

Publications du **Laboratoire de
Combinatoire et d'
Informatique
Mathématique**

7

Luc Favreau

**Combinatoire des tableaux oscillants
et des polynômes de Bessel**

Département de mathématiques et d'informatique



Université du Québec à Montréal

Combinatoire des tableaux oscillants et des polynômes de Bessel

Nous nous intéressons dans ce travail, à la classe des tableaux oscillants généralisant les tableaux de Young standards (ces derniers ayant été abondamment étudiés, notamment dans le cadre de la théorie des représentations du groupe symétrique).

Nous donnerons un algorithme combinatoire généralisant l'algorithme de Robinson-Schensted et démontrant une identité fondamentale sur les dimensions des représentation de l'algèbre de Brauer. Cette généralisation de la correspondance de Robinson-Schensted possède deux propriétés de symétrie, analogues à celles de Schützenberger pour le groupe symétrique.

Nous en déduisons des formules d'énumération pour les tableaux oscillants suivant plusieurs paramètres : longueur, forme finale et hauteur de la bande dans laquelle ils évoluent.

Pour terminer, nous réalisons une théorie combinatoire complète des polynômes de Bessel (équation différentielle, récurrence à trois termes, série génératrice et orthogonalité) à la base de laquelle se trouve une famille particulière de tableaux oscillants reliée aux involutions.

TABLE DES MATIÈRES

0. Introduction.....	1
1. Notions préliminaires.....	9
2. Correspondance de type Robinson-Schensted pour les tableaux oscillants.....	21
3. Dénombrement de classes de tableaux oscillants.....	39
4. Une théorie combinatoire des polynômes de Bessel.....	71
5. Bibliographie.....	99

Laboratoire de combinatoire et d'informatique mathématique
Département de mathématiques et d'informatique
Université du Québec à Montréal
C.P. 8888, Succ. A
Montréal, Qc.
Canada H3C 3P8



Responsable de la collection:

Srećko Brlek

LACIM

Université du Québec à Montréal

C.P. 8888, Succ. A

Montréal, Qc.

Canada H3C 3P8 .

e-mail: brlek@lacim.uqam.ca

Ce numéro constitue la publication d'une thèse soutenue devant jury, pour l'obtention du grade de Docteur.

Composition du Jury

F. DRESS

S. DULUCQ

D. GOUYOU-BEAUCHAMPS

P. LEROUX

J. G. PENAUD

V. STREHL

X.G. VIENNOT

D. ZEILBERGER

LABRI, Un. Bordeaux I

LABRI, Un. Bordeaux I

LRI, Un. de Paris-Sud, Rapporteur

UQAM, Rapporteur

LABRI, Un. Bordeaux I

Erlangen, Président

LABRI, Un. Bordeaux I, Rapporteur

Temple University

Dépôt légal, deuxième semestre 1991, Bibliothèque nationale du Québec.

ISBN 2-89276-093-3 LACIM Montréal

© LACIM, Montréal, Septembre 1991.

Laboratoire de combinatoire et d'informatique mathématique

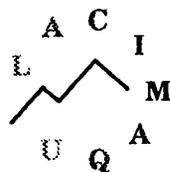
Département de mathématiques et d'informatique

Université du Québec à Montréal

C.P. 8888, Succ. A

Montréal, Qc.

Canada H3C 3P8



THÈSE

Présentée

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

pour obtenir le grade de

Docteur

Spécialité : INFORMATIQUE

par

Luc Favreau

**COMBINATOIRE DES TABLEAUX OSCILLANTS
ET DES
POLYNÔMES DE BESSEL**

Soutenue le 6 mai 1991 devant la Commission d'Examen:

MM. V. STREHL

Président

F. DRESS

Examineurs

S. DULUCQ

...

D. GOUYOU-BEAUCHAMPS

...

P. LEROUX

...

J.G. PENAUD

...



Dès le début j'ai pensé au moment où j'allais écrire ces remerciements, non parce que j'y voyais une contrainte mais bien parce que j'allais pouvoir, par ces courtes phrases, vraiment dire merci à tous ceux et celles qui durant ces mois où j'ai cherché, réfléchi et finalement rédigé, ont participé de près ou de loin, qui m'ont encouragé et motivé. Mais je me rends compte aujourd'hui, en rédigeant ces lignes, qu'il est très difficile étant donné le cadre et l'espace de remercier chacun comme il se doit. Voici je l'espère l'essentiel, mais je me promets de compléter ces remerciements de vive voix.

Je veux d'abord remercier le professeur Volker Strehl d'avoir accepté de présider le jury de cette thèse.

Je suis très honoré de la présence dans ce jury de Monsieur le professeur François Dress, vice-président de l'Université de Bordeaux I, chargé de la Recherche. Il a permis cette coopération Franco-Québécoise dans le cadre de laquelle cette thèse s'est déroulée. Qu'il en soit ici vivement remercié.

Xavier Viennot fut le premier à m'attirer vers la combinatoire lors de son séjour à l'UQAM en 1985, je tiens à le remercier ici pour m'avoir communiqué son enthousiasme et pour ses nombreuses suggestions au cours de mon séjour à Bordeaux.

Jean-Guy Penaud est une personne qui compte beaucoup pour moi, d'avoir accepté de faire parti de ce jury et de sa grande amitié j'aimerais le remercier.

D. Gouyou-Beauchamps a entre autre travaillé sur les problèmes de dénombrement des tableaux de Young, sujet important dans cette thèse, je le remercie d'avoir accepté d'être membre du jury.

D. Zeilberger est un des pionniers dans le domaine de la combinatoire aux États-Unis, je tiens à souligner l'honneur qu'il me fait de participer à ce jury.

Un merci à l'équipe de combinatoire du LACIM en particulier à Pierre Leroux pour sa participation au jury, son aide et ses judicieuses suggestions. Merci également à Srećko Brlek et à François Bergeron pour leurs constants encouragements tout au long de cette thèse.

Je crois qu'aucun merci n'exprimerait mes sentiments envers les gens de Bordeaux avec qui ce fut plus qu'un plaisir de vivre et travailler. Parmi toutes les expériences que j'ai pu vivre, celle de Bordeaux en fut une des plus positives. Je veux donc remercier les membres de l'équipe de combinatoire : Xavier Viennot, Jean-Guy Penaud, Serge Dulucq, Maylis Delest, Jean-Claude Lalanne, Jean-Marc Fedou, Jean Betréma. Merci également à Giuliana Bianchi, Bernard Vauquelin, Pierre Castéran, Achille Braquelaire, Myriam Braquelaire, Robert Strand, Vivianne Delétage, Mireille Penaud, Nicole Cori, Jean-Louis Ermine, qui ont contribué à rendre agréable mon séjour à Bordeaux. Un merci particulier à Robert Cori, un patron comme on peut en rêver.

Finalement un merci spécial, bien qu'insuffisant, à mon directeur et ami Serge Dulucq qui fut un complice avec lequel ce fut un plaisir de travailler. Il a dépensé sans regarder une

énergie formidable pour me diriger tout au long de cette thèse, je lui suis très reconnaissant. Je voudrais également remercier Nadine, son épouse, j'espère qu'elle et ses filles, Cécile et Magali, me pardonneront le temps volé à leur vie familiale.

TABLE DES MATIÈRES

	Page
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I	
NOTIONS PRÉLÉMINAIRES	9
1.1 Diagrammes de Ferrers et Partages	9
1.2 Tableaux de Young	10
1.3 Combinatoire des tableaux de Young	11
1.4 Dénombrement des tableaux de Young	17
1.5 Polynômes orthogonaux	19
CHAPITRE II	
CORRESPONDANCE DE TYPE ROBINSON-SCHENSTED POUR LES TABLEAUX OSCILLANTS.	21
2.1 Tableaux oscillants	21
2.2 Formule des équerres	22
2.3 L'algèbre de Brauer	24
2.4 Correspondance de type Robinson-Schensted	27
2.5 Quelques remarques	37
2.6 Conclusion	38
CHAPITRE III	
DÉNOMBREMENT DE CLASSES DE TABLEAUX OSCILLANTS	39
3.1 Tableaux oscillants selon la longueur et forme finale	39
3.2 Tableaux oscillants selon la longueur, la hauteur exacte et la forme finale	41
3.3 Preuve du théorème 3.5	47
3.4 Preuve des lemmes 3.11 et 3.12	61

CHAPITRE IV	UNE THÉORIE COMBINATOIRE DES POLYNÔMES DE BESSEL	71
	4.1 Introduction	71
	4.2 Le modèle combinatoire	75
	4.3 Équations de récurrence aux dérivées	80
	4.4 La série génératrice exponentielle des polynômes de Bessel	83
	4.5 Orthogonalité des polynômes de Bessel	89
	4.6 Le problème de la linéarisation	94
CONCLUSION		97
BIBLIOGRAPHIE		99

INTRODUCTION

Le point de départ de ce travail est l'étude des tableaux oscillants généralisant les tableaux de Young standards. Trois thèmes ayant en commun ces objets combinatoires seront développés dans cette thèse. Nous allons d'abord donner une généralisation de l'algorithme de Robinson-Schensted pour ces tableaux, algorithme possédant des symétries analogues à celles découvertes par Schützenberger. Nous démontrons également que les tableaux de Young standards de hauteur $2k$, ayant c colonnes de hauteur impaire, sont en bijection avec les tableaux oscillants de hauteur k et de forme finale $\lambda = (c)$, une conjecture de D. Gouyou-Beauchamps. Nous verrons aussi que l'ensemble des tableaux oscillants est en bijection avec l'ensemble des involutions bicolorées. En se restreignant aux tableaux oscillants dont la forme finale est $\lambda = (c)$, en bijection avec un sous-ensemble des involutions bicolorées, nous obtiendrons un modèle combinatoire pour les polynômes orthogonaux de Bessel. Ce modèle nous permettra des démonstrations combinatoires pour la plupart des identités classiques, telles que la récurrence à trois termes, les récurrences différentielles, la série génératrice. De plus, nous aurons une preuve entièrement combinatoire de l'orthogonalité de cette famille de polynômes.

Tableaux de Young standards (rappels historiques).

Les tableaux de Young jouent un rôle important dans divers domaines scientifiques, notamment en combinatoire. On les retrouve dans des sujets aussi divers que la théorie des représentations du groupe symétrique [Fav], [Garn], [Gars], [Rob], [Rut], [Sag3], [Sun2], [You], et dans l'étude du parallélisme en théorie informatique [Fra]. Ils furent introduits par A. Young [You] en 1900 pour permettre le calcul de certains idempotents de l'algèbre du groupe symétrique \mathfrak{S}_n ainsi que le calcul des matrices de représentations irréductibles de ce groupe.

Autour des années soixante, une bijection découverte par Schensted [Sche] et auparavant par Robinson [Rob] sous une autre forme, permet de démontrer combinatoirement l'identité

$$n! = \sum_{\lambda \vdash n} (n_\lambda)^2,$$

où $n!$ est la dimension de la représentation régulière du groupe symétrique \mathfrak{S}_n et où n_λ est à la fois le degré et la multiplicité de la représentation irréductible associée au partage λ . Cette bijection est maintenant devenue classique sous le nom de correspondance de Robinson-Schensted. Elle associe aux éléments du groupe symétrique \mathfrak{S}_n les paires (P, Q) de tableaux de Young standards de même forme. Cette bijection notée

$$\sigma \leftrightarrow (P(\sigma), Q(\sigma)),$$

fut l'objet d'une étude approfondie et des propriétés spectaculaires sont alors apparues [Gre], [Sche], [Schü1-5], [Vie]. Les principaux résultats, dont ceux concernant la caractérisation des multiples liens entre les paires de tableaux associés à une permutation, l'inverse et l'image miroir de cette permutation, sont ceux obtenus par Schützenberger [Schü1-5]. Pour ces permutations on a

$$(P(\sigma^{-1}), Q(\sigma^{-1})) = (Q(\sigma), P(\sigma)) \text{ et } (P(\sigma^*), Q(\sigma^*)) = (P^T(\sigma), Q_{v,r}^T(\sigma))$$

où $P^T(\sigma)$ est le tableau $P(\sigma)$ transposé et $Q_{v,r}^T(\sigma)$ est obtenu de $Q(\sigma)$ par transposition et en appliquant l'algorithme connu sous le nom de "vidage-remplissage", également dû à Schützenberger [Schü1].

Citons également les travaux de Knuth [Knu] caractérisant la classe des permutations ayant un même *P-symbole*, et ceux de Greene [Gre] concernant l'interprétation de la forme du partage sous-jacent aux tableaux P et Q à partir de la permutation .

Plus tard Viennot [Vie1], [Vie3] donnera une version géométrique de cette correspondance, la rendant symétrique. Cette nouvelle approche permettra de mieux comprendre certaines propriétés découvertes par Schützenberger. Notamment la propriété concernant une permutation et son inverse y trouve une explication tout à fait naturelle.

Outre les résultats reliés à la correspondance de Robinson-Schensted, on retrouve des problèmes de dénombrement de certaines classes de ces tableaux. Entre autres, mentionnons la formule des équerres, [Fr-Ro-Tr],

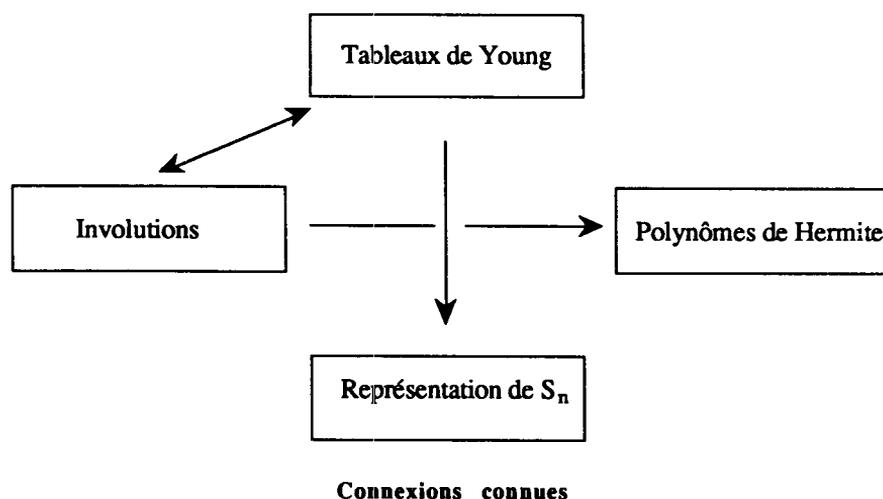
$$n_\lambda = \frac{n!}{\prod_i h_i}$$

donnant le nombre de tableaux de Young standards d'une forme donnée. Cette formule a été démontrée de diverses façons. Il existe une preuve algébrique utilisant les déterminants de Vandermonde [Ja-Ke]. On trouve également quelques démonstrations combinatoires : celle de Remmel [Rem], ou bien celle de Zeilberger [Zei], utilisant la notion de tableau pointeur, pour ne citer que celles-là. Il y a aussi une preuve probabiliste, utilisant un algorithme générant aléatoirement et uniformément un tableau ayant une forme donnée. Cette démonstration est due à Greene, Nijenhuis et Wilf, [Gr-Ni-Wi].

On s'est également intéressé au dénombrement des tableaux selon les paramètres taille et hauteur. Les valeurs asymptotiques de ces nombres ont été données par A. Regev [Reg]. R. Stanley quant à lui s'est intéressé à l'algébricité des séries génératrices de ces tableaux [Sta]. Plus récemment, D. Gouyou Beauchamps [Gou3] a donné des formules exactes pour le nombre de tableaux de Young standards dont la hauteur est au plus k , pour $k = 4$ et $k = 5$ et a démontré que les séries génératrices correspondantes n'étaient pas algébriques. Il est intéressant de noter que les tableaux de Young standards de hauteur au plus quatre sont dénombrés par un produit de nombres de Catalan, lesquels dénombrent également les chemins sous-diagonaux du plan, à quatre pas élémentaires et se terminant sur l'axe des abscisses. Il y a en effet une bijection entre ces chemins et les tableaux de Young standards de hauteur au plus quatre. Cette bijection était à l'origine une conjecture de Viennot et a été démontrée par D. Gouyou-Beauchamps [Gou2], [Gou3]. Ce dernier avait par la suite fait la conjecture que les tableaux de Young standards, de hauteur au plus $2k$, ayant c colonnes de hauteur impaire était en bijection avec les chemins "sous-diagonaux" de \mathbb{R}^k , à $2k$ pas élémentaires et se terminant sur l'axe des abscisses en position $(c, 0)$.

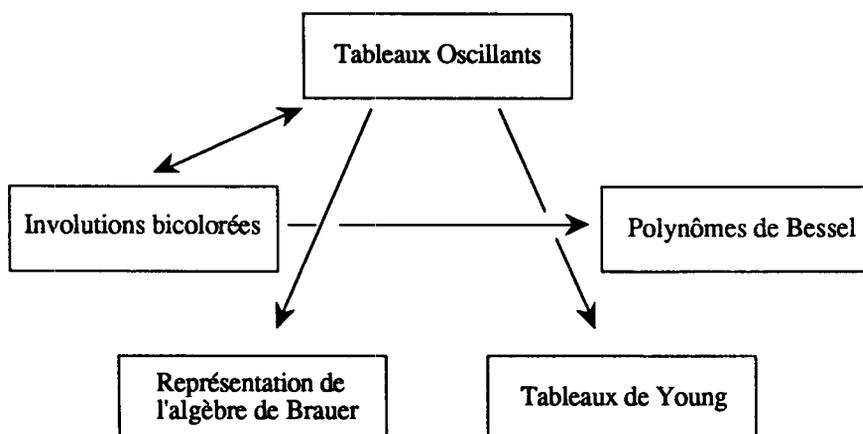
Des relations découvertes par Schützenberger, on obtient en particulier que les tableaux de Young standards sur n cellules sont en bijection avec les involutions sur n points. Ces involutions, à leur tour, sont à la base d'un modèle combinatoire pour les polynômes orthogonaux de Hermite [Foa2]. En effet, sous une valuation des points fixes et des arêtes de ces involutions, on obtient un modèle combinatoire pour ces polynômes [Foa2]. À partir de ce modèle il est possible de démontrer combinatoirement les résultats classiques sur ces polynômes, ainsi que la formule des coefficients de la linéarisation [Sa-Vi].

Ainsi, la combinatoire des tableaux est riche et peut être schématisée par le diagramme suivant présentant les connexions bien connues à ce jour.



Tableaux Oscillants

Dans cette thèse nous nous intéressons à une généralisation des tableaux de Young standards et nous allons mettre en évidence les relations présentées par le diagramme suivant,



Connexions étudiées

Une généralisation naturelle des tableaux de Young est la classe des tableaux oscillants. Il s'avère que ces tableaux interviennent dans l'étude des représentations irréductibles de l'algèbre de Brauer [Bra], [Ber], [Sun1], [Mac]. Il existe une formule pour le nombre f_n^λ de tableaux oscillant de longueur n et de forme finale λ [Sun1]. La correspondance de Robinson-Schensted se généralise également aux tableaux oscillants. Les objets jouant le même rôle que les permutations pour cette correspondance sont les éléments de la base (en tant qu'espace vectoriel) de l'algèbre de Brauer. Ces éléments, que nous appellerons générateurs, sont eux-mêmes une généralisation des permutations. Cette généralisation de la correspondance possède les mêmes propriétés que celles obtenues par Schützenberger. Ce problème a été étudié entre autres par Maclarnan [Mac] et Sundaram [Sun], mais dans les deux cas la correspondance proposée ne possède qu'une des deux propriétés analogues à celles de Schützenberger. La correspondance que nous proposons à notre tour, très près de celle de Sundaram, possède ces deux propriétés. Elle généralise donc l'algorithme de Robinson-Schensted et de plus, permet une interprétation des multiplicités des représentations irréductibles induites de \mathfrak{S}_m à \mathfrak{S}_n , ainsi que l'analogue pour les représentations de l'algèbre de Brauer.

On verra que l'ensemble de ces tableaux est en bijection avec l'ensemble des involutions bicolorées. De plus, la nature de ces tableaux ainsi que la correspondance présentée nous permettent de démontrer une conjecture de Gouyou-Beauchamps [Gou2], [Gou3] reliant les tableaux de Young dont les hauteurs ne dépassent pas $2k$ aux chemins "sous-diagonaux" à $2k$ pas dans un espace à k dimensions. En effet, nous allons montrer que ces chemins sous-diagonaux sont en bijection naturelle avec certains tableaux oscillants dont la hauteur ne dépasse pas k , ceux-ci étant en bijection avec certaines involutions. En utilisant

deux versions de l'algorithme généralisé de Robinson-Schensted, l'insertion-ligne et l'insertion-colonne, nous arriverons à construire une bijection entre les involutions, de telle sorte que les involutions obtenues soient elles-mêmes en bijection, par l'algorithme classique de Robinson-Schensted, avec des tableaux de Young standards de hauteur au plus $2k$.

En étudiant certains tableaux oscillants caractérisés par leur forme finale, en bijection avec les involutions à nombre de cycles fixes (points fixes et cycles de longueur deux) on obtient, par une pondération des cycles de longueur deux, un modèle combinatoire pour les polynômes de Bessel. Ce modèle est à rapprocher de celui donnant une interprétation combinatoire des polynômes de Hermite. Il nous permettra de retrouver simplement les identités classiques sur les polynômes de Bessel (équation différentielle, formules de récurrence, série génératrice) et de donner une preuve combinatoire de l'orthogonalité de cette famille. Ainsi, ce modèle est l'un des seuls permettant de fournir toute la théorie combinatoire d'une famille de polynômes orthogonaux. Notons qu'il existe un autre modèle donné par Leroux et Strehl [Le-St], qui est un cas particulier d'un modèle pour les polynômes de Jacobi, permettant de démontrer les identités classiques. Cependant ce modèle ne permet pas, semble-t-il, une démonstration de l'orthogonalité.

Plan de la thèse

Les tableaux oscillants et les involutions sont les thèmes principaux de cette thèse dont voici le résumé.

Chapitre I Notions préliminaires

Ce chapitre se veut un résumé des résultats connus et utilisés dans cette thèse. Les tableaux de Young standards trouvent une place prépondérante dans la première partie du chapitre. Nous rappelons l'algorithme de Robinson-Schensted ainsi que ses multiples propriétés. Il existe plusieurs versions de cet algorithme, nous en mentionnons les deux principales, soit celle utilisant l'insertion ligne et celle utilisant l'insertion colonne. Nous donnons également quelques résultats concernant le dénombrement de certaines classes de tableaux, notamment, les tableaux ayant n cellules, les tableaux ayant n cellules et k colonnes de hauteur impaire, et les tableaux ayant n cellules, de hauteur h ayant k colonnes de hauteur impaire. Chacune de ces classes de tableaux est en bijection avec une classe d'involutions, respectivement, les involutions sur n points, les involutions sur n points ayant k points fixes, et les involutions sur n points ayant k points fixes possédant une sous-suite décroissante maximale de longueur h . Nous terminons le chapitre par un court exposé sur les polynômes orthogonaux de Hermite, dont le modèle combinatoire sous-jacent est obtenu des involutions par une valuation des points fixes et des arêtes.

Chapitre II Correspondance de type Robinson-Schensted pour les tableaux oscillants.

En s'inspirant de la preuve de la formule des équerres pour ces tableaux, formule obtenue par Sundaram [Sun], on donne un algorithme généralisant celui de Robinson-Schensted et démontrant combinatoirement la formule

$$1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1) = \sum_{\lambda \vdash n} (f_n^\lambda)^2.$$

On obtient ainsi une correspondance entre les générateurs de l'algèbre de Brauer et les paires de tableaux oscillants de même forme finale. Comme le laisse prévoir la dernière formule, ces générateurs peuvent être interprétés comme des involutions sans point fixe. Tel que décrit dans un article de R. Brauer, paru en 1949 [Bra], nous convenons de les représenter sous forme de graphes constitués de deux rangées superposées de n sommets, chacun étant relié à exactement un autre sommet par une arête. Présentés sous cette forme, on constate aisément que la classe des générateurs de l'algèbre de Brauer contient la classe des permutations. Ces générateurs ont une décomposition naturelle dont les composantes sont deux involutions et une permutation généralisée. Le théorème principal de ce chapitre fait le lien entre la paire de tableaux oscillants, obtenue par notre correspondance appliquée à un générateur, et la paire de tableaux de Young obtenue par la correspondance de Robinson-Schensted usuelle appliquée à la permutation généralisée, issue de la décomposition du générateur. À partir de ce théorème nous déduisons que la correspondance proposée possède deux propriétés de symétrie analogues à celles de Schützenberger.

Nous terminons ce chapitre par de courtes remarques concernant les multiplicités des représentations induites pour le groupe symétrique et l'algèbre de Brauer.

Chapitre III Dénombrement de classes de tableaux oscillants.

Le troisième chapitre est essentiellement consacré à la démonstration de la conjecture de D. Gouyou-Beauchamps. Celle-ci affirme que l'ensemble $S_{2n,c}^{sk}$ des tableaux de Young standards de taille $2n+c$, ayant c colonnes de hauteur impaire et dont la forme est de hauteur exacte k , est en bijection avec $D_{2n,c}^{sk}$, l'ensemble des mots de longueur $2n+c$ de l'alphabet à $2k$ lettres $\{x_1, x_2, \dots, x_k, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k\}$ ayant les contraintes suivantes : si w est un mot de $D_{2n,c}^{sk}$ alors

- i) Pour tout facteur gauche u de w et pour tout i allant de 1 à $k-1$, la différence du nombre de x_i et de \bar{x}_i est supérieure ou égale à la différence du nombre de x_{i+1} et de \bar{x}_{i+1} , elle-même positive ou nulle.
- ii) Dans w la différence entre le nombre de x_i et de \bar{x}_i est nulle pour tout i allant de 2 à k , et la différence entre le nombre de x_1 et de \bar{x}_1 est égale à c .

Nous allons donner une bijection simple qui associe à tout mot de $D_{2n,c}^{sk}$ un tableau standard de l'ensemble $S_{2n,c}^{sk}$. Cette bijection s'obtient, en utilisant à la fois la correspondance

pour les tableaux oscillants avec l'insertion ligne et l'insertion colonne, sur des involutions sans leurs points fixes.

Chapitre IV Une théorie combinatoire des polynômes de Bessel.

Dans ce dernier chapitre nous proposons un modèle combinatoire pour les polynômes de Bessel. Le modèle est basé sur les involutions munies d'une valuation sur les cycles de longueur deux. Contrairement aux polynômes de Hermite, pour lesquels le $n^{\text{ième}}$ polynôme est construit à partir des involutions sur n points, le $n^{\text{ième}}$ polynôme de Bessel est construit à partir des involutions possédant n cycles (points fixes et cycles de longueur deux). Ces involutions sont aussi en bijection avec les tableaux oscillants de longueur $2n - k$ et de forme finale $\lambda = (k)$.

Nous présentons toute la théorie classique pour ces polynômes d'un point de vue combinatoire. Des preuves bijectives sont données pour les formules de récurrence, les identités différentielles et la série génératrice. De plus nous donnons à partir du modèle une preuve combinatoire de l'orthogonalité. Nous terminons ce chapitre en conjecturant une formule reliée au problème de la linéarisation de ces polynômes et nous donnons dans la conclusion un aperçu d'une généralisation du modèle pour l'interprétation des polynômes généralisés de Bessel.

CHAPITRE I

NOTIONS PRÉLÉMINAIRES

Section 1.1 *Diagrammes de Ferrers et Partages.*

Un partage $\lambda \vdash n$ d'un entier n est une suite décroissante $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k$ d'entiers strictement positifs telle que $\sum \lambda_i = n$. Chaque partage $\lambda \vdash n$ a une représentation planaire, appelée diagramme de Ferrers et noté F_λ .

La *figure 1.1* représente le diagramme de Ferrers associé au partage $(4, 3, 1)$ de 8.

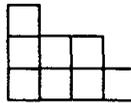


Figure 1.1

Dans la littérature, on trouve souvent la représentation symétrique de celle-ci, dite "anglo-saxonne", voir la *figure 1.2*.

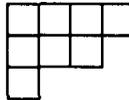


Figure 1.2

Dans toute la suite de l'exposé, nous utiliserons la première représentation des diagrammes de Ferrers.

A tout partage $\lambda \vdash n$ correspond le partage conjugué, noté $\lambda^* \vdash n$. Il est obtenu à partir du diagramme de Ferrers associé à λ par lecture de la hauteur des colonnes, de gauche à droite.

La *figure 1.3* représente le partage $(3, 2, 2, 1)$ conjugué de $(4, 3, 1)$.

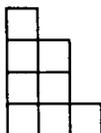


Figure 1.3

Section 1.2 Tableaux de Young.

Un tableau de Young standard à n cellules est un diagramme de Ferrers, associé à un certain partage de l'entier n , étiqueté par les entiers de $[n]$ de telle sorte que les entrées soient croissantes de gauche à droite et de bas en haut.

Le tableau de la *figure 1.4* représente un tableau de Young de forme $(5, 3, 1)$.

6				
2	5	9		
1	3	4	7	8

Figure 1.4

Le nombre n_λ de tableaux de Young standards de forme $\lambda \vdash n$ est donné par la formule suivante, appelée formule des équerres [Ja-Ke], [Rem], [Zei] :

$$n_\lambda = \frac{n!}{\prod h_\lambda},$$

où $\prod h_\lambda$ est le produit des longueurs d'équerres de la forme λ .

La *figure 1.5* donne les longueurs d'équerres de la forme $(5, 3, 1)$.

1				
4	2	1		
7	5	4	2	1

Figure 1.5

L'entier 5 apparaissant en position $(1, 2)$ dans ce tableau des "longueurs d'équerres" représente exactement le nombre de cellules formant l'équerre de coin $(1, 2)$ (voir la *figure 1.6*).



Figure 1.6

Ainsi le nombre de tableaux de Young standards de forme $\lambda = (5, 3, 1)$ est

$$n_\lambda = \frac{9!}{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 1} = 162.$$

Il existe différentes démonstrations de la formule des équerres. Une des premières est sans doute celle utilisant les déterminants de Vandermonde [Ja-Ke]. Il y a quelques autres preuves, dont la preuve probabiliste de Greene, Nijenhuis et Wilf, [Gr-Ni-Wi] ou celle combinatoire donnée par Zeilberger, [Zei].

Section 1.3 *Combinatoire des tableaux de Young.*

Ces tableaux sont apparus pour la première fois en 1900, dans un article de A. Young intitulé "On Quantitative Substitutional Analysis" [You]. Young les utilisait pour calculer certains idempotents de l'algèbre du groupe symétrique \mathfrak{S}_n . Plus précisément, pour chaque tableau T , ces idempotents sont donnés par

$$\gamma(T) = \frac{P(T)N(T)}{h_T}$$

où

$P(T)$ est défini comme étant le produit des éléments simples de l'algèbre laissant fixe chacune des lignes de T ,

$N(T)$ correspond au produit des éléments simples signés de l'algèbre laissant fixe chacune des colonnes de T , et

h_T représente le produit des longueurs d'équerres de la forme T . L'exemple suivant illustre un tel calcul d'idempotent. Prenons le tableau

$$T = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array},$$

ce qui donne

$$P(T) = (e + (13)),$$

$$N(T) = (e - (12)),$$

et $h_T = 1 \cdot 1 \cdot 3$.

Le produit de ces deux éléments $P(T)$ et $N(T)$ dans l'algèbre de \mathfrak{S}_n donne, en convenant de faire le produit dans \mathfrak{S}_n de gauche à droite,

$$P(T) \cdot N(T) = e - (12) + (13) - (132).$$

Le lecteur pourra vérifier que

$$\left(\frac{P(T) \cdot N(T)}{3} \right)^2 = \frac{P(T) \cdot N(T)}{3}.$$

Une présentation plus exhaustive sur ce thème peut être trouvée dans [Dés], [Gar], [Ga-Wa], [Fav] et [Rut2].

Ces mêmes tableaux servent également à la construction des représentations irréductibles du groupe \mathfrak{S}_n . Dans le cadre de la théorie des représentations, la décomposition de la représentation régulière s'exprime par une formule classique sur les dimensions,

$$n! = \sum_{\lambda \vdash n} (n_\lambda)^2, \quad (1.1)$$

où $n!$ est la dimension de la représentation régulière, n_λ est à la fois le degré et la multiplicité de la représentation associée à λ .

Au début des années soixante, Schensted [Sche] a donné une preuve combinatoire de cette formule. Cette preuve utilise une correspondance entre les permutations du groupe symétrique et les paires de tableaux de Young standards de même forme, interprétant ainsi la formule (1.1). Cette correspondance est maintenant connue sous le nom de correspondance de Robinson-Schensted. En effet, on attribue aussi la paternité de cette correspondance à Robinson [Rob] bien qu'originellement il l'ait introduit sous une autre forme. Pour une présentation détaillée de cette correspondance se référer à [Sche], [Knu2] et [Schü2]. Dans [Knu2] une généralisation est donnée pour les matrices à deux lignes. Dans [Vie3], une interprétation géométrique est présentée. Ici, nous nous contentons de la présenter sur un exemple.

Exemple. La correspondance de Robinson-Schensted, avec insertion ligne.

Prenons la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 2 & 1 & 3 & 5 & 9 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

On insère l'image de cette permutation de gauche à droite dans un tableau P au départ vide, et on construit parallèlement un tableau Q d'insertion. On considère la permutation σ de \mathfrak{S}_9 définie par

en fin d'une ligne).

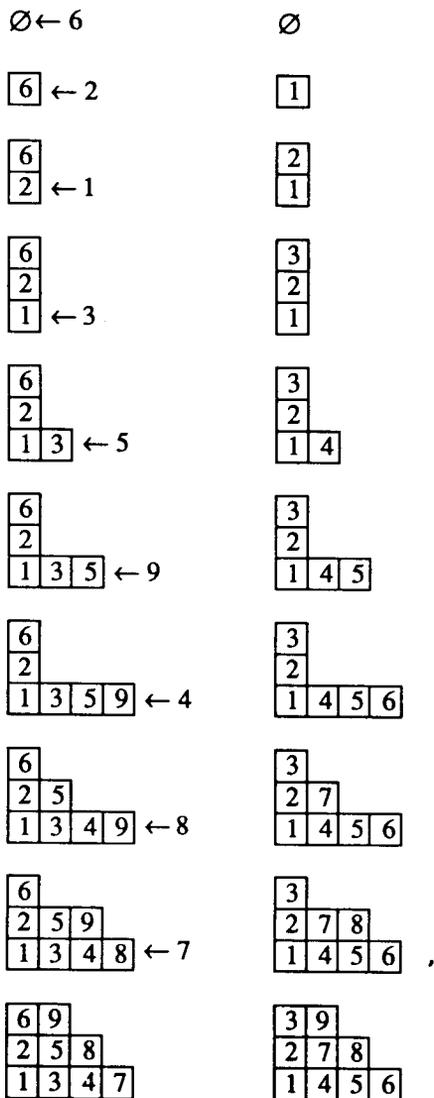


Figure 1.7

Cette correspondance entre les permutations et les paires de tableaux de même forme est bijective et constitue la preuve combinatoire de la formule (1.1). On notera cette correspondance

$$\sigma \leftrightarrow (P(\sigma), Q(\sigma)).$$

Avant de décrire les propriétés de cette correspondance, examinons tout d'abord les diverses représentations des permutations que nous utiliserons par la suite.

La façon classique de représenter une permutation est la suivante.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix},$$

ce qui correspond au mot

$$\sigma = \sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3 \ \cdots \ \sigma_n.$$

Une autre façon de voir une permutation est de la représenter comme un graphe biparti, dont les sommets sont constitués de deux rangées superposées de n sommets étiquetés par les entiers allant de 1 à n . La permutation $\sigma = 6\ 3\ 4\ 1\ 7\ 2\ 5$ correspond ainsi au graphe biparti de la *figure 1.8*.

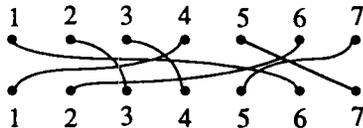
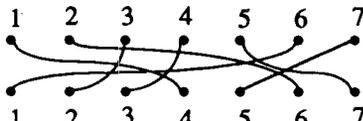


Figure 1.8

Cette dernière représentation permet de décrire l'inverse et l'image miroir d'une permutation. Le graphe de l'inverse σ^{-1} de la permutation σ est obtenu en faisant faire une réflexion au graphe de σ autour d'un axe horizontal. La *figure 1.9* illustre la permutation inverse de $\sigma = 6\ 3\ 4\ 1\ 7\ 2\ 5$.



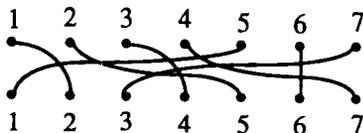


Figure 1.10

Si on applique l'algorithme de Robinson-Schensted sur les permutations σ^{-1} et σ^* , on obtient les relations suivantes, découvertes par Schützenberger [Schü],

$$P(\sigma^{-1}) = Q(\sigma) \text{ et } Q(\sigma^{-1}) = P(\sigma), \tag{1.2}$$

$$P(\sigma^*) = P^T(\sigma) \text{ et } Q(\sigma^*) = Q_{v.r.}^T(\sigma), \tag{1.3}$$

où $P^T(\sigma)$ est le tableau transposé de $P(\sigma)$ et $Q_{v.r.}^T(\sigma)$ est le tableau transposé, "vidé-rempli" de $Q(\sigma)$.

L'algorithme du "vidage-remplissage", introduit par Schützenberger [Schü1], consiste à remplacer la plus petite cellule, (celle contenant le plus petit élément qu'on notera x), par une cellule vide et d'échanger récursivement cette cellule vide avec la plus petite des deux cellules situées à sa droite et au dessus, le processus se terminant lorsque la cellule vide arrive sur la frontière du tableau; on étiquette alors cette cellule vide par $n + 1 - x$. La figure 1.11 présente ce principe du "vidage-remplissage" pour le tableau

6		
5	8	
4	7	9
1	2	3

6		
5	8	
4	7	9
	2	3

6		
5	8	
4	7	9
2		3

6		
5	8	
4	7	9
2	3	

6		
5	8	
4	7	
2	3	9

6		
5	8	
4	7	9
2	3	9

6		
5	8	
4	7	9
	3	9

6		
5	8	
4	7	9
3		9

6		
5	8	
4		9
3	7	9

6		
5		
4	8	9
3	7	9

6		
5	8	
4	8	9
3	7	9

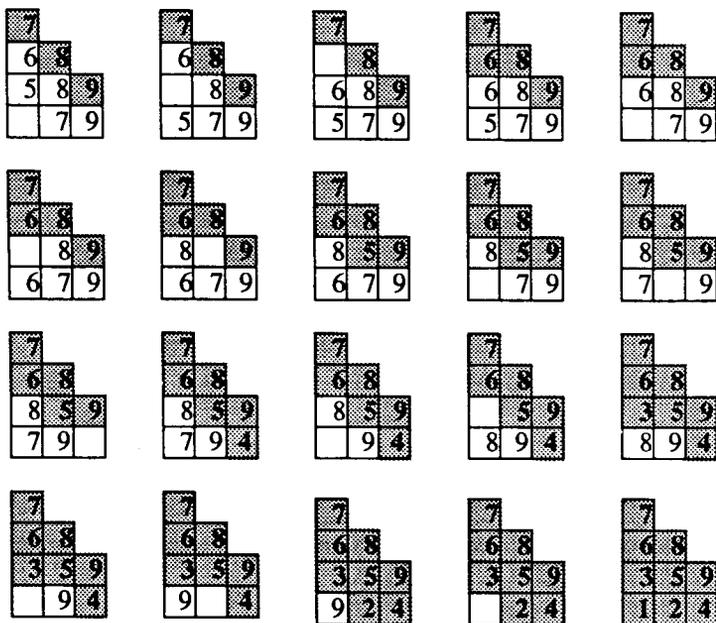


Figure 1.11

Une autre propriété de la correspondance de Robinson-Schensted nous sera utile par la suite. Elle est relative à l'invariance du *P-symbole*, c'est-à-dire la caractérisation des permutations admettant même *P-symbole*. Knuth [Knu] a montré que deux permutations σ_1 et σ_2 ont même *P-symbole* si et seulement si on peut passer de l'une à l'autre, lorsqu'elles sont écrites sous forme de mots, par une suite de transpositions du type

$$b a c \rightarrow b c a$$

$$b c a \rightarrow b a c$$

$$a c b \rightarrow c a b$$

$$c a b \rightarrow a c b$$

où a, b, c sont trois entiers consécutifs dans la permutation et vérifiant $a < b < c$. L'ensemble des permutations ayant le même *P-symbole* est appelé la classe de Knuth du tableau P .

Ce résultat est très utile lorsque l'on veut démontrer une propriété sur les tableaux de

Section 1.4 *Dénombrement des tableaux de Young.*

On a vu précédemment que le nombre de tableaux d'une certaine forme $\lambda \vdash n$ est donné par la formule des équerres.

Compte tenu de la correspondance de Robinson-Schensted et de la propriété (1.2), le nombre de tableaux standards de Young à n cellules est égal au nombre d'involutions du groupe symétrique à n éléments. Ceci se vérifie facilement toute involution τ satisfait $\tau = \tau^{-1}$ et en vertu de la propriété 1.2 on a

$$\tau = \tau^{-1} \leftrightarrow (P(\tau^{-1}), Q(\tau^{-1})) = (P(\tau), Q(\tau)) = (Q(\tau), P(\tau)),$$

i.e $P = Q = T$, d'où $T \leftrightarrow \tau$.

Ainsi le nombre S_n de tableaux standards de taille n est donné par

$$S_n = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{p!(n-2p)!2^p}.$$

Chaque terme de l'identité précédente dénombre les involutions selon le nombre de points fixes. Schützenberger a démontré que le nombre $S_{n,p}$ de tableaux standards de taille n ayant p colonnes de hauteur impaire est égal au nombre d'involutions sur n points ayant p points fixes, c'est-à-dire

$$S_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-2p)!2^p}. \quad (1.4)$$

La répartition des tableaux standards suivant leur hauteur a également été étudiée. Les valeurs asymptotiques de distribution ont été données par A. Regev [Reg]. R. Stanley s'est intéressé à l'algèbricité des séries génératrices des tableaux distribués suivant la hauteur [Sta]. Plus récemment D. Gouyou-Beauchamps [Gou2] a donné des formules exactes pour le nombre S_n^{sk} de tableaux à n cellules de hauteur au plus k pour $k = 4$ et $k = 5$ et montré que les séries génératrice correspondantes ne sont pas algébriques. Les valeurs de S_n^{s2} et de S_n^{s3} sont, quant à elles, connues depuis plus longtemps [Reg]; ce sont

$$S_{2n}^{s2} = \frac{(2n)!}{n!n!} \quad \text{et} \quad S_{2n+1}^{s2} = \frac{(2n+1)!}{n!n!},$$

où C_n est le nombre de Catalan [Com], [And] et M_n est le nombre de Motzkin [Do-Sh]. Les valeurs de $S_n^{\leq 4}$ et $S_n^{\leq 5}$ sont respectivement

$$S_{2n-1}^{\leq 4} = C_n C_n \quad \text{et} \quad S_{2n}^{\leq 4} = C_n C_{n+1}$$

et

$$S_n^{\leq 5} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{3!n!(2k+2)!}{(n-2k)!k!(k+1)!(k+2)!(k+3)!}.$$

Notons par \mathfrak{S}_n l'ensemble des involutions de \mathfrak{G}_n . On dira qu'une permutation σ de \mathfrak{G}_n contient une sous-suite décroissante de longueur k si et seulement s'il existe une suite croissante d'entiers $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, telle que $\sigma(i_1) > \sigma(i_2) > \dots > \sigma(i_k)$. Notons par \mathfrak{S}_n^k l'ensemble des involutions de \mathfrak{S}_n n'ayant pas de sous-suite décroissante de longueur $k+1$, et $S_n^{\leq k}$ l'ensemble des tableaux standards de hauteur au plus k . Schensted [Sche] a montré que \mathfrak{S}_n^k et $S_n^{\leq k}$ sont en bijection, ce résultat étant une conséquence immédiate de la correspondance de Robinson-Schensted.

En raffinant davantage le résultat obtenu en (1.4) et en utilisant le résultat de Schensted [Sche], on montre que le nombre $S_{n,k}^h$ de tableaux standards de taille n ayant k colonnes de hauteur impaire et de hauteur h est égal au nombre d'involutions sur n points ayant k points fixes et possédant une sous-suite décroissante de longueur maximale h .

Considérons maintenant une classe de chemins dans le quart de plan à coordonnées entières positives, empruntant les quatre pas élémentaires : Est, Nord, Ouest et Sud. Un chemin de longueur n dans cet espace est une suite de points $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ telle que $P_0 = (0,0)$ et que les coordonnées (x_i, y_i) des points P_i vérifient l'une des conditions suivantes

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + 1 \quad \text{et} \quad y_{i+1} = y_i && \text{(pas Est)} \\ x_{i+1} &= x_i && \text{et} \quad y_{i+1} = y_i + 1 && \text{(pas Nord)} \\ x_{i+1} &= x_i - 1 \quad \text{et} \quad y_{i+1} = y_i && \text{(pas Ouest)} \\ x_{i+1} &= x_i && \text{et} \quad y_{i+1} = y_i - 1 && \text{(pas Sud)} \end{aligned}$$

Un tel chemin est dit sous-diagonal si x_i est supérieur ou égal à y_i pour tout i allant de 1 à n . X. Viennot avait conjecturé que le nombre de chemins sous-diagonaux de longueur $2n$ se terminant sur l'axe des x est égal à $C_n C_{n+1}$ et le nombre de tels chemins de longueur $2n+1$ est égal à $C_{n-1} C_n$. Notons que ces chemins peuvent être interprétés en termes de

ii) dans w la différence entre le nombre de x_2 et le nombre de \bar{x}_2 est nulle.

D. Gouyou-Beauchamps [Gou] a démontré cette conjecture de X. Viennot ce qui lui a permis d'obtenir les formules d'énumération données précédemment pour les tableaux standards de hauteur au plus 4 et au plus 5 [Gou]. L'obtention de ce résultat passe par une bijection complexe entre ces deux classes d'objets combinatoires, mots et tableaux. Naturellement, il a généralisé ces chemins sous-diagonaux à quatre pas dans l'espace de dimension deux aux chemins sous-diagonaux à $2n$ pas dans un espace de dimension n ; en termes de mots il s'agit de l'ensemble D_n des mots sur l'alphabet $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\}$ vérifiant les deux conditions suivantes. Étant donné un mot w ,

- i) pour tout facteur gauche u de w et pour tout k compris entre 1 et $n-1$ la différence entre le nombre de x_k et le nombre de \bar{x}_k est supérieure ou égale à la différence entre le nombre de x_{k+1} et le nombre de \bar{x}_{k+1} , elle même positive ou nulle;
- ii) dans w la différence entre le nombre de x_k et de \bar{x}_k est nulle pour tout k compris entre 2 et $n-1$.

Ainsi, D. Gouyou-Beauchamps a conjecturé que le nombre de tableaux standards de hauteur maximale $2n$ ayant m cellules et p colonnes de hauteur impaire est égal au nombre de mots de D_n , de longueur m dont la différence entre le nombre de x_1 et le nombre de \bar{x}_1 est égale à p .

Dans cette thèse nous allons démontrer cette conjecture en utilisant la généralisation des tableaux standards en termes de tableaux oscillants, et par là-même retrouver le résultat de D. Gouyou-Beauchamps (cas $n = 2$). Toutefois, la bijection que nous présentons est plus simple et naturelle que celle de D. Gouyou-Beauchamps puisqu'elle est basée sur la correspondance de Robinson-Schensted et son analogue pour les tableaux oscillants.

Section 1.5 *Polynômes orthogonaux.*

Les polynômes orthogonaux jouent un rôle important en analyse, puisqu'ils apparaissent en particulier comme solutions d'équations différentielles. Les plus connus sont les polynômes se trouvant dans la classification fournie par le tableau de Askey [Lab]. Ces polynômes ont parfois été étudiés d'un point de vue combinatoire et il existe des modèles pour la plupart de ces polynômes, [Berg], [La-Ye], [Le-St], [Foa], [Vie2].

À partir de ces modèles on peut, en général, donner des démonstrations combinatoires

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} I_n^{n-2k} (-1)^k x^{n-2k}.$$

A ce polynôme correspond donc l'ensemble des involutions sur n points ayant $n-2k$ points fixes (ou k cycles de longueur deux, appelés *arêtes*) énuméré par I_n^{n-2k} . La pondération consiste ici au poids x sur chaque point fixe et (-1) sur chaque arête.

Or, comme nous l'avons vu précédemment, le nombre de tableaux standards de taille n est exactement le nombre d'involutions sur n points. De plus, comme l'a montré Schützenberger [Schü], la correspondance de Robinson-Schensted fait correspondre au paramètre "nombre de points fixes" d'une involution le nombre de colonnes de hauteur impaire du tableau. Ainsi, les polynômes de Hermite s'interprètent naturellement en termes de tableaux standards.

De manière analogue, nous proposons dans cette thèse un modèle combinatoire pour les polynômes de Bessel. Ces polynômes font partie d'une classe particulière. C'est la classe des polynômes pour lesquels la fonctionnelle linéaire est semi-définie positive. En des termes équivalents, il s'agit de polynômes dont la suite des moments peut contenir des valeurs négatives, ce qui implique que certains polynômes auront une "norme" négative. Ces polynômes, d'un point de vue classique, sont traités dans une classe particulière, [Rai], [Chi].

Le modèle que nous proposons correspond aux involutions énumérées selon le nombre d'*orbites* (points fixes et arêtes). Il permet des démonstrations combinatoires des formules classiques et aussi une démonstration entièrement combinatoire de l'orthogonalité, ce qui notons le, n'a été fait que dans le cas des polynômes de Hermite. Ce modèle se comporte comme la plupart des modèles combinatoires pour les autres polynômes orthogonaux, ce qui permet d'entrevoir une unification de la théorie générale des polynômes orthogonaux passant par une théorie combinatoire.

CHAPITRE II

CORRESPONDANCE DE TYPE ROBINSON-SCHENSTED POUR LES TABLEAUX OSCILLANTS.

Section 2.1 *Tableaux oscillants.*

Les tableaux de Young standards ont plusieurs extensions, notamment les tableaux semi-standards [Burg], [Knu2], [Kin], les "shifted" tableaux [Sag2], les tableaux gauches [Ga-Wa]. Ces nombreuses variantes ont des applications dans des domaines très diversifiés comme les fonctions symétriques, les représentations des groupes, les histoires de fichiers en informatique [Fra].

Les tableaux oscillants constituent l'une des généralisations les plus naturelles des tableaux de Young standards. Cette généralisation apparaît clairement dans le treillis de Young donné par la *figure 2.1*.

Dans ce treillis, un tableau standard de forme λ correspond à un chemin descendant (une chaîne dans la théorie des ensembles partiellement ordonnés) qui va de la forme vide à la forme λ .

On définit un *tableau oscillant* de longueur n et de forme finale λ , où λ est un partage d'un entier m inférieur ou égal à n , comme étant la suite

$$\lambda_0 = \emptyset, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n,$$

où λ_{k+1} est obtenu à partir de λ_k ($0 \leq k \leq n$) par ajout ou suppression d'une cellule et $\lambda_n = \lambda$.

Par la suite nous représenterons les involutions sur un sous-ensemble S de $[n]$ de cardinalité paire $2k$ par une matrice à deux lignes

$$\tau = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_k \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_k \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

où les α_i et les β_i sont les éléments de S vérifiant $\beta_i < \alpha_i < \alpha_{i+1}$. Cette notation est en fait une variante de la notation usuelle représentant une involution par un produit de transpositions,

$$\tau = (\alpha_1, \beta_1)(\alpha_2, \beta_2) \dots (\alpha_k, \beta_k).$$

Le nombre de telles involutions sur l'ensemble S est $1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (|S| - 1)$.

Le nombre de tableaux oscillants de longueur n et de forme finale λ est donné par [Sun]

$$f_n^\lambda = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (n - |\lambda| - 1) \cdot \binom{n}{|\lambda|} \cdot n_\lambda. \tag{2.2}$$

La démonstration de cette formule est bijective [Sun]. On associe à tout tableau oscillant O_n^λ de longueur n et de forme finale λ une paire constituée d'un tableau injectif T_S^λ de forme λ sur un sous-ensemble S de $[n]$ et une involution τ_{S^c} sans point fixe sur l'ensemble S^c complément de S . On notera Φ cette bijection, c'est-à-dire

$$\Phi(O_n^\lambda) = (T_S^\lambda, \tau_{S^c}).$$

Nous présentons ici cette bijection sur un exemple. Soit O le tableau oscillant

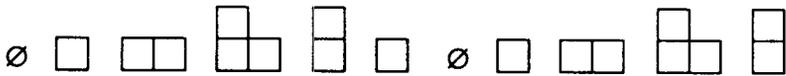


Figure 2.3

On construit alors une suite de tableaux injectifs dont les formes sous-jacentes sont les formes constituant le tableau oscillant O . Tant que les diagrammes de Ferrers vont en "croissant" (ajout d'une cellule), on étiquette les nouvelles cellules dans l'ordre de leur apparition,



ainsi "éjectés" et les étapes correspondant à ces suppressions. Ce qui donne



Figure 2.5

et

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 10 \\ 2 & 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour cet exemple, on a

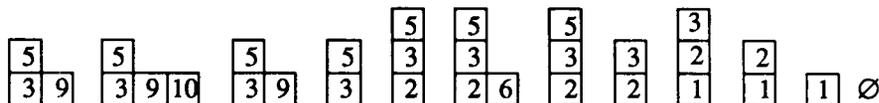
$$\Phi(O) = \left(\begin{array}{c} \boxed{9} \\ \boxed{7} \end{array}, \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 10 \\ 2 & 1 & 3 & 8 \end{pmatrix} \right).$$

La seule connaissance du dernier tableau injectif final et de l'involution correspondant aux suppressions permettent de retrouver par le processus inverse le tableau oscillant initial.

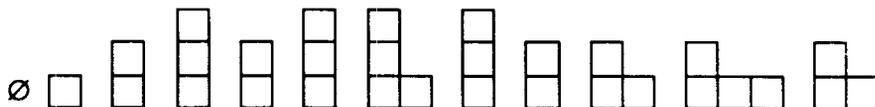
Présentons la construction inverse sur un exemple. Soit (T, τ) la paire suivante

$$\left(\begin{array}{c} \boxed{5} \\ \boxed{3|9} \end{array}, \begin{pmatrix} 4 & 7 & 8 & 11 \\ 1 & 6 & 2 & 10 \end{pmatrix} \right),$$

En appliquant la procédure inverse, on obtient la suite suivante de tableaux injectifs, construite à partir de T



correspondant au tableau oscillant



la forme

$$f = \sum_{\alpha \in \mathfrak{G}_n} f(\alpha) \alpha,$$

où $f(\alpha)$ est un nombre complexe et la somme se fait sur tous les éléments du groupe symétrique. La somme et le produit de deux éléments f et g de cette algèbre sont alors

$$f + g = \sum_{\alpha \in \mathfrak{G}_n} (f(\alpha) + g(\alpha)) \alpha, \quad (2.3)$$

et

$$\begin{aligned} f \cdot g &= \sum_{\alpha \in \mathfrak{G}_n} \sum_{\beta \in \mathfrak{G}_n} f(\alpha) \cdot g(\beta) \alpha \cdot \beta \\ &= \sum_{\gamma \in \mathfrak{G}_n} \left(\sum_{\alpha \in \mathfrak{G}_n} f(\alpha) g(\alpha^{-1} \gamma) \right) \gamma. \end{aligned} \quad (2.4)$$

L'algèbre introduite par R. Brauer s'appuie sur une généralisation des éléments du groupe symétrique.

Définition 2.1 Les *générateurs* de l'algèbre de Brauer \mathfrak{B}_n sont des graphes dont les sommets sont constitués de deux lignes parallèles de n points, chaque point étant relié à exactement un autre point par une arête, une arête pouvant joindre deux points d'une même ligne.

Ces générateurs étant en fait des involutions sans point fixe sur $2n$ points, leur nombre est $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)$. Dans le cas où la bipartition des sommets du graphe correspond aux deux lignes de points, ces générateurs sont des permutations. Toutefois l'ensemble des générateurs ne forme pas un groupe. On peut cependant définir un produit sur ces éléments afin que l'analogie de l'équation (2.4) ait un sens dans le cas de l'algèbre de Brauer, l'analogie de la somme se définissant de façon évidente. Pour faire le produit de deux générateurs on procède un peu comme dans le cas des permutations, en superposant les points inférieurs du premier générateur avec les points supérieurs du deuxième, ensuite en enlevant les points qui se trouvent au milieu tout en tenant compte des liens qu'ils établissent. Des cycles peuvent ainsi apparaître dans cette construction, comme c'est le cas dans l'exemple qui suit.

et



Figure 2.7

On déplace γ_1 jusqu'à ce que la ligne des points inférieurs coïncide avec la ligne des points supérieurs de γ_2 , ce qui donne

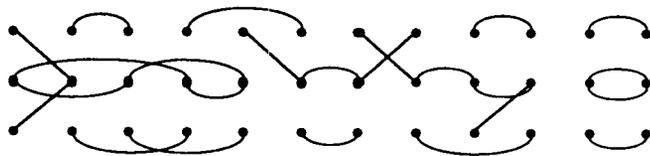


Figure 2.8

On remarque alors les deux cycles qui se détachent dans la composition des deux graphes. On élimine les points du milieu en tenant compte des liens qu'ils établissent, et on obtient

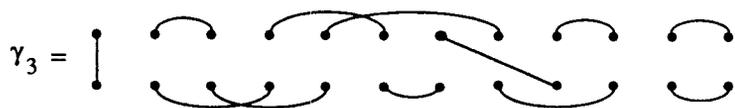


Figure 2.9

Finalement, x représentant le poids de chaque cycle, le produit $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ s'écrit

$$\gamma_1 \cdot \gamma_2 = x^2 \cdot \gamma_3. \quad (2.5)$$

On constate que le produit de générateurs généralise bien le produit de permutations. L'algèbre du groupe symétrique devient donc une sous-algèbre de l'algèbre de Brauer. Le corps des scalaires, à la lumière des équations (2.4) et (2.5), correspond au corps des fractions rationnelles. Dans l'étude des représentations de cette algèbre, des problèmes de calcul de multiplicité des représentations irréductibles apparaissent. On s'intéresse notamment aux multiplicités des représentations irréductibles dans la représentation régulière de l'algèbre. Il s'avère que le nombre de représentations irréductibles de l'algèbre \mathfrak{B}_n est égal au nombre de partage de forme $\lambda \vdash m$ où m est un entier inférieur ou égal à n . De plus, le degré de la représentation irréductible associée au partage λ est le nombre f_n^λ , et la multiplicité de cette représentation dans la représentation régulière est également f_n^λ [Bra] [Weyl]. Ceci

$$n! = \sum_{\lambda \vdash n} (n_\lambda)^2.$$

Section 2.4 *Correspondance de type Robinson-Schensted.*

En examinant la formule (2.2), on constate que lorsque la forme λ est un partage de n , on retrouve la formule des équerres pour les tableaux standards. À l'autre extrême, si la forme finale est vide, $\lambda = \emptyset$, nous obtenons l'identité

$$1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) = f_n^\emptyset.$$

Dans cette dernière expression, n est obligatoirement pair (autant d'insertions que de suppressions) et donc

$$1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1) = f_{2n}^\emptyset. \quad (2.6)$$

Le membre de gauche de cette identité énumère les générateurs de l'algèbre \mathfrak{B}_n , le membre de droite énumère les tableaux oscillants de la forme suivante

$$O_{2n}^\lambda = \emptyset, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots, \lambda_{2n-2}, \lambda_{2n-1}, \emptyset.$$

Pour produire l'analogie de la correspondance de Schensted, on remarque que la forme centrale λ_n ne comporte aucune restriction et qu'il suffit de couper le tableau O_{2n}^λ en deux parts de même longueur pour obtenir

$$P = \emptyset, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \quad (2.7)$$

$$Q = \emptyset, \lambda_{2n-1}, \lambda_{2n-2}, \dots, \lambda_n. \quad (2.8)$$

L'équation (2.6) se réécrit donc comme suit

$$1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1) = \sum_{\lambda} (f_n^\lambda)^2, \quad (2.9)$$

où les formes λ sont les partages d'un entier m inférieur ou égal à n .

La preuve bijective de (2.9), conséquence immédiate de celle de Sundaram [Sun] pour

entiers de $n+1$ à $2n$.

Il existe d'autres façons de faire et celle choisie ici nous assurera que pour les générateurs correspondant aux permutations du groupe symétrique, la bijection présentée est la correspondance usuelle de Robinson-Schensted.

Avec cet étiquetage, on peut représenter un générateur γ sous la forme introduite en (2.1). Par exemple

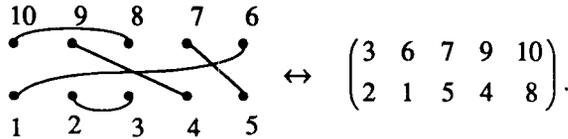


Figure 2.10

Avec ces précisions, la démonstration combinatoire de l'identité 2.9 est immédiate. À chaque générateur γ de \mathfrak{B}_n on associe l'involution correspondante par l'étiquetage $\gamma_{\leftarrow}^{\leftarrow}$. On applique ensuite Φ^{-1} à cette involution, le tableau injectif étant vide. On obtient alors un tableau oscillant O de longueur $2n$ allant de la forme vide à la forme vide. En partageant ce tableau en deux comme en (2.7) et (2.8), on obtient deux tableaux oscillants de même forme, notés $P(O)$ et $Q(O)$.

Reprenons l'exemple de la figure 2.10. En appliquant Φ^{-1} sur l'involution $\gamma_{\leftarrow}^{\leftarrow}$ associée au générateur γ , on obtient (de droite à gauche sur la figure 2.11)

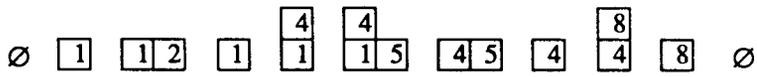


Figure 2.11

En conservant les formes sous-jacentes, on obtient le tableau oscillant

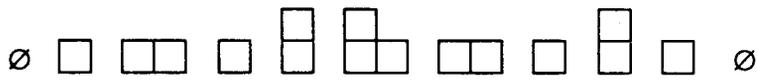


Figure 2.12

et en coupant en deux parts égales, nous obtenons



Nous avons donc réalisé l'analogie de la correspondance de Robinson-Schensted en s'appuyant sur la preuve de la formule des équerres (2.2). Lorsque les générateurs de \mathfrak{B}_n sont des permutations de \mathfrak{S}_n , on obtient par cette construction une paire de tableaux oscillants qui sont des tableaux standards (seulement des insertions sont effectuées) associés à ces permutations par l'algorithme de Robinson-Schensted.

Théorème 2.3

Si γ est un générateur de \mathfrak{B}_n appartenant aussi à \mathfrak{S}_n , alors la paire $(P(\gamma), Q(\gamma))$ de tableaux oscillants est une paire de tableaux standards et correspond à celle obtenue en appliquant l'algorithme de Robinson-Schensted sur γ en tant qu'élément de \mathfrak{S}_n .

Preuve Soit γ un générateur qui soit aussi un élément σ de \mathfrak{S}_n . L'involution correspondante est alors de la forme

$$\begin{pmatrix} n+1 & n+2 & \cdots & 2n-1 & 2n \\ \sigma_n & \sigma_{n-1} & \cdots & \sigma_2 & \sigma_1 \end{pmatrix}.$$

En appliquant Φ^{-1} sur cette involution on construit une suite, de droite à gauche, de tableaux injectifs

$$\emptyset, T_1, T_2, \dots, T_{n-1}, T_n, T_{n+1}, \dots, T_{2n-1}, T_{2n} = \emptyset.$$

En ne conservant que les formes de ces tableaux, soit

$$\emptyset, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n, \lambda_{n+1}, \dots, \lambda_{2n-1}, \lambda_{2n} = \emptyset,$$

on remarque qu'à chaque étape, de $2n$ à n , nous avons inséré la suite

$$\sigma_1 \ \sigma_2 \ \cdots \ \sigma_n.$$

Ainsi le tableau T_n est le tableau $P(\sigma)$, et par construction, la suite $\lambda_{2n}, \lambda_{2n-1}, \dots, \lambda_n$ correspond exactement au tableau $Q(\sigma)$. En d'autres termes,

$$P(\gamma) = P(\sigma) \text{ et } Q(\gamma) = Q(\sigma).$$

Plusieurs auteurs, dont T. Maclarnan [Mac], ont essayé de démontrer combinatoirement l'identité (2.9). Plus précisément, ils souhaitaient obtenir une correspondance ayant des propriétés analogues à celles obtenues par Schützenberger [Schü]

Définissons tout d'abord ce que sont l'inverse et le miroir d'un générateur de \mathfrak{B}_n .

Définition 2.4 Étant donné γ un générateur de \mathfrak{B}_n , on définit γ^{-1} comme étant le générateur obtenu à partir de γ en lui faisant subir une réflexion autour d'un axe horizontal.

Par exemple, si



Notons ici qu'en vertu du *théorème 2.3*, tout générateur appartenant à \mathfrak{G}_n vérifie la propriété (1.2).

Définition 2.5 Étant donné γ un générateur de \mathfrak{B}_n , on définit γ^* comme étant le générateur obtenu à partir de γ en lui faisant subir une réflexion autour d'un axe vertical.

Par exemple, si



Remarque. Cette opération n'est pas exactement l'analogue de celle donnant le miroir d'une permutation. En effet, si σ est une permutation, nous avons défini, au chapitre I, σ^* comme étant la permutation lue de droite à gauche. Dans la représentation sous forme de graphe, ceci correspond à faire subir une rotation de 180° à la rangée supérieure des points. Dans le cas qui nous occupe, c'est tout le graphe qui subit la rotation. Pour éviter la confusion, nous allons momentanément prendre pour convention d'écrire σ^x pour le miroir d'une permutation tel que défini au chapitre I. D'après ces considérations, si γ est un générateur correspondant à une permutation, nous avons alors

$$\left(\left((\gamma^x)^{-1} \right)^x \right)^{-1} = \gamma^*, \text{ et donc } P(\gamma^*) = P_{v.R.}(\gamma) \text{ et } Q(\gamma^*) = Q_{v.R.}(\gamma).$$

T. Maclarnan [Mac] a donné une correspondance ayant l'analogue de la propriété (1.2) de Schützenberger. Celle que nous avons présentée, beaucoup plus simple et naturelle, possède les deux. Ce fait est très étroitement lié au codage des générateurs de l'algèbre de

remplissage" (décrit au chapitre I) au tableau T , à l'exception que le contenu évacué x est ici remplacé non pas par $m+1-x$ mais par $n+1-x$.

Par exemple, si

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 7 & 9 & & \\ \hline 2 & 4 & 5 & 8 \\ \hline \end{array}$$

est un tableau injectif sur l'ensemble $[10]$, alors le "vidé-rempli" est

$$T_{V.R.} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 6 & & \\ \hline 2 & 4 & 7 & 9 \\ \hline \end{array}$$

Pour prouver que notre correspondance possède bien l'analogie des deux propriétés (1.2) et (1.3), nous allons mettre en évidence une autre propriété remarquable des générateurs de \mathfrak{B}_n liée à leur décomposition selon un nouvel étiquetage.

Définition 2.7 Étant donné un générateur γ de \mathfrak{B}_n , on note $\gamma \vec{}$ le générateur γ étiqueté de la façon suivante : les sommets de chacune des lignes, de gauche à droite portent les étiquettes 1 à n .

En utilisant cette notation on peut décomposer un générateur en trois composantes: une involution γ_a sur l'ensemble des points du haut qui sont reliés entre eux par une arête, une involution γ_b sur l'ensemble des points du bas qui sont aussi reliés entre eux par une arête et une bijection γ_c entre les points restants sur les deux lignes.

Exemple. Si

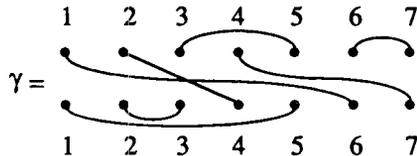


Figure 2.14

alors

$$\gamma_a = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad \gamma_b = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$P(\gamma) = \emptyset, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n = \lambda,$$

$$Q(\gamma) = \emptyset, \lambda_{2n-1}, \lambda_{2n-2}, \dots, \lambda_n = \lambda,$$

et qu'en appliquant à nouveau Φ sur chacun de ces tableaux oscillants, nous ayons

$$\Phi(P(\gamma)) = (T_P^\lambda, \tau_P), \quad \Phi(Q(\gamma)) = (T_Q^\lambda, \tau_Q).$$

Alors ces objets vérifient

$$\gamma_b = \tau_P, \quad \gamma_h = \tau_Q$$

et

$$P(\gamma_c) = T_P^\lambda, \quad Q(\gamma_c) = T_Q^\lambda$$

où $(P(\gamma_c), Q(\gamma_c))$ est obtenu en appliquant l'algorithme de Robinson-Schensted sur γ_c .

Avant d'en donner la preuve, illustrons ce résultat à l'aide d'un exemple. Soit γ le générateur suivant :

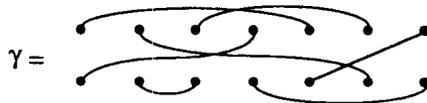


Figure 2.15

En utilisant les deux différentes façons d'étiqueter, on a

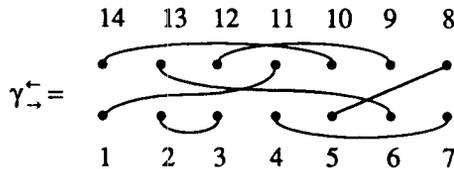
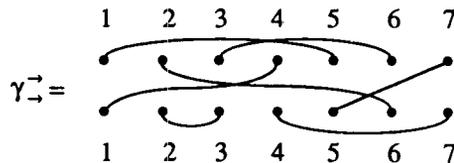


Figure 2.16

et



$$\gamma_a = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \gamma_b = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \gamma_c = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 6 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

et l'involution associée à γ_c est

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 8 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 9 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

En appliquant Φ^{-1} à cette involution on obtient un tableau qui va de la forme vide à la forme vide. En divisant en deux tableaux comme dans (2.7) et (2.8), on obtient ainsi que pourra le vérifier le lecteur

$$P(\gamma) = \emptyset \quad \square \quad \square \square \quad \square \quad \square \square \quad \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \quad \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} \quad \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array}$$

$$Q(\gamma) = \emptyset \quad \square \quad \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \quad \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \quad \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} \quad \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \quad \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \quad \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array}$$

En appliquant Φ sur $P(\gamma)$ et $Q(\gamma)$, on obtient

$$\Phi(P(\gamma)) = \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 6 & \\ \hline 1 & 5 \\ \hline \end{array}, \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \right)$$

et

$$\Phi(Q(\gamma)) = \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 4 & \\ \hline 2 & 7 \\ \hline \end{array}, \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right)$$

En se reportant au chapitre I, le lecteur pourra vérifier que

$$\left(\begin{array}{|c|c|} \hline 6 & \\ \hline 1 & 5 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & \\ \hline 2 & 7 \\ \hline \end{array} \right) = (P(\gamma_c), Q(\gamma_c))$$

En appliquant Φ^{-1} on obtient de droite à gauche une suite de tableaux injectifs

$$\emptyset \leftarrow T_1 \leftarrow T_2 \leftarrow \dots \leftarrow T_n \leftarrow \dots \leftarrow T_{2n-1} \leftarrow T_{2n} = \emptyset.$$

Considérons la sous-suite des formes sous-jacentes pour les indices allant de $2n$ à n

$$\lambda_n, \lambda_{n+1}, \dots, \lambda_{2n-1}, \lambda_{2n} = \emptyset,$$

correspondant au tableau oscillant $Q(\gamma)$. On peut alors construire, en appliquant Φ au tableau oscillant $Q(\gamma)$, la suite de tableaux injectifs que l'on numérote comme suit,

$$S_n \leftarrow S_{n+1} \leftarrow \dots \leftarrow S_{2n-1} \leftarrow S_{2n} = \emptyset.$$

Revenons momentanément à l'exemple précédent où $2n = 14$ et

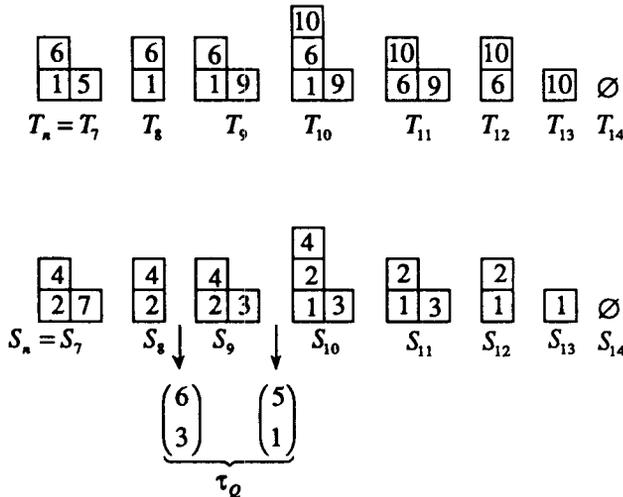


Figure 2.18

La première suppression dans $T_9 = T_{2n-k}$ a pour effet d'enlever l'entier $2n - k + 1 = 10$ (soit $k = 5$), entier inséré à l'étape $14 = 2n + 1 - j$ (soit $j = 1$). Ceci correspond à l'arête $(14, 10)$ de $\gamma_{\leftarrow}^{\leftarrow}$ et donc l'arête $(1, 5)$ de $\gamma_{\rightarrow}^{\rightarrow}$, c'est-à-dire au couple $(1, 5)$ de τ_Q . On remarque aussi que le couple (T_n, S_n) est exactement le couple (T_p, T_Q) du théorème, correspondant à la permutation généralisée γ_c par l'algorithme de Robinson-Schensted.

Robinson-Schensted, à une suite de permutations généralisées

$$\beta_{2n}, \beta_{2n-1}, \dots, \beta_n.$$

Soit T_{2n-k} , le premier tableau résultant de la suppression d'une cellule. L'entier correspondant est nécessairement $2n - k + 1$ d'après notre bijection et, pour qu'il puisse être supprimé, il a du être inséré à une certaine étape antérieure $2n + 1 - j$ avec

$$2n \geq 2n + 1 - j > 2n - k + 1 \geq n + 1,$$

ce qui entraîne $1 \leq j < k \leq n$. Ainsi à l'étape $2n + 1 - j$, on a

$$T_{2n-j} \leftarrow T_{2n-j+1}$$

par insertion de l'entier $2n - k + 1$. Or, dans la suite de tableaux injectifs

$$S_{2n}, S_{2n-1}, \dots, S_n,$$

correspondant au tableau oscillant $Q(\gamma)$ par Φ , une insertion d'une cellule à une étape $2n + 1 - p$, correspondant aux tableaux

$$S_{2n-p} \leftarrow S_{2n-p+1},$$

se traduit par l'étiquetage de cette cellule par l'entier p .

Comme les suites des formes des tableaux T_i et S_i sont identiques, à l'étape $2n + 1 - j$ nous avons

$$\begin{aligned} T_{2n-j} &\leftarrow T_{2n-j+1} \text{ par insertion de l'entier } 2n - k + 1, \\ S_{2n-j} &\leftarrow S_{2n-j+1} \text{ par insertion d'une cellule numérotée } j. \end{aligned}$$

Ainsi, le générateur γ_{\rightarrow}^{-} possède l'arête $(2n - j + 1, 2n - k + 1)$ correspondant à (j, k) dans γ_h , et la paire (T_{2n-k+1}, S_{2n-k+1}) correspond à la permutation généralisée

$$\beta_{2n-k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & j & \dots & k-1 \\ x_n & x_{n-1} & \dots & 2n-k+1 & \dots & x_{n-k+1} \end{pmatrix},$$

De plus nous constatons que dans cette suite de paires de tableaux, lors d'une

font que la permutation généralisée β_{2n-k} correspondant à la paire (T_{2n-k}, S_{2n-k}) s'obtient à partir de β_{2n-k+1} par suppression de "l'arête" $(j, 2n-k+1)$. Compte tenu de la bijection Φ construisant pas à pas un tableau injectif et une involution avec des étiquettes croissantes à partir de n , cette étape se traduit par l'obtention d'une nouvelle arête (j, k) dans τ_Q .

De proche en proche nous en déduisons que

$$\gamma_h = \tau_Q.$$

De plus, la dernière paire de tableaux injectifs (T_n, S_n) correspond à la permutation généralisée β_n dans laquelle ne subsiste que les couples (j, x_j) pour lesquels se sont produits, à l'étape $2n+1-j$

- l'insertion de l'entier x_j dans T_{2n-j+1} donnant T_{2n-j} ,
- l'ajout de la cellule correspondante à S_{2n-j+1} donnant S_{2n-j} , cellule numérotée j .

De plus, l'entier x_j doit vérifier $1 \leq x_j \leq n$ (car sinon il aurait été enlevé à l'étape $x_j > n$). Ainsi, compte tenu de l'étiquetage γ_c^+ , $\beta_n = \gamma_c$, et donc

$$P(\gamma_c) = T_n \text{ et } Q(\gamma_c) = S_n.$$

En remarquant que lorsque l'on applique Φ^{-1} à γ_c^+ on obtient pour seconde moitié de la suite des tableaux injectifs

$$\emptyset \leftarrow T_1 \leftarrow T_2 \leftarrow \dots \leftarrow T_n,$$

qui est exactement la suite de tableaux injectifs obtenue en appliquant Φ à $P(\gamma)$, on en déduit par un raisonnement analogue au précédent que

$$\gamma_b = \tau_P.$$

Corollaire 2.8.1 Soient γ un générateur de \mathfrak{B}_n , et γ^{-1} son inverse. La correspondance Φ^{-1} fournit des paires de tableaux oscillants,

$$\Phi^{-1}(\gamma) = (P(\gamma), Q(\gamma)) \text{ et } \Phi^{-1}(\gamma^{-1}) = (P(\gamma^{-1}), Q(\gamma^{-1})),$$

vérifiant

$$P(\gamma^{-1}) = Q(\gamma) \text{ et } Q(\gamma^{-1}) = P(\gamma).$$

Par définition de l'inverse γ^{-1} , il est clair que $\gamma_h^{-1} = \gamma_b$, $\gamma_b^{-1} = \gamma_h$ et que $\gamma_c^{-1} = (\gamma_c)^{-1}$. En utilisant le *théorème 2.8*, le résultat est immédiat.

Corollaire 2.8.2 Soient γ un générateur de \mathfrak{B}_n , et γ^* son miroir. En appliquant Φ^{-1} sur chacun d'eux, on obtient des paires de tableaux oscillants,

$$\Phi^{-1}(\gamma) = (P(\gamma), Q(\gamma)) \quad \text{et} \quad \Phi^{-1}(\gamma^*) = (P(\gamma^*), Q(\gamma^*)).$$

La correspondance Φ appliquée à chacun d'eux, donne

$$\begin{aligned} \Phi(P(\gamma)) &= (T_P, \tau_P), \\ \Phi(Q(\gamma)) &= (T_Q, \tau_Q), \\ \Phi(P(\gamma^*)) &= (T_{P^*}, \tau_{P^*}), \\ \Phi(Q(\gamma^*)) &= (T_{Q^*}, \tau_{Q^*}), \end{aligned}$$

vérifiant

$$(T_P)_{V.R.} = T_{P^*} \quad , \quad (T_Q)_{V.R.} = T_{Q^*}$$

où τ_{P^*} et τ_{Q^*} sont respectivement obtenus à partir de τ_P et τ_Q en appliquant la transformation $i \leftrightarrow n+1-i$.

Preuve Soient γ un générateur et γ^* son miroir. Décomposons les en leurs trois constituants

$$\begin{aligned} \gamma &\leftrightarrow (\gamma_h, \gamma_b, \gamma_c), \\ \gamma^* &\leftrightarrow (\gamma_h^*, \gamma_b^*, \gamma_c^*). \end{aligned}$$

Suite aux remarques faites lors de la définition du miroir d'un générateur, et de la définition du "vidage-remplissage" nous avons immédiatement, en utilisant le *théorème 2.8*, $T_{P_{V.R.}} = T_{P^*}$ et $T_{Q_{V.R.}} = T_{Q^*}$, les autres constatations en découlant directement.

Section 2.5 *Quelques remarques.*

$$1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1) = \sum_{\mu} f_{n-m}^{\mu} f_{n+m}^{\mu}, \quad (2.10)$$

où μ est un partage quelconque de $p \leq n-m$. Avec cette approche, la formule (1.1) sur les dimensions pour les représentations du groupe symétrique peut se réécrire

$$n! = c_{2n}^{\emptyset},$$

où c_{2n}^{\emptyset} est le nombre de tableaux oscillants allant de la forme vide à la forme vide et où les n premières formes croissent et les n dernières décroissent en taille. Lorsqu'on partage un tel tableau en deux, on obtient bien la formule usuelle sur les dimensions. Par contre si on coupe ailleurs qu'au centre on obtient la formule

$$n! = \sum_{\mu} n_{\mu} \cdot c_{2n-|\mu|}^{\mu}, \quad (2.11)$$

où $c_{2n-|\mu|}^{\mu}$ est le nombre de tableaux oscillants partant de la forme vide, dont les n premières formes sont croissantes et dont les suivantes sont décroissantes jusqu'à la forme μ de taille fixée. Le nombre de tels tableaux est donné par la formule

$$c_m^{\mu} = \frac{n_{\mu} \cdot n!}{|\mu|!},$$

où $m = 2n - |\mu|$. Il s'avère que pour les représentations du groupe symétrique l'équation (2.11) admet l'interprétation suivante : le nombre n_{μ} est la dimension de la représentation irréductible de $\mathfrak{S}_{|\mu|}$ associée au partage μ , et $c_{2n-|\mu|}^{\mu}$ est la multiplicité de cette représentation, induite à \mathfrak{S}_n , dans la représentation régulière. L'équation (2.10) en est l'analogie pour l'algèbre de Brauer.

Notons également que la correspondance étudiée ici s'appuie sur l'algorithme de Robinson-Schensted avec l'insertion ligne pour les tableaux standards; nous aurions tout aussi bien pu utiliser l'insertion colonne.

Section 2.6 Conclusion.

La correspondance proposée est le parfait analogue de la correspondance de Robinson-Schensted. La pierre angulaire, à la lumière du *théorème 2.8*, permettant l'analogie avec les propriétés de Schützenberger, est clairement le choix du codage des

CHAPITRE III

DÉNOMBREMENT DE CLASSES DE TABLEAUX OSCILLANTS

Section 3.1 *Tableaux oscillants selon leur longueur et forme finale*

Au chapitre précédent nous avons proposé un algorithme généralisant celui de Robinson-Schensted pour les permutations aux générateurs de l'algèbre de Brauer. D'un point de vue combinatoire, la propriété (1.2) de Schützenberger, pour les permutations, nous permet de conclure que le nombre de tableaux standards, de taille n sans restriction sur la forme, est égal au nombre d'involutions du groupe symétrique à n éléments. En effet, si σ est une involution du groupe symétrique, alors $\sigma = \sigma^{-1}$. En utilisant la propriété (1.2) on peut écrire

$$P(\sigma) = Q(\sigma^{-1}) = Q(\sigma)$$

et donc

$$T \leftrightarrow (T, T) = (P(\sigma), Q(\sigma)) \leftrightarrow \{\sigma : \sigma = \sigma^{-1}\}.$$

De façon similaire, on peut se demander quels sont les générateurs de l'algèbre de Brauer qui ont le même P -symbole et Q -symbole. Compte tenu du corollaire 2.8.1, il s'agit de ceux qui sont laissés invariants par une réflexion horizontale.

Théorème 3.1 Le nombre O_n de tableaux oscillants de longueur n est donné par

$$O_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{k!(n-2k)!},$$

Preuve Soit γ un générateur de l'algèbre de Brauer \mathfrak{B}_n , symétrique par rapport à un axe horizontal, c'est-à-dire qu'il est égal à son inverse tel que nous l'avons défini au chapitre précédent.

En identifiant les points de la ligne inférieure et supérieure du graphe correspondant à γ , nous obtenons, comme le montre la *figure 3.1*, une involution sur n points dont les cycles sont bipartionnés (coloriés en deux couleurs, bleu ou rouge) de la façon suivante.

Tous les points fixes et certaines arêtes (cycles de longueur deux) sont coloriés en bleu : ils correspondent aux arêtes de γ reliant des points situés sur des lignes différentes.

Les autres arêtes sont coloriées en rouge : elles correspondent aux arêtes de γ situées sur la même ligne.

Ceci, compte tenu du corollaire 2.8.1, établit une bijection entre tableaux oscillants de longueur n et involutions sur n points bicoloriées (points fixes en bleu, arêtes en rouge ou bleu). Nous en déduisons que

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n!}{k!(n-2k)!} \cdot 2^k = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n!}{k!(n-2k)!}$$

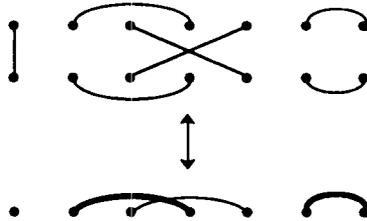


Figure 3.1

De plus, compte tenu du théorème 2.8 et corollaire 2.8.1, nous pouvons affiner cette construction prouvant le résultat précédent. En effet, les involutions "bicoloriées" sur n points, dont toutes les arêtes sont en rouge et les points fixes en bleu, sont en bijection avec les tableaux oscillants de longueur n et de forme finale $\lambda = (m)$ où m est de même parité que n et lui est inférieur. Ceci résulte du fait qu'à une telle involution correspond un générateur γ de \mathfrak{B}_n pour lequel la bijection γ_c du théorème 2.8 est l'identité, ce qui fournit un tableau de forme finale réduite à une seule ligne.

Nous obtenons ainsi

Théorème 3.2 Le nombre de tableaux oscillants de longueur $2n+c$ et de forme finale $\lambda = (c)$, où $n, c \geq 0$ est

$$O_{2n,c} = \binom{2n+c}{c} (2n)!! = \frac{(2n+c)!}{n!c!2^n}.$$

Comme nous le verrons au chapitre suivant, ces tableaux oscillants de forme finale réduite à une seule ligne permettront de fournir une théorie combinatoire d'une famille de polynômes orthogonaux, les polynômes de Bessel.

Section 3.2 *Tableaux oscillants selon la longueur, la hauteur exacte et la forme finale.*

Dans cette section nous allons affiner le critère d'énumération précédent (théorème 3.2) puisque nous allons nous intéresser également à la hauteur de la "bande" dans laquelle évoluent les tableaux oscillants. Le choix de ce critère est assez naturel puisqu'il est l'analogue de celui pris lorsque l'on énumère les tableaux standards suivant la hauteur.

Ces tableaux oscillants distribués selon trois paramètres : longueur, forme finale $\lambda = (c)$ et hauteur, sont en bijection avec certains mots généralisant ceux correspondant aux chemins à quatre pas du premier octant du plan cartésien.

La bijection fondamentale de cette section mettra en relation ces tableaux oscillants et certains tableaux standards, démontrant en cela une conjecture de D. Gouyou-Beauchamps [Gou2].

Donnons d'abord quelques définitions.

Définition 3.3 On désignera par $O_{2n,c}^k$ l'ensemble des tableaux oscillants de longueur $2n+c$, de forme finale $\lambda = (c)$ et de hauteur exacte k , c'est-à-dire évoluant dans une bande de hauteur exactement k , et par $O_{2n,c}^{=k}$ la cardinalité de cet ensemble.

Définition 3.4 De façon similaire, $S_{2n,c}^k$ représentera l'ensemble des tableaux standards de taille $2n+c$, ayant c colonnes de hauteur impaire et dont la forme est de hauteur exacte k , la cardinalité de cet ensemble sera notée $S_{2n,c}^{=k}$.

Dans cette section, nous prouverons les résultats suivants

Théorème 3.5

$$O_{2n,c}^{=k} = S_{2n,c}^{=2k-1} + S_{2n,c}^{=2k}.$$

Par extension de cette notation aux tableaux de hauteur au plus k , notée $\leq k$, nous en déduisons

Corollaire 3.5.1

$$O_{2n,c}^{\leq k} = S_{2n,c}^{\leq 2k}.$$

Compte-tenu des résultats respectifs de Regev et Gouyou-Beauchamps respectivement sur les tableaux standards de hauteur au plus deux [Reg] et quatre [Gou1-2], nous en déduisons

Corollaire 3.5.2 Le nombre $O_n^{\leq k}$ de tableaux oscillants de longueur n et évoluant dans une bande de hauteur au plus k est, pour $k = 1$ ou 2

$$O_n^{\leq 1} = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

$$O_{2n}^{\leq 2} = C_n C_{n+1}$$

$$O_{2n+1}^{\leq 2} = C_{n+1} C_{n+1}.$$

La bijection prouvant le *théorème 3.5* est nouvelle, dans le cas $k = 2$, par rapport à celle donnée par D. Gouyou-Beauchamps pour l'énumération des tableaux standards de hauteur au plus quatre. De plus, elle est également beaucoup plus naturelle puisque très étroitement liée aux propriétés de la correspondance de Robinson-Schensted. Toutefois, comme le lecteur pourra s'en apercevoir, la preuve de sa validité est longue et difficile, ce qui confirme la difficulté du résultat prouvé originalement par D. Gouyou-Beauchamps.

Afin de faire le lien avec la conjecture de D. Gouyou-Beauchamps, revenons à cet ensemble de mots introduit au chapitre I. Nous désignons par D_n l'ensemble des mots w sur l'alphabet à $2n$ lettres $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\}$, vérifiant les deux conditions suivantes :

si w est un mot de D_n alors

- i) Pour tout facteur gauche u de w et pour tout k compris entre 1 et $n-1$, la différence entre le nombre de x_k et le nombre de \bar{x}_k est supérieure ou égale à la différence entre le nombre de x_{k+1} et le nombre de \bar{x}_{k+1} , elle même positive ou nulle.
- ii) Dans w la différence entre le nombre de x_k et de \bar{x}_k est nulle pour tout k compris entre 2 et n .

On voit aisément que de tels mots peuvent être mis en bijection avec les tableaux oscillants de forme finale $\lambda = (p)$, et de hauteur au plus n .

En effet, étant donné un mot $w = a_1 a_2 a_3 \dots a_m$ de D_n , on construit séquentiellement un tableau oscillant $O = \emptyset, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m$ en lisant w de gauche à droite.

À la i ième étape :

- si la lettre lue est x_k , le diagramme λ_i s'obtient à partir du diagramme λ_{i-1} en ajoutant une cellule sur la ligne k ,
- si la lettre lue est \bar{x}_k , le diagramme λ_i s'obtient à partir du diagramme λ_{i-1} en enlevant une cellule de la ligne k .

La condition (i) nous assure que chaque forme ainsi construite est bien un diagramme de Ferrers et la condition (ii) impose que la forme finale du tableau oscillant soit réduite à un tableau ayant une seule ligne.

Par exemple, si

$$w = x_1 \ x_2 \ \bar{x}_2 \ x_1 \ x_2 \ x_2 \ x_3 \ \bar{x}_2 \ x_1 \ x_2 \ \bar{x}_3 \ \bar{x}_2 \ \bar{x}_2$$

il lui correspond le tableau oscillant

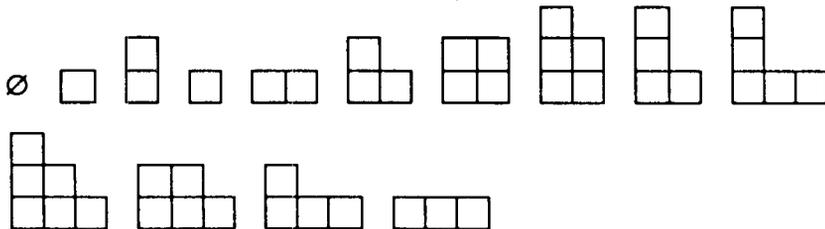


Figure 3.2

Pour clarifier la notation, nous donnons dans la tableau suivant pour chacune des diverses correspondances, leur notation, l'ensemble sur lequel elle s'applique, et son codomaine.

CORRESPONDANCE	DOMAINE	CODOMAINE
RS_L^S (insertion ligne)	Permutations	Paires de tableaux de Young de même forme
RS_c^S (insertion colonne)	Permutations	Paires de tableaux de Young de même forme
RS_L^I (insertion ligne)	Involutions	Tableaux de Young
RS_c^I (insertion colonne)	Involutions	Tableaux de Young
RS_L^O (insertion ligne)	Générateurs de l'algèbre de Brauer	Paires de tableaux oscillants de même forme
RS_c^O (insertion colonne)	Générateurs de l'algèbre de Brauer	Paires de tableaux oscillants de même forme
$RS_L^{I,bi}$ (insertion ligne)	Générateurs de l'algèbre de Brauer, autosymétriques	Tableaux oscillants
$RS_c^{I,bi}$ (insertion colonne)	Générateurs de l'algèbre de Brauer, autosymétriques	Tableaux oscillants
S_L^O (insertion ligne)	Paires involution et tableau injectif	Tableaux oscillants

Description de la bijection du théorème 3.5

Elle fait correspondre à un tableau standard T de $S_{2n,c}^{=k} \cup S_{2n,c}^{=2k-1}$ un tableau oscillant O de $O_{2n,c}^{=k}$. Cette bijection opère en plusieurs étapes.

Étape 1 Au tableau standard T on fait correspondre, par l'algorithme $RS_L^{I,-1}$, une involution τ sur $2n+c$ points ayant c points fixes. Cette involution se décompose de façon naturelle en une paire (τ_1, F) où τ_1 est l'involution τ privée de ses points fixes et F est l'ensemble des points fixes de τ .

Étape 2 À l'involution τ_1 on fait correspondre, par RS_c^O , un tableau oscillant O_1 de longueur $2n$ et de forme finale \emptyset .

Étape 3 Au tableau oscillant O_1 on fait correspondre, par $RS_L^{O,-1}$, une involution τ_2 sans point fixe sur $2n$ points.

Notons que les involutions τ_1 et τ_2 agissent sur les $2n$ points correspondant au complément de F par rapport à $[2n+c]$.

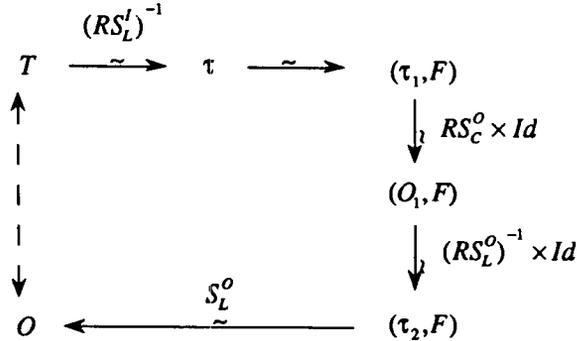


Figure 3.3

Présentons maintenant ces différentes étapes à l'aide d'un exemple.

Exemple 3.6

Soit

$$T = \begin{array}{cccccc}
 12 & & & & & \\
 11 & & & & & \\
 7 & & & & & \\
 5 & 15 & & & & \\
 4 & 10 & 16 & & & \\
 2 & 8 & 14 & & & \\
 1 & 3 & 6 & 9 & 13 &
 \end{array}$$

Figure 3.4

Ce tableau est de hauteur $2k-1 = 7$, son nombre de colonnes de hauteur impaire est $c = 4$ et sa taille est $2n + c = 12 + 4 = 16$. Il lui correspond par l'algorithme de Robinson-Schensted l'involution

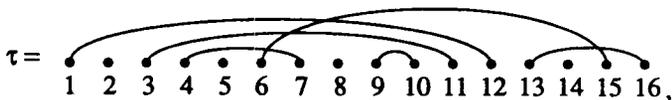


Figure 3.5

En appliquant RS_C^0 sur τ_1 , nous obtenons de droite à gauche la suite de tableaux injectifs

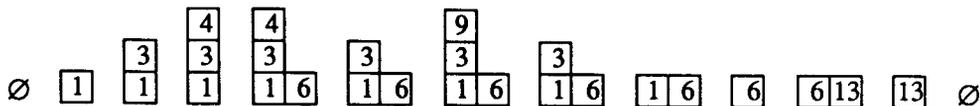


Figure 3.6

l'ensemble des points fixes $F = \{2, 5, 8, 14\}$ restant inchangé. Le tableau oscillant correspondant est

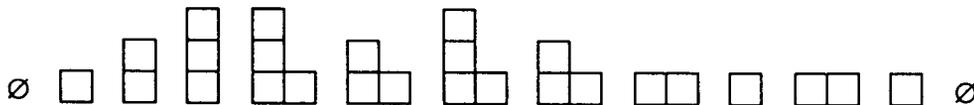


Figure 3.7

En appliquant maintenant RS_L^{0-1} , on obtient la suite de tableaux injectifs

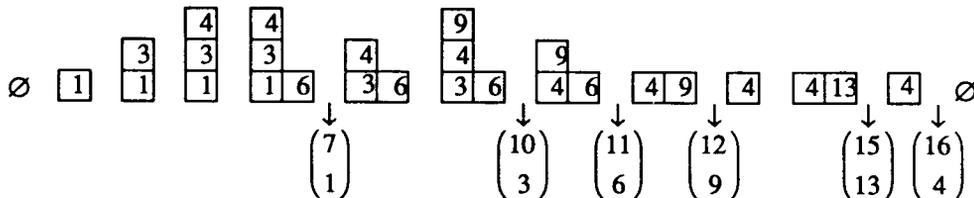


Figure 3.8

ce qui nous donne la paire (τ_2, F) où

$$\tau_2 = \begin{pmatrix} 7 & 10 & 11 & 12 & 15 & 16 \\ 1 & 3 & 6 & 9 & 13 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } F = \{2, 5, 8, 14\}.$$

En appliquant S_L^0 au couple constitué de l'involution τ_2 et d'un tableau injectif d'une seule ligne comprenant les éléments de F , nous obtenons de bas en haut et de droite à gauche la suite de tableaux injectifs

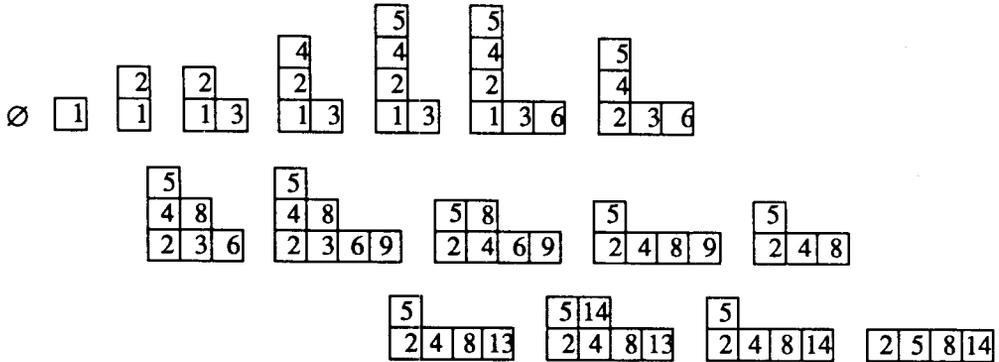


Figure 3.9

correspondant à un tableau oscillant de hauteur $k = 4$, de forme finale $\lambda = (c) = (4)$ et de longueur $2n + c = 12 + 4 = 16$.

Même si cette bijection ne fait intervenir que des étapes assez naturelles, sa preuve n'en est pas simple pour autant. Si on se réfère à la bijection de D. Gouyou-Beauchamps [Gou] pour le cas $k = 2$, on se rend vite compte de la difficulté du résultat. Sa bijection pour les tableaux de hauteur quatre se divisait en plusieurs cas. La bijection proposée ici a l'avantage d'être plus simple et de généraliser le résultat qu'il obtenait. La preuve cependant, un peu comme celle de D. Gouyou-Beauchamps, se fait en plusieurs étapes. Il nous faut démontrer des résultats non triviaux concernant les sous-suites croissantes ou décroissantes apparaissant dans les involutions. Ces involutions faisant le lien entre les tableaux standards et les tableaux oscillants (voir *figure 3.3*).

Donc, pour démontrer ce résultat, nous aurons besoin de quelques définitions et notations, ensuite suivront quelques théorèmes et lemmes, illustrés par des exemples.

Section 3.3 *Preuve du théorème 3.5*

Comme au chapitre II, on représentera une involution sans point fixe τ de la façon suivante

$$\tau = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \end{pmatrix},$$

où $\tau(\alpha_i) = \beta_i$, $\alpha_i < \beta_i$, $1 \leq i \leq n$.

et son miroir par

$$\text{inf}^*(\tau) = \beta_n \ \beta_{n-1} \ \cdots \ \beta_1.$$

De plus nous désignerons par

$$\text{inf}^*(\tau, k) = \beta_{i_1} \ \beta_{i_2} \ \cdots \ \beta_{i_j},$$

la plus longue sous-suite extraite de $\text{inf}^*(\tau)$ telle que, pour tout $1 \leq p \leq j$,

$$\beta_{i_p} \leq k < \alpha_{i_p}.$$

Par exemple si

$$\tau = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 & 10 & 11 & 12 \\ 2 & 1 & 5 & 8 & 9 & 4 \end{pmatrix},$$

alors

$$\text{inf}(\tau) = 2 \ 1 \ 5 \ 8 \ 9 \ 4,$$

et

$$\text{inf}^*(\tau) = 4 \ 9 \ 8 \ 5 \ 1 \ 2,$$

et le tableau suivant donne les valeurs de $\text{inf}^*(\tau, k)$ pour toutes les valeurs de k .

$\text{inf}^*(\tau, 1)$	1	$\text{inf}^*(\tau, 7)$	4
$\text{inf}^*(\tau, 2)$	1 2	$\text{inf}^*(\tau, 8)$	4 8
$\text{inf}^*(\tau, 3)$	1	$\text{inf}^*(\tau, 9)$	4 9 8
$\text{inf}^*(\tau, 4)$	4 1	$\text{inf}^*(\tau, 10)$	4 9
$\text{inf}^*(\tau, 5)$	4 5 1	$\text{inf}^*(\tau, 11)$	4
$\text{inf}^*(\tau, 6)$	4 5	$\text{inf}^*(\tau, 12)$	\emptyset

Figure 3.10

On constate par cet exemple, le parallèle entre les suites $\text{inf}^*(\tau, k)$ et la suite des tableaux injectifs obtenue par RS_L^O à partir de τ :

Notation

Par la suite, un tableau oscillant O sera noté de façon habituelle, c'est-à-dire.

$$O = \emptyset \quad \lambda_1 \quad \dots \quad \lambda_n.$$

Les suites de tableaux injectifs obtenues par insertion ligne et colonne seront respectivement notées

$$O_L = \emptyset \quad S_1 \quad \dots \quad S_n \quad \text{et} \quad O_C = \emptyset \quad T_1 \quad \dots \quad T_n.$$

Parfois nous utiliserons les notations $O_L[i]$ et $O_C[i]$ pour désigner les tableaux injectifs S_i et T_i , ainsi que les notations $O_L[i](k, l)$ et $O_C[i](k, l)$ pour désigner l'entier situé en ligne k et colonne l du tableau S_i (respectivement T_i).

Nous désignerons par $P_C(\sigma)$ (respectivement $P_L(\sigma)$) les P -symboles obtenus à partir de la permutation généralisée σ par application de la correspondance de Robinson-Schensted RS_C^O (respectivement RS_L^O).

À l'aide de ces notations, nous pouvons formuler la proposition suivante,

Proposition 3.7 Soient le tableau oscillant

$$O = \emptyset \quad \lambda_1 \quad \dots \quad \lambda_{2n} = \emptyset$$

et les suites de tableaux injectifs

$$\tau = RS_C^O(O) \quad \text{et} \quad \rho = RS_L^O(O).$$

Alors, pour tout k compris entre 1 et $2n$, nous avons

$$O_C[k] = P_C(\text{inf}^*(\tau, k))$$

$$O_L[k] = P_L(\text{inf}^*(\rho, k))$$

Preuve Ce résultat est immédiat compte tenu de la définition de la suite $\text{inf}^*(\sigma, k)$ et des propriétés de la correspondance de Robinson-Schensted pour les tableaux oscillants (théorème 2.8 et sa preuve). L'exemple donné précédemment (figures 3.10 et 3.11) illustre ce résultat.

Nous sommes maintenant amenés à considérer deux classes particulières d'involutions.

Remarque. Cette terminologie, habituelle dans le cas des involutions associées aux tableaux standards, correspond à une représentation sous forme de mots des involutions.

Par exemple, l'involution

$$\tau = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 10 & 11 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 6 & 3 & 8 & 5 & 4 & 1 & 2 & 12 \end{pmatrix},$$

appartient à $I_{16,8}$, les décroissances de longueur maximale étant

Décroissances								Centre
14	13	11	7	6	5	4	1	[6 7]
15	13	11	7	6	5	4	2	[6 7]
14	13	11	10	8	5	4	1	[8 10]
15	13	11	10	8	5	4	2	[8 10]

Figure 3.12

Définition 3.9 Nous désignons par $\mathbb{I}_{2n,2c}$ l'ensemble des involutions ρ sans point fixe sur $[2n]$ admettant une plus longue *double croissance* de longueur $2c$, c'est-à-dire deux sous-suites $(j_c < \dots < j_1, i_c < \dots < i_1)$ telles que $\rho(i_k) = j_k$.

L'intervalle $[i_1, j_c]$ est appelé le *centre* de la double croissance.

Les mêmes remarques que précédemment s'appliquent ici.

Par exemple, l'involution

$$\rho = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 10 & 11 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 6 & 12 & 8 & 3 \end{pmatrix},$$

appartient à $\mathbb{I}_{16,8}$, les doubles croissances de longueur maximale étant

Doubles croissances								Centre
10	11	13	15	1	5	6	8	[8 10]
7	9	11	13	2	4	5	6	[6 7]
9	11	13	15	4	5	6	8	[8 9]

Figure 3.13

Théorème 3.10 Il existe une bijection Φ entre l'ensemble $I_{2n,2k}$ et l'ensemble $\mathbb{I}_{2n,2k}$ telle que si $\tau \in I_{2n,2k}$ et que $\Phi(\tau) = \rho$, alors ces deux involutions vérifient les propriétés suivantes:

- (i) Pour chaque sous-suite décroissante de longueur $2k$ de τ et de centre $[i_1, j_1]$, il existe une sous-suite de ρ , doublement croissante de longueur $2k$ et de centre $[x_1, y_k]$ telle que

$$[i_1, j_1] \subset [x_1, y_k].$$

- (ii) Pour chaque sous-suite de ρ doublement croissante de longueur $2k$ et de centre $[x_1, y_k]$ et pour chaque point p de $[x_1, y_p]$, il existe une sous-suite de τ , décroissante, de longueur $2k$ dont le centre $[i_1, j_1]$ contient le point p .

Exemple. Les involutions τ et ρ précédentes (figure 3.12 et 3.13) se correspondent par notre bijection Φ , comme nous le verrons plus tard. On constate que les conditions (i) et (ii) du théorème sont vérifiées.

La démonstration de ce théorème nécessite les deux lemmes suivants que nous démontrerons dans la section 3.4.

Lemme 3.11 La correspondance de Robinson-Schensted RS_C^O (insertion colonne) pour les tableaux oscillants est une bijection entre les ensembles $O_{2n,0}^{=k}$ et $I_{2n,2k}$. De plus, si O est un tableau oscillant de $O_{2n,0}^{=k}$ et $\tau = (RS_C^O)^{-1}(O)$, cette involution vérifie la condition suivante:

- (C) Si $j_1 = \tau(i_1)$ où i_1 est l'entier expulsé à l'étape j_1 alors qu'il se trouvait sur la ligne q et en colonne 1 de l'un des tableaux injectifs, alors τ admet une décroissance de longueur $2q$ de centre $[i_1, j_1]$.

Lemme 3.12 La correspondance de Robinson-Schensted (insertion ligne) RS_L^O pour les tableaux oscillants est une bijection entre les ensembles $O_{2n,0}^{=k}$ et $\mathbb{I}_{2n,2k}$. De plus, si O est un tableau oscillant de $O_{2n,0}^{=k}$ et $\rho = RS_L^O(O)$, cette involution vérifie la condition suivante:

- (L) Si, lors de la construction de ρ , l'étape y_q consiste en une suppression de cellule provoquant en particulier le déplacement d'un entier x_1 de la ligne q à la ligne $q-1$ du tableau injectif correspondant ($q = 1$ lorsque x_1 est l'entier expulsé), alors ρ admet une double croissance de longueur $2q$ de centre $[x_1, y_q]$.

comme nous le verrons plus tard, les points fixes traités à part (ensemble F de la figure 3.3 et de l'exemple 3.6).

Soit

$$\tau = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 11 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 1 & 7 & 8 & 10 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

En lui appliquant RS_C^0 on obtient, de droite à gauche, la suite de tableaux injectifs

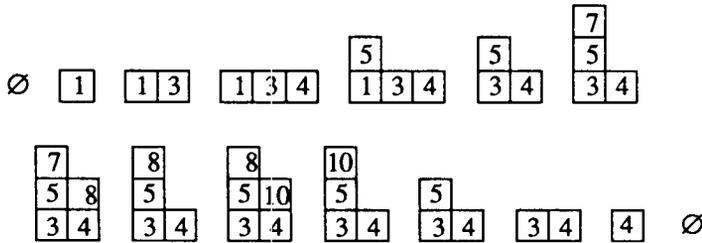


Figure 3.14

Cette suite correspond au tableau oscillant

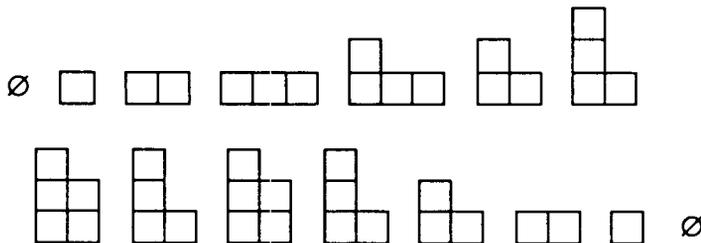
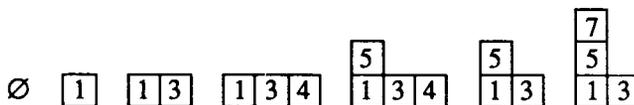


Figure 3.15

En appliquant RS_L^0 , on obtient la suite de tableaux injectifs



correspondant à l'involution

$$\rho = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 11 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 4 & 3 & 8 & 1 & 5 & 10 & 7 \end{pmatrix}.$$

Remarque. Figure 3.14, l'étape $j_1 = 11$ consiste en la suppression de $i_1 = 8$, entier expulsé de la ligne $q = 3$. On constate également que $\tau(8) = 11$ et l'involution τ admet deux décroissances de longueur $2q = 6$ et de centre $[8 \ 11]$ (15, 14, 11, 8, 5, 3 et 16, 14, 11, 8, 5, 4). Ceci est donc cohérent avec le lemme 3.11.

Figure 3.16, l'étape $y_q = 13$ consiste en la suppression de l'entier 1 provoquant le passage de $x_1 = 7$ de la ligne $q = 3$ à la ligne 2. On constate que l'involution ρ admet une double croissance (13, 14, 16, 1, 5, 7) de centre $[7 \ 13]$ et de longueur $2q = 6$. On retrouve donc bien la condition (L) du lemme 3.12.

Preuve (théorème 3.10)

Supposons vrais les lemmes 3.11 et 3.12. Il nous reste alors à prouver les deux conditions (i) et (ii).

(i) Soient $\tau \in I_{2n, 2k}$ et $O = RS_C^O(\tau)$. Soit D une sous-suite décroissante de longueur $2k$ de τ et de centre $[i_1, j_1]$,

$$D = j_k > \dots > j_1 > i_1 > \dots > i_k,$$

où $\tau(i_h) = j_h$ pour $1 \leq h \leq k$. Cette involution a donc la forme

$$\tau = \begin{pmatrix} \dots & j_1 & \dots & j_k & \dots \\ \dots & i_1 & \dots & i_k & \dots \end{pmatrix}.$$

Dans la construction, de droite à gauche, de la suite des tableaux injectifs, à l'étape l précédant l'étape j_1 , le tableau injectif $O_C[l]$ est de hauteur k . En effet,

$$O_C[l] = P_C(D') = P_C(\dots \ i_k \ \dots \ i_1),$$

où D' est une sous-suite de $\text{inf}^*(\tau)$ se terminant par i_1 et dans laquelle on a supprimé les entiers $x \geq j_1$. Elle admet donc une croissance de longueur k , à savoir $i_k < \dots < i_1$ (voir le chapitre I). Cette suite ne peut contenir de sous-suite croissante

serait une sous-suite croissante de D' de longueur $k+1$ et τ contiendrait une décroissance de longueur $2(k+1)$, contredisant l'hypothèse selon laquelle τ appartient à $I_{2n,2k}$. On peut écrire, en utilisant le *lemme 3.11* ou le théorème de Greene [Gre] que

$$O_c[l](k,1) = i_1.$$

Dans l'*exemple 3.13*, la sous-suite D de τ est

$$15 > 14 > 11 > 8 > 5 > 3$$

de centre $[8,11]$ et à l'étape 10 le tableau est

8	
5	10
3	4

Mais puisque

$$j_1 = \tau(i_1) \text{ et } i_1 = O_c[l](k,1),$$

nous pouvons affirmer que la cellule contenant i_1 à l'étape l , a été créée à une étape antérieure que nous noterons x_1 ($x_1 = 7$ dans l'*exemple 3.13*). Nous pouvons également affirmer que la dite cellule sera supprimée à une étape y , postérieure à l'étape j_1 ($y = 13$ dans l'*exemple*). Nous avons donc

$$j_1 \leq y \text{ et } x_1 \leq i_1.$$

Considérons maintenant l'involution ρ de $I_{2n,2k}$

$$\rho = RS_L^0(O) = \Phi(\tau).$$

Compte tenu de ce qui précède, les étapes de création et de suppression de cellules étant les mêmes pour les involutions τ et ρ , puisque correspondant au même tableau oscillant, nous avons

$$O_L[x_1](k,1) = x_1.$$

Soit maintenant y_k , l'étape à laquelle x_1 descend de la ligne k à la ligne $k-1$, ce qui correspond à l'étape de suppression de la cellule contenant x_1 , x_1 ne pouvant être poussé par un élément venant de la ligne $k+1$. Ainsi, d'après le *lemme 3.12*, ρ admet une double

$$[i, j_1] \subseteq [x_1, y_k],$$

ce qui termine la démonstration de la propriété (i).

(ii) Soient ρ une involution de l'ensemble $\mathbb{I}_{2n, 2k}$ et $O = RS_L^o(\rho)$. Soit

$$(y_k < \dots < y_1, x_k < \dots < x_1),$$

une double croissance de longueur $2k$ et de centre $[x_1, y_k]$, où $\rho(x_h) = y_h$ pour $1 \leq h \leq k$. L'involution ρ s'écrit alors

$$\rho = \begin{pmatrix} \dots & y_k & \dots & y_1 & \dots \\ \dots & x_k & \dots & x_1 & \dots \end{pmatrix}.$$

Dans l'exemple 3.13, pour l'involution ρ , considérons la double croissance

$$(13 < 14 < 15, 1 < 5 < 10)$$

de longueur 6 et de centre $[10, 13]$.

Dans la suite correspondante de tableaux injectifs, à l'étape l précédant l'étape y_k , (dans l'exemple 3.13, $l = 11$), le tableau injectif $O_L[l]$ est de hauteur k . En effet,

$$O_L[l] = P_L(D) = P_L(\dots x_1 \dots x_k),$$

où D est une sous-suite de $\text{inf}^*(\rho)$ se terminant par x_k et dans laquelle on a supprimé les entiers $x \geq y_k$. D admet donc une décroissance de longueur k , à savoir $x_1 > \dots > x_k$.

Dans l'exemple 3.13 la suite D est $(7 \ 10 \ 5 \ 1)$ et admet la décroissance $7 > 5 > 1$ de longueur 3.

Soit $\alpha_1 = O_L[l](k, 1)$, l'élément α_1 est alors le minimum des premiers éléments de toutes les sous-suites décroissantes de D de longueur k , [Gre]. Dans l'exemple 3.13 $\alpha_1 = 7$. Nous avons donc $\alpha_1 \leq x_1$.

Soit β_k l'étape à laquelle l'entier α_1 descend de la ligne k à la ligne $k - 1$. D'après le lemme 3.12, ρ admet une double croissance de longueur $2k$ et de centre $[\alpha_1, \beta_k]$

$$(\beta_k < \dots < \beta_1, \alpha_k < \dots < \alpha_1).$$

$$\beta_k \geq y_k.$$

Ainsi on est passé d'une sous-suite doublement croissante de ρ de longueur $2k$ et de centre $[x_1, y_k]$ à une sous-suite doublement croissante de ρ de même longueur $2k$ et de centre $[\alpha_1, \beta_k]$ telle que

$$[x_1, y_k] \subseteq [\alpha_1, \beta_k].$$

Mais puisque $\alpha_1 = O_L[I](k, 1)$, que l'étape β_k est l'étape à laquelle l'entier α_1 descend de la ligne k à la ligne $k-1$ et que le tableau O est de hauteur k , nous avons les deux faits suivants

- (1) À l'étape β_k , la cellule du tableau injectif contenant l'entier α_1 est supprimée. C'est le cas puisque α_1 ne peut être remplacé par un entier supérieur venant de la ligne $k+1$.
- (2) La cellule contenant l'entier α_1 et située à hauteur k a été nécessairement créée à l'étape α_1 . Sinon, α_1 aurait été poussé dans cette cellule à partir d'une cellule située à hauteur $k+1$.

Considérons maintenant l'involution

$$\tau = RS_C^O(O) = \Phi^{-1}(\rho).$$

Puisque le tableau oscillant O correspond à τ par RS_C^O et à ρ par RS_L^O , les étapes de suppression et de création de cellules sont les mêmes pour τ et ρ . Nous déduisons de (1) et (2) que $O_C[\alpha_1]$ est un tableau injectif pour lequel

$$O_C[\alpha_1](k, 1) = \alpha_1$$

et que la cellule ainsi créée à l'étape α_1 sera détruite à l'étape β_k . Cette cellule, durant toute son existence dans O , contiendra relativement à la correspondance RS_C^O une suite croissante d'entiers

$$\alpha_1 = i_1^1 < i_1^2 < \dots < i_1^t$$

où i_1^t , avec $t \geq 1$, est son contenu au moment de sa suppression à l'étape β_k . De plus les entiers i_1^s , pour $1 \leq s < t$, sont expulsés à des étapes j_1^s vérifiant

$$j_1^1 < j_1^2 < \dots < j_1^t = \beta_k.$$

On déduit alors du *lemme 3.11* que pour toutes les valeurs de s telles que $1 \leq s \leq t$, τ admet une décroissance de longueur $2k$ et de centre $[i_1^s, j_1^s]$, i_1^s étant expulsé de la ligne k à l'étape j_1^s .

Dans l'*exemple 3.13*, nous avons, pour $\alpha_1 = 7$ et $\beta_k = 13$

Centre = $[i_1^s, j_1^s]$	Sous-suite décroissante associée
[7,9]	$16 > 14 > 9 > 7 > 5 > 4$
[8,11]	$16 > 14 > 11 > 8 > 5 > 4$
[10,13]	$16 > 14 > 13 > 10 > 5 > 4$

figure 3.17

En conclusion, nous avons

$$\alpha_1 = i_1^1 < i_1^2 < \dots < i_1^t$$

$$j_1^1 < j_1^2 < \dots < j_1^t = \beta_k$$

et pour $1 \leq s < t$

$$i_1^{s+1} < j_1^s.$$

Nous en déduisons

$$[\alpha_1, \beta_k] = \bigcup_{s=1}^t [i_1^s, j_1^s].$$

D'autre part, nous avons $[x_1, y_k] \subseteq [\alpha_1, \beta_k]$.

Ainsi, pour tout point p de $[x_1, y_k]$, centre d'une double croissance de longueur $2k$ de ρ , il existe une sous-suite décroissante de longueur $2k$ de $\tau = \Phi^{-1}(\rho)$ et de centre $[i_1^s, j_1^s]$ contenant p . (pour un certain s compris entre 1 et t).

Ceci termine, sous réserve de la validité des *lemmes 3.11* et *3.12*, la preuve du *théorème 3.10*.

Définition 3.14 Nous désignons par $I_{2n,c,k}$ l'ensemble des involutions τ sur $[2n+c]$ ayant c points fixes et admettant une *décroissance* D de longueur maximale k , telle que

$$\text{si } k = 2p \text{ alors } D = j_p > \dots > j_1 > i_1 > \dots > i_p,$$

Remarque 3.15 Dans la *définition 3.14*, il convient de remarquer que

$$(1) \quad \begin{cases} k \leq 2n+1 & \text{si } c \geq 1 \\ k \leq 2n & \text{si } c = 0 \end{cases}$$

(2) La *définition 3.8* de $I_{2n,2d}$ correspond à $I_{2n,0,2d}$.

(3) Dans [Gou3] on trouvera une preuve du fait qu'à toute sous-suite décroissante de longueur k d'une involution, correspond une sous-suite décroissante ayant la forme D (paragraphe "Stacks and decreasing sequences")

Définition 3.16 Nous désignons par $\mathbb{I}_{2n,c,k}$ l'ensemble des involutions τ sur $[2n+c]$ ayant c points fixes et admettant une *double croissance* C de longueur maximale k , telle que

$$\text{si } k = 2p \text{ alors} \quad C = y_p < \dots < y_1, \quad x_p < \dots < x_1,$$

$$\text{si } k = 2p+1 \text{ alors} \quad C = y_p < \dots < y_1, \quad x_p < \dots < x_1 < f,$$

$$\text{avec } \tau(x_r) = y_r \text{ et } \tau(f) = f.$$

Remarque 3.17 Comme précédemment, il convient de remarquer que

$$(1) \quad \begin{cases} k \leq 2n+1 & \text{si } c \geq 1 \\ k \leq 2n & \text{si } c = 0 \end{cases}$$

(2) La *définition 3.9* de $\mathbb{I}_{2n,2c}$ correspond à $\mathbb{I}_{2n,0,2c}$.

Une extension simple du *théorème 3.10* nous conduit au résultat suivant.

Corollaire 3.10.1 Il existe une bijection Ψ de l'ensemble $I_{2n,c,k}$ vers l'ensemble $\mathbb{I}_{2n,c,k}$.

Preuve Soit τ une involution de $I_{2n,c,k}$. Soit F l'ensemble des points fixes de τ et $A = [2n+c] / F$. Considérons l'involution sans point fixe τ' obtenue de τ en la restreignant aux points de A . Ainsi, si $k = 2p$ ou bien si $k = 2p+1$, τ' est une involution de l'ensemble $I_{A,2p}$. Considérons l'involution $\rho' = \Phi(\tau')$. Le *théorème 3.10* nous assure que ρ' est une involution de $\mathbb{I}_{A,2p}$. Considérons l'involution ρ sur $[2n+c]$ définie par

$$\rho \in \mathbb{I}_{2n,c,k}.$$

Pour terminer la preuve du *théorème 3.5*, il nous faut montrer les deux résultats suivants.

Lemme 3.18 Il existe une bijection ν entre l'ensemble $S_{2n,c}^{-k}$ et l'ensemble $I_{2n,c,k}$.

Preuve C'est une conséquence de la *propriété 1.2* de Schützenberger [Schü] et du théorème de Schensted [Sche].

Lemme 3.19 Il existe une bijection μ entre l'ensemble $O_{2n,c}^{-k}$ et l'ensemble $\mathbb{I}_{2n,c,2k-1} \cup \mathbb{I}_{2n,c,2k}$.

Preuve Soit ρ une involution appartenant à $\mathbb{I}_{2n,c,2k-1} \cup \mathbb{I}_{2n,c,2k}$. Notons p la longueur de la plus longue double croissance de ρ . Ainsi $p = 2k-1$ ou $p = 2k$. L'involution ρ agit sur $[2n+c]$ et possède pour points fixes l'ensemble $F = \{f_1 < f_2 < \dots < f_c\}$ de cardinalité c .

Considérons l'extension $\tilde{\rho}$ de ρ définie par,

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\rho}(i) &= \rho(i) \text{ pour } i \in [2n+k] / F, \\ \tilde{\rho}(f_{c-j+1}) &= 2n+c+j \\ \tilde{\rho}(2n+c+j) &= f_{c-j+1} \end{aligned} \right\} \text{pour } 1 \leq j \leq c$$

Ainsi, $\tilde{\rho}$ est une involution sans point fixe sur $A = [2n+2c]$.

Sa forme est la suivante

$$\tilde{\rho} = \begin{pmatrix} \dots\dots\dots & 2n+c+1 & 2n+c+2 & \dots & 2n+2c \\ \rho & & & & \\ \dots\dots\dots & f_c & f_{c-1} & \dots & f_1 \end{pmatrix}.$$

De plus nous constatons immédiatement

$$\begin{aligned} \rho \in \mathbb{I}_{2n,c,2k-1} &\Rightarrow \tilde{\rho} \in \mathbb{I}_{2n+2c,0,2k} \\ \rho \in \mathbb{I}_{2n,c,2k} &\Rightarrow \tilde{\rho} \in \mathbb{I}_{2n+2c,0,2k}. \end{aligned}$$

On déduit alors du *lemme 3.12* que si $\tilde{O} = RS_L^O(\tilde{\rho})$ alors \tilde{O} est un tableau oscillant appartenant à $O_{2n+2c,0}^{-k}$. Ainsi

Ainsi à l'involution ρ correspond exactement le tableau oscillant

$$O = \emptyset, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{2n+c}$$

qui appartient aussi à $O_{2n,c}^k$.

Remarquons de plus que

$$O_L[2n+c] = \boxed{f_1} \boxed{f_2} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{f_c}$$

où $F = \{f_1, f_2, \dots, f_c\}$, ce qui fait que cette construction est clairement réversible.

Exemple 3.20. Soit l'involution

$$\rho = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 9 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

où l'ensemble des points fixes est $F = \{1, 6, 8\}$.

Cette involution appartient donc à $\mathbb{I}_{6,3,5}$. Sa plus longue double croissance est $(6 < 7 < 9, 3 < 5 < 6)$. La construction de $\tilde{\rho}$ nous donne

$$\tilde{\rho} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 2 & 3 & 5 & 8 & 6 & 1 \end{pmatrix},$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_p \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_F$

et $\tilde{\rho}$ appartient à $\mathbb{I}_{12,0,6}$. La plus longue double croissance est en effet $7 < 9 < 11, 3 < 5 < 6 < 7$. Le tableau oscillant lui correspondant par RS_L^O est

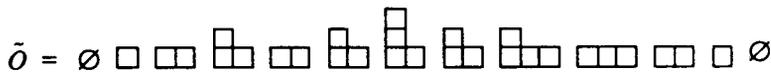
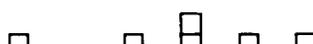


Figure 3.18

Il appartient à $O_{12,0}^{n=3}$. Dans la construction du tableau, on constate que $\tilde{O}_L[9] = \boxed{168} = F$. Ainsi le tableau oscillant O (\tilde{O} privé de ses dernières formes) est un élément de l'ensemble $O_{6,3}^3$,



Preuve (théorème 3.5) Elle est une conséquence immédiate des *lemmes 3.18* et *3.19* ainsi que du *corollaire 3.10.1*.

Section 3.4 *Preuve des lemmes 3.11 et 3.12*

Par commodité pour le lecteur, nous rappelons les énoncés de ces lemmes dans cette section. Pour la démonstration du premier lemme, le lecteur pourra consulter l'*exemple 3.13* de la section précédente.

Lemme 3.11 La correspondance de Robinson-Schensted RS_C^O (insertion colonne) pour les tableaux oscillants est une bijection entre les ensembles $O_{2n,0}^{=k}$ et $I_{2n,2k}$. De plus, si O est un tableau oscillant de $O_{2n,0}^{=k}$ et $\tau = (RS_C^O)^{-1}(O)$, cette involution vérifie la condition suivante

(C) Si $j_1 = \tau(i_1)$ où i_1 est l'entier expulsé à l'étape j_1 alors qu'il se trouvait sur la ligne q et en colonne 1 de l'un des tableaux injectifs, alors τ admet une décroissance de longueur $2q$ de centre $[i_1, j_1]$.

Preuve Nous avons vu au chapitre précédent que l'algorithme RS_C^O est une bijection entre les involutions sans point fixe sur $[2n]$ et les tableaux oscillants de longueur $2n$ et de forme finale vide (\emptyset). Soit

$$O = (\emptyset, \lambda_1, \dots, \lambda_{2n} = \emptyset)$$

un tableau oscillant de $O_{2n,0}^{=k}$ et soit $\tau = (RS_C^O)^{-1}(O)$. Montrons que τ satisfait la propriété (C) et qu'elle appartient à $I_{2n,2k}$.

Soit i_1 un entier de $[2n]$ apparaissant sur la première colonne et la ligne q de l'un des tableaux injectifs de O_C . Cet entier est expulsé de l'un des tableaux injectifs de O_C à l'étape j_1 , où $i_1 < j_1 = \tau(i_1)$. Ainsi

$$O_C[j_1 - 1](q, 1) = i_1.$$

Soit l'entier $i_2 = O_C[j_1](q - 1, 1)$, cet entier existe et est nécessairement plus petit que i_1 . Supposons que i_2 soit expulsé à l'étape j_2 où $i_2 < j_2 = \tau(i_2)$. On a nécessairement $j_2 > j_1$ et donc

$$j_q > \dots > j_2 > j_1 > i_1 > i_2 > \dots > i_q$$

dont le centre est $[i_1, j_1]$ et où $\tau(i_k) = j_k$.

Comme le tableau oscillant O est exactement de hauteur k , il existe un entier p tel que $O_c[p]$ est un tableau injectif de hauteur k , et un entier i_1 vérifiant $O_c[p](k, 1) = i_1$.

L'involution τ admet donc une décroissance de longueur $2k$ vérifiant la propriété (C). Il reste à montrer que cette décroissance est de longueur maximale.

Supposons au contraire que τ possède une décroissance de longueur $2d$ avec $2d > 2k$, c'est-à-dire

$$j_d > \dots > j_2 > j_1 > i_1 > i_2 > \dots > i_d.$$

On peut alors écrire τ sous la forme suivante

$$\tau = \begin{pmatrix} \dots & j_1 & \dots & j_2 & \dots & j_d & \dots \\ \dots & i_1 & \dots & i_2 & \dots & i_d & \dots \end{pmatrix}.$$

Considérons le tableau injectif $O_c[j_1 - 1]$. Ce tableau est aussi le P -symbole, obtenu par l'algorithme de Robinson-Schensted avec insertion colonne, pour le mot $m = \text{inf}^*(\tau, j_1 - 1)$:

$$O_c[j_1 - 1] = P_c(m).$$

Le mot m admet la sous-suite $i_d i_{d-1} \dots i_2 i_1$ car tous ces entiers sont plus petits que l'entier j_1 . Ainsi, d'après le théorème de Schensted [Sch], $O_c[j_1 - 1]$ serait de hauteur $d > k$ ce qui contredirait l'hypothèse initiale sur O . Ceci termine la preuve du *lemme 3.11*.

La partie délicate de cette section porte sur la preuve du *lemme 3.12*. Elle passe par plusieurs étapes intermédiaires pour lesquelles, comme nous l'avons souligné au chapitre I, le théorème de Knuth [Knu2], [Gre] jouera un rôle important. Nous avons cependant remarqué que des propriétés concernant les permutations d'une même classe de Knuth peuvent être prouvées en montrant

- i) qu'elles sont vérifiées pour la permutation canonique ligne $\tilde{\sigma}_L$,
- ii) qu'elles sont laissées invariantes par *seulement deux* des transpositions de Knuth, (il est inutile d'essayer de le prouver pour les autres).

Pour expliquer ce résultat, donnons d'abord la définition suivante

où $a < b < c$.

Théorème 3.22 (Knuth) Soit S un tableau standard et $\bar{\sigma}_L$ la permutation canonique ligne associée. Alors toute permutation σ dont le P_L -symbole est S (algorithme de Robinson-Schensted avec insertion ligne), s'obtient à partir de $\bar{\sigma}_L$ par une suite de transpositions de la classe K .

Bien que ce résultat ne soit pas donné explicitement par Knuth [Knu], il est sous-jacent à la preuve de son théorème.

Théorème 3.23 Soient S un tableau standard de taille n , i_1 et i_p deux entiers. Considérons $D = i_1 > i_2 > \dots > i_p$ une suite décroissante d'entiers de $[n]$ vérifiant
 (i) pour tout j , $1 \leq j \leq p$, l'entier i_j apparaît sur la ligne k_j de S où $k_1 > k_2 > \dots > k_p$,
 (ii) i_p est maximal parmi toutes les suites décroissantes débutant par i_1 , de longueur p et vérifiant (i).

Alors, toute permutation σ dont le P_L -symbole est S admet une sous-suite décroissante

- (1) débutant par i_1 ,
- (2) se terminant par i_p ,
- (3) de longueur maximale l où $l \geq p$,
- (4) telle que toute sous-suite décroissante de σ de longueur l débutant par i_1 se termine par i_l , où $i_l \leq i_p$.

Exemple 3.24 Soit

$$S = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & 7 & \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline \end{array}$$

Figure 3.20

Les permutations σ telles que $P_L(\sigma) = S$ (classe de Knuth de S) sont données dans le tableau suivant, et leur nombre, 21, est donné par la formule des équerres.

Classe de Knuth de S $\bar{\sigma}_L = 6724135$		
6724513	6274135	6217435
6724153	6271453	6214753
6724135	6271435	2674513
6721453	6247513	2674153

On constate que quelle que soit la sous-suite décroissante D de longueur p , débutant par i_1 , se terminant par i_p et vérifiant les conditions (i) et (ii) du théorème, toute permutation de la figure 3.21 admet une sous-suite décroissante vérifiant (1), (2), (3) et (4). Les longueurs, début et fin des sous-suites D sont donnés par le tableau ci-dessous.

Longueur p	Début i_1	Fjn i_p
2	7	5
2	6	5
2	4	3
2	2	1
3	7	3
3	6	3

Figure 3.22

Preuve (du théorème 3.23) Soient S un tableau standard de taille n et une suite décroissante d'entiers $D = i_1 > i_2 > \dots > i_p$ vérifiant les conditions (i) et (ii) de l'énoncé.

Montrons tout d'abord que le résultat est vrai pour la permutation canonique $\tilde{\sigma}_L$. D'après la définition de la permutation canonique $\tilde{\sigma}_L$ et la condition (i) que vérifie D , il est évident que la suite D est une sous-suite décroissante de $\tilde{\sigma}_L$. De plus, en vertu de la définition de $\tilde{\sigma}_L$, la condition (ii) nous assure que

D est une sous-suite décroissante de $\tilde{\sigma}_L$, de longueur maximale parmi celles débutant par i_1 et finissant par i_p ,

pour toute sous-suite décroissante de $\tilde{\sigma}_L$ de longueur p , débutant par i_1 et se terminant par x , on a $x \leq i_p$.

Ainsi, D est la sous-suite recherchée, maximale pour $\tilde{\sigma}_L$ et vérifiant (1), (2), (3) et (4). Le résultat est donc vérifié pour $\tilde{\sigma}_L$.

Soit σ_1 une permutation dans la classe de Knuth de S , admettant une sous-suite D_1 vérifiant (1), (2), (3) et (4). Sa longueur est donc $l \geq p$.

Soit σ_2 une permutation de la classe de Knuth obtenue de σ_1 par une des deux transpositions de la classe K . Deux cas sont à considérer :

$$D_1 = i_1 \cdots i_{k-1} c i_{k+1} i_p,$$

où $i_{k+1} \leq a < c$.

Alors la suite

$$D_2 = i_1 \cdots i_{k-1} c a i_{k+1} i_p$$

est une sous-suite décroissante de σ_2 de longueur $l+1$.

Ainsi, σ_2 admet une sous-suite décroissante D_2 débutant par i_1 se terminant par i_p et de longueur maximale k , égale à l ou $l+1$. Montrons par l'absurde, que D_2 vérifie la propriété (4) du théorème.

Soit donc

$$D'_2 = i_1 x_2 \cdots x_k$$

une sous-suite décroissante de longueur k débutant par i_1 et finissant par x_k , avec $x_k > i_p$. On peut supposer que D'_2 est telle que x_k est maximal parmi les sous-suites décroissantes vérifiant ces conditions. Raisonnons sur les entiers a et c permutés par k_1 .

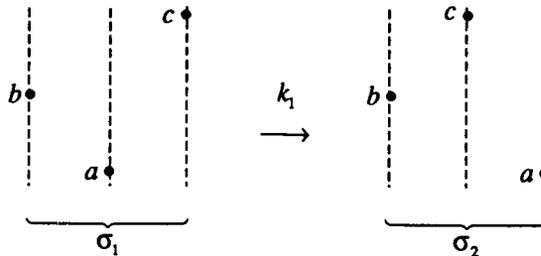


Figure 3.23

Cas i) La suite D'_2 ne contient pas les deux entiers a et c . Dans ce cas, il s'agit aussi d'une sous-suite décroissante de σ_1 , ce qui est contradictoire avec le fait que D_1 vérifie (4).

Cas ii) La suite D'_2 contient les deux entiers a et c .

(a) Si les deux entiers c et a ne sont pas les deux premiers dans la sous-suite D'_2 , il y a encore une contradiction. En effet, en remplaçant c par b dans la sous-suite D'_2 , on obtient une sous-suite décroissante de σ_1 . Contredisant le fait que D_1 vérifie (4).

(b₂) Si $k = l$ nous avons

$D'_2 = i_1 a x_3 \cdots x_l$ sous-suite décroissante de σ_2 ,

$D_1 = i_1 i_2 i_3 \cdots i_l$ sous-suite décroissante de σ_2 ,

$x_l > i_l = i_p$, et x_l maximal pour les sous-suites de σ_2 du "type" D'_2 .

Nous avons nécessairement $i_2 > a$. S'il en était autrement :

$i_2 = a$ et $D_1 = i_1 i_2 i_3 \cdots i_l = c a i_3 \cdots i_p$ ne pourrait être une sous-suite décroissante de σ_1 (figure 3.23),

$i_2 < a$ et $i_1 a i_1 \cdots i_l$ serait une sous-suite décroissante de σ_2 (D_1 l'est et $i_1 = c < a$) de longueur $l+1$, et se terminant par $i_l = i_p$, ce qui contredit les caractéristiques de D_2 pour σ_2 avec l'hypothèse $k = l$, (cas b₂).

Ainsi, comme le montre le diagramme de la figure 3.24, les deux sous-suites décroissantes D'_2 et D_1 de σ_2 se "croisent".

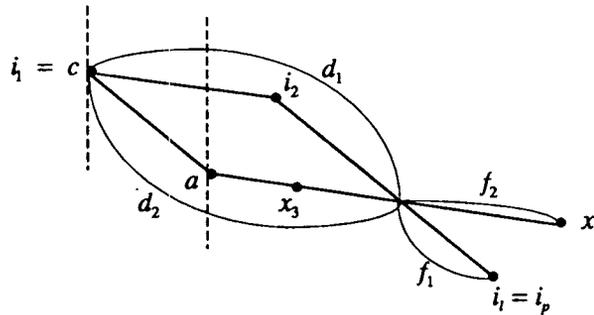


Figure 3.24

Divisons ces deux sous-suites, relativement à leur "intersection", comme le montre la figure 3.24 :

D_1 en deux parties de longueurs respectives d_1 et f_1 ,

D'_2 en deux parties de longueurs respectives d_2 et f_2 .

Ainsi $l = d_1 + f_1 = d_2 + f_2$ et deux cas peuvent se produire.

- Si $f_1 > f_2$, la suite allant de i_1 à i_l et passant par a et x_3 a pour longueur $d_2 + f_1 > d_2 + f_2 = l$. Cette sous-suite décroissante de σ_2 débutant par i_1 et

$x_i > x_p$. Ceci contredit le fait que D_1 vérifie la condition (4) du théorème pour les sous-suites de longueur l débutant par i_1 .

Ceci termine la preuve du *cas A*).

Cas B) $\sigma_2 = k_2(\sigma_1)$ où $k_2 : c a b \rightarrow a c b$ (figure 3.25)

Rappelons pour le lecteur, que

$$D_1 = i_1 i_2 \cdots i_l,$$

où $i_l = i_p$, est une sous-suite décroissante vérifiant les propriétés (1), (2), (3) et (4) du théorème. Sa longueur est $l \geq p$.

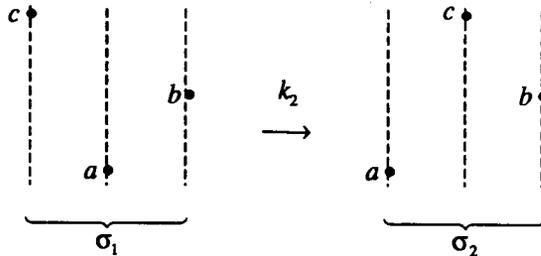


Figure 3.25

Cas i) D_1 ne contient pas les deux entiers permutés c et a . D_1 est alors une sous-suite décroissante pour σ_2 et vérifie donc (1), (2) et (3). Elle vérifie également (4) pour σ_2 car c'est le cas pour σ_1 et toute sous-suite décroissante pour σ_2 l'est pour σ_1 (figure 3.25).

Cas ii) $D_1 = i_1 i_2 \cdots i_{k-1} i_k \cdots i_l = i_1 i_2 \cdots c a \cdots i_l$.

(a) Supposons que $k < l$. Dans ce cas, la suite

$$D'_1 = i_1 i_2 \cdots i_{k-1} b i_{k+1} \cdots i_l$$

est une sous-suite décroissante de σ_2 (figure 3.25). Pour les mêmes raisons que précédemment, cette suite vérifie les conditions (1), (2), (3) et (4).

(b) Supposons que $k = l$ et donc $a = i_p = i_l$. Dans ce cas la suite

Remarque On peut obtenir un résultat analogue au *théorème 3.23* en remplaçant dans son énoncé les termes "décroissante" par "croissante" et "ligne" par "colonne". Ceci est due au théorème de Schensted [Sche].

Définition 3.25 Soit S un tableau standard et i_k un entier situé sur la ligne k du tableau S .

On définit la trace de i_k , notée $tr(i_k)$, comme étant la suite décroissante $i_k i_{k-1} \cdots i_1$ telle que, pour tout entier j compris entre 1 et $k-1$, i_j est l'entier le plus grand sur la ligne j de S qui soit inférieur à i_{j+1} .

Exemple.

$$S = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 5 & & \\ \hline 4 & 9 & \\ \hline 2 & 7 & 8 \\ \hline 1 & 3 & 6 \\ \hline \end{array}$$

Pour ce tableau nous avons $tr(5) = 5\ 4\ 2\ 1$ et $tr(9) = 9\ 8\ 6$.

Remarque La trace d'un entier x , $tr(x)$, est exactement la suite des entiers déplacés lorsqu'on pousse x dans l'algorithme de Robinson-Schensted RS_L^l .

Corollaire 3.23.1 Soient S un tableau standard et i_k un entier situé sur la ligne k , tel que

$$tr(i_k) = i_k i_{k-1} \cdots i_2 i_1.$$

Alors, toute permutation σ appartenant à la classe de Knuth de S admet une sous-suite décroissante

- commençant par i_k ,
- se terminant par i_1 ,
- de longueur $l \geq k$.

Preuve Il suffit de constater que la trace $tr(i_k)$ remplit les conditions (i) et (ii) du *théorème 3.10*, pour obtenir le résultat.

Pour terminer cette section, nous rappelons le *lemme 3.12* et nous le démontrons ensuite. Le lecteur pourra se référer à l'*exemple 3.13*.

Lemme 3.12 La correspondance de Robinson-Schensted (insertion ligne) RS^o pour

$q-1$ du tableau injectif correspondant ($q = 1$ lorsque x_1 est l'entier expulsé) alors ρ admet une double croissance de longueur $2q$ de centre $[x_1, y_q]$.

Preuve (lemme 3.12) Soit O un tableau oscillant de $O_{2n,0}^k$ et soit $\rho = RS_L^O(O)$. Montrons tout d'abord que ρ vérifie la propriété (L) du lemme. Soit

$$x_1 = O_L[y_q - 1](q, r),$$

et

$$x_1 = O_L[y_q](q-1, r'),$$

avec $r' \geq r$.

Ainsi, à l'étape $l = y_q - 1$, l'entier x_1 se trouve à hauteur q dans le tableau injectif $S = O_L[y_q - 1]$ et l'étape y_q consiste en l'expulsion de l'un des entiers de $O_L[y_q - 1]$, disons x_q . L'involution ρ est donc de la forme

$$\rho = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & y_q & \cdots & \alpha_n \\ \beta_1 & \cdots & \underbrace{x_q}_{D} & \cdots & \beta_n \end{pmatrix},$$

et, d'après la proposition 3.7, nous avons

$$\begin{aligned} S &= P_L(\text{inf}^*(\rho, y_q - 1)) \\ &= P_L(D) \end{aligned}$$

où D est la suite $\beta_n \cdots x_q$ dans laquelle on a supprimé les entiers supérieurs ou égaux à y_q .

Considérons la trace de l'entier x_1 , dans S ,

$$\text{tr}(x_1) = z_1 z_2 \cdots z_q,$$

où $z_1 = x_1$, $z_i > z_{i+1}$ et $z_q = x_q$.

Le corollaire 3.23.1 nous assure l'existence d'une sous-suite décroissante de D

$$\rho = \begin{pmatrix} \cdots & y_q & \cdots & y_{q-1} & \cdots & y_2 & \cdots & y_1 & \cdots \\ \cdots & x_q & \cdots & x_{q-1} & \cdots & x_2 & \cdots & x_1 & \cdots \end{pmatrix}.$$

Comme $x_1 < y_q$, x_1 étant présent dans le tableau injectif à l'étape y_q , la sous-suite

$$x_1 < y_q < \cdots < y_1, \quad x_q < \cdots < x_1$$

est une sous-suite doublement croissante de centre $[x_1, y_q]$ et de longueur $2q$.

Ainsi τ vérifie la propriété (L). Le tableau oscillant O étant exactement de hauteur k , il existe un tableau injectif admettant un entier x_1 à hauteur k qui sera poussé vers la ligne $k-1$ à une certaine étape. L'involution ρ admet donc une double croissance de longueur $2k$.

De plus, si ρ admettait une double croissance de longueur $2q$, avec $q > k$, de centre $[x_1, y_q]$, alors le tableau injectif

$$O_L[y_q - 1] = P_L(\text{inf}^*(\tau, y_q - 1))$$

aurait une hauteur supérieure ou égale à q , car $\text{inf}^*(\tau, y_q - 1)$ admettrait une décroissance de longueur q . Ceci contredirait l'hypothèse selon laquelle O est un tableau oscillant de $O_{2n,0}^k$.

Ce qui achève la preuve du *lemme 3.12* et termine le chapitre.

CHAPITRE IV

UNE THÉORIE COMBINATOIRE DES POLYNÔMES DE BESSEL

Section 4.1. *Introduction*

Nous présentons ici un modèle combinatoire pour les polynômes de Bessel, basé sur les involutions munies d'une certaine pondération. Ce modèle, qui correspond également à une classe de tableaux oscillants, nous permet de donner une interprétation combinatoire et la preuve de la plupart des identités classiques sur cette famille de polynômes : équation différentielle, relation de récurrence à trois termes, équations différentielles récurrentes et série génératrice exponentielle. Nous donnons également une preuve totalement combinatoire de l'orthogonalité des polynômes de Bessel, preuve d'où nous déduisons la valeur du coefficient de normalisation, coefficient nécessaire à l'expression de toute fonction dans la base de ces polynômes.

Historiquement, les polynômes de Bessel, ainsi nommés compte tenu de leur relation avec les fonctions de Bessel, apparaissent comme solution de l'équation différentielle du second ordre [Chi], [Kra]

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + (2x + 2) \frac{dy}{dx} = n(n+1)y. \quad (4.1)$$

La valeur explicite de ces polynômes, en termes de la fonction hypergéométrique ${}_2F_0$, est la suivante :

$$\begin{aligned} y_n(x) &= {}_2F_0(-n, n+1; _ ; -x/2) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(n+k)!}{(n-k)!k!} \left(\frac{x}{2}\right)^k. \end{aligned}$$

Cette famille de polynômes peut également être définie à partir de la récurrence à trois termes

$$y_{n+1}(x) = (2n+1)x y_n(x) + y_{n-1}(x). \quad (4.2)$$

$$y_0(x) = 1, \quad y_1(x) = 1 + x.$$

Ainsi, les coefficients de ces polynômes sont entiers; nous donnons ci-dessous les cinq premiers polynômes de Bessel pour lesquels nous constatons que les coefficients des monômes de plus haut degré énumèrent les involutions sans point fixe (la suite 1, 1, 3, 15, 105, 945, ...).

$$y_0(x) = 1,$$

$$y_1(x) = 1 + x,$$

$$y_2(x) = 1 + 3x + 3x^2,$$

$$y_3(x) = 1 + 6x + 15x^2 + 15x^3,$$

$$y_4(x) = 1 + 10x + 45x^2 + 105x^3 + 105x^4.$$

Il existe de multiples autres relations de récurrence faisant intervenir les dérivées de ces polynômes; parmi les plus classiques nous pouvons citer :

$$x^2 y_n'(x) = (nx-1)y_n(x) + y_{n-1}(x), \quad (4.3)$$

$$x^2 y_{n-1}'(x) = y_n(x) - (nx+1)y_{n-1}(x), \quad (4.4)$$

$$x(y_n'(x) + y_{n-1}'(x)) = n(y_n(x) - y_{n-1}(x)), \quad (4.5)$$

$$(nx+1)y_n'(x) + y_{n-1}'(x) = n^2 y_n(x). \quad (4.6)$$

La série génératrice exponentielle des polynômes de Bessel est donnée par l'expression

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_{n-1}(x) \frac{t^n}{n!} = \exp\left(\frac{1 - (1 - 2xt)^{1/2}}{x}\right), \quad (4.7)$$

dans laquelle $y_{-1}(x) = 1$, (en général $y_{-n}(x) = y_{n-1}(x)$).

La série apparaissant dans l'exponentielle admet elle-même pour développement

$$\begin{aligned} \left(\frac{1 - (1 - 2xt)^{\frac{1}{2}}}{x} \right) &= t + x \frac{t^2}{2!} + 3x^2 \frac{t^3}{3!} + 15x^3 \frac{t^4}{4!} + 105x^4 \frac{t^5}{5!} + \dots \\ &= \sum_{n \geq 0} (2n)!! x^n \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

où nous voyons à nouveau apparaître la factorielle impaire $(2n)!! = 1.3.5 \dots (2n-1)$ énumérant les involutions sans point fixe.

Considérons maintenant l'algèbre des polynômes (où le produit est le produit usuel des polynômes) dont l'espace vectoriel sous-jacent est engendré par les combinaisons linéaires des polynôme $y_0(x), y_1(x), y_2(x), \dots$. La famille des polynômes de Bessel est alors orthogonale par rapport à la fonctionnelle linéaire semi-définie \mathfrak{B} , donnée par

$$\mathfrak{B}(f(x)) = \frac{1}{2\pi i} \oint f(x) e^{-x} dx$$

où l'intégrale complexe est prise sur un contour fermé contenant l'origine. Un calcul analytique permet de prouver l'orthogonalité des polynômes de Bessel, plus précisément

$$\mathfrak{B}(y_n(x) \cdot y_m(x)) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ (-1)^{n+1} \frac{2}{2n+1} & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.8)$$

En écrivant

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^n y_n^k x^k,$$

on obtient, compte tenu de la linéarité de la fonctionnelle \mathfrak{B}

$$\mathfrak{B}(y_n(x) \cdot y_m(x)) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m y_n^i y_m^j \mathfrak{B}(x^i \cdot x^j)$$

où

La suite $\left(\frac{(-2)^{n+1}}{(n+1)!}\right)_{n \geq 0}$ est en fait la suite $(\mu_n)_{n \geq 0}$ des moments pour cette famille de polynômes, cette suite de moments définissant de manière unique la fonctionnelle \mathfrak{B} .

Le passage de la base canonique à la base des polynômes de Bessel s'écrit matriciellement

$$Y = PX,$$

c'est-à-dire

$$\begin{bmatrix} y_0(x) \\ y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \\ y_4(x) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & y_1^1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & y_2^1 & y_2^2 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & y_3^1 & y_3^2 & y_3^3 & 0 & \cdots \\ 1 & y_4^1 & y_4^2 & y_4^3 & y_4^4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Le passage inverse, correspondant à $X = P^{-1}Y$, avec

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} m_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ m_{2,1} & m_{2,2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & 0 & 0 & \cdots \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} & 0 & \cdots \\ m_{5,1} & m_{5,2} & m_{5,3} & m_{5,4} & m_{5,5} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

est donné par

$$m_{i,j} = \frac{\mathfrak{B}(x^i \cdot y_j(x))}{\mathfrak{B}(y_i^2(x))}$$

avec

$$\mathfrak{B}(x^i \cdot y_j(x)) = \frac{(-2)^{i+1} (i)_j}{(j+i+1)!}, \quad (4.10)$$

$$M = \begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \cdots \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \mu_5 & \cdots \\ \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \mu_5 & \mu_6 & \cdots \\ \mu_3 & \mu_4 & \mu_5 & \mu_6 & \mu_7 & \cdots \\ \mu_4 & \mu_5 & \mu_6 & \mu_7 & \mu_8 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

et D la matrice diagonale dont les éléments sont donnés par la formule (4.8).

Nous proposons, comme le laissent présager les premières constatations faites sur les coefficients, un modèle combinatoire pour cette famille de polynômes, modèle permettant non seulement de retrouver toutes les identités classiques présentées précédemment, mais également d'obtenir une démonstration entièrement combinatoire de l'orthogonalité de cette famille de polynômes.

Il convient toutefois de souligner l'existence d'un autre modèle pour les polynômes de Bessel généralisés définis par

$$y_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (n + \alpha + 1)_k \left(\frac{x}{2}\right)^k$$

où $(n + \alpha + 1)_k = (n + \alpha + 1)(n + \alpha + 2) \cdots (n + \alpha + k - 1)(n + \alpha + k)$.

Cet autre modèle est un cas particulier d'un modèle plus complexe, introduit par Leroux et Strehl [Le-St] pour l'interprétation des polynômes de Jacobi. En effet, en restreignant les objets associés aux polynômes de Jacobi, ils obtiennent un modèle qui diffère de celui présenté ici, et démontrent les identités fondamentales pour ces polynômes de Bessel généralisés. Or ce modèle bien que plus complexe que celui proposé ici, n'a pas permis jusqu'ici de donner une explication combinatoire pour l'orthogonalité de cette famille.

Section 4.2. *Le modèle combinatoire*

Dans cette section, nous définissons pour chaque entier n positif ou nul, une classe d'objets pondérés dont la cardinalité de cette famille (en tenant compte de cette pondération) est un polynôme. Nous montrons ensuite que les polynômes ainsi définis sont les polynômes de Bessel.

Dans ce qui suit, nous utiliserons souvent une représentation graphique des involutions, très classique en Combinatoire. Celles-ci seront représentées par n points horizontalement alignés et les points deux à deux couplés seront reliés par des *arêtes* (la *figure 4.1* représente une involution sur cinq points ayant un seul point fixe). Nous noterons $c(\tau)$ le nombre d'arêtes de l'involution τ .

Nous désignerons par le terme *orbites* les cycles de longueur 1 ou 2 de l'involution, c'est-à-dire les points fixes et les arêtes. Ainsi, l'involution de la *figure 4.1* comprend trois orbites : deux arêtes et un point fixe.



figure 4.1

Considérons maintenant l'ensemble $\mathbb{I}_n^k(x)$ des involutions pondérées sur n points ayant k points fixes, où la fonction de poids ρ associe à chaque involution τ le poids défini par

$$\rho(\tau) = x^{c(\tau)}.$$

Nous étendons alors la fonction $Card$ à ces objets pondérés comme suit

$$Card_x(\mathbb{I}_n^k(x)) = I_n^k x^k,$$

ce qui nous permet de définir une famille de polynômes qui, comme nous le montrerons par la suite, s'avérera être celle des polynômes de Bessel.

Définition 4.1. On définit $\{y_n(x)\}_{n \geq 0}$ comme étant la suite de polynômes

$$y_n(x) = Card_x \left(\bigcup_{k=0}^n \mathbb{I}_{n+k}^{n-k}(x) \right),$$

c'est-à-dire, compte tenu de la définition de $Card_x$

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^n I_{n+k}^{n-k} x^k. \quad (4.11)$$

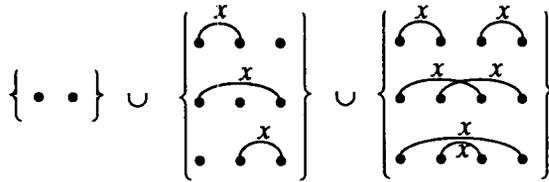


figure 4.2

Remarque. Au polynôme $y_n(x)$ ainsi défini correspond la famille des involutions (pondérées par la fonction ρ) ayant exactement n orbites, c'est-à-dire les involutions opérant sur un nombre de points pouvant aller de n (uniquement des points fixes) à $2n$ (uniquement des cycles de longueur 2).

Cette interprétation combinatoire des polynômes de Bessel, bien que voisine de celle correspondant aux polynômes de Hermite [Hei], [Vie], diffère quant à la taille et la pondération des involutions associées. En effet, le *nième* polynôme de Hermite est

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} I_n^{n-2k} (-1)^k x^{n-2k}.$$

A ce polynôme correspond donc l'ensemble des involutions opérant exactement sur n points et ayant $n-2k$ points fixes (ou k arêtes). La pondération consiste ici en le poids x sur chaque point fixe et (-1) sur chaque arête.

Remarque. Il aurait été possible de définir ces polynômes à partir des tableaux oscillants, en effet si on pose

$$Y_n(x) = \sum_{k=0}^n f_{n+k}^{(n-k)} x^k,$$

nous obtenons une définition équivalente, car en vertu des résultats du *chapitre III, section 3.1*, le nombre d'involutions sur $n+k$ points, ayant $n-k$ points fixes est égal au nombre de tableaux oscillants de longueur $n+k$ de forme finale $\lambda = (n-k)$.

Théorème 4.2. Les polynômes $y_n(x)$, définis par (4.11), sont les polynômes de Bessel.

Preuve. Nous constatons tout d'abord que les deux conditions initiales de la récurrence sont satisfaites, c'est-à-dire $v_0(x) = 1$ (involutions "vides" de poids 1) et $v_1(x) = 1 + x$

Ceci revient à construire une bijection entre l'ensemble $\mathbb{I}_{n+1+k}^{n+1-k}$ et l'ensemble $[2n+1] \times \mathbb{I}_{n+k-1}^{n-(k-1)} \cup \mathbb{I}_{n-1+k}^{n-1-k}$. Considérons donc une involution τ dans l'ensemble $\mathbb{I}_{n+1+k}^{n+1-k}$. Ou bien τ a un point fixe à la fin (à droite dans la représentation graphique c'est-à-dire le point $n+1+k$) ou bien le dernier point de τ est relié par une arête à un autre point situé à sa gauche. Dans le premier cas, on peut "bijectivement" supprimer ce point et ainsi obtenir une involution appartenant à l'ensemble \mathbb{I}_{n+k}^{n-k} ; dans le deuxième cas on supprime l'arête (et ses deux extrémités) en mémorisant la position où se trouvait l'extrémité initiale de cette arête supprimée, et nous obtenons donc un couple de l'ensemble $[n+k] \cup \mathbb{I}_{n+(k-1)}^{n-(k-1)}$. Ainsi, nous avons

$$\mathbb{I}_{n+1+k}^{n+1-k} \equiv \mathbb{I}_{n+k}^{n-k} \cup [n+k] \times \mathbb{I}_{n+(k-1)}^{n-(k-1)}. \quad (4.12)$$

On réapplique une nouvelle fois le même type de décomposition sur le premier ensemble du membre droit de l'identité ci-dessus. Si l'involution τ dans \mathbb{I}_{n+k}^{n-k} possède un point fixe à la fin, on le supprime et on obtient une involution dans $\mathbb{I}_{n-1+k}^{n-1-k}$. Si par contre le dernier point est relié à un autre point par une arête, cette fois-ci on supprime cette arête en conservant toutefois l'extrémité initiale de celle-ci (ce point devient point fixe de la nouvelle involution) que l'on marque pour rendre la construction réversible. Ce faisant, nous obtenons une involution de l'ensemble $\mathbb{I}_{n+(k-1)}^{n-(k-1)}$ dont un point fixe est marqué (choix d'un entier dans l'ensemble $[n-k+1]$).

Cette dernière décomposition permet de réécrire l'équation (4.12) de la façon suivante

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_{n+1+k}^{n+1-k} &\equiv \mathbb{I}_{n-1+k}^{n-1-k} \cup [n-k+1] \times \mathbb{I}_{n+(k-1)}^{n-(k-1)} \cup [n+k] \times \mathbb{I}_{n+(k-1)}^{n-(k-1)} \\ &\equiv \mathbb{I}_{n-1+k}^{n-1-k} \cup [2n+1] \times \mathbb{I}_{n+(k-1)}^{n-(k-1)}. \end{aligned}$$

La figure 4.3 présente schématiquement cette bijection pour laquelle nous avons combiné les deux étapes de la décomposition.

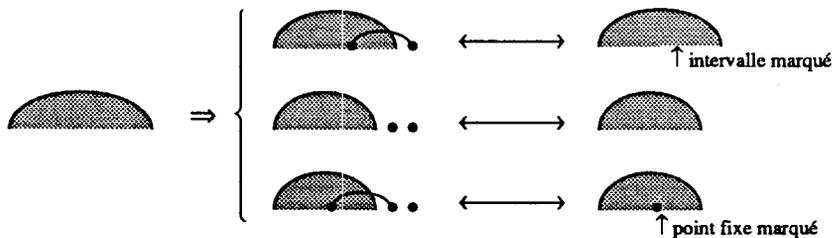


figure 4.3

Théorème 4.3. Les polynômes $y_n(x)$ satisfont l'équation différentielle définissant les polynômes de Bessel

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + (2x + 2) \frac{dy}{dx} = n(n+1)y.$$

Preuve. En reportant la définition des polynômes $y_n(x)$ (équation 4.11) dans cette équation différentielle et en extrayant les coefficients du monôme x^k , ce théorème revient à montrer que

$$(k+1)k I_{n+k}^{n-k} + 2(k+1) I_{n+(k+1)}^{n-(k+1)} = n(n+1) I_{n+k}^{n-k}. \quad (4.13)$$

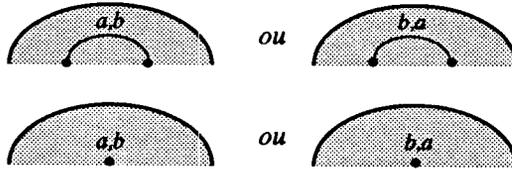


figure 4.4

Considérons le membre de droite de (4.13). Celui peut s'interpréter comme étant le nombre d'involutions sur $n+k$ points ayant $n-k$ points fixes, involutions constituées donc de n orbites, dont deux sont pointées par des lettres, a et b par exemple, où l'on tient compte de l'ordre du marquage et où l'on admet les répétitions, une même orbite pouvant être marquée deux fois, et de deux façons distinctes (a,b ou bien b,a comme le montre la figure 4.4). Dans le cas où les orbites pointées sont des arêtes (il y en a k), ceci donne le premier terme du membre gauche de (4.13) ($k(k+1)$ manières d'étiqueter compte tenu de ces règles dans l'étiquetage).

Si tel n'est pas le cas, l'étiquetage porte alors sur deux orbites dont l'une au moins est un point fixe de l'involution. Nous obtenons alors dix cas génériques suivant les positions des deux orbites marquées.

Par une construction réversible (voir la figure 4.5), il est possible pour chacun de ces dix cas d'ajouter une nouvelle arête à ces involutions, arête que l'on oriente et dont l'une des extrémités est le (l'un des) point(s) fixe(s) étiqueté(s) de l'involution initiale. Nous obtenons de cette façon des involutions sur $n+k+1$ points ayant $n-(k+1)$ points fixes et dont l'une des

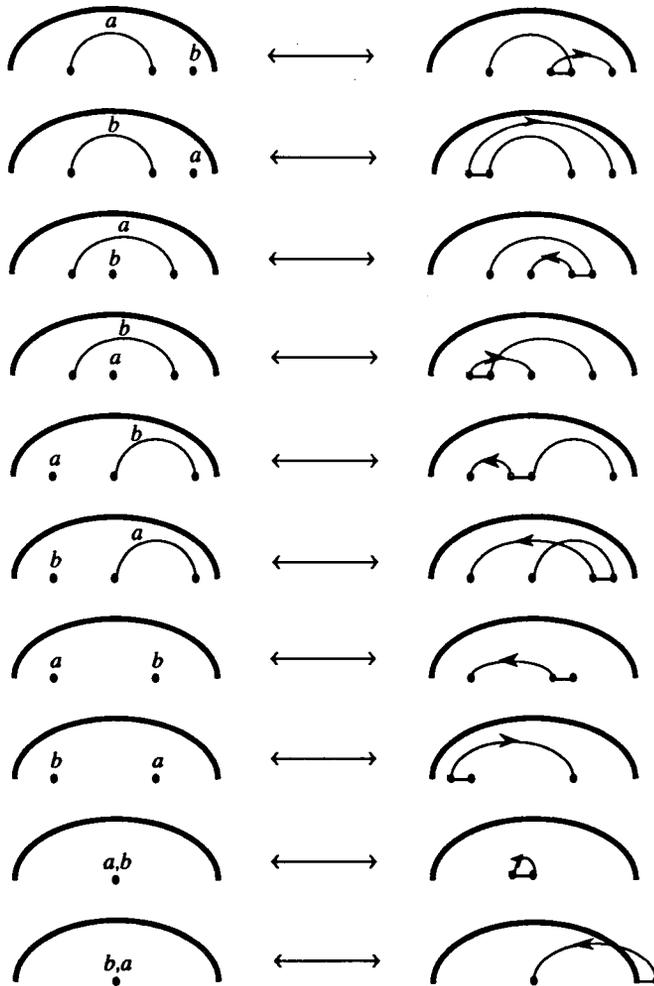


figure 4.5

Théorème 4.4. Les polynômes de Bessel satisfont la récurrence différentielle

$$x^2 y'_n(x) = (nx - 1)y_n(x) + y_{n-1}(x),$$

Preuve. En interprétant cette équation avec notre modèle combinatoire, et en extrayant les coefficients du monôme x^k , ceci revient à montrer l'identité suivante :

$$n - (k - 1)I_{n+(k-1)}^{n-(k-1)} + I_{n-1+k}^{n-1-k} = I_{n+k}^{n-k}.$$

Cette formule est la formule de récurrence classique pour les involutions. En effet, soit une involution (dont le nombre est donné par le membre droit de l'équation) se termine par un point fixe que l'on supprime, ce qui donne le deuxième terme du membre gauche; soit elle se termine par un point qui est l'extrémité d'une arête, et dans ce cas on supprime ce dernier point et cette arête en marquant l'extrémité initiale (que l'on conserve) qui devient point fixe, obtenant ainsi le premier terme du membre gauche.

Théorème 4.5. Les polynômes de Bessel satisfont la récurrence différentielle

$$x^2 y'_{n-1}(x) = y_n(x) - (nx + 1)y_{n-1}(x).$$

Preuve. Ceci revient à démontrer l'identité suivante :

$$n + (k - 1)I_{(n-1)+(k-1)}^{(n-1)-(k-1)} + I_{n-1+k}^{n-1-k} = I_{n+k}^{n-k}.$$

Il s'agit toujours de la formule de récurrence classique pour les involutions. La même construction que précédemment permet de la prouver, à ceci près que dans le cas de la suppression de l'arête dont l'une des extrémités est le dernier point de l'involution, on supprime cette fois les deux points constituant cette arête, en marquant l'endroit où figurait la première extrémité de celle-ci.

Théorème 4.6. Les polynômes de Bessel satisfont la récurrence différentielle

$$x(y'_n(x) + y'_{n-1}(x)) = n(y_n(x) - y_{n-1}(x)).$$

Preuve. La preuve de cette équation revient à prouver l'identité suivante :

Théorème 4.7. Les polynômes de Bessel satisfont la récurrence

$$(nx + 1)y'_n(x) + y'_{n-1}(x) = n^2 y_n(x).$$

Preuve. La démonstration s'inspire de la technique employée dans la preuve du *théorème 4.3*. Tout d'abord, cette équation revient à prouver l'identité suivante :

$$(k + 1) I_{n+(k+1)}^{n-(k+1)} + (k + 1) I_{n-1+(k+1)}^{n-1-(k+1)} = n(n - k) I_{n+k}^{n-k}.$$

Le membre droit de cette identité peut s'interpréter comme étant l'ensemble des involutions dont l'une des n orbites est marquée par le symbole "+" par exemple, et l'un des $n-k$ points fixes par le symbole "*". Ceci conduit à une classification en six groupes suivant les positions de ces marques (voir *figure 4.6*).

Pour le premier type, on relie les deux points fixes marqués "*" et "+" (dans cet ordre) par une arête que l'on choisit d'orienter vers la gauche. Nous obtenons donc une involution agissant sur le même nombre de points $n+k$ mais ayant deux points fixes de moins, et dont une arête (parmi $k+1$) est marquée (orientée vers la gauche); ceci nous donne la formule d'énumération constituant le second terme du membre gauche de l'identité.

Le premier terme de ce membre gauche énumère les involutions ayant n orbites dont $k+1$ sont des arêtes, l'une d'entre elles étant marquée (orientation vers la droite, comme sur la *figure 4.6*). Ces involutions sont classifiables en cinq groupes en fonction de l'orbite déterminée par le point situé immédiatement à droite du point constituant l'origine de l'arête orientée (les cinq dernières configurations de la partie droite de la *figure 4.6*). Lorsque ce point est l'extrémité d'une arête, on supprime ce point et l'arête en conservant l'autre extrémité qui devient point fixe (les trois derniers cas de la *figure 4.6*) en introduisant les marques permettant d'inverser la construction. Lorsque ce point est fixe ou qu'il n'existe pas, on effectue les deux opérations données par les deuxième et troisième schémas de la *figure 4.6*.

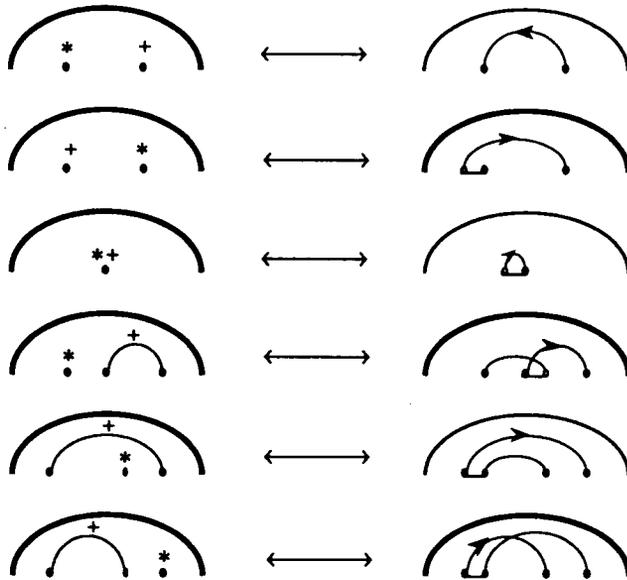


figure 4.6

Section 4.4. *La série génératrice exponentielle des polynômes de Bessel*

Une fonction importante associée à tout objet combinatoire est sa série génératrice (ordinaire ou exponentielle). Dans le cas des polynômes de Bessel, la série génératrice exponentielle est donnée par

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_{n-1}(x) \frac{x^n}{n!} = \exp\left(\frac{1 - (1 - 2xt)^{1/2}}{x}\right) \tag{4.14}$$

où le membre droit correspond à l'exponentielle d'une fonction qui elle même admet pour développement en série exponentielle la série

nous ajoutons donc un point fixe à droite dans la représentation graphique de ces involutions et nous appelons ces involutions les *involutions élémentaires*.

Nous en déduisons, par interprétation de l'exponentiation de cette série, que le *nième* coefficient du membre droit de l'équation (4.14) dénombre les assemblées d'involutions élémentaires pondérées (poids x sur chaque arête) ayant exactement n orbites étiquetées. La *figure 4.7* représente une assemblée de trois involutions élémentaires constituée de dix orbites. L'étiquetage des orbites dans chaque part se fait de la gauche vers la droite, suivant l'ordre d'apparition de leur extrémité initiale. Nous dirons que ces involutions élémentaires sont *orbites-étiquetées*.

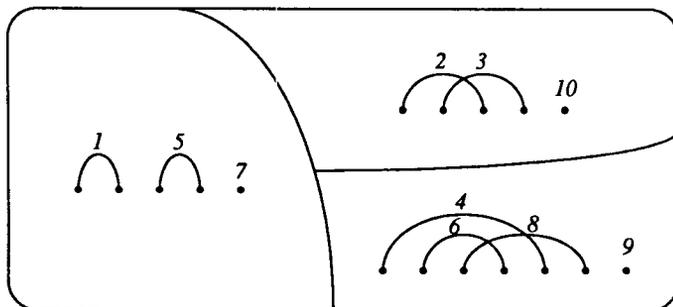


figure 4.7

D'autre part, nous considérons que les involutions correspondant au membre gauche de (4.14) sont étiquetées naturellement suivant l'ordre des points sur lesquels elles opèrent; nous les appelons *points-étiquetés*. De plus, pour la même raison que précédemment, nous ajoutons un point fixe terminal à ces involutions. Ainsi, le *nième* terme de la série génératrice exponentielle des polynômes de Bessel s'interprète comme étant le nombre d'involutions *points-étiquetés* ayant n orbites, cette dernière orbite devant être un point fixe (voir *figure 4.8*).



figure 4.8

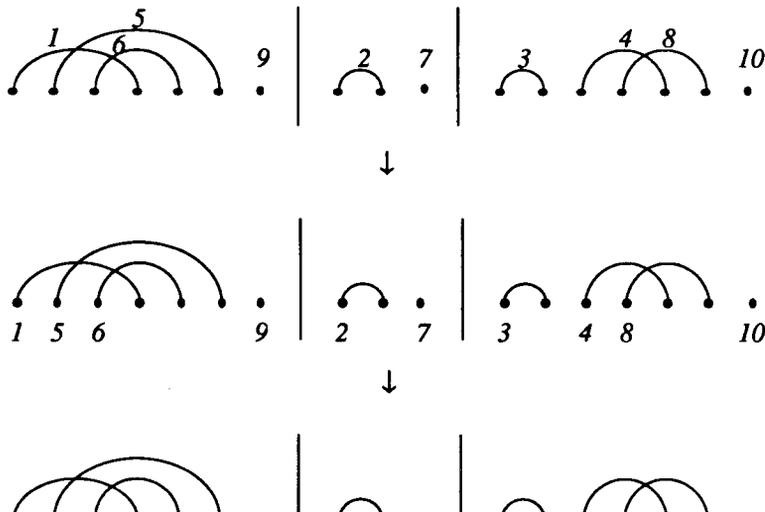
Toutefois, avant de présenter cette bijection, nous allons tout d'abord décrire une construction intermédiaire associant à une assemblée d'involutions élémentaires orbites-étiquetées une assemblée d'involutions élémentaires points-étiquetés ayant certaines propriétés caractéristiques que nous énoncerons.

Description de la construction \mathfrak{C} .

Soit $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k\}$ une assemblée d'involutions élémentaires orbites-étiquetées, constituée de n orbites réparties entre les k parts, involutions opérant sur $2n - k$ points au total (parmi les n orbites, k sont exactement des points fixes situés à la fin de chaque part). Pour faciliter la description de cette construction, nous considérons que les étiquettes des arêtes, pour toutes les involutions de l'assemblée, sont associées aux points constituant les extrémités initiales de ces arêtes (passage du premier au second schéma de la *figure 4.9*). Ensuite, pour chaque entier i de 1 à $2n - k$, l'étiquette i est une étiquette appartenant à une certaine involution élémentaire τ_j pour un certain entier j .

Dans le cas où tous les points de τ_j à gauche du point étiqueté i sont déjà étiquetés, ce point conserve son étiquette i . Autrement, le point le plus à gauche de τ_j non encore étiqueté prend l'étiquette i , et toutes les étiquettes k supérieures ou égales à i apparaissant dans l'assemblée sont incrémentées d'une unité. Cette construction, décrite sur l'exemple qui suit (*figure 4.9*) est clairement réversible.

Exemple .



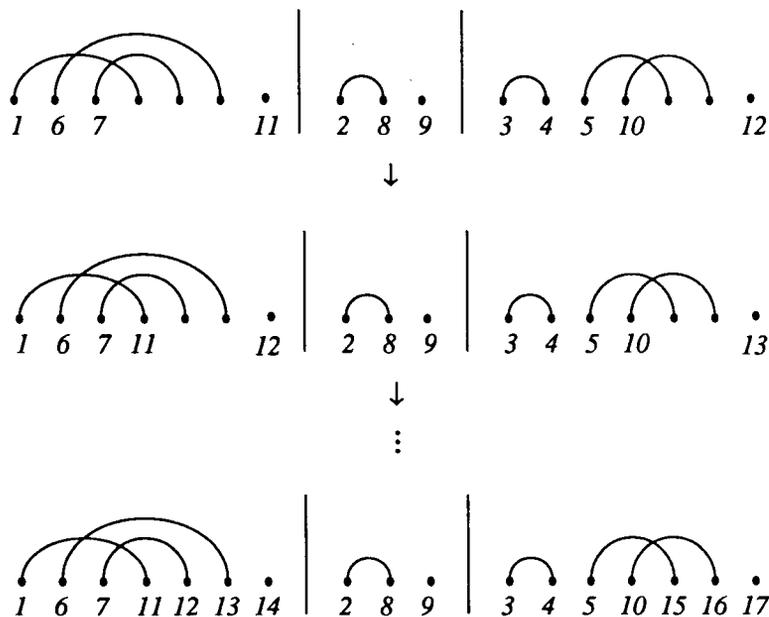


figure 4.9

Remarque. Les involutions élémentaires points-étiquetés ainsi obtenus ont certaines propriétés. En particulier, toute suite de longueur maximale de points consécutifs constituant les extrémités finales d'arêtes ont des étiquettes formant une suite croissante de nombres entiers consécutifs. De plus, le point suivant (nécessairement fixe ou extrémité initiale d'une arête) est étiqueté par l'entier immédiatement supérieur (voir dernière partie de la figure 4.9). Cette propriété caractérise complètement les *involutions élémentaires points-étiquetés*.

Théorème 4.8. La série génératrice des polynômes de Bessel est donnée par

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_{n-1}(x) \frac{x^n}{n!} = \exp\left(\frac{1 - (1 - 2xt)^{1/2}}{x}\right).$$

Preuve. Nous construisons une bijection Φ entre l'ensemble des assemblées d'involutions (terminant par un point fixe) ayant

cherchée (voir *figure 4.10*). Celle-ci se termine nécessairement par un point fixe compte tenu de la construction \mathfrak{E} .

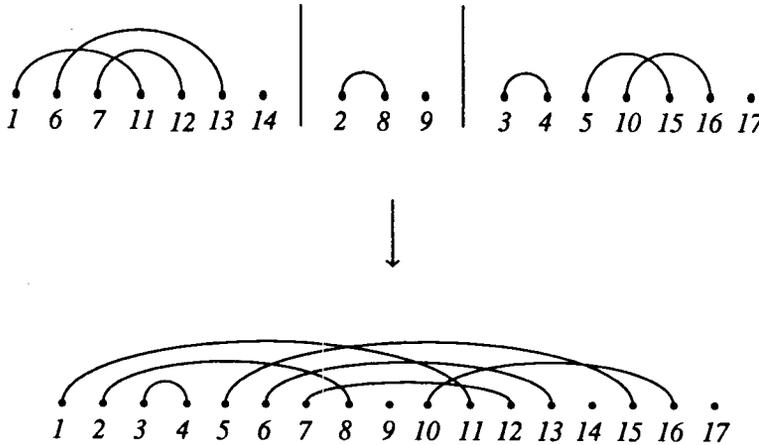


figure 4.10

Il s'agit maintenant de montrer que Φ est une bijection, ou, en d'autres termes, comment retrouver l'assemblée d'involutions élémentaires à partir de l'involution points-étiquetés?

Notons tout d'abord que le nombre de parts de l'assemblée est exactement le nombre de points fixes de l'involution points-étiquetés (il y en a au moins une par construction, les involutions devant toujours se terminer par un point fixe).

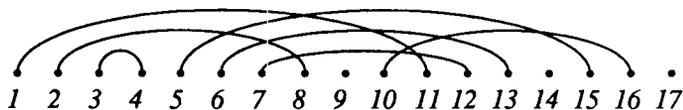
Partant de ce point fixe terminal, nous construisons la dernière part de l'assemblée en prenant (voir *exemple 2*) :

- toutes les arêtes dont l'extrémité finale est à droite de l'avant dernier point fixe,
- toutes les arêtes dont l'extrémité finale est étiquetée par un entier immédiatement inférieur à une étiquette d'un point appartenant déjà à la part considérée, cette règle étant appliquée récursivement.

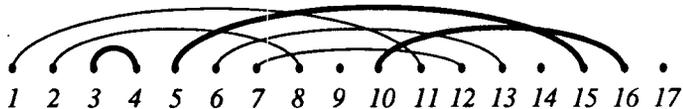
En répétant ce processus, on construit part par part l'assemblée d'involutions élémentaires.

La construction ainsi définie est bien l'application réciproque de Φ compte tenu de la *remarque* précédente caractérisant les involutions élémentaires points-étiquetés, comme on

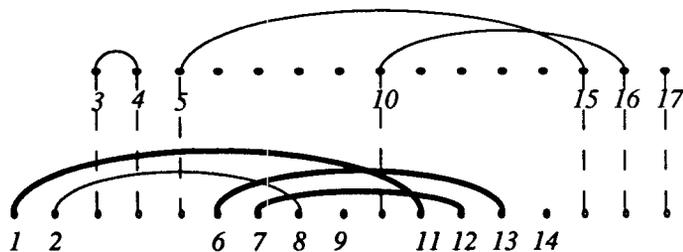
Exemple. Considérons l'involution obtenue à l'issue de l'exemple précédent, après intercalément des parts de l'assemblée (figure 4.10).



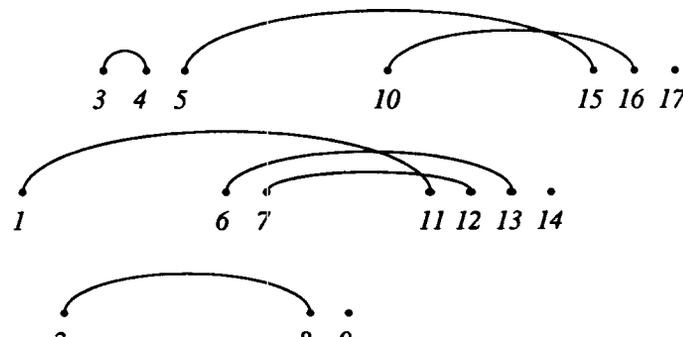
La première itération du processus décrit ci-dessus donne (en gras sur la figure) les arêtes constituant la première part de l'assemblée,



puis la seconde part,



et finalement, nous obtenons les trois parts suivantes



Section 4.5 Orthogonalité des polynômes de Bessel

Dans cette section, comme nous l'avons mentionné, dans l'introduction de ce chapitre, nous allons considérer la suite des moments, c'est-à-dire la suite des images de la base canonique $(x^n)_{n \geq 0}$ relativement à la fonctionnelle linéaire \mathfrak{B} , afin de démontrer combinatoirement les identités (4.8) et (4.10).

Définition 4.9. La suite des moments $(\mu_n)_{n \geq 0}$ correspondant à la fonctionnelle linéaire \mathfrak{B} est définie par

$$\mathfrak{B}(x^n) = \mu_n = \frac{(-2)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Théorème 4.10. Soient $y_n(x)$ le $n^{\text{ième}}$ polynôme de Bessel et x^k le $k^{\text{ième}}$ élément de la base canonique de l'espace des polynômes; alors

$$\mathfrak{B}(x^k \cdot y_n(x)) = \frac{(-2)^{k+1} (k)_n}{(n+k+1)!},$$

où $(k)_n = k(k-1) \cdots (k-n+1)$.

Nous donnons ci-dessous une preuve combinatoire de ce théorème. Compte tenu de notre modèle combinatoire des polynômes de Bessel, nous avons

$$x^k \cdot y_n(x) = \sum_{i=0}^n I_{n+i}^{n-i} \cdot x^{k+i}.$$

En appliquant la fonctionnelle linéaire \mathfrak{B} à ce polynôme, nous obtenons, d'après la définition des moments

$$\mathfrak{B}(x^k \cdot y_n(x)) = \sum_{i=0}^n I_{n+i}^{n-i} \cdot \frac{(-2)^{k+i+1}}{(k+i+1)!}.$$

L'interprétation combinatoire du membre droit de cette identité ne peut être fait directement; elle passe par l'utilisation d'un coefficient multiplicateur donnant

$$\frac{(k+n+1)!}{(-2)^{k+i+1}} \cdot \mathfrak{B}(x^k \cdot y_n(x)) = \sum_{i=0}^n I_{n+i}^{n-i} \cdot \frac{(-2)^i \cdot (k+n+1)!}{(k+i+1)!}.$$

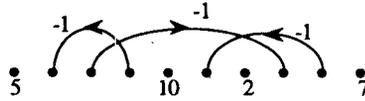


Figure 4.11

Définition 4.11 Nous notons $\mathcal{I}_{n,k}$ l'ensemble des involutions ayant, pour $0 \leq i \leq n$,

- i arêtes orientées (arcs vers la gauche ou la droite),
- $n - i$ points fixes étiquetés injectivement par des entiers de $[k + n + 1]$.

Nous définissons également un poids (ou signature) σ sur les involutions τ de $\mathcal{I}_{n,k}$ par

$$\sigma(\tau) = (-1)^{\# \text{ arêtes de } \tau}.$$

Remarque. Toute involution de $\mathcal{I}_{n,k}$ agit sur un nombre de points compris entre n (uniquement des points fixes) et $2n$ (uniquement des arêtes).

La preuve du *théorème 4.10* passe par l'obtention d'une involution Φ opérant sur $\mathcal{I}_{n,k}$, laissant fixe certains éléments de $\mathcal{I}_{n,k}$ et, pour les autres, vérifiant

$$\sigma(\Phi(\tau)) = -\sigma(\tau).$$

Description de l'involution Φ .

Soit τ une involution de $\mathcal{I}_{n,k}$. Nous allons déplacer une tête de lecture avec compteur, partant de l'extrême droite de l'involution, avec le compteur valant $k + n + 1$, entre les points de cette involution (*figure 4.12*).

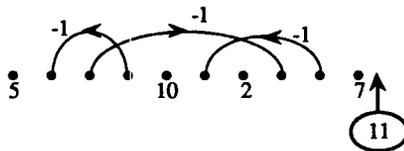


Figure 4.12

Chaque déplacement de la tête de lecture se fait vers la gauche avec diminution d'une unité du compteur. Le déplacement de la tête de lecture est stoppé lorsque, dans l'ordre, l'une des trois éventualités suivantes s'est produite.

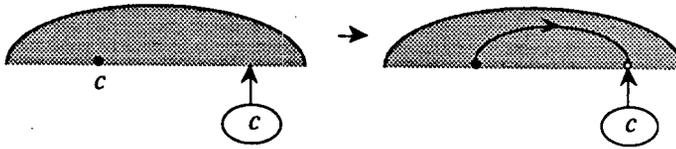


Figure 4.13

Événement 2- Le point immédiatement à gauche de la tête de lecture est le point d'arrivée d'un arc. Dans ce cas on supprime cet arc et le point d'arrivée et on étiquette le point source, devenant fixe, par la valeur de la tête de lecture. La figure 4.13' présente cette construction.

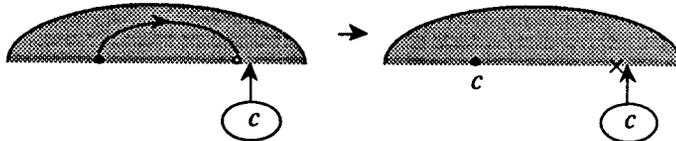


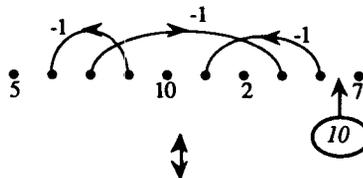
Figure 4.13'

Événement 3- La tête de lecture est arrivée à l'extrême gauche de l'involution (figure 4.13''). Dans ce cas, Φ laisse fixe cette involution.



Figure 4.13''

Exemple Dans le cas de la figure 4.14, lorsque la tête de lecture est à l'extrême droite de l'involution (figure 4.12), aucun des événements ne se produit. Après déplacement de cette tête de lecture, l'événement 1 se produit conduisant à l'obtention de la deuxième involution. On pourra vérifier que la même construction appliquée à cette deuxième involution redonne la première.



$\sigma(\Phi(\tau)) = -\sigma(\tau)$ (ajout ou suppression d'un arc) pour toutes les involutions pour lesquelles se produit l'un des deux premiers événements.

Il reste à considérer les involutions conduisant à l'événement 3, c'est-à-dire laissées fixes par Φ . Dans ce cas, l'événement 2 n'ayant pu se produire, cette involution n'admet que des points fixes (notons que le but d'un arc est atteint avec la tête de lecture ayant au moins la valeur $n + k + 1 - (n - i + i) = k + 1 \geq 1$, si l'involution possède i arêtes). Ainsi l'événement 3 se produit avec une valeur de la tête égale à $n + k + 1 - n = k + 1$ et donc les n points fixes ont des étiquettes strictement inférieures à $k + 1$ (l'événement 1 ne pouvant se produire).

On a donc $n \leq k$ et l'involution laissée fixe par Φ ne comporte que des points fixes (et donc n) avec étiquettes inférieures ou égales à k . Ainsi

$$\frac{(k+n+1)!}{(-2)^{k+1}} \cdot \mathfrak{B}(x^k \cdot y_n(x)) = (k)_n = \binom{k}{n} n!,$$

soit

$$\mathfrak{B}(x^k \cdot y_n(x)) = \frac{(-2)^{k+1} (k)_n}{(n+k+1)!}.$$

En utilisant ce dernier résultat, on peut aisément démontrer l'orthogonalité des polynômes de Bessel. Toutefois, nous en donnerons une preuve directe, utilisant la même involution que précédemment.

Théorème 4.12 Les polynômes de Bessel sont orthogonaux pour la fonctionnelle linéaire \mathfrak{B} , et plus précisément

$$\mathfrak{B}(y_n(x) \cdot y_m(x)) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ (-1)^{n+1} \frac{2}{2n+1} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Preuve. Compte tenu du modèle combinatoire et de la définition des moments, nous avons

$$\mathfrak{B}(y_n(x) \cdot y_m(x)) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m I_{n+i}^{n-i} I_{m+j}^{m-j} \frac{(-2)^{i+j+1}}{(i+j+1)!}.$$

$$\begin{aligned} \frac{(n+m+1)!}{(i+j+1)!} &= \binom{n+m+1}{n-i} (n-i)! \binom{m+i+1}{m-j} (m-j)! \\ &= (n+m+1)_{n-i} (m+i+1)_{m-j} \end{aligned}$$

Ceci nous permet de réécrire l'avant dernière équation de la façon suivante:

$$\frac{(n+m+1)!}{2} \mathfrak{B}(y_n(x) \cdot y_m(x)) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m I_{n+i}^{n-i} (n+m+1)_{n-i} (2)^i (-1)^i I_{m+j}^{m-j} (m+i+1)_{m-j} (2)^j (-1)^j.$$

Compte tenu de cette écriture, nous avons une interprétation combinatoire du membre droit de cette identité. Les termes additionnés correspondent aux paires d'involutions telles que

la première comporte i ($0 \leq i \leq n$) arêtes orientées et $n-i$ points fixes étiquetés injectivement dans $[n+m+1]$,

la seconde comporte j ($0 \leq j \leq m$) arêtes orientées et $m-j$ points fixes étiquetés injectivement dans $[m+i+1]$.

Le signe d'une telle paire d'involutions étant $(-1)^{i+j}$, ceci correspond à un poids de (-1) sur chaque arête.

Comme dans la preuve du théorème précédent, on utilise la même involution Φ agissant seulement sur la seconde involution de ces paires. De plus, initialement la tête de lecture est placée à l'extrême droite avec ici la valeur initiale $m+i+1$ pour le compteur.



Figure 4.15

Moyennant quelques précautions, on montrerait comme précédemment que Φ est involutive et change le signe des paires d'involutions. Les arêtes orientées à gauche de Φ

$$n = m = i.$$

Ainsi lorsque $m \neq n$ nous avons $\mathfrak{B}(y_n(x) \cdot y_m(x)) = 0$ et donc l'orthogonalité. Lorsque $n = m$, les paires d'involutions laissées fixes par Φ sont constituées

pour la seconde, uniquement de $n = m$ points fixes étiquetés par des entiers dans $[i] = [n] = [m]$, il y en a donc $n!$,

pour la première, uniquement de n arêtes orientées ($i = n$), chacune de signe (-1) , soit $(2n)!(-2)^n = \frac{(-1)^n (2n)!}{n!}$. On obtient donc

$$\frac{(n+m+1)!}{-2} \mathfrak{B}(y_n(x) \cdot y_m(x)) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \frac{(2n)!(-2)^n}{2^n n!} n! & \text{sinon} \end{cases},$$

soit

$$\mathfrak{B}(y_n(x) \cdot y_m(x)) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ (-1)^{n+1} \frac{2}{2n+1} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Section 4.6 *Le problème de la linéarisation*

Un autre problème auquel il est raisonnable de s'intéresser, concerne la décomposition du produit de deux polynômes de Bessel dans la base $(y_n(x))_{n \geq 0}$, c'est-à-dire

$$y_n(x) \cdot y_m(x) = \sum_{p=0}^{n+m} c_p y_p(x),$$

expression dans laquelle

$$c_p = \frac{\mathfrak{B}(y_n(x) \cdot y_m(x) \cdot y_p(x))}{\mathfrak{B}(y_p(x) \cdot y_p(x))}.$$

Le dénominateur de ce coefficient est le facteur de normalisation donné par l'équation (4.8) et le numérateur peut à son tour s'exprimer sous la forme

$$\mathfrak{B}(y_n(x) \cdot y_m(x) \cdot x^k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < n - m \\ 0 & \text{si } n - m + k \text{ est impair} \\ 2 \frac{(n+m-k)!!}{(n+m+k)!!} (-1)^{\frac{n+m+k}{2}+1} \binom{k}{\frac{n-m+k}{2}} & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.15)$$

où $(2n)!! = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)$.

En utilisant notre bijection Φ , nous avons prouvé les deux premiers cas de cette conjecture ($k < n-m$ et $n-m+k$ impair). De plus, nous avons une interprétation combinatoire du troisième cas. Tout ceci laisse à penser que nous devrions obtenir une preuve entièrement combinatoire de cette conjecture.

Plus généralement, le problème qui se pose est de déterminer

$$\mathfrak{B} \left(\prod_{i=1}^k y_{n_i}(x) \right),$$

et les résultats obtenus ci-dessus font entrevoir de futurs progrès dans la détermination de cette expression. Remarquons que comme nous l'indiquait Wimp [Wim], le problème de linéarisation des polynômes de Bessel est lié à celui des polynômes de Jacobi, pour lesquels nous connaissons les coefficients de leur décomposition. Ceci pourrait nous donner une idée sur la valeur de l'expression précédente.

CONCLUSION

Suite à ces résultats, plusieurs avenues s'offre à nous. Il reste beaucoup d'exploration à faire autour des tableaux oscillants. On s'attend à ce que d'autres résultats concernant les tableaux standards se généralisent aux tableaux oscillants. Par exemple, quelles sont les "classes de Knuth" pour ces tableaux, ou encore quel pourrait-être l'équivalent des tableaux semi-standards pour ces objets. Une réponse à cette question nous amènerait à donner une généralisation des fonctions de Schur.

On aimerait aussi une construction combinatoire pour les idempotents fondamentaux de l'algèbre de Brauer. En s'inspirant de la construction de Young pour les tableaux standards, il nous faut trouver quels sont les éléments de l'algèbre de Brauer laissant "invariante" une ligne ou une colonne d'un tableaux oscillant, évidemment il nous faut définir "l'invariance" de telle sorte qu'elle généralise la notion pour le cas du groupe symétrique.

Pour ce qui est du dénombrement des tableaux oscillants selon la hauteur, nous n'avons pas de formule générale de dénombrement pour cette famille, en existe-t-il ? Le fait que les tableaux oscillants de hauteur au plus deux soient comptés par des produits de nombre de Catalan est-il un effet du hasard, ou bien y a-t-il dans ce résultat une avenue à explorer?

Il existe une généralisation des polynômes de Bessel, comme nous l'avons mentionné au chapitre 4, où

$$y_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (n + \alpha + 1)_k \left(\frac{x}{2}\right)^k.$$

Nous avons une interprétation combinatoire de ces polynômes, où le paramètre α est un compteur de cycles sur certaines configurations qui apparaissent dans les involutions. De plus, nous avons une bijection avec le modèle proposé par Leroux et Strehl [Le-St], ce qui pourrait éventuellement permettre une démonstration combinatoire de l'orthogonalité des polynômes de Jacobi, puisque leur modèle se généralise à ces polynômes. Aussi, nous avons un q -analogue pour ces polynômes ainsi que la suite des q -moments lui correspondant.

Ces polynômes s'obtiennent également à partir de certains tableaux oscillants, ceux dont la forme finale se réduit à une seule ligne. Y a-t-il d'autres polynômes apparaissant dans ce treillis des partages?

BIBLIOGRAPHIE

- [Al-Ca] W.A. AL-SALAM AND L. CARLITZ, *Bernouilli Numbers and Bessel Polynomials*, Duke Math. J. 26 1959.
- [Al-S] W.A. AL-SALAM, *The Bessel Polynomials*, Duke Math. J. 24, 1957.
- [And] D. ANDRÉ, *Notice sur les Travaux Scientifiques*, Gauthier-Villard, 1910.
- [Arq] D. ARQUÈS, *Dénombrement de Chemins dans \mathbb{R}^* Soumis à Contraintes*, Rapport U.H.A n° 29, Mulhouse, 1985.
- [As-Wi] R. ASKEY AND J.A. WILSON, *Some Basic Hypergeometric Orthogonal Polynomials that Generalized Jacobi Polynomials*, Vol. 54, n° 319, Memoirs Amer. Soc., March 1985.
- [Berg] F. BERGERON, *Modèle Combinatoires de Familles de Polynômes Orthogonaux Classiques; une Approche Unifiée*, European J. Comb. à paraître.
- [Ber] A. BERELE, *A Schensted Type Correspondence for the Symplectic Group*, J. of Comb. Theory, (A), 43, 1984.
- [Boc] S. BOCHNER, *Über Sturm-Liouvillesche Polynomsysteme*, Math. Zeit., 29, 1929.
- [Boy] R.H. BOYER, *Discrete Bessel Functions*, J. Math. Anal. Appl., 2, 1961.
- [Bra] R. BRAUER, *On Algebras which are connected with the Semi-simple Continous Groups*, Annals of Math., 38, 1937.
- [Burb] J.L. BURCHNALL, *The Bessel Polynomials*, Canad. J. Math., 3, 1951.
- [Burg] W.H. BURGE, *Four Correspondences between Graphs and Generalized Young Tableaux*, J. Comb. Theory (A), 17, 1974.
- [Chi] T.S. CHIHARA, *Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach, New-York, 1978.
- [Co-Du-Vi] R. CORI, S. DULUCQ, X.G. VIENNOT, *Shuffle of Parenthesis Systems and Baxter Permutations*, J. Comb. Theory Ser. A, 43 (1986), 1-22.
- [Com] L. COMTET, *Advanced Combinatorics*, d. Reidel Publishing Company, 1974.
- [De-Du-Fa] M. DELEST, S. DULUCQ, L. FAVREAU, *An Analogue to Robinson-Schensted Correspondence for Oscillating Tableaux*, Actes du 20ième Séminaire

- Lotharingien de Combinatoire, L. Cerlinco et D. Foata éditeurs, Alghero, Sardaigne, 1988.
- [Dés] J. DÉSARMÉNIEN, *An algorithm for the Rota Straightening Formula*, Discrete Math., 30, 1980.
- [Dic] D.J. DICKINSON, *On Lommel and Bessel polynomials*, Proc. Amer. Math., 5, 1954.
- [Do-Sh] R. DONAGHEY AND L.W. SHAPIRO, *Motzkin Numbers*, J.C.T. (A), 23, 1977.
- [Du-Fa1] S. DULUCQ, L. FAVREAU, *A Combinatorial Model for Bessel Polynomials*, Proc. Third International Symposium on Orthogonal Polynomials and their Applications, Erice, Sicily, Lecture Notes in Math., Springer Verlag, 1991.
- [Du-Fa2] S. DULUCQ, L. FAVREAU, *Combinatoire des Polynomes de Bessel*, Actes du 25ième Séminaire Lotharingien de Combinatoire, A.R. Krauter éditeur, Salzburg, 1990.
- [Du] S. DULUCQ, *Etude combinatoire de problèmes d'énumération, d'algorithmique sur les arbres et de codage par des mots*, Thèse d'Etat, Université Bordeaux I, 1987.
- [Fav] L. FAVREAU, *Deux Représentations du Groupe Symétrique*, Mémoire de maîtrise, UQAM, 1989.
- [Fo-Le] D. FOATA ET P. LEROUX, *Polynômes de Jacobi, Interprétation Combinatoire et Fonction Génératrice*, Proc. Amer. Math. Soc. 87, 1983.
- [Foa1] D. FOATA, *A Matrix Analog for Viennot's Construction of the Robinson Correspondence*, Linear and Multilinear Algebra, 7, 1979.
- [Foa2] D. FOATA, *Combinatoire des Polynômes Orthogonaux*, Proc. du Congrès International de Mathématiciens, Section 16, Combinatorics and Mathematical programming, Varsovie, 1983.
- [Foa3] D. FOATA, *Une Propriété du Vidage-remplissage des Tableaux de Young*, (Actes Table Ronde C.N.R.S. Univ Louis-Pasteur, Stasbourg, 1976) Lecture Notes in Math. Vol 579, Springer, Berlin, 1977.
- [Fr-Ro-Tr] J.S. FRAME, G. DE B. ROBINSON AND R.M. TRALL, *The Hook Graphs of the Symmetric Group*. Canad. J. Math. 6, 1954.
- [Fr-Ze] D. FRANZBLAU AND D. ZEILBERGER, *A Bijection Proof of Hook-lengths Formula*, J. of Algorithms, 3, 1882.

- [Fra] J. FRANÇON, *Sériabilité, Commutation, Mélange et Tableaux de Young.*, RAIRO, Info. Th., 10, 1976.
- [Fro] G. FROBENIUS, *Über die Charaktere der symmetrischen Gruppe*, Ber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 516-534, 1900.
- [Ga-Re] A.M. GARSIA AND J. REMMEL, *On the Raising Operators of Alfred Young, Relations between Combinatorics and other parts of Mathematics*, Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math. Soc., Columbus, Ohio, 1978, Proc. Symp. Pure Math. 34, 1979.
- [Ga-Wa] M.A. GARSIA AND M. WACH, *Combinatorial Aspect of Skew Representations of the Symmetric Group*, préimpression.
- [Garn] H. GARNIR, *Théorie de la Représentation Linéaire des Groupes Symétriques*, Acad. Roy. Belg. Cl. Sci. Mé. Coll in 8°, 26, 1951, n° 1615.
- [Ge-Vi] I. GESSEL ET G. VIENNOT, *Binomial Determinant, Paths and Hook-length Formulae*, Advances in Mathematics, Vol 58, no 3, 1985.
- [Ger] J. GERONIMUS, *Polynomials Orthogonal on a Circle and their Applications*, Amer. Math. Soc. Translations, 104, 1954.
- [Gou1] D. GOUYOU-BEAUCHAMPS, *Chemins Sous-diagonaux et Tableaux de Young*, Combinatoire énumérative, UQAM, 1895, Montréal, G. Labelle et P. Leroux éd. Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag, 1986.
- [Gou2] D. GOUYOU-BEAUCHAMPS, *Codages par des Mots et des Chemins : Problème Combinatoires et Algorithmique*, Thèse d'état, Université de Bordeaux I, 1985.
- [Gou3] D. GOUYOU-BEAUCHAMPS, *Standard Young Tableaux of Height 4 and 5*, Europ. J. Combinatorics, 10 (1989), 69-82.
- [Gr-Ni-Wi] C. GREENE, A. NIENHUIS AND H.S. WILF, *A Probabilistic Proof of a Formula for the Number of Young Tableaux of a Given Shape*, Adv. in Math., 14, 1979.
- [Gre] C. GREENE, *An Extension of Schensted's Theorem*. Adv. in Math, 14, 1974.
- [Gro] E. GROSSWALD, *Bessel Polynomials*, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, 698, 1978.
- [Gue] A. GUENOCHÉ, *Énumération des Tableaux Standards*, Discrete Math, 25, 1979.
- [Hi-Gr] A.P. HILMAN AND R.M. GRASSL, *Reverse Plane Partitions and Tableau Hook Numbers*, J. Combinatorial Theory, (A), 21, 1976.

- [Ja-Ke] G. JAMES AND A. KERBER, *The Representation Theory of the Symmetric Group*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol 16, Addison-Wesley, 1981.
- [Joy] A. JOYAL, *Une Théorie Combinatoire des Séries Formelles*, Adv. in Math., 42, 1981.
- [Juc] A.A. JUCYS, *Tournaments and Generalized Young Tableaux*, Math. Zametki, 27, 1980.
- [Kin] R.C. KING, *Generalized Young Tableaux and the General Linear Groups*, J. Math. Phys., 11, 1970.
- [Knu1] D.E. KNUTH, *The Art of Computer Programming, Sorting and Searching*, Vol. 3, Addison-Wesley Reading, 1973.
- [Knu2] D.E. KNUTH, *Permutations, Matrices and Generalized Young Tableaux*, Pacific J. Math., 34, 1970.
- [Kr-Fr] H.L. KRALL AND O. FRINK, *A New Class of Orthogonal Polynomials : the Bessel polynomials*, Trans. Amer. Math. Soc., 65, 1949.
- [La-Ye1] J. LABELLE AND YEONG NAN YEH, *The Combinatorics of Laguerre, Charlier and Hermite Polynomials*, Studies in appl. Math., 80, 1989.
- [La-Ye2] J. LABELLE AND YEONG NAN YEH, *Combinatorial Proofs of Some Limit Formulas Involving Orthogonal Polynomials*, Discrete Math., 79, 1989/90.
- [Lab] J. LABELLE, *Tableau d'Askey*, Polynômes orthogonaux et applications, Proc. Bar-le-Duc, 1984, Lecture Notes n° 1171, Springer-Verlag.
- [Le-St] P. LEROUX AND V. STREHL, *Jacobi Polynomials : Combinatorics of the Basic Identities*, Disc. Math. 57, 1985.
- [Mac] T. MACLARNAN, *Tableau Recursions and Symmetric Schensted Correspondence for Ordinary, Shifted and Oscillating Tableaux*, Ph. D. Thesis, UCSD, 1986.
- [Map] MAPLE, *Langage de Calcul Formel de l'Université de Waterloo*, Canada.
- [Mus] M. MUSASHI, *Go Rin no Sho*, Overlook Press, New-York, 1974.
- [Nak] T. NAKAYAMA, *On Some Modular Properties of Irreducible Representations of a Symmetric Group*, I, II. Japan. J. Math., 17, 1940.
- [Rai] E.D. RAINVILLE, *Special Functions*, Macmillan, New-York, 1960.
- [Re-Wi] J.B. REMMEL AND R. WHITNEY, *A Bijective Proof of the Hook Formula for*

the Number of Column Strict Tableaux with Bounded Entries. Eurp. J. Math., 4, 1983.

- [Reg] A. REGEV, *Asymptotic Values for Degrees Associated with Strips of Young Diagrams*, Advances in Mathematics, 41, 1981.
- [Rem] J.B. REMMEL, *Bijjective Proofs of Formulae for the Number of Standard Young Tableaux*. Linear and Multilinear Algebre, 11, 1982.
- [Ro-Th] G. DE B. ROBINSON AND R.M. TRALL, *The Content of a Young Diagram*, Michigan Math. J., 2, 1954.
- [Rob1] G. DE B. ROBINSON, *On the Representation of the Symmetric Groups*, Amer. J. Math., 60, 1938., 69, 1947., 70, 1948.
- [Rob2] G. DE B. ROBINSON, *Representation Theory of the Symmetric Group*, Mathematical Expositions n° 12, University of Toronto Press, Toronto, 1961.
- [Ros] H. VAN ROSSUM, *A Note on the Location of the Zeros of Generalized Bessel Polynomials and Totally Positive Polynomials*, Nieuw Archiev. voor Wiskunde, 2, 1969.
- [Rut1] D.E. RUTHEFORD, *On the Relations Between the Number of Standard Tableaux*, Proc. Edinburgh Math. Soc.(2), 7, 1942.
- [Rut2] D.E. RUTHEFORD, *Substitutional Analysis*, New-York, Haffner, 1968.
- [Sa-Vi] M. DE SAINTE-CATHERINE ET G. VIENNOT, *Enumeration of Certain Young Tableaux with Bounded Height.*, Combinatoire Énumérative, UQAM, 1985, G. Labelle et P.Leroux, éd. Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag, 1986.
- [Sag1] B.E. SAGAN, *Enumeration of Partition with Hooklengths*, Europ. J. Combinatorics, 3, 1982.
- [Sag2] B.E. SAGAN, *An analog of Schensted's Algorithm for Shifted Young Tableaux*, J. Combinatoric Theory, (A), 27, 1979.
- [Sag3] B.E. SAGAN, *The Ubiquitous Young Tableaux dans Invariant Theory and Tableaux*, The IMA volumes in Mathematics and its Applications, Vol. 19, Stanton ed., Springer-Verlag.
- [Sai] M. DE SAINTE-CATHERINE, *Couplage et Pfaffiens en Combinatoire Physique et Informatique*, Thèse de 3ième cycle, Université de Bordeaux I, 1983.
- [Sche] C. SCHENSTED, *Longest Increasing and Decreasing Subsequences*, Canad. J. Math., 13, 1961.

- [Schü1] M.P. SCHÜTZENBERGER, *Evacuations*, Colloquio Internazionale sulle Teorie Combinatorie (Rome 1973), Tomo I, Atti dei Convegni Lincei, n° 17, Accad. Naz. Lincei, Rome, 1976.
- [Schü2] M.P. SCHÜTZENBERGER, *La Correspondance de Robinson*, Combinatoire et représentation du groupe symétrique, (Actes Table Ronde C.N.R.S. Univ Louis-Pasteur, Stasbourg, 1976) Lecture Notes in Math. Vol 579, Springer, Berlin, 1977.
- [Schü3] M.P. SCHÜTZENBERGER, *Quelques Remarques sur la Construction de Schensted*, Math. Scand., 12, 1963.
- [Schü4] M.P. SCHÜTZENBERGER, *Sur le Théorème de G. de B. Robinson*, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. A-B, 272, 1971.
- [Schü5] M.P. SCHÜTZENBERGER, *Sur une Construction de G. de B. Robinson*, Semin. P. Dubreil, 25 année 1971/72, Algèbre, Fasc. 1, 2 Exposé 8, 1973.
- [Slo] N.J. SLOANE, *A Handbook of Integer Sequences*, Academic Press, New-York, 1979.
- [Sta] R.P. STANLEY, *Differentiably Finite Power Series*, Europ. J. Combinatorics, 1, 1980.
- [Str] V. STREHL, *Combinatorics of Jacobi Configurations I : Complete Oriented Matching*, Combinatoire Énumérative, UQAM, 1985, G. Labelle et P.Leroux, éd. Lecture Notes in Mathematics, Spinger Verlag, 1986.
- [Sun1] S. SUNDARAM, *On the Combinatorics of Representations of $Sp(2n, C)$* , Ph.D. Thesis, MIT, 1986.
- [Sun2] S. SUNDARAM, *Tableaux in the Representation Theory of Classical Lie Groups dans Invariant Theory and Tableaux*, The IMA volumes in Mathematics and its Applications, Vol. 19, Stanton ed., Springer-Verlag.
- [Sun3] S. SUNDARAM, *Cauchy Identity for $Sp(2n)$* , J. Combinatoric Theory, (A), soumis.
- [Sun4] S. SUNDARAM, *Orthogonal Tableaux and Insertion Scheme for $So(2n+1)$* . J. Combinatoric Theory, (A), soumis.
- [Sze] G. SZEGO, *Orthogonal Polynomials*, A.M.S Colloquium Publications, Vol. 23, Providence, RI, 1975.
- [Tho] G.P. THOMAS, *Frames, Young Tableaux, and Baxter Sequences*, Adv. in Math., 26, 1977.

- [Vie1] X. VIENNOT, *Chain and Antichain Families, Grid and Young Tableaux*, Annals of Discrete Math, 23, 1984.
- [Vie2] X. VIENNOT, *Une Théorie Combinatoire des Polynômes Orthogonaux Généraux*, Notes de conférences données à l'Université du Québec à Montréal, UQAM, 1987.
- [Vie3] X. VIENNOT, *Une forme Géométrique de la Correspondence de Robinson-Schensted*, Combinatoire et représentation du groupe symétrique, (Actes Table Ronde C.N.R.S. Univ Louis-Pasteur, Stasbourg, 1976) Lecture Notes in Math. Vol 579, Springer, Berlin, 1977.
- [Wen] H. WENZL, *On the Structure of Brauer's Centralizer Algebras*, soumis à Annals of Math., 1987.
- [Wey] H. WEYL, *The classical Groups, their Invariants and Representations*, 2^o ed., Princeton University Press, 1946.
- [Wim] J. WIMP, communication orale.
- [You] A. YOUNG *The Collected Papers of Alfred Young*, Mathematical Expositions 21, University of Toronto Press.
- [Zei] D. ZEILBERGER, *A Short Hook-lengths Bijection Inspired by the Greene-Nijenhuis-Wilf Proof*, Discrete Math., 51, 1984.