}} (-1)^{|F|} \nu(F)} = \sum_{E'} \left(\nu(E') \sum_{(E,F)} (-1)^{|F|} \right),$$

dans laquelle E' décrit l'ensemble des empilements pouvant s'écrire $F \sqcup E$, où E et F vérifient les conditions suivantes :

- E est un empilement à pièces maximales dans \mathfrak{M}_1 ;
- F est un empilement trivial à pièces dans le complémentaire de \mathfrak{M}_2 ,

et la seconde somme porte sur les couples (E, F) permettant justement cette écriture, pour E' donné.

Soit donc $E' = F \sqcup E$, où E et F satisfont les conditions ci-dessus. Alors F est inclus dans l'ensemble des pièces minimales de E' qui sont éléments de ${}^c\mathfrak{M}_2$. Par ailleurs, F contient forcément l'ensemble F_0 formé des pièces minimales de E' qui sont en même temps maximales et dans ${}^c\mathfrak{M}_1$: elles ne peuvent en effet provenir de E . En conséquence, ces pièces sont aussi dans ${}^c\mathfrak{M}_2$.

Inversement, soit F_1 contenant F_0 et inclus dans l'ensemble des pièces minimales de E' qui sont dans ${}^c\mathfrak{M}_2$. Alors l'unique empilement E_1 tel que $E' = F_1 \sqcup E_1$ a toutes ses pièces maximales dans \mathfrak{M}_1 .

Or
$$\sum_{F_0 \subset F_1 \subset \text{Min}(E') \cap {}^c\mathfrak{M}_2} (-1)^{|F_1|} = 0,$$

sauf si toutes les pièces minimales de E' qui sont dans ${}^c\mathfrak{M}_2$ sont aussi maximales et dans ${}^c\mathfrak{M}_1$. L'ensemble F_0 est alors égal à F et est formé de ces pièces ; il est donc élément de $\mathcal{U}({}^c\mathfrak{M}_1 \cap {}^c\mathfrak{M}_2)$.

Comme toutes les pièces de F sont à la fois maximales et minimales dans l'empilement $E' = F \sqcup E$, on peut affirmer que E et F ne sont pas en concurrence. Les pièces minimales de E sont alors les pièces minimales de E' qui ne sont pas dans ${}^c\mathfrak{M}_2$, et donc $\text{Min}(E)$ est inclus dans \mathfrak{M}_2 . Rappelons enfin que $\text{Max}(E)$ est inclus dans \mathfrak{M}_1 , ce qui achève la preuve. \square

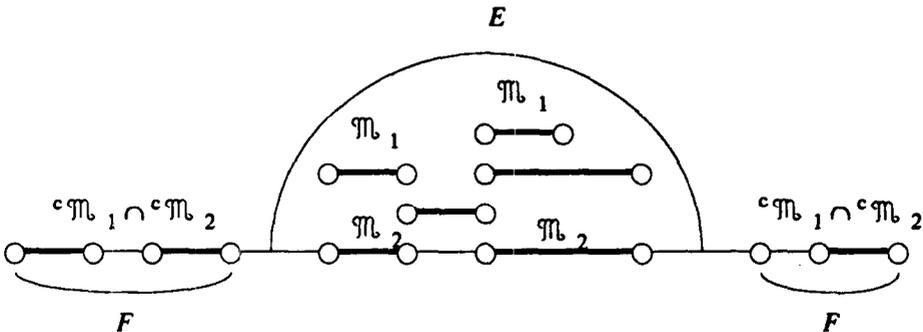


Fig. 2

Remarque. Lorsque l'intersection des complémentaires de \mathfrak{M}_1 et \mathfrak{M}_2 est vide (et notamment lorsque \mathfrak{M}_1 ou \mathfrak{M}_2 est égal à \emptyset), ce lemme fournit la série génératrice des empilements dont

toutes les pièces maximales (resp. minimales) sont dans \mathfrak{M}_1 (resp. \mathfrak{M}_2). Dans les autres cas, des termes supplémentaires apparaissent dans le membre de droite de l'identité que l'on vient de montrer.

Notations. Soit E un empilement. On notera \bar{E} l'ensemble des éléments de \mathcal{A} qui ne sont en concurrence avec aucun des supports des pièces de E , et $\mathcal{E}(\bar{E})$ l'ensemble des empilements de pièces à support dans \bar{E} . Ainsi, dire que deux empilements E et F ne sont pas en concurrence équivaut à dire que $E \in \mathcal{E}(\bar{F})$ (ou encore que $F \in \mathcal{E}(\bar{E})$).

Théorème 8. Soient \mathfrak{M}_1 et \mathfrak{M}_2 deux sous-ensembles de \mathcal{A} . La série génératrice des empilements dont toutes les pièces maximales sont dans \mathfrak{M}_1 et toutes les pièces minimales dans \mathfrak{M}_2 est :

$$\sum_{\substack{E/\text{Max}(E) \subset \mathfrak{M}_1 \\ \text{Min}(E) \subset \mathfrak{M}_2}} v(E) = \sum_{G \in \mathcal{U}({}^c\mathfrak{M}_1 \cap {}^c\mathfrak{M}_2)} v(G) \left(\frac{\left(\sum_{F \in \mathcal{U}({}^c\mathfrak{M}_1 \cap \bar{G})} (-1)^{|F|} v(F) \right) \left(\sum_{F \in \mathcal{U}({}^c\mathfrak{M}_2 \cap \bar{G})} (-1)^{|F|} v(F) \right)}{\sum_{F \in \mathcal{U}(\bar{G})} (-1)^{|F|} v(F)} \right).$$

Preuve. Pour simplifier les notations, notons \mathcal{E}' l'ensemble des empilements dont toutes les pièces maximales (resp. minimales) sont dans \mathfrak{M}_1 (resp. \mathfrak{M}_2). On peut écrire :

$$\sum_{E \in \mathcal{E}'} v(E) = \sum_{(E, F) \in \mathcal{E} \times \mathcal{U}({}^c\mathfrak{M}_1 \cap {}^c\mathfrak{M}_2 \cap \bar{E})} \left((-1)^{|F|} v(E \boxplus F) \sum_{G \subset F} (-1)^{|G|} \right),$$

puisque la somme portant sur G est nulle, sauf si F est vide, auquel cas elle vaut un.

En écrivant $F = G \boxplus F'$, où F' est élément de $\mathcal{U}({}^c\mathfrak{M}_1 \cap {}^c\mathfrak{M}_2 \cap \bar{G})$, et en inversant les sommations, il vient :

$$\sum_{\substack{E/\text{Max}(E) \subset \mathfrak{M}_1 \\ \text{Min}(E) \subset \mathfrak{M}_2}} v(E) = \sum_{G \in \mathcal{U}({}^c\mathfrak{M}_1 \cap {}^c\mathfrak{M}_2)} v(G) \left(\sum_{\substack{(E, F)/E \in \mathcal{E}' \cap \mathcal{E}(\bar{G}) \\ F \in \mathcal{U}({}^c\mathfrak{M}_1 \cap {}^c\mathfrak{M}_2 \cap \bar{G} \cap \bar{E})}} (-1)^{|F|} v(E \boxplus F') \right).$$

Mais on reconnaît dans la seconde somme

$$\frac{\left(\sum_{F \in \mathcal{U}({}^c\mathfrak{M}_1 \cap \bar{G})} (-1)^{|F|} v(F) \right) \left(\sum_{F \in \mathcal{U}({}^c\mathfrak{M}_2 \cap \bar{G})} (-1)^{|F|} v(F) \right)}{\sum_{F \in \mathcal{U}(\bar{G})} (-1)^{|F|} v(F)}$$

ce qui achève la preuve. (Il suffit en effet d'appliquer le lemme précédent en remplaçant \mathcal{A} par \bar{E} , \mathfrak{M}_1 (resp. \mathfrak{M}_2) par $\mathfrak{M}_1 \cap \bar{E}$ (resp. $\mathfrak{M}_2 \cap \bar{E}$)). \square

Références.

- [Ca-Fo] P. CARTIER, D. FOATA, Problèmes combinatoires de commutations et réarrangements, Lect. Notes in Math., 85, Springer-Verlag, Berlin, 1969.
- [Co-Me] R. CORI, Y. METIVIER, Rational subsets of some partially abelian monoids, Theor. Comp. Sci. 35 (1985) 179-189.
- [Co-Pe] R. CORI, D. PERRIN, Sur la reconnaissabilité dans les monoïdes partiellement commutatifs libres, R. A. I. R. O. Info. Theor. 19 (1985) 21-32.
- [Fo1] D. FOATA, A non-commutative version of the matrix inversion formula, Adv. in Math. 31 (1979) 330-349.
- [Fo2] D. FOATA, A combinatorial proof of Jacobi's identity, Annals of Discr. Math. 6 (1980) 125-135.
- [Ge] I. GESSEL, Communication personnelle à X.G. Viennot, citée dans [Vi6].
- [La] P. LALONDE, Contribution à l'étude des empilements, Thèse, Université du Québec à Montréal, novembre 1990.
- [Pe1] J. G. PENAUD, Une nouvelle bijection pour les animaux dirigés, rapport LaBRI n°89-45, Actes du 22^{ème} Séminaire Lotharingien de Combinatoire, Hesselberg, 1989, 93-130.
- [Pe2] J. G. PENAUD, Arbres et Animaux, Mémoire d'habilitation à diriger les recherches, Bordeaux, Mai 1990.
- [Vi1] X.G. VIENNOT, Une interprétation combinatoire des coefficients des développements en série des fonctions elliptiques de Jacobi, J. Comb. Th. A 29 (1980) 121-133.
- [Vi2] X.G. VIENNOT, Problèmes combinatoires posés par la physique statistique, Séminaire Bourbaki n°626, 36^{ème} année, in Astérisque n°121-122 (1985) 225-246, Soc. Math. France.
- [Vi3] X.G. VIENNOT, A combinatorial theory for general orthogonal polynomials with extensions and applications, in "Polynômes orthogonaux et leurs applications", Lect. Notes in Math. 1171, eds. C. Brezinski, A. Draux, A. Magnus, P. Maroni, A. Ronveaux, pp 139-157, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [Vi4] X.G. VIENNOT, Heaps of pieces I : Basic definitions and combinatorial lemmas, in Combinatoire énumérative, eds. G. Labelle et P. Leroux, Lect. Notes in Math. 1234, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [Ze] D. ZEILBERGER, A combinatorial approach to matrix algebra, Discr. Math. 56 (1985) 61-72.
- [Zi] W. ZIELONKA, Notes on finite asynchronous automata and trace languages, RAIRO Inf. Theor. 21 (1987) 99-135.