UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

THÈSE

PRÉSENTÉE

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DU DOCTORAT EN MATHÉMATIQUE

par

IVAN CONSTANTINEAU

CALCUL COMBINATOIRE DE SÉRIES INDICATRICES DE CYCLES

SEPTEMBRE 1990

Remerciements

L'auteur tient à remercier Jacques Labelle et Pierre Leroux pour l'attention qu'ils ont portée à ce travail de même que pour les nombreuses remarques qui ont permis de rendre la thèse qui suit à peu près lisible.

L'auteur remercie François Bergeron, Hélène Décoste et Gilbert Labelle pour l'intérêt porté à ses recherches.

L'auteur remercie également Laurent Habsieger et Ira Gessel pour avoir suggéré le problème traité au chapitre 6 et y avoir apporté de pertinentes corrections.

L'auteur remercie finalement le CRSNG, le FCAR et le LACIM de l'avoir subventionné, à tour de rôle, durant les 3 années de doctorat à l'UQAM.

Résumé

Le but de notre thèse est de développer le calcul et l'interprétation combinatoires des coefficients des séries indicatrices de cycles d'espèces de structures. Par calcul combinatoire on entend ici le calcul direct des coefficients de ces séries, c'est-à-dire le dénombrement, pour tout entier $n \geq 0$, des structures sur $[n] = \{1,\ldots,n\}$ laissées fixes par l'action d'une permutation donnée β de $[n]$.

Pour arriver à nos fins, on n'utilise ici que des outils élémentaires de la combinatoire "classique" liés (le plus souvent) à un procédé original que nous introduisons et que nous appelons le "*Principe d'auto-similarité* ". Ce principe constitue le point central de notre thèse.

Cette nouvelle méthode de calcul des coefficients des séries indicatrices (et, par le fait même, des séries elle-mêmes) entre en opposition avec des méthodes algébriques et/ou analytiques connues et bien développées qui utilisent un attirail très perfectionné de processus souvent sophistiqués pour arriver à des résultats équivalents aux nôtres. Soulignons que, parfois, établir cette dernière équivalence constitue en elle-même un problème difficile et complexe.

Dans le chapitre 1 nous calculons les nombres $\mathbf{fix}_{\mathcal{E}nd}(\beta)$ et (resp.) $\mathbf{fix}_{\mathcal{A}rs}(\beta)$ des endofonctions et (resp.) arborescences laissées fixes par une permutation β arbitraire. Le principe d'auto-similarité s'applique ici et permet un calcul combinatoire complet de ces deux derniers nombres. Nous répondons ainsi à un problème posé par Gilbert Labelle lors de la période de questions du Colloque de Combinatoire Énumérative qui s'est tenu à l'UQAM en 1985.

Dans le chapitre 2, on trouvera le "**fix**" des espèces permutations, permutations circulaires, dérangements, involutions sans point fixe, pieuvres, assemblées de pieuvres, endofonctions idempotentes, forêts d'arborescences, arbres, vertébrés, relations (graphes orientés), relations symétriques (graphes simples), partitions et endofonctions connexes qui ont tous, le cas des involutions sans point fixe mis à part, été calculés à l'aide du principe d'auto-similarité.

D'un point de vue théorique, le cas des involutions sans point fixe est particulièrement intéressant. En effet il met en lumière le fait que ce ne sont pas *toutes* les espèces de structures qui sont auto-similaires et qu'il faudra bien un jour voir à caractériser entièrement ces dernières. Il faut cependant remarquer que la méthode utilisée pour calculer le **fix** des involutions sans point fixe est *essentiellement* la même [à un petit détail près] que celle utilisée pour toutes les espèces auto-similaires. C'est-à-dire qu'on "mime" le principe de similarité pour arriver à nos fins. Quitte un jour à nuancer ce qu'on entend par principe d'auto-similarité, il n'est pas interdit de penser qu'on puisse avoir là une méthode *générale* du calcul du **fix** pour une espèce de structures arbitraire.

Le chapitre 3 est consacré au calcul du nombre $\mathbf{fix}_{\underline{\sigma}}(\underline{\beta})$ de permutations σ de $[n]$ d'un certain *type* $\underline{\sigma} = (\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)$ laissées fixes par conjugaison avec une

permutation β de type $\underline{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$. C'est-à-dire que nous dénombrons les permutations σ de [n] (de type $\underline{\sigma}$) qui sont telles $\beta^{-1}\sigma\beta = \sigma$.

Nous donnons d'abord, pour toute paire de partages ($\underline{\sigma}$, $\underline{\beta}$) une expression explicite pour les coefficients $\mathbf{fix}_{\underline{\sigma}}(\underline{\beta})$. Nous présentons ensuite un calcul *récursif* très efficace des $\mathbf{fix}_{\underline{\sigma}}(\underline{\beta})$ qui nous a été particulièrement utile pour calculer ces derniers coefficients lorsque $\underline{\beta}$ et $\underline{\sigma}$ sont des partages de n. Nous présentons d'ailleurs, en annexe à ce chapitre, ces résultats numériques sous forme de tables. Notons que la récursivité dégagée ici touche de très près le principe d'auto-similarité. Nous terminons le chapitre en exposant une relation très intéressante (de "dualité") entre les coefficients $\mathbf{fix}_{\underline{\sigma}}(\underline{\beta})$ et $\mathbf{fix}_{\underline{\beta}}(\underline{\sigma})$.

Dans le chapitre 4, nous calculons la série indicatrice de cycles des espèces graphes simples connexes et graphes orientés connexes. On commence ce chapitre en énonçant le principe d'auto-similarité et en vérifiant que, pour tout entier m, l'espèce des relations m-aires *est* auto-similaire. A notre avis, ce fait à lui seul [étant donné la généralité intrinsèque des relations m-aires] semble suffisant pour justifier l'énoncé du principe d'auto-similarité.

Les espèces graphes simples connexes et graphes orientés connexes sont toutes deux des sous-espèces de l'espèce des relations (bi)-naires. On peut alors observer l'existence chez ces dernières de certaines notions "auto-similaires" qu'elles ont héritées de l'espèce des relations binaires. A partir de cela, nous sommes en mesure de construire le **fix** des graphes simples connexes (et celui des graphes orientés connexes).

La méthode utilisée fait appel au processus combinatoire bien connu d'inclusion-exclusion. On est alors en mesure de calculer les divers coefficients des séries indicatrices des graphes simples connexes et orientés connexes en se servant de la fonction μ de Möbius. L'expression explicite que nous obtenons est alors très proche de l'expression *générale* bien connue pour le log combinatoire des séries indicatrices de cycles qui a été calculée (analytiquement) par Gilbert Labelle. Remarquons que, jusqu'à maintenant, ces méthodes analytiques n'ont toujours pas donné le calcul *particulier* des séries indicatrices des graphes simples ou orientés connexes.

Le chapitre 5 traite de polynômes orthogonaux. Nous calculons le **fix** d'espèces pondérées qui sont des *modèles* de certains de ces polynômes, en nous servant, ici, systématiquement de l'auto-similarité. En effet les structures les plus "complexes" que nous avons à envisager sont des fonctions injectives sur un ensemble fini U. Les espèces qui définissent ces structures sont toutes auto-similaires. Soulignons que les résultats que nous trouvons dans ce chapitre ne sont pas inédits, puisqu'ils ont déjà été , dans la grande majorité des cas, calculés par Hélène Décoste dans sa thèse de Doctorat, à partir d'équations combinatoires par des moyens essentiellement algébriques. La méthode directe de l'auto-similarité employée ici pour trouver ces derniers résultats est, par contre, tout à fait nouvelle. Il faut aussi souligner qu'il y a certains cas que nous calculons qui échappent aux techniques de l'algèbre...

Soulignons que pour traiter ces modèles de polynômes orthogonaux nous devons nous situer dans le contexte des espèces pondérées. On doit alors adapter le principe d'auto-similarité à ce nouveau contexte. Cela se fait ici sans trop de difficulté.

Nous calculons dans ce chapitre les séries indicatrices de cycles des modèles combinatoires des polynômes orthogonaux suivants:

1) les polynômes d'Hermite (2 modèles distincts);
2) les polynômes de Laguerre (une infinité de modèles distincts!);
3) les polynômes de Charlier (2 modèles distincts);
4) les polynômes de Krawtchouk (5 modèles distincts);
5) les polynômes de Meixner (3 modèles distincts)
6) les polynômes de Meixner-Pollaczek (4 modèles distincts)
7) les polynômes de Jacobi (1 modèle).

Cette thèse se termine enfin sur des généralisations algébriques et combinatoires du théorème de Pfaff-Saalschütz à partir de travaux effectués par I. Gessel. Ce dernier chapitre est indépendant des cinq autres qui le précèdent.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction

1) Le problème de Gilbert.

En Mai 1985, Gilbert Labelle, à la session de problèmes du Colloque de Combinatoire Enumérative qui se tenait alors à l'UQAM (voir [LL],p.383), posa à l'auditoire le problème de trouver, pour tout entier n et toute permutation ß de [n] = {1,2,...,n}, des preuves combinatoires des deux formules suivantes que lui-même avait obtenues analytiquement,

$$\mathbf{fix}_{\mathcal{End}}(\beta) \quad = \quad \prod_{k=1}^{n} \left(\sum_{d|k} d\beta_d \right)^{\beta_k} \tag{1}$$

et

$$\mathbf{fix}_{\mathcal{Ars}}(\beta) = \quad \beta_1^{\beta_1 - 1} \prod_{k\geq 2} \left[\left(\sum_{d|k} d\beta_d \right)^{\beta_k} - k\beta_k \left(\sum_{d|k} d\beta_d \right)^{\beta_k - 1} \right] \tag{2}$$

où $\mathbf{fix}_{\mathcal{End}}(\beta)$ et (resp.) $\mathbf{fix}_{\mathcal{Ars}}(\beta)$ sont les nombres d'endofonctions f et (resp.) d'endofonctions contractantes (arborescences) A sur [n] telles que $\beta^{-1}f\beta = f$ et (resp.) $\beta^{-1}A\beta = A$.

En 1953, R.L.Davis, dans [Da1], avait déjà obtenu (1) par une méthode essentiellement combinatoire. Les motifs qui l'avait poussé à considérer cette formule provenait cependant de la logique (mathématique). En fait il envisageait le calcul de (1) comme un cas particulier du calcul plus général du nombre de relations m-aires sur [n] invariantes sous l'action d'une permutation arbitraire de [n]. Il utilisait les matrices associées aux relations pour exprimer ses résultats.

D'autre part, Jacques Labelle a lui aussi obtenu (en 1985) une démonstration combinatoire de (1) qui, bien qu'équivalente à celle de Davis, est nettement plus accessible et ouvre des horizons beaucoup plus larges que ceux obtenus en termes matriciels. Cette preuve de J.Labelle est donnée dans le chapitre 1 de la présente thèse.

Pour (2) Doron Zeiberger a donné [Z], quelques jours seulement après que G. Labelle eût exposé la formule, une preuve "semi" combinatoire. "Semi" parce qu'elle se termine par une application d'un théorème connu sous le nom de "matrix-tree", théorème à teneur peut-être plus algébrique que combinatoire. Cette preuve n'est pas sans rappeler, d'ailleurs, celle de Lovász (voir [Lo], pp 228-231) qui trouve le nombre d'arbres sur n points laissés fixes par une permutation donnée dans le cas restreint où n est impair. Cette dernière preuve se termine aussi par une application du "matrix-tree".

Nous donnons, en seconde partie du chapitre 1, une preuve directe de (2) qui ne fait pas appel au "matrix-tree". Elle est basée sur la preuve de (1).

2) Des exemples et un principe.

Le succès obtenu dans le cas des arborescences nous a menés à envisager des calculs du même ordre pour d'autres *espèces de structures*, concept que nous définissons à l'instant (voir aussi [B1], [B2], [B3], [BLL], [C], [CL1], [CL2], [D1],[D2], [J], [Le], [Lg1], [Lg2], [Lg3], [Lg4], [Lj1], [Lj2], [LY1], [LY2], [Y1], [Y2]).

Définition 1. Une *espèce de structure* A est un foncteur covariant qui va de la catégorie ayant pour objets les ensembles finis et pour morphismes les bijections, vers la catégorie des ensembles finis et fonctions.

En d'autres termes, une espèce de structures A est une règle qui:

1) associe à tout ensemble fini U un ensemble fini A[U] dont les éléments sont appelés les A-*structures sur* U (si s est dans A[U] on dira que l' *ensemble sous-jacent* à s est U).

2) associe à toute bijection $f:U \to V$ une fonction $A[f]:A[U] \to A[V]$, appelée le *morphisme de transport des* A-*structures le long de* f, telle que

(i) pour tout ensemble fini U, $A[1_U] = 1_{A[U]}$ et

(ii) pour tout triplet d'ensembles (U,V,W) et toute paire de bijections $f:U \to V, g:V \to W$ on a $A[g \circ f] = A[g] \circ A[f]$.

La donnée d'une espèce de structure permet d'envisager, d'un point de vue général, le calcul des structures laissées fixes par l'action (définie par transport de structures) d'une permutation de l'ensemble sous-jacent à ces structures. En effet, pour toute espèce A, tout ensemble fini U et toute permutation ß de U on a $A[\beta] \in \mathfrak{S}_{A[U]}$ et on peut considérer l'ensemble des points fixes de A[ß], c'est-à-dire l'ensemble des A-structures s de A[U] telles que A[ß](s) = s. Ce dernier ensemble est dénoté $\mathbf{Fix}_A(\beta)$. On pose, de plus, $\mathbf{fix}_A(\beta) = |\mathbf{Fix}_A(\beta)|$, la cardinalité de $\mathbf{Fix}_A(\beta)$.

Pour toute espèce A, $\mathbf{fix}_A$ est une *fonction de classe* . C'est-à-dire que, si σ et τ sont deux permutations d'un même type cyclique, alors $\mathbf{fix}_A(\sigma) = \mathbf{fix}_A(\tau)$. Rappelons que le type cyclique d'une permutation $\beta \in \mathfrak{S}_U$ est le *partage* $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots)$ de |U| tel que pour tout entier $i \geq 1$ la permutation ß a β_i cycles de longueur i. Ainsi, pour tout entier n et tout partage $\underline{\beta}$ de [n], l'expression $\mathbf{fix}_A(\underline{\beta})$ est bien définie si l'on pose $\mathbf{fix}_A(\underline{\beta}) := \mathbf{fix}_A(\beta)$ où ß est de type $\underline{\beta}$.

L'objectif du troisième chapitre, et en fait de toute la thèse (à l'exclusion du dernier chapitre), consiste à calculer directement, pour tout entier $n \geq 0$ et toute permutation ß de [n], $\mathbf{fix}_A(ß)$ pour certaines espèces de structures A. Outre le calcul du **fix** des endofonctions et arborescences que nous reprenons, nous calculons dans le chapitre 2 le **fix** des espèces *permutations*, *permutations circulaires*, *dérangements*, *involutions sans point fixe*, *pieuvres*, *assemblées de pieuvres*, *endofonctions idempotentes*, *forêts d'arborescences*, *arbres*, *vertébrés*, *relations (graphes orientés)*, *relations symétriques (graphes simples)*, *partitions*, *endofonctions connexes*.

Certains de ces résultats sont déjà connus. Par exemple le cas des permutations est donné dans Comtet [Co], le cas moins évident des permutations circulaires se trouve dans De Bruijn [DB], ceux des relations et relations symétriques sont traités par Davis [Da1]. Les autres cas mentionnés plus haut sont, à notre connaissance, inédits.

Par contre, la méthode que nous utilisons pour faire ces calculs est nouvelle. En fait cette méthode s'est avérée suffisamment riche pour devenir le point central de notre thèse. Il s'agit de ce que nous appelons le ***Principe de Similarité***. Ce principe que nous n'introduisons formellement qu'au chapitre 4, lorsque nous traitons le cas des graphes connexes, n'est pas vraiment bien défini (c'est d'ailleurs ce qui pour l'instant en fait un objet de recherche particulièrement intéressant!). Bien sûr, ce principe *fonctionne*, à la fois pour des espèces dont le calcul du **fix** est bien connu et à la fois pour d'autres qui le sont moins.

Le principe de similarité. Une espèce A est dite *(auto)-similaire*, ou plus simplement *similaire*, quand pour tout n et toute permutation ß de [n], chaque A-structure laissée fixe par ß peut être "décomposée" en un couple (δ,Δ) où δ est une A-structure sur les cycles constituant ß et Δ est une "construction" sur δ qui reste à préciser.

Le terme "décomposé" n'est peut-être pas vraiment approprié. En fait on induit plutôt, d'abord, à partir de $s \in \mathbf{Fix}_A(\beta)$, une structure $\delta \in \mathbf{A}[C(\beta)]$, où $C(\beta)$ est l'ensemble des cycles constituant la permutation β. Puis, à partir de cette structure induite δ, on ajoute, à l'aide de Δ, de l'information sur δ pour pouvoir caractériser la structure s entièrement.

Ce principe a ses "précurseurs". Le premier est probablement R.L. Davis ([Da1], [Da2]). Sa méthode, bien que matricielle, donne quand même un calcul direct de $\mathbf{Fix}_A$ qui ressemble, *au fond* , à ce que nous faisons. Il y a aussi László Lovász [Lo], qui calcule le nombre d'arbres sur n points (n impair) laissés fixes par une permutation arbitraire en induisant d'abord un arbre sur les cycles de β, suivant ainsi l'idée de l'auto-similarité. Puis, enfin, il y a Moon, (voir [Mo], art.29, pp 84-89) qui reprend l'article de Davis [Da2] en formulant clairement la similarité de l'espèce des tournois.

Pour donner une illustration de ce procédé, considérons A une sous-espèce des relations (graphes orientés) [c'est le cas de toutes les espèces qui sont traitées dans le 2ième article]. Supposons que $s \in \mathbf{Fix}_A(\beta)$ où β est une permutation de $[n]$ pour un certain $n \geq 0$, et que $x \in C \in C(\beta)$, $y \in D \in C(\beta)$ et $(x,y) \in s$. Alors, puisque $s \in \mathbf{Fix}_A(\beta)$ on *doit* avoir , pour tout entier $k \geq 0$, $(\beta^k(x),\beta^k(y)) \in s$. On induit maintenant une relation sur $C(\beta)$ à partir de la structure $s \in \mathbf{Fix}_A(\beta)$ en posant, pour tous C,D dans $C(\beta)$, que C est en relation avec D (dans cet ordre), ssi il y a $x \in C$ et $y \in D$ tels que $(x,y) \in s$. On obtient alors *souvent* une structure de même espèce A sur $C(\beta)$. C'est ce qu'on obtient, par exemple, avec les espèces des endofonctions, celle des arborescences, celle des permutations, etc...

Mais ce n'est cependant pas toujours le cas. Une involution sans point fixe invariante sous l'action de β *peut* produire des points fixes dans la relation induite (si β

a au moins un cycle de longueur paire). Le principe, pour l'espèce *Isf* des involutions sans point fixe, est, au sens strict, pris en défaut [il est, d'ailleurs, facile de trouver d'autres espèces qui ne sont pas auto-similaires]. Notons par contre que la méthode pour trouver $\mathbf{Fix}_{Isf}(\beta)$ reste toujours la même. On construit encore $\mathbf{Fix}_{Isf}(\beta)$ en lui associant bijectivement un ensemble de couples (δ,Δ) bien déterminé. Ici cependant δ est une involution (tout court) au lieu d'être une involution sans point fixe.

La méthode directe que nous venons de décrire n'est évidemment pas la seule qui permette de calculer des **fix**. Il faut particulièrement signaler celle que nous désignerons tout au long de la thèse par "méthode algébrique" et qui a, tout comme la similarité, le mérite d'être *uniforme* et *systématique* . Pour donner une idée de son fonctionnement il faut maintenant introduire la *série indicatrice de cycles* associée à l'espèce A , dénotée $Z_A(x_1, x_2, x_3\ldots)$ qui est une série en une infinité d'indéterminées $\{x_1, x_2, x_3\ldots\}$ définie comme suit:

$$Z_A(x_1,x_2,x_3,\ldots) = \sum_{n\geq 0} \sum_{\substack{\tau\vdash n \\ \tau=(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n)}} \mathrm{fix}_A(\tau) \frac{x_1^{\tau_1} x_2^{\tau_2} \cdots x_n^{\tau_n}}{1^{\tau_1}\tau_1! \cdot 2^{\tau_2}\tau_2! \cdot \cdots \cdot n^{\tau_n}\tau_n!} .$$

L'objectif est alors de déterminer la série indicatrice d'une espèce A, par des techniques de calcul maintenant bien développées en théorie des espèces, et d'en identifier ensuite les coefficients pour retrouver les divers $\mathrm{fix}_A(\beta)$. C'est essentiellement ce qu'on veut dire ici par "méthode algébrique". Nous donnons une description plus détaillée encore de cette méthode dans l'introduction du chapitre 5 du présent ouvrage.

3) Le problème de Christophe.

On sait depuis fort longtemps calculer le nombre de permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_{[n]}$ laissées fixes par une permutation ß d'un type donné $(ß_1,ß_2,ß_3,\ldots,ß_n)$. Qu'advient-il si en plus on exige que σ soit aussi d'un type $(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\ldots,\sigma_n)$ particulier donné à l'avance?

C'est la question que Christophe Reutenauer a posée à Jacques Labelle alors que ce dernier exposait quelques-uns des résultats trouvés dans le second article (chapitre 2) de la présente thèse au Séminaire de Combinatoire de l'UQAM (1988).

Nous donnons une réponse complète à cette question au chapitre 3. Nous calculons d'abord le nombre de permutations constituées de cycles d'une seule et même longueur laissées fixes par une permutation ß arbitraire. Le résultat général s'exprime alors comme un produit particuliers de tels nombres.

Pour être plus précis, traduit en termes d'espèces de structures, le problème revient en fait à trouver les coefficients, que l'on dénotera $\mathbf{fix}_{\underline{\sigma}}(\underline{ß})$, de la série indicatrice de cycles de l'espèce produit suivante:

$$\mathcal{E}xp_{\sigma_1}(\mathcal{C}yc_1)\cdot\mathcal{E}xp_{\sigma_2}(\mathcal{C}yc_2)\cdot\cdots\cdot\mathcal{E}xp_{\sigma_n}(\mathcal{C}yc_n)$$

où, pour tout i, $\mathcal{E}xp_i$ est l'espèce des ensembles à i éléments et, pour tout j, $\mathcal{C}yc_j$ est l'espèce des permutations circulaires à j éléments. Nous calculons de manière directe , pour tout i,j, les termes $\mathbf{fix}_{\mathcal{E}xp_i}(\mathcal{C}yc_j)$. Il suffit bien alors d'effectuer le produit

$$Z_{\mathcal{E}xp_{\sigma_1}(\mathcal{C}yc_1)\cdot\mathcal{E}xp_{\sigma_2}(\mathcal{C}yc_2)\cdot\cdots\cdot\mathcal{E}xp_{\sigma_n}(\mathcal{C}yc_n)}=\prod_{i=1}^{n} Z_{\mathcal{E}xp_{\sigma_i}(\mathcal{C}yc_i)}$$

pour obtenir le résultat final.

On doit noter ici que l'espèce $\mathcal{E}xp_i\,(\mathcal{C}yc_j)$ n'est pas auto-similaire en général, bien que la "méthode directe" pour calculer le **fix** de $\mathcal{E}xp_i\,(\mathcal{C}yc_j)$ soit la même que dans les chapitre 1 et 2.

On trouvera aussi dans ce chapitre quelques résultats secondaires comme une formule de récurrence très efficace pour calculer les divers coefficients $\mathbf{fix}_{\underline{\sigma}}(\underline{\beta})$. Nous prodiguons d'ailleurs, pour n variant de 1 à 7 et tous partages $\underline{\beta}$ et $\underline{\sigma}$ de [n], des tables pour les $\mathbf{fix}_{\underline{\sigma}}(\underline{\beta})$.

4) La série indicatrice des graphes connexes.

Dans ce chapitre, nous calculons, à l'aide du principe de similarité, les coefficients de la série indicatrice de l'espèce des graphes simples connexes et des graphes orientés connexes. Dans chaque cas, nous utilisons un processus d'inclusion-exclusion pour arriver au résultat final [ce processus apparaît quand on doit soustraire d'un ensemble donné une réunion *non-disjointe* d'ensembles et trouver la cardinalité de l'ensemble résultant].

Remarquons que Gilbert Labelle [Lg2] donne, pour toutes espèces M et N telles que $M = \mathcal{E}xp(N)$, la formule suivante, obtenue analytiquement,

$$Z_N(x_1,x_2,\ldots) \;=\; \sum_{k\geq 1} \frac{\mu(k)}{k}\; \log Z_M(x_k,x_{2k},\ldots).$$

Puisque l'espèce des graphes simples $\mathcal{G}rs$ (resp. des graphes orientés $\mathcal{G}ro$) est telle que $\mathcal{G}rs = \mathcal{E}xp(\mathcal{G}sc)$ (resp. $\mathcal{G}ro = \mathcal{E}xp(\mathcal{G}oc)$) où $\mathcal{G}sc$ (resp. $\mathcal{G}oc$) désigne l'espèce des graphes simples connexes (resp. graphes orientés connexes), la dernière formule s'applique ici.

Nous ne sommes pas en mesure, pour l'instant, d'établir l'équivalence entre les résultats obtenus par G. Labelle et les nôtres (dans le cas des graphes simples et graphes orientés). Contentons-nous de dire qu'on réussit quand même à isoler le facteur $(\mu(k))/k$ en conférant à ce dernier terme une signification combinatoire bien particulière.

5) Le problème d'Hélène.

Lors de sa soutenance de thèse, Hélène Décoste a exposé des résultats concernant des modèles combinatoires de polynômes orthogonaux. En fait, le chapitre 2 de sa thèse [D1] est consacré à ce sujet. Une bonne part des calculs qui s'y trouvent consiste à déterminer la série indicatrice et/ou le **fix** (explicite) de ces modèles.

Curieusement, il arrive que pour certains de ces modèles les polynômes eux-mêmes puissent être utilisés pour exprimer les **fix** cherchés. H. Décoste a suggéré à l'assemblée l'idée de poursuivre l'étude entreprise à ce niveau là.

C'est dans cet esprit que nous avons rédigé le chapitre 5 de notre thèse. Le principe de similarité "explique" dans une très large mesure pourquoi on peut utiliser ces polynômes orthogonaux pour trouver les **fix** de leur modèle, lorsque cela est possible. On doit alors parfaire ce principe en pondérant les structures sous-jacentes mais l'idée principale reste la même.

6) Le problème de Laurent.

Finalement nous terminons la thèse avec une généralisation algébrique et combinatoire du théorème de Pfaff-Saalschütz à partir d'approches proposées par I.

Gessel et D. Stanton [GSta] (pour la partie algébrique) et par I. Gessel et D. Sturtevant [GStu] (pour la partie combinatoire). Ce travail a été suggéré par Laurent Habsieger dans le cadre du cours "Séminaire" qu'il a présenté en 1988 à l'UQAM. Ce sixième chapitre est tout à fait indépendant des cinq qui le précèdent.

Références

[B1] **F. Bergeron,** *Une systématique de la combinatoire énumérative,* Thèse de Ph.D., UQAM et Université de Montréal, **1986**.

[B2] **F. Bergeron,** *Une combinatoire du pléthysme,* Journal of Combinatorial Theory, Series A, Vol. 46, no. 2, **1987**, 291-305.

[B3] **F. Bergeron,** *Combinatoire des polynômes orthogonaux classiques: une approche unifiée,* Europ. J. Combinatorics, **1990**, no.11, 393-401.

[BLL] **F. Bergeron, G. Labelle et P. Leroux,** *Computation of the Expected Number of Leaves in a Tree Having a Given Automorphism and related topics,* Discrete Applied Mathematics, **1990**.

[Co] **L. Comtet,** *Analyse combinatoire* , (2 volumes), Collection SUP, "Presses Universitaires de France", **1970**.

[C] **I. Constantineau,** *Théorie des espèces et endofonctions,* Mémoire de maîtrise,UQAM, **1987**.

[CL1] **I. Constantineau et J. Labelle,** *Calcul combinatoire du nombre d'endofonctions et d'arborescences laissées fixes par l'action d'une permutation,* Ann. Sc. Math. du Québec, Vol.XIII, no.2, **1989**, pp. 33-38.

[CL2] **I. Constantineau et J. Labelle.** *On combinatorial structures kept fixed by the action of a given permutation,* Studies in Applied Math., (à paraître).

[Da1] **R. L. Davis,** *The number of structures of finite relations,* Proc. of the Amer. Math. Soc., Vol. 4, **1953**, 486-494.

[Da2] **R. L. Davis,** *Structures of dominance relations,* Bull. of Math. Biophysics, Vol. 16, **1954**, 131-140.

[DB] **N. G. De Bruijn,** *Pólya's theory of counting* , dans "Applied Combinatorial Mathematics", E.F.Beckenbach ed.; John Wiley and sons, **1964**.

[D1] **H. Décoste**, *Séries indicatrices d'espèces pondérées et q-analogues*, Thèse de Ph.D., UQAM et U. de Montréal, **1989**; publication du LACIM, #2, **1990**.

[D2] **H. Décoste**, *q-analogues en théorie des espèces*, Actes du XIV^e Séminaire Lotharingien de Combinatoire, Burg Feuerstein, Rép.Féd.d'Allemagne, **1986** (V. Strehl: éditeur), 33-49.

[FLj] **D. Foata et J. Labelle**, *Modèles combinatoires pour les polynômes de Meixner*, Europ. J. Comb., Acad. Press, **1983**, 305-311.

[GSta] **I. Gessel et D. Stanton**, *Short Proofs of Saalschutz and Dixon's Theorem*, J. of Combinatorial Theory. Ser. A Vol 38, no.1,**1985**.

[GSte] **I. Gessel et D. Sturtevant**, *A Combinatorial Proof of Saalschutz Theorem*, Prépublication .

[J] **A. Joyal**, *Une théorie combinatoire des séries formelles*, Adv. in Math. 42, Acad. Press, **1981**, 1-82.

[Le] **P. Leroux**, *Aufzählungsmethoden für einege Klassen von Graphen*, Bayreuther mathematische Schriften, Heft 26,**1988**, 1-36.

[Lg1] **G. Labelle**, *Une nouvelle démonstration combinatoire des formules d'inversion de Lagrange*, Adv. in Math. 42, Acad. Press, **1981**, 217-247.

[Lg2] **G. Labelle**, *Some New Computational Methods in the Theory of Species*, dans "Combinatoire Énumérative, Montréal, Québec 1985, Proceedings", G. Labelle et P. Leroux, éds. Lecture Notes in Mathematics no.1234, Springer-Verlag **1986**, 192-209.

[Lg3] **G. Labelle**, *The computation of the cycle index series of some combinatorial species*, Notes: Combinatorial Year, **M.I.T.**, Nov. **1984**.

[Lg4] **G. Labelle**, *The Cyclic Type of Combinatorial Species*, Notes: Special Session on Enumerative Combinatorics, 819th Meeting of the **A.M.S.**, Avril **1985**.

[LL] **G. Labelle et P. Leroux**, *Combinatoire Énumérative, Montréal, Québec 1985, Proceedings*, G. Labelle et P. Leroux, éditeurs. Lecture Notes in Mathematics no.1234, Springer-Verlag, **1986**.

[Lj1] **J. Labelle**, *Applications diverses de la théorie combinatoire des espèces de structures*, Ann. Sc. Math. du Québec, 7, no.1, **1983**, 59-94.

[Lj2] **J. Labelle**, *Quelques espèces sur les ensembles de petite cardinalité*, Ann. Sc. Math. du Québec, vol.IX, no.1, **1985**, 31-58.

[LY1] **J. Labelle et Y.-N. Yeh,** *The relation between Burnside rings and combinatorial species*, Journal of Combinatorial Theory ; Series A., 50, no.2, (1989), 269-284.

[LY2] **J. Labelle et Y.-N. Yeh,** *Combinatorial Species of Several Variables* , Rapport de recherche, # 61, Département de Mathématiques et d'Informatique, UQAM, **1988.**

[Lo] **L. Lovász,** *Combinatorial Problems and Exercices,* North-Holland, **1979.**

[Mo] **J. W. Moon,** " Topics on Tournaments ", E. Hewitt ed.; Athena Series; Holt, Rinehart and Winston, **1968.**

[Y1] **Y.-N. Yeh,** *On the Combinatorial Species of Joyal,* Ph.D.thesis, State University of New-York at Buffalo, **1985.**

[Y2] **Y.-N. Yeh,** *The Calculus of Virtual Species and K-Species*, dans *Combinatoire Énumérative, Montréal Québec 1985, Proceedings*, G. Labelle et P. Leroux, editors. Lecture Notes in Mathematics no.1234, Springer-Verlag **1986**, 351-369.

[Z] **D. Zeilberger,** Communication personnelle, juin 1985.

Chapitre 1

Calcul combinatoire du nombre d'endofonctions et d'arborescences laissées fixes par l'action d'une permutation.#

Ivan Constantineau et Jacques Labelle (Université du Québec à Montréal)

Abstract. Let β be a given permutation of $[n] = \{1, 2, ..., n\}$ of type $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ (i.e. β has β_i cycles of length i ; $\sum i\, \beta_i = n$). We compute, in terms of the β_i's and bijectively, the number of endofunctions and rooted trees (i.e. contractions) on [n] kept fixed by the action of β (by conjugation); i.e. the cardinalities of the sets: $\{\phi \mid \phi : [n] \to [n]$ and $\phi = \beta\phi\beta^{-1}\}$ and $\{A \mid A$ a contraction on [n] and $A = \beta A \beta^{-1}\}$.

Résumé. Soit β une permutation de $[n] = \{1, 2, ..., n\}$ de type $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ (i.e. β possède β_i cycles de longueur i ; $\sum i\, \beta_i = n$). Nous calculons, en fonction des β_i et de façon bijective, le nombre d'endofonctions et d'arborescences (i.e. contractions) sur [n] laissées fixes par l'action de β (par conjugaison); c'est-à-dire les cardinalités: $|\{\phi \mid \phi : [n] \to [n]$ et $\phi = \beta\phi\beta^{-1}\}|$ et $|\{A \mid A$ est une arborescence sur [n] et $A = \beta A\beta^{-1}\}|$.

§ 0. Introduction

Soit A une espèce (voir [J], [Lj], [Lg1], [B1] ou [Y1, 2]) et β une permutation de l'ensemble fini U, nous noterons $\mathrm{Fix}_A(\beta)$ l'ensemble des A-structures sur U laissées fixes par β:

$$\mathrm{Fix}_A(\beta) = \{a \in A[U] \mid A[\beta](a) = a\}$$

Les cardinalités de ces ensembles sont les coefficients apparaissant dans la série indicatrice de cycles (voir [J], [Lg2, 3], [B2], [D] ou [Le]) de l'espèce A.

Pour les espèces $\mathcal{End}$ et $\mathcal{Ars}$, des endofonctions et des arborescences respectivement, Gilbert Labelle [Lg2] a trouvé analytiquement les expressions suivantes:

$$|\mathrm{Fix}_{\mathcal{End}}(\beta)| = \prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{d|k}^{n} d\beta_d\right)^{\beta_k} \qquad (*)$$

et

Travail fait dans le cadre des subventions: NSERC A5660 (Canada) et FCAC EQ 1608 (Québec).

$$|\mathrm{Fix}_{\mathcal{A}rs}(\beta)| = \beta_1^{\beta_1 - 1} \prod_{k\geq 2} \left[\left(\sum_{d|k} d\beta_d \right)^{\beta_k} - k\beta_k \left(\sum_{d|k} d\beta_d \right)^{\beta_k - 1} \right] \qquad (**)$$

Le problème de trouver une interprétation combinatoire pour (*) et surtout (**) a été posé par Gilbert Labelle à la séance de problèmes du Colloque de Combinatoire Enumérative, UQAM (1985) (voir [LL] page 383]). Quelques jours plus tard, Doron Zeilberger [Z] a donné une démonstration de (**) en utilisant le "Matrix-tree theorem".

Le but de cet article est d'interpréter combinatoirement ces expressions et d'en fournir une démonstration bijective. En plus de connaître la cardinalité des ensembles $\mathrm{Fix}_{\mathcal{E}nd}(\beta)$ et $\mathrm{Fix}_{\mathcal{A}rs}(\beta)$, nous pourrons ainsi en engendrer algorithmiquement les éléments.

§ 1. Le calcul de $\mathrm{Fix}_{\mathcal{E}nd}(\beta)$.

Pour la suite de l'article, soit β une permutation de $[n]$ de type $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, c'est-à-dire que β est constituée, pour tout i de $[n]$, de β_i cycles de longueur i, et soit C (= C(β)) l'ensemble des cycles de β.

Définition 1. Une *β-endofonction sur* $[n]$ est la donnée d'un couple (δ, Δ) de fonctions, $\delta: C \longrightarrow C$ et $\Delta: C \longrightarrow [n]$, telles que : $\forall c \in C$, $|\delta(c)|$ divise $|c|$ et $\Delta(c) \in \delta(c)$.

On désignera par β-$\mathcal{E}nd[n]$ l'ensemble des β-endofonctions sur $[n]$.

Théorème 1. Il existe une bijection Γ entre les ensembles $\mathrm{Fix}_{\mathcal{E}nd}(\beta)$ et β-$\mathcal{E}nd[n]$.

Démonstration. Soit $\phi \in \mathcal{E}nd[n]$ telle que $\phi = \beta\phi\beta^{-1}$. On construit alors $\Gamma(\phi) = (\underline{\phi}, \phi_|)$ de la manière suivante: soit $x \in c \in C$ et $\phi(x) \in d \in C$. Comme, pout tout $i \in \mathbb{N}$, $\phi\beta^i(x) = \beta^i\phi(x)$, on a $\phi(c) = d$. Soit $|c| = k$ et $|d| = j$, on a $\beta^k\phi(x) = \phi\beta^k(x) = \phi(x)$, de sorte que l'ordre selon β de $\phi(x)$, soit j, divise k. La fonction $\underline{\phi}: C \longrightarrow C$ est définie en posant $\underline{\phi}(c) := d$ (en d'autres mots, pour tout c dans C, $\underline{\phi}(c)$ est l'image (qui est bien un cycle) du cycle c par ϕ ou encore $\underline{\phi}(c) \ni \phi(\min(c))$. On définit ensuite $\phi_|: C \longrightarrow [n]$ par $\phi_|(c) := \phi(\min(c))$. Il est clair que la fonction Γ est bien définie.

Réciproquement, si $(\delta, \Delta) \in$ ß-$\mathcal{End}[n]$ est donné alors on lui associe une endofonction ϕ ($= \phi_{(\delta,\Delta)}$) en posant, pour tout $c \in C$ et tout s dans $\mathbb{N}$, $\phi(ß^s(\min(c))) := ß^s(\Delta(c))$. Puisque $|\delta(c)|$ divise $|c|$, l'endofonction ϕ est bien définie. Comme $\phi(ß^s(\min(c))) = ß^s(\phi(\min(c)))$, on a $\phi ß = ß\phi$. On vient d'obtenir Γ^{-1}. ❑

Proposition 1. On a:

$$|ß\text{-}\mathcal{End}[n]| = \prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{j|k} j\, ß_j\right)^{ß_k} .$$

Démonstration. Supposons $c \in C$, $|c| = k$, $(1 \le k \le n)$. L'image $\delta(c) \in C$ peut être choisie de façon arbitraire dans l'ensemble $D_c = \{d \in C \mid |d| \text{ divise } |c|\}$; une fois cette δ-image déterminée, disons $\delta(c) = \omega \in D_c$, $|\omega| = j$, on peut ensuite choisir, encore de façon arbitraire, $\Delta(c) \in \omega$. Comme on dispose de $ß_j$-cycles de longueur j, il y a donc $\sum_{j|k} jß_j$ façons de définir le couple $(\delta(c), \Delta(c))$, lorsque $|c| = k$. Puisque, pour tout k, $1 \le k \le n$, il y a $ß_k$ cycles de longueur k à traiter, tous indépendamment les uns des autres, de cette manière pour définir (δ, Δ) entièrement, on obtient bien la formule de la proposition. ❑

Le théorème 1 et la proposition 1 démontrent la formule (*) bijectivement.

Remarque. Par des arguments semblables à ceux des démonstrations précédentes et en utilisant ensuite le "Matrix-tree theorem", Lovász (voir [Lo]; page 229-231) trouve le nombre d'arbres sur [n], où n est impair, laissés fixes par ß.

§ 2. Le calcul de $\mathrm{Fix}_{\mathcal{A}rs}$ (ß).

Une *endofonction arborescente* (on dit aussi *contraction*) est une endofonction n'admettant qu'un seul point périodique (qui est donc un point fixe). Si on choisit ce point comme racine et qu'on remplace les flèches (dans le graphe sagital de ϕ) par des arêtes, on obtient une arborescence. Inversement, en orientant les arêtes d'une arborescence vers sa racine, où on ajoute une boucle, on obtient une endofonction arborescente. On peut donc considérer l'espèce $\mathcal{A}rs$, des arborescences, comme une sous-espèce de $\mathcal{E}nd$; ainsi $\mathrm{Fix}_{\mathcal{A}rs}(\beta) \subseteq \mathrm{Fix}_{\mathcal{E}nd}(\beta)$.

Définition 2. Une β-endofonction (δ, Δ) sur $[n]$ est dite ***arborescente*** si l'endofonction δ est elle-même arborescente. Une β-*arborescence* sur $[n]$ est une β-endofonction arborescente (δ, Δ) sur $[n]$ où la racine $\rho \in C$ de δ est telle que $|\rho| = 1$.

On désignera par β-$\mathcal{A}rs[n]$ l'ensemble des β-arborescences sur $[n]$.

Théorème 2. Il existe une bijection entre les ensembles $\mathrm{Fix}_{\mathcal{A}rs}(\beta)$ et β-$\mathcal{A}rs[n]$.

Démonstration. Supposons donnée A, une arborescence sur $[n]$ telle que $A = \beta A \beta^{-1}$. A étant une endofonction (arborescente), on peut, par le théorème1, lui associer une β-endofonction sur $[n]$, $\Gamma(A) = (\underline{A}, A_|)$, qui elle-même détermine une endofonction $\underline{A}$ sur C. Il est aisé de vérifier (on peut procéder par contradiction) que $\underline{A}$ est arborescente. D'autre part, remarquons que comme A est telle que $A = \beta A \beta^{-1}$, on a $\beta_1 \geq 1$. En effet, si $r \in [n]$ est racine de A alors $A(r) = r$ et r est le seul élément de $[n]$ ayant cette propriété. Comme $A\beta(r) = \beta A(r) = \beta(r)$, on a $\beta(r) = r$ et $\beta_1 \geq 1$. Soit ρ le 1-cycle de β contenant r, i.e. ρ est la boucle en r. On a que ρ est la racine de l'endofonction arborescente $\underline{A}$. Réciproquement, donnons-nous une β-arborescence (δ, Δ) sur $[n]$. Associons lui $A := \Gamma^{-1}(\delta, \Delta)$, où Γ est la bijection du théorème 1. Il est aisé (toujours par contradiction) de montrer que A est arborescente. ❑

Définition 3. Pour tout $k \in [n]$, soit $C{<}k{>}$ l'ensemble des cycles de longueur k de β. Une β-*endofonction de niveau k sur* $[n]$ est un couple (δ_k, Δ_k) formé de deux fonctions, $\delta_k: C{<}k{>} \longrightarrow C$ et $\Delta_k: C{<}k{>} \longrightarrow [n]$, telles que : $\forall c \in C{<}k{>}$, $|\delta_k(c)|$ divise $|c|$ et $\Delta_k(c) \in \delta_k(c)$. L'ensemble des β-endofonctions de niveau k sera noté β-$\mathcal{E}nd_k[n]$. De plus, on dira que (δ_k, Δ_k) *boucle* si l'endofonction δ_k admet au moins un cycle. Noter que les éléments d'un tel cycle sont eux-même des cycles (en fait tous dans $C{<}k{>}$); pour éviter la confusion, on parlera dans ce cas d'un cycle*.

Proposition 2. Le nombre de ß-endofonctions de niveau k qui bouclent est donné par:

$$k\cdot\beta_k\cdot\left(\sum_{d|k} d\beta_d\right)^{\beta_k-1}$$

Démonstration. Convenons, lorsque $(\delta_k, \Delta_k) \in \beta\text{-}\mathcal{E}nd_k[n]$ est définie, de nommer tout cycle $c \in$ C<k> tel que $\delta_k(c) \in$ C<k> un cycle *rigide* . Autrement, c sera dit *flexible* ($\delta_k(c) \notin$ C<k>). Ainsi la donnée d'une ß-endofonction de niveau k détermine une partition de C<k> en deux classes (possiblement vides) : celle des cycles rigides, notée $\mathcal{R}(\delta_k, \Delta_k)$, et l'autre, notée $\mathcal{F}(\delta_k, \Delta_k)$, des cycles flexibles. Remarquons maintenant qu'une condition nécessaire pour qu'une ß-endofonction de niveau k, (δ_k, Δ_k), boucle, est que $\mathcal{R}(\delta_k, \Delta_k) \neq \emptyset$. Sinon δ_k(C<k>) est un ensemble de cycles tous de longueur strictement inférieure à k et δ_k ne peut pas avoir de cycle*. Ce dernier raisonnement entraîne, par ailleurs, qu'un cycle flexible ne peut jamais faire partie d'un cycle* de δ_k. Fixons r, $1 \leq r \leq \beta_k$. Choisissons R un ensemble constitué de r cycles (arbitraires) de C<k>. On va chercher à dénombrer les (δ_k, Δ_k) de $\beta\text{-}\mathcal{E}nd_k[n]$ qui bouclent, et qui sont telles que $\mathcal{R}(\delta_k, \Delta_k) = R$ et $\mathcal{F}(\delta_k, \Delta_k) =$ C<k> \ R = F. Pour ce faire on calcule le nombre de manières possibles de définir les fonctions δ_k et Δ_k d'abord sur R (en **a.**), puis sur F (en **b.**). Il est clair qu'en multipliant ces deux résultats on obtient la solution au problème.

a. Si on veut que les r cycles de R soient rigides, on doit définir la δ_k-image de chacun d'eux dans C<k>. Il y a donc, à priori, $(\beta_k)^r$ manières de définir δ_k sur R. Mais de ces dernières, on ne veut dénombrer que l'ensemble de celles qui mènent à au moins un cycle* dans δ_k. Pour trouver ce nombre il suffit de soustraire de $(\beta_k)^r$ les choix qui ne donnent aucun cycle* à δ_k (LaPalisse!). Ce dernier nombre est facile à calculer, grâce à l'observation suivante: le nombre de choix qui ne donnent aucun cycle* à δ_k est le nombre de forêts de $(\beta_k - r)$ arborescences qu'on peut faire avec les β_k cycles (C<k> devient le support de ces arborescences) une fois les $(\beta_k - r)$ racines choisies comme étant les $(\beta_k - r)$ cycles flexibles. On sait (voir, par exemple, [Lg1]) que le nombre de forêts de $(\beta_k - r)$ arborescences sur un ensemble de β_k éléments où les racines ont déjà été déterminées est :

$$(ß_k - r)\frac{ß_k^r}{ß_k} = ß_k^r - rß_k^{r-1}.$$

Ainsi, le nombre de façons de définir δ_k sur R de manière à avoir au moins un cycle* sera:

$$ß_k^r - \left(ß_k^r - rß_k^{r-1} \right) = rß_k^{r-1}.$$

Pour terminer ce premier calcul, il reste seulement à déterminer, pour tout c dans R, $\Delta_k(c)$ lorsque $\delta_k(c)$ a été choisi. Mais, pour tout c, $|\delta_k(c)| = k$ et $\Delta_k(c)$ peut être arbitrairement choisi dans $\delta_k(c)$. Bref, on a clairement k^r manières de définir Δ quand δ est déterminée. Il y a donc $k^r\, r\, (ß_k)^{r-1}$ manières de définir les ß-endofonctions (δ_k, Δ_k) de ß-$\mathcal{End}_k[n]$ sur R, telles que $\mathcal{R}(\delta_k, \Delta_k) = R$ et qu'elles bouclent.

b. En se référant à la proposition 1, on voit facilement que le nombre cherché est cette fois

$$\left(\sum_{\substack{d\,|\,k \\ d \neq k}} dß_d \right)^{ß_k - r}$$

la seule distinction apparaissant dans le fait qu'étant voulus flexibles, les $(ß_k\text{-}r)$ cycles ne peuvent avoir pour δ-image que des cycles de longueur divisant strictement k. De là, lorsqu'on a fixé les ensembles R et F, $|R| = r$, on obtient l'expression suivante pour le nombre de ß-endofonctions (δ_k,Δ_k) de ß-$\mathcal{End}_k[n]$ qui bouclent, et qui sont telles que $\mathcal{F}(\delta_k, \Delta_k) = F$ et $\mathcal{R}(\delta_k, \Delta_k) = R$.

$$\left(\sum_{\substack{d\,|\,k \\ d \neq k}} dß_d \right)^{ß_k - r} \cdot rk^r ß_k^{r-1}$$

Finalement, R étant un sous-ensemble arbitraire (de cardinalité non-nulle) de C<k>, on aura au total

$$\sum_{r=1}^{ß_k} \binom{ß_k}{r} \left(\sum_{\substack{d|k \\ d\neq k}} dß_d \right)^{ß_k - r} r\, k^r ß_k^{r-1}$$

ß-endofonctions (δ_k, Δ_k) de ß-$\mathcal{End}_k[n]$ qui bouclent. On a alors:

$$\sum_{r=1}^{\beta_k} \binom{\beta_k}{r} \left(\sum_{\substack{d|k \\ d\neq k}} d\beta_d \right)^{\beta_k - r} r\, k^r \beta_k^{r-1} = \sum_{r=1}^{\beta_k} \frac{(\beta_k-1)!}{(r-1)!\,(\beta_k-r)!} \left(\sum_{\substack{d|k \\ d\neq k}} d\beta_d \right)^{\beta_k - r} k^r \beta_k^r =$$

$$\sum_{t=0}^{\beta_k-1} \binom{\beta_k-1}{t} \left(\sum_{\substack{d|k \\ d\neq k}} d\beta_d \right)^{\beta_k - t-1} k^{t+1} \beta_k^{t+1} = \left(k\beta_k + \sum_{\substack{d|k \\ d\neq k}} d\beta_d \right)^{\beta_k - 1} k\beta_k = \left(\sum_{d|k} d\beta_d \right)^{\beta_k - 1} k\beta_k$$

$\square$

Il est clair que toute ß-endofonction (δ, Δ) sur $[n]$ admet une décomposition unique

$$(\delta,\Delta) = \sum_{k=1}^{n} (\delta_k, \Delta_k)$$

en ß-endofonctions de niveau k sur $[n]$, non triviales pour tout k où $\beta_k > 0$. On a aussi qu'une ß-endofonction sur $[n]$ est une ß-arborescence ssi, pour tout $k \geq 2$ où $\beta_k > 0$, (δ_k, Δ_k) ne boucle pas et que (δ_1, Δ_1) s'identifie à une arborescence sur β_1 points (qui boucle, elle, à la racine).

On sait qu'il y a $\beta_1^{\beta_1 - 1}$ arborescences possibles avec ces β_1 cycles de longueur 1 [nous avons déjà remarqué que $\beta_1 \geq 1$]. De plus, un peu comme l'observation dégagée plus haut, le nombre total ß-endofonctions de niveau k qui ne bouclent pas est évidemment le nombre total de ß-endofonctions de niveau k moins le nombre total de ß-endofonctions de niveau k qui bouclent. Le nombre total ß-endofonctions de niveau k est donné par la proposition 1 et le nombre de celles qui bouclent vient d'être calculé. Finalement, une ß-arborescence sera déterminée dès que, pour tout $k \geq 2$ où $\beta_k \geq 1$, sera déterminée une ß-endofonction de niveau k ne bouclant pas, et que sera donnée une arborescence sur les β_1 points fixes de ß.

Ces choix étant indépendants les uns des autres on vient de démontrer:

Proposition 3. Le nombre de ß-arborescences sur [n] est donné par la formule suivante:

$$\left|\beta\text{-}\mathcal{A}rs[n]\right| = \begin{cases} \beta_1^{\beta_1-1} \displaystyle\prod_{k\geq 2} \left\{ \left(\sum_{d\mid k} d\beta_d\right)^{\beta_k} - k\cdot\beta_k \left(\sum_{d\mid k} d\beta_d\right)^{\beta_k-1} \right\} & \text{si } \beta_1 \geq 1. \\ 0, \text{ sinon.} & \end{cases}$$

Le théorème 2 et la proposition 3 démontrent la formule (**) bijectivement.

Remarque. Pierre Leroux [Le] montre comment obtenir la série indicatrice de cycles de l'espèce A (des arbres) à partir de celle des arborescences (dont les coefficients sont donnés par (**)), grâce à l'équation combinatoire:

$$\mathcal{A}rs + \mathbb{E}_2 \circ \mathcal{A}rs = \mathrm{A} + (\mathcal{A}rs)^2 ,$$

où $\mathbb{E}_2$ désigne l'espèce des ensembles de cardinalité deux. Il est donc possible de déterminer de façon bijective le nombre d'arbres laissés fixes par l'action d'une permutation donnée; ceci est fait dans [CL], où plusieurs autres espèces (d'endofonctions et autres) sont également traitées.

Références

[B1] **F. Bergeron.** *Une systématique de la combinatoire énumérative,* Thèse de Ph.D.,UQAM et Université de Montréal, **1986**.

[B2] **F. Bergeron.** *Une combinatoire du pléthysme*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, Vol. 46, no. 2, **1987**, 291-305.

[C] **I. Constantineau.** *Théorie des espèces et endofonctions*, Mémoire de maîtrise, UQAM, **1987**.

[CL] **I. Constantineau et J. Labelle.** *On combinatorial structures kept fixed by the action of a given permutation*, à paraître dans J. Comb. Theo. Series A, accepté en 1990.

[D] **H. Décoste.** *Séries indicatrices d'espèces pondérées et q-analogues*, Thèse de Ph.D., UQAM et U.de Montréal, **1989**; publication du LACIM, #2, **1990**.

[J] **A. Joyal.** *Une théorie combinatoire des séries formelles*, Adv. in Math. 42, Acad. Press, **1981**, 1-82.

[Le] **P. Leroux.** *Aufzählungsmethoden für einege Klassen von Graphen*, Bayreuther mathematische Schriften (à paraître, **1988**, 40 pages).

[Lg1] **G. Labelle.** *Une nouvelle démonstration combinatoire des formules d'inversion de Lagrange*, Adv. in Math. 42, Acad. Press, **1981**, 217-247.

[Lg2] **G. Labelle.** *Some New Computational Methods in the Theory of Species*, dans "Combinatoire Énumérative, Montréal, Québec 1985, Proceedings",G. Labelle et P. Leroux, éds. Lecture Notes in Mathematics no.1234, Springer-Verlag **1986**, 192-209.

[Lg3] **G. Labelle.** *The computation of the cycle index series of some combinatorial species*, Notes: Combinatorial Year, **M.I.T.**, Nov. **1984.**

[Lj] **J. Labelle.** *Applications diverses de la théorie combinatoire des espèces de structures*, Ann. Sc. Math. du Québec, 7, no.1, **1983**, 59-94.

[Lo] **L. Lovász.** *Combinatorial Problems and Exercices*, North-Holland, **1979.**

[LL] **G. Labelle et P. Leroux.** *Combinatoire Énumérative, Montréal, Québec 1985, Proceedings*, G. Labelle et P. Leroux, éditeurs. Lecture Notes in Mathematics no.1234, Springer-Verlag, **1986.**

[LY1] **J. Labelle et Y.N. Yeh.** *The relation between Burnside rings and combinatorial species*, Journal of Combinatorial Theory ; Series A. (accepté en **1987**).

[LY2] **J. Labelle et Y.N. Yeh.** *Several variables combinatorial species* (en préparation).

[Y1] **Y.N. Yeh.** *On the Combinatorial Species of Joyal*, Ph.D.thesis, State University of New-York at Buffalo, **1985.**

[Y2] **Y.N. Yeh.** *The Calculus of Virtual Species and K-Species*, dans "Combinatoire Énumérative, Montréal, Québec 1985, Proceedings", G. Labelle et P. Leroux, éds. Lecture Notes in Mathematics no.1234, Springer-Verlag **1986**, 351-369.

[Z] **D. Zeilberger.** Communication personnelle, juin 1985.

Ivan Constantineau et Jacques Labelle
Département de mathématiques et informatique,
Université du Québec à Montréal
Case postale 8888, Succ. "A", Montréal,
Québec H3C 3P8, Canada

Chapitre 2

Sur des Structures Combinatoires Laissées Fixes par l'Action d'une Permutation donnée.*

Ivan Constantineau and Jacques Labelle (Université du Québec à Montréal)

Article à paraître dans la revue Studies in Applied Mathematics (accepté en 1989).

Résumé. Soit β une permutation donnée de $[n] = \{1,2,\ldots,n\}$ de type $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ (i.e. β a β_i cycles de longueur i ; $\sum i\ \beta_i = n$) . Nous trouvons (bijectivement, en termes des β_i) le nombre d'endofonctions, permutations, permutations circulaires, dérangements, involutions sans point fixe, assemblées de pieuvres, pieuvres, endofonctions idempotentes, arborescences (i.e.contractions), forêts d'arborescences, arbres, vertébrés, relations (i.e. graphes orientés), relations symétriques (graphes simples), partitions, endofonctions connexes, sur [n], laissés fixes par l'action naturelle de β. Cette approche conduit à des algorithmes qui engendrent ces structures.

0. Introduction

Soient A une espèce de structures (voir [Jo],[Lg1],[Lj1],[B3],[BLL1] ou [Y1,2]) et β une permutation d'un ensemble fini U. Dénotons par $\mathrm{Fix}_A(\beta)$ l'ensemble des A-structures sur U laissées fixes par β, c'est-à-dire que $\mathrm{Fix}_A(\beta) = \{a \in A[U] \mid A[\beta](a) = a\}$. Les cardinalités de ces ensembles sont précisément les coefficients de la série indicatrice de cycles Z_A de A (voir [Jo],[Lg2,3],[B2],[D1] ou [Le]) :

$$Z_A = Z_A(x_1, x_2, \ldots) = \sum_{\text{ß}} \left|\mathrm{Fix}_A(\beta)\right| \frac{x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \cdots x_n^{\beta_n}}{1^{\beta_1}\beta_1!\ 2^{\beta_2}\beta_2! \cdots n^{\beta_n}\beta_n!}$$

où la somme est sur tous les $\text{ß}=(\beta_1, \beta_2, \ldots)$, $\sum_i \beta_i < \infty$ et où β est n'importe quelle permutation de type ß.

Exemples de séries indicatrices de cycles:

a) $$Z_{\mathbb{E}} = e^{\sum_{n\geq 1} \frac{x_n}{n}} = \sum_{\text{ß}} \frac{x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \cdots x_n^{\beta_n}}{1^{\beta_1}\beta_1!\ 2^{\beta_2}\beta_2! \cdots n^{\beta_n}\beta_n!}$$

où $\mathbb{E}$ est l'espèce des ensembles (i.e. une seule structure pour chaque ensemble fini).

---

* Travail fait dans le cadre des subventions: NSERC A5660 (Canada) and FCAR EQ 1608 (Québec).

b) $Z_{\mathbb{S}} = \prod_{n\geq 1} \frac{1}{1 - x_n} = \sum_{\beta} x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_n^{\beta_n}$ où $\mathbb{S}$ est l'espèce des permutations.

c) $Z_{\mathbb{L}} = \frac{1}{1 - x_1}$ où $\mathbb{L}$ est l'espèce des ordres linéaires.

d) $Z_{\mathbb{C}} = \sum_{n\geq 1} \frac{\varphi(n)}{n} \log\left(\frac{1}{1-x_n}\right) = \sum_{n} \sum_{d|n} \varphi(d)\, d^{\frac{n}{d}-1} \left(\frac{n}{d} - 1\right)! \; \frac{x_d^{n/d}}{d^{n/d}\,(n/d)!}$

où $\mathbb{C}$ est l'espèce des permutations circulaires.

Théorème 1. [Jo] Soient A et B deux espèces et soient A + B, A · B et A ∘ B (si B[Ø] = Ø) respectivement leur somme, produit et substitution (voir [Jo], [Lg1] ou [Lj1] pour les definitions) alors on a:
(i) $Z_{A+B} = Z_A + Z_B$; (ii) $Z_{A \cdot B} = Z_A \cdot Z_B$; (iii) $Z_{A\circ B} = Z_A \circ Z_B$
où $Z_A \circ Z_B$ est la substitution pléthystique (voir [B2], [Jo] ou [Lg2]) des séries en une infinité de variables.

A l'aide du théorème 1 et du fait évident que des espèces isomorphes ont la même série indicatrice de cycles, on a que toute identité fonctionnelle entre espèces donne lieu à une identité correspondante au niveau de leurs séries indicatrices de cycles. Par exemple, on peut obtenir d) de l'équation $\mathbb{S} = \mathbb{E} \circ \mathbb{C}$. Pour les espèces End (des endofonctions) et Con (des arborescences ou contractions) respectivement, Gilbert Labelle [Lg2], puisque End = $\mathbb{S}$ ∘ Con = $\mathbb{E} \circ \mathbb{C}$ ∘ Con et X($\mathbb{E}$ ∘ Con) = Con (où X denote l'espèce des singletons), a obtenu, en utilisant l'inversion multidimensionelle de Lagrange, les expressions suivantes:

$$\left|\mathrm{Fix}_{\,\mathrm{End}}(\beta)\right| = \prod_{k=1}^{n} \left(\sum_{d|k} d\beta_d\right)^{\beta_k} \tag{1}$$

$$\left|\mathrm{Fix}_{\mathrm{Con}}(\beta)\right| = \begin{cases} \beta_1^{\beta_1 - 1} \displaystyle\prod_{k\geq 2} \left[\left(\sum_{d|k} d\beta_d\right)^{\beta_k} - k\beta_k \left(\sum_{d|k} d\beta_d\right)^{\beta_k - 1}\right] & \text{si } \beta_1 \geq 1, \\ 0 \ \text{autrement.} \end{cases} \tag{2}$$

Le problème de prouver (2) bijectivement a été proposé par G. Labelle à la session de problèmes du "Colloque de Combinatoire Enumérative, UQAM (1985)" (voir [Lg2], page 383]). Doron Zeilberger a donné une preuve de (2) en se servant du théorème connu sous le nom de "matrix tree" (voir aussi [Lo], p.32); il y a une preuve matricielle de (1) et aussi de (17), (19) et (20)) dans [Da].

Dans [C2], nous avons prouvé (1) et (2) bijectivement; l'objet de cet article est d'utiliser la même méthode élémentaire dans le cas des permutations, permutations circulaires, dérangements, involutions sans point fixe, assemblées de pieuvres, pieuvres, endofonctions idempotentes, forêts d'arbres, arbres, vertébrés, relations (digraphes), relations syмériques (graphes simples), partitions et endofonctions connexes.

Il vaut la peine de mentionner qu'on peut souvent trouver, en utilisant le Theorème 1 (ou des outils plus sophistiqués comme le logarithme combinatoire - voir [Lg2]), une expression explicite pour les coefficients des séries indicatrices de cycles des espèces énumérées dans le paragraphe précédent. Cependant la signification combinatoire de ces résultats algébriques et analytiques n'est pas, en général, vraiment apparente (voir, par exemple, la Remarque 3.4 et l'identité algébrique développée à la fin de la preuve de la Proposition 5.1). La méthode utilisée dans cet article ne calcule pas seulement ces coefficients de manière purement combinatoire, elle prodigue aussi des outils algorithmiques pour engendrer les structures qu'elle compte.

1. Endofonctions

Soit β une permutation fixée de $[n] = \{1, 2,\ldots, n\}$ de type $(\beta_1, \beta_2,\ldots, \beta_n)$ et $C = C_\beta$ l'ensemble des cycles de β. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ agit sur l'ensemble des endofonctions de $[n]$, $\mathrm{End}[n]$, en posant $\sigma \cdot \phi = \sigma \circ \phi \circ \sigma^{-1}$ pour toute $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et toute $\phi \in \mathrm{End}[n]$. Posons $\mathrm{Fix}_{\mathrm{End}}(\beta) = \{\phi \in \mathrm{End}[n] \mid \beta \cdot \phi = \phi\}$.

Lemme (2.1) Soit $\phi \in \mathrm{Fix}_{\mathrm{End}}(\beta)$; si x appartient à un k-cycle de β alors $\phi(x)$ appartient à un d-cycle de β pour un certain $d|k$.

Preuve. Evidente puisque $\beta^k(x) = x \Rightarrow \beta^k(\phi(x)) = \phi(\beta^k(x)) = \phi(x)$. ❑

Du Lemme (2.1) on obtient immédiatement (1):

Proposition (2.2) [Da,Lg2,C2].

On a
$$\left|\mathrm{Fix}_{\mathrm{End}}(\beta)\right| = \prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{d|k} d\beta_d\right)^{\beta_k}.$$

Preuve (Bijective).Considérons l'ensemble suivant: $\beta\text{-End}[n] = \{(\delta, \Delta) \mid \delta: C \longrightarrow C, \Delta: C \longrightarrow [n]$ et $\forall\, c \in C, |\delta(c)|$ divise $|c|$ et $\Delta(c) \in \delta(c)\}$. Il y a une bijection Γ entre $\mathrm{Fix}_{\mathrm{End}}(\beta)$ et β-End[n] que nous décrivons maintenant: soit $\phi \in \mathrm{Fix}_{\mathrm{End}}(\beta)$, $\Gamma(\phi) = (\underline{\phi}, \phi_{|})$ où $\underline{\phi} : C \longrightarrow C$ est telle que $\phi(\min(c)) \in \underline{\phi}(c)$, $\forall c \in C$ et $\phi_{|} : C \longrightarrow [n]$ (la restriction de ϕ aux minimums des cycles) est définie par $\phi_{|}(c) := \phi(\min(c))$. Il est clair que Γ est une bijection. De plus, on voit immédiatement que:

$$\left|\beta\text{-End}[n]\right| = \prod_{k=1}^{n} \left(\sum_{d|k} d\beta_d \right)^{\beta_k} . \tag{3}$$

❑

La plupart des formules de cet article peuvent être généralisées à des espèces à plusieurs sortes et à des espèces pondérées.

Proposition (2.3) Soit $G = ([k], \Gamma)$, $\Gamma: [k] \rightarrow \mathcal{P}([k])$, un graphe orienté et End_G la k-espèce des endofonctions φ sur $U_1+U_2+\ldots+U_k$ telles que, $\forall\, u_i \in U_i$, $\varphi(u_i) \in U_j \Rightarrow j \in \Gamma(i)$. Soient $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ des permutations de $U_1, U_2, \ldots, U_k$ respectivement, et soit $\sigma_{ij} = (\sigma_i)_j$ le nombre de j-cycles de σ_i et $n_i = |U_i|$, alors on a:

$$\left| \mathrm{Fix}_{\mathrm{End}_G}(\sigma) \right| = \prod_{i=1}^{k} \prod_{j=1}^{n_i} \left(\sum_{d|j} d \sum_{r \in \Gamma(i)} \sigma_{rd} \right)^{\sigma_{ij}} \tag{4}$$

En particulier, le nombre d'endofonctions bipartites de $[n + m]$ laissées fixes par l'action de $\alpha + \beta$, où $\alpha \in \mathfrak{S}_n$ et $\beta \in \mathfrak{S}_m$ sont respectivement de types $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ et $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$, est donné par l'expression suivante:

$$\prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{d|i} d\beta_d \right)^{\alpha_i} \cdot \prod_{j=1}^{m} \left(\sum_{d|j} d\alpha_d \right)^{\beta_j} . \tag{5}$$

2. Sous-espèces des permutations

Les propositions (3.1) et (3.2) énoncent des résultats bien connus que nous démontrons à l'aide de notre méthode.

Proposition (3.1) Le nombre de **permutations** σ de [n] laissées fixes par l'action de β est donné par:

$$\prod_{k=1}^{n} k^{\beta_k} \beta_k ! \tag{6}$$

Preuve. Si on pose $\beta\text{-}\mathbb{S}[n] := \Gamma(\mathrm{Fix}_{\mathbb{S}}(\beta))$, alors on a évidemment $\beta\text{-}\mathbb{S}[n] \cong \mathrm{Fix}_{\mathbb{S}}(\beta)$. Soit $(\delta, \Delta) \in \beta\text{-}\mathbb{S}[n]$; alors pour tout k, $1 \le k \le n$, $\delta_{|\beta<k>} \in \mathbb{S}[\beta<k>]$, où $\beta<k> = \{c \in C_\beta \mid |c| = k\}$. On obtient alors immédiatement (6). ❑

Proposition (3.2) Le nombre de **permutations circulaires** sur [n] laissées fixes par l'action de β est

$$\varphi(d) \cdot d^{\frac{n}{d}-1} \left(\frac{n}{d} - 1\right)! \tag{7}$$

où β a n/d cycles de longueur d (φ dénote la fonction indicatrice d'Euler) et zéro autrement.

Preuve. Soit $(\delta, \Delta) \in \beta\text{-}\mathbb{C}[n] := \Gamma(\mathrm{Fix}_{\mathbb{C}}(\beta))$; alors $\delta \in \mathbb{C}[C_\beta]$ et les cycles de β doivent tous être de même longueur, disons d (avec d|n). De plus Δ est uniquement déterminée par l'ensemble $\{\Delta^1(1), \Delta^2(1), \ldots, \Delta^{n/d}(1)\}$. Pour $1 \le i < n/d$, il y a d choix pour $\Delta^i(1)$ mais seulement $\varphi(d)$ possibilités pour $\Delta^{n/d}(1)$ qui font que $\Gamma^{-1}(\delta, \Delta)$ est circulaire. ❑

Proposition (3.3) Soit Der l'espèce des **dérangements.** Alors on a

$$|\mathrm{Fix}_{\mathrm{Der}}(\beta)| = \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{\beta_i} \binom{\beta_i}{j} |\mathrm{Der}[j]|\, i^j (i-1)^{\beta_i - j} \tag{8}$$

Preuve. Soit $(\delta, \Delta) \in \beta\text{-Der}[n] := \Gamma(\mathrm{Fix}_{\mathrm{Der}}(\beta))$; alors δ permute les β_i cycles de longueur i ensemble. Pour un certain j, $0 \le j \le \beta_i$, δ dérange j des i-cycles et fixe les $\beta_i - j$ autres. Si l'image d'un cycle n'est pas lui-même alors on a i choix pour l'image par Δ de son minimum; si c'est un point fixe, il y a seulement (i -1) choix (autrement on obtient des points fixes pour $\Gamma^{-1}(\delta, \Delta)$). ❑

Remarque (3.4) Analytiquement on trouve plutôt l'expression équivalente suivante:

$$Z_{\mathrm{Der}} = e^{-\sum_{n\ge1} \frac{x_n}{n}} \prod_{n \ge 1} \frac{1}{1-x_n} = \sum_{\beta=(\beta_1,\beta_2,\ldots)} \left(\sum_{0 \le \delta_i \le \beta_i} \prod_i \frac{(-1)^{\delta_i}}{\delta_i!\, i^{\delta_i}} \beta_i!\, i^{\beta_i} \right) \frac{x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \cdots}{1^{\beta_1}\beta_1!\, 2^{\beta_2}\beta_2! \cdots}$$

Soit $\mathbb{J}$ l'espèce des **involutions sans point fixe**; rappellons que l'on a $|\mathbb{J}[2k]| = 1\cdot 3\cdots(2k-1)$.

Proposition (3.5) On a $|\mathrm{Fix}_{\mathbb{J}}(\beta)| = \Pi_{1\le j\le n} A_j$ où

$$A_j = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{\beta_j}{2} \right\rfloor} \binom{\beta_j}{2k} \cdot |\mathbb{J}[2k]| \cdot j^k & \text{, si } j \text{ est pair} \\ \begin{cases} 0, \text{ si } \beta_j \text{ est impair} \\ j^{\frac{\beta_j}{2}} \cdot |\mathbb{J}[\beta_j]| & \text{, si } \beta_j \text{ est pair} \end{cases} & \text{, si } j \text{ is impair.} \end{cases} \tag{9}$$

Preuve. Soit $(\delta, \Delta) \in \beta\text{-}\mathbb{J}[n] := \Gamma(\mathrm{Fix}_{\mathbb{J}}(\beta))$. Alors δ est une involution (*avec*, possiblement, des points fixes). Ainsi, pour tout m, $1 \le m \le n$, $\delta_{|\beta<m>} \in \mathbb{I}[\beta<m>]$, où $\mathbb{I}$ est l'espèce des involutions. Si j est pair, choisissons 2k cycles, $k \ge 0$, dans $\beta<j>$, pour être les couples de l'involution $\delta_{|\beta<j>}$, les $\beta_j - 2k$ cycles qui restent étant ses points fixes. Il n'y a qu'une seule façon de définir Δ sur les $(\beta_j - 2k)$ points fixes: pour chacun de ces cycles c, $\Delta(c)$ est le point "antipodal" de min(c) dans c. De plus, si $\delta(c) = d$ alors on a $\delta(d) = c$ et $\Delta(c)$ détermine uniquement $\Delta(d)$. Si j est impair, $\delta_{|\beta<j>}$ ne peut être qu'une involution sans point fixe. ❑

3. Sous-espèces des endofonctions

Il est bien connu qu'une endofonction ϕ n'est en fait qu'une "permutation d'arborescences". Si toutes les arborescences sont des chaînes, on dit (voir [B1]) que ϕ est une **assemblée de pieuvres**. Ces endofonctions spéciales constituent l'espèce $\mathbb{B} = \mathbb{S} \circ \mathbb{L}^*$ (où $\mathbb{L}^*$ denote l'espèce des ordres linéaires non-vides - ou chaînes). Il s'ensuit que la série génératrice exponentielle de $\mathbb{B}$ est $(1 - (x/1 - x))^{-1} = (1 - x)/(1 - 2x)$, et qu'il y a $2^{n-1}n!$ $\mathbb{B}$-structures sur [n].

Remarque. Rappellons ici (voir [FLj] page 309) qu'il existe une bijection, dénotée ρ_{12}, entre les " configurations de Meixner" et les "permutations bicolorées" qui peut être restreinte à un isomorphisme entre l'espèce $\mathbb{B}$ et l'espèce $\mathbb{P}$ des "permutations bicolorées ayant au moins un point noir sur chaque cycle" définie par:

$\mathbb{P}[U] = \{(A,\sigma) \mid A \subseteq U, \sigma \in \mathbb{S}[U]$ et chaque cycle de σ contient un element de $A\}$,

où U est un ensemble fini, et, pour toute bijection $f:U \longrightarrow V$, $\mathbb{P}[f](A,\sigma) = (f(A), f \circ \sigma \circ f^{-1})$. Puisque sous la bijection ρ_{23} (voir [FLj] page 310) entre "permutations bicolorées" de [n] "permutations partiellement soulignées" sur [n] de Kreweras (voir [Kr]), l'ensemble $\mathbb{P}[n]$ est envoyé surjectivement sur l'ensemble des permutations partiellement soulignées de [n] où la première entrée est soulignée, on a une preuve bijective du fait que $|\mathbb{B}[n]| = 2^{n-1}n!$.

Proposition (4.1) Le nombre d'**assemblées de pieuvres** sur [n] laissées fixes par l'action de β est donné par l'expression suivante:

$$\prod_{i,\beta_i \geq 1} 2^{\beta_i - 1} \beta_i ! \, i^{\beta_i} \tag{10}$$

Preuve. Soit $(\delta, \Delta) \in \beta\text{-}\mathbb{B}[n] := \Gamma(\mathrm{Fix}_{\mathbb{B}}(\beta))$. La restriction $\delta_{|\beta<i>}$ est une assemblée de pieuvres sur $\beta<i>$. Chacun des minimums des β_i i-cycles a i images possibles sous Δ. ❑

Proposition (4.2) Le nombre de **pieuvres** sur [n] laissées fixes par l'action de β est donné par

$$\varphi(d)\, d^{\frac{n}{d}-1} \left(2^{\frac{n}{d}} - 1\right)\left(\frac{n}{d} - 1\right)! \tag{11}$$

si β a n/d cycles de longueur d, et est nul autrement.

Preuve. Rappelons [B1] qu'une pieuvre est une permutation cyclique de chaînes non-vides. Puisque $\mathbb{C} \circ \mathbb{L}^*(x) = \log((1 - x)/(1 - 2x))$, il y a $(2^n - 1)(n - 1)!$ pieuvres sur [n] (sous ρ_{12}, [FLj], on obtient une permutation circulaire bicolorée avec au moins un point noir). Prenons une pieuvre arbitraire sur les n/d d-cycles de β et procédons comme plus haut. Chacun des n/d minimums a d images possibles sous Δ excepté un qui n'en n'a que $\varphi(d)$, de manière à ne pas scinder le cycle de la pieuvre. ❑

La version pondérée de ces formules (qui sont très utiles dans l'étude des modèles combinatoires des polynômes orthogonaux et de leurs q-analogues) est fait en détail dans [D1,2] de même que le calcul de plusieurs autres séries indicatrices de cycles d'espèces pondérées.

Une **endofontion idempotente** est une endofonction ϕ telle que $\phi^2 = \phi$. Il est bien connu qu'on peut associer ϕ à un unique triplet (A, B, f) tel que $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = [n]$, $A \neq \emptyset$, $f: B \longrightarrow A$ où $A = \phi[n]$ est l'ensemble des points fixes de ϕ et $f^{-1}(a) = \phi^{-1}(a) - \{a\}$ si $a \in A$. Il s'ensuit qu'il y a $\sum_{k\in[n]}(n!/(k!n-k!))k^{n-k}$ endofonctions idempotentes sur [n]. On peut aussi envisager ϕ comme une bicoloration (i.e. (A, B)) de [n] munie d'une partition de [n] ayant exactement un point noir (i.e. dans A) dans chaque classe. En d'autres mots l'espèce des endofonctions idempotentes est $\mathbb{E}\circ(X\cdot\mathbb{E})$.

Proposition (4.3) Le nombre d'**endofonctions idempotentes** sur [n] laissées fixes par β est:

$$\sum_{\lambda\leq\beta}\prod_{i=1}^{n}\binom{\beta_i}{\lambda_i}\left(\sum_{d|i}d\lambda_d\right)^{\beta_i-\lambda_i} \tag{12}$$

où $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_n) \leq \beta = (\beta_1, \beta_2,\ldots, \beta_n)$ signifie que, $\forall i$, $\lambda_i \leq \beta_i$.

Preuve. $\forall i$, $1\leq i \leq n$; parmi les β_i i-cycles de β choisissons-en λ_i qui seront faits de points noirs (i.e. fixés par ϕ). Pour chacun des $\beta_i - \lambda_i$ cycles (blancs) qui restent, on choisit comme image du minimum n'importe quel point d'un cycle noir dont la longueur d divise i. Cela définit une endofonction idempotente unique sur [n] laissée fixe par β. ❑

4. Arborescences, forêts d'arborescences, arbres et vertébrés.

Une **contraction** ϕ est une endofonction n'ayant qu'un seul point périodique (qui est un point fixe). Si on choisit ce point comme racine et qu'on remplace les flèches (dans le graphe de ϕ) par des arêtes, on obtient précisément une **arborescence**. Réciproquement, en orientant les arêtes vers la racine (sur laquelle on ajoute une boucle) dans une arborescence on obtient une contraction. Soit $\mathrm{Fix}_{\mathrm{Con}}(\beta)\subseteq \mathrm{Fix}_{\mathrm{End}}(\beta)$ l'ensemble des contractions sur [n] qui sont laissées fixes par β.

Proposition (5.1) [Lg2,C2]. Si $\beta_1\geq 1$, alors on a l'expression suivante pour $|\mathrm{Fix}_{\mathrm{Con}}(\beta)|$: (quand $\beta_1= 0$, $\mathrm{Fix}_{\mathrm{Con}}(\beta) = \emptyset$)

$$\beta_1^{\beta_1 -1} \prod_{k\geq 2}\left[\left(\sum_{d|k} d\beta_d\right)^{\beta_k} - k\beta_k\left(\sum_{d|k} d\beta_d\right)^{\beta_k -1}\right].$$

Preuve. (Bijective). On a que $(\delta, \Delta) \in \Gamma(\mathrm{Fix}_{\mathrm{Con}}(\beta))$ si et seulement si $\delta\colon C \longrightarrow C$ est elle-même une contraction où la racine $\rho \in C$ est telle que $|\rho| = 1$. De combien de manières le couple (δ, Δ) peut-il être construit ? Examinons chaque niveau k, i.e. considérons les restrictions $\delta_k\colon \beta\langle k\rangle \longrightarrow C$ et $\Delta_k\colon \beta\langle k\rangle \longrightarrow [n]$ de δ et Δ respectivement. De combien de manières ces fonctions peuvent-elles être définies de manière à ce que $\Gamma^{-1}(\delta, \Delta)$, où $(\delta, \Delta) = \Sigma_{1\leq k\leq n}(\delta_k, \Delta_k)$, soit une contraction ? Considérons un couple arbitraire de fonctions (δ_k, Δ_k); on dira que $c \in \beta\langle k\rangle$ est *rigide* si $\delta_k(c) \in \beta\langle k\rangle$ et ***flexible*** si $\delta_k(c) \notin \beta\langle k\rangle$. Dénotons par $R = \mathcal{R}(\delta_k, \Delta_k)$ et $F = \mathcal{F}(\delta_k, \Delta_k)$, respectivement les sous-ensembles de cycles rigides et flexibles de $\beta\langle k\rangle$ et soit $|R| = r$ et $|F| = \beta_k - r$. Sur $\beta\langle k\rangle$, δ_k doit être une forêt d'arborescences à sommets dans F.

Lorsque R et F sont fixés, le nombre de ces forêts est:

$$(\beta_k - r)\frac{\beta_k^r}{\beta_k} = \beta_k^r - r\beta_k^{r-1}.$$

Ainsi le nombre de manières incorrectes (i.e. où on introduit un cycle) de définir δ_k est:

$$\beta_k^r - \left(\beta_k^r - r\beta_k^{r-1}\right) = r\beta_k^{r-1}.$$

Ainsi le nombre de manières incorrectes de définir (δ_k, Δ_k) telles que $\mathcal{F}(\delta_k, \Delta_k) = F$ et $\mathcal{R}(\delta_k, \Delta_k) = R$ est:

$$\left(\sum_{\substack{d|k\\ d\neq k}} d\beta_d\right)^{\beta_k - r} \cdot rk^r \beta_k^{r-1}$$

En tout, pour le niveau k, on doit rejeter tle nombre suivant de possibilités:

$$\sum_{r=1}^{\beta_k}\binom{\beta_k}{r}\left(\sum_{\substack{d|k\\ d\neq k}} d\beta_d\right)^{\beta_k - r} r k^r \beta_k^{r-1} = \sum_{r=1}^{\beta_k}\frac{(\beta_k - 1)!}{(r-1)!\,(\beta_k - r)!}\left(\sum_{\substack{d|k\\ d\neq k}} d\beta_d\right)^{\beta_k - r} k^r\beta_k^r =$$

$$\sum_{t=0}^{\beta_k - 1}\binom{\beta_k - 1}{t}\left(\sum_{\substack{d|k\\ d\neq k}} d\beta_d\right)^{\beta_k - t - 1} k^{t+1}\beta_k^{t+1} = \left(k\beta_k + \sum_{\substack{d|k\\ d\neq k}} d\beta_d\right)^{\beta_k - 1} k\beta_k = \left(\sum_{d|k} d\beta_d\right)^{\beta_k - 1} k\beta_k$$

Puisque le premier niveau (δ_1, Δ_1) est simplement une arborescence sur les β_1 points fixes de β, qui peuvent être choisies de $\beta_1{}^{\beta_1-1}$ façons, nous avons effectivement prouvé que la cardinalité de $\Gamma(\mathrm{Fix}_{\mathrm{Con}}(\beta))$ est donnée par (2). ❑

Considérons une **forêt d'arborescences** sur [n] comme une endofonction dont les points périodiques sont tous des points fixes. Soit $[n]^+ = \{0, 1, \ldots, n\}$ et β^+: $[n]^+ \longrightarrow [n]^+$ définie par $\beta^+(0) = 0$, $\beta^+(i) = \beta(i)$ pour $1 \leq i \leq n$. Il y a une bijection entre les *forêts d'arborescences sur* [n] et *les arbres sur* $[n]^+$. De plus, β laisse une forêt fixée si et seulement si β^+ laisse l'arbre correspondant fixe.

Proposition (5.2) Le nombre de forêts d'arborescences sur [n] laissées fixes par β est donné par :

$$(\beta_1+1)^{\beta_1-1} \prod_{k\geq 2} \left\{ \left(1 + \sum_{d|k} d\beta_d\right)^{\beta_k} - k\beta_k \left(1 + \sum_{d|k} d\beta_d\right)^{\beta_k-1} \right\} \tag{13}$$

Preuve. Le type cyclique de β^+ est $(\beta_1+1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$. Le nombre d'arborescences sur $[n]^+$ laissées fixes par β^+, qui est donné par (2), est clairement β_1+1 fois le nombre d'arbres sur $[n]^+$ laissés fixes par β^+. ❑

Proposition (5.3) Soit $\mathbb{T}$ l'espèce des **arbres**. On a:

$$\left|\mathrm{Fix}_{\mathbb{T}}(\beta)\right| = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta_1} \left|\mathrm{Fix}_{\mathrm{Con}}(\beta)\right| & \text{si } \beta_1 \geq 1, \\ \dfrac{1}{2} \cdot 2^{\beta_2+\beta_4+\beta_6+\cdots} \left|\mathrm{Fix}_{\mathrm{Con}}(\beta_2, \beta_4 \ldots)\right| & \text{si } 0 = \beta_1 = \beta_3 = \beta_5 = \cdots, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases} \tag{14}$$

Proof. Rappellons que le centre K dans un arbre (i.e. l'ensemble des sommets ayant une excentricité minimum) est soit un simple point soit une paire de points joints par une arête. Soit $t \in \mathrm{Fix}_{\mathbb{T}}(\beta)$; on a $\beta(K) = K$. Soit que chaque point de K est fixé par β (alors $\beta_1 \geq 1$) ou que t est fait de deux arborescences isomorphes (t_1 sur L et t_2 sur R où L + R = [n]) attachées par une arête (qui est le centre) entre les deux racines. Dans ce dernier cas, l'arbre t est laissé fixe par β parce que t_1 et t_2 sont interchangés; cela signifie que β ne peut avoir que des cycles pairs (i.e. $0 = \beta_1 = \beta_3 = ...$) et que β^2 laisse à la fois t_1 et t_2 fixés. Remarquons que β^2 restreinte à L (ou à R) a comme type cyclique (β_2, β_4, ...) (i.e. β_{2k} cycles de longueur k). De combien de manières L (et R) et t_1 (et t_2) peuvent-ils être choisis dans ce cas ? Premièrement, partitionnons les $\beta_2 + \beta_4 + ...$ minimums des cycles en deux classes et (en appliquant β) distribuons alternativement les autres sommets pour construire L et R. Construisons t_1 sur L tel que β^2 le laisse fixe [cela peut être fait de $\mathrm{Fix}_{\mathrm{Con}}$ (β_2, β_4, ...) manières] et supposons que t_2 soit $\beta \cdot t_1$. Cela complète le cas où β n'a pas de points fixes. Si $\beta_1 \geq 1$ alors β doit garder le centre (un ou deux points) fixé point par point. Dans ce cas on a: $\beta_1 \cdot \mathrm{Fix}_{\mathbb{T}}(\beta) = \mathrm{Fix}_{\mathrm{Con}}(\beta)$. En particulier, lorsque $\beta_1=1$ les seules arborescences laissées fixes par β sont les arbres ayant comme centre un point et dont la racine est précisément ce dernier point. ❑

Remarques. Lovász ([Lo] page 32) calcule ce dernier résultat lorsque n est impair; il ne traite pas cependant le cas où on interchange les deux arborescences attachées au centre de l'arbre. En se servant de l'isomorphisme suivant, $\mathrm{Con} + \mathbb{E}_2 \circ \mathrm{Con} = \mathbb{T} + (\mathrm{Con})^2$, Pierre Leroux [Le] a lui aussi calculé la série indicatrice de cycles des arbres (à partir de celle des arborescences). Cela mène à la proposition (5.3) avec, cependant, l'expression suivante pour $\mathrm{Fix}_{\mathbb{T}}(\beta)$ lorsque $\beta_1 \geq 1$:

$$\left|\mathrm{Fix}_{\mathrm{Con}}(\beta)\right| - \frac{1}{2} \sum_{\mu+\Omega = \beta} \binom{\beta}{\mu} \left|\mathrm{Fix}_{\mathrm{Con}}(\mu)\right| \left|\mathrm{Fix}_{\mathrm{Con}}(\Omega)\right| \quad \text{où } \binom{\beta}{\mu} = \binom{\beta_1}{\mu_1}\binom{\beta_2}{\mu_2}\cdots$$

Soit $\mathbb{V}$ l'espèce des **vertebrés** (i.e. des arborescences pointées ou des arbres bipointés).

Proposition (6.4) On a l'expression suivante pour $|\mathrm{Fix}_{\mathbb{V}}(\beta)| = \beta_1 \cdot |\mathrm{Fix}_{\mathrm{Con}}(\beta)|$:

$$\sum_{k\geq 1} \sum_{\beta = \beta^{(1)} + \cdots + \beta^{(k)}} \binom{\beta_1}{\beta_1^{(1)}, \beta_1^{(2)}, \ldots, \beta_1^{(k)}} \cdots \binom{\beta_k}{\beta_k^{(1)}, \beta_k^{(2)}, \ldots, \beta_k^{(k)}} \prod_{j=1}^{k} \left|\mathrm{Fix}_{\mathrm{Con}}(\beta^{(j)})\right| \qquad (16)$$

Preuve. Evidente puisque $\mathbb{V} = \mathrm{Con}_{\bullet}$ et

$$\mathbb{V} = \mathbb{L}^* \circ \mathrm{Con} = \sum_{k\geq 1} \mathrm{Con}^k$$

i.e. un vertébré laissé fixe par β est une chaîne d'arborescences qui doivent toutes être laissées fixes par β. ❑

5. Sous-espèces des relations

Soit Rel l'espèce des **relations** (ou **graphes orientés**) définie par Rel[U] = $\mathcal{P}(U\times U)$. Le groupe $\mathfrak{S}_n$ agit encore sur Rel[n] par $\sigma\cdot R = \{(\sigma(x), \sigma(y)) \mid (x,y)\in R\}$. En utilisant l'inversion de Möbius, G.Labelle [Lg3] a prouvé ce qui suit:

Proposition (6.1) [Da,D1].

$$\left| \mathrm{Fix}_{\mathrm{Rel}}(\beta)\right| = 2^{\sum_{i,j} (i,j)\, \beta_i\, \beta_j} \tag{17}$$

Lemme (6.2) Soit $\beta \in \mathfrak{S}_n$ et $\underline{\beta}$ la permutation induite de $\mathcal{P}([n])$ alors

$$(\underline{\beta}^k)_1 = 2^{\sum_{i=1}^{n} (i,k)\beta_i}$$

où (i, k) dénote le p.g.c.d. de i et k.

Preuve. On a $(\underline{\beta}^k)_1 = (\underline{(\beta^k)})_1 = 2^{\sum_j (\beta^k)_j}$ et $\sum_j (\beta^k)_j = \sum_i (i, k)\beta_i$.

❑

Preuve bijective de la proposition (6.1). Remarquons d'abord que si x appartient à un k-cycle de β alors $\beta^k(Rx) = R\beta^k(x) = Rx$ de sorte que $Rx \subseteq [n]$ est un point fixe de $\underline{\beta}^k$. Soit $1 \le k \le n$. Pour chacun des β_k minimums x d'un k-cycle de β choisissons $Rx \subseteq [n]$ de telle sorte que Rx soit un point fixe de $\underline{\beta}^k$. Cela détermine une unique relation dans $|\mathrm{Fix}_{\mathrm{Rel}}(\beta)|$. La (17) suit alors immédiatement du Lemme (6.2). ❑

Remarque. On peut aussi obtenir (17) de la manière suivante: soit c un i-cycle et d un j-cycle, tous deux arbitraires, ayant respectivement x et y comme minimums. Alors, pour tout sous-ensemble A de $\{y, \beta(y), \beta^2(y),\ldots, \beta^{d-1}(y)\}$ où d = (i,j), la réunion $\bigcup_{a\in A} (x,a)$ détermine de manière unique R sur c×d (i.e. $R\cap c\times d$) où $R\in \mathrm{Fix}_{\mathrm{Rel}}(\beta)$.

Proposition (6.3) Si Part l'espèce des **partitions**, alors on a:

$$\left|\operatorname{Fix}_{\mathrm{Part}}(\beta)\right| = \sum_{\pi \in \mathrm{Part}[C_\beta]} \prod_{C \in \pi} \sum_{d \mid \mathrm{pgcd}(C)} d^{|C|-1} \tag{18}$$

où pgcd(C) est le plus grand diviseur commun de toutes les longueurs de cycles contenues dans C.

Preuve. Soit β une permutation de [n]. Nous construisons maintenant une partition λ de [n] laissée fixe par β. On choisit d'abord $\pi \in \mathrm{Part}\,[C_\beta]$ et $C \in \pi$. Alors C est une classe de cycles de β; soit $c \in C$ le cycle contenant $i = \min S$, où $S = \cup C$. Cet ensemble S sera subdivisé en d classes de λ permutées cycliquement par β où d est un diviseur arbitraire de pgcd(C). De manière à former la classe contenant i on prend d'abord i, $\beta^d(i), \ldots, \beta^{|c|-d}(i)$; puis pour tout cycle $c' \neq c$, $c' \in C$, $0 \leq j < d$, on prend $\beta^j(\min c')$, $\beta^{j+d}(\min c'), \ldots$. Lorsque la sous-classe de S (contenant i) est construite, on applique β (d-1 fois) pour trouver les d classes dans lesquelles S est subdivisé. Pour tout autre $C' \in \pi$ ces choix sont faits indépendamment. Il est clair que toutes les partitions λ fixées par β sont obtenues de manière unique par cette construction. ❑

Proposition (6.4) [Da,D1]. Soit SGra l'espèce des **graphes simples (ou des relations anti-reflexives symétriques)** alors:

$$\left|\operatorname{Fix}_{\mathrm{SGra}}(\beta)\right| = 2^{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\sum_{[i,j]=k}(i,j)\,\beta_i\,\beta_j\right) + \beta_{2k} - \begin{cases} \beta_k & \text{si k est pair,} \\ \frac{\beta_k}{2} & \text{si k est impair.}\end{cases}} \tag{19}$$

Preuve. Il suffit de considérer les flèches (i, j) telles que $i \leq j$ dans la proposition (6.1). ❑

Proposition (6.5) [Da,D1]. Soit SRel l'espèce des **relations symétriques (ou graphes simples avec boucles)** alors :

$$\left|\operatorname{Fix}_{\mathrm{SRel}}(\beta)\right| = \left|\operatorname{Fix}_{\mathrm{SGra}}(\beta)\right| \cdot 2^{\sum_{k=1}^{n}\beta_k} \tag{20}$$

❑

7. Endofonctions connexes

Proposition (7.1) Soit CEnd l'espèce des **enfofonctions connexes**. Si, pour certains entiers k, m, $\beta_k > 0$, β est de type cyclique $(k)^{\beta_k}\ (2k)^{\beta_{2k}} \dots (mk)^{\beta_{mk}}$ alors $|\mathrm{Fix}_{\mathrm{CEnd}}(\beta)|$ est donné par l'expression suivante (sinon le résultat est nul):

$$\sum_{t=1}^{\beta_k} \binom{\beta_k}{t} (t-1)!\ k^{|\beta|-1}\ \varphi(k) \sum \binom{\beta_k - t}{a_{1,1},\dots,a_{t,1}} \binom{\beta_{2k}}{a_{1,2},\dots,a_{t,2}} \cdots \binom{\beta_{mk}}{a_{1,m},\dots,a_{t,m}}$$

$$\times \prod_{j=1}^{t} (a_{j,1}+1)^{a_{j,1}-1} \prod_{i=2}^{n} \left(\left(1+\sum_{d|i} da_{j,d}\right)^{a_{j,i}} - ia_{j,i} \left(1+\sum_{d|i} da_{j,d}\right)^{a_{j,i}-1} \right) \qquad (21)$$

où la seconde somme est sur tous les $a_{j,i}$, $1 \le j \le t$, $1 \le i \le m$, tels que $\sum_{j=1}^{t} a_{j,i} = \beta_{ik}$ si $i>1$ et $\sum_{j=1}^{t} a_{j,1} = \beta_k - t$ et où $|\beta| = \sum_{j=1}^{m} \beta_{jk}$.

Preuve. Soit $(\delta,\Delta) \in \beta\text{-CEnd}[n] := \Gamma(\mathrm{Fix}_{\mathrm{CEnd}}(\beta))$. Alors δ doir être connexe (sinon $\Gamma^{-1}(\delta,\Delta)$ est déconnectée); soit K_δ l'unique cycle de δ. Si $C \subset C_\beta$ est un sous-ensemble des cycles de β choisi pour construire K_δ, alors $\Gamma^{-1}(\delta_{|C},\Delta_{|C}) \in \mathrm{Fix}_{\mathbb{C}}(C)$. Sinon $\Gamma^{-1}(\delta,\Delta)$, encore, est déconnectée. On déduit immédiatement de ces observations que si k est la longueur de $c \in K_\delta$ alors k doit diviser $|d|$ pour chaque $d \in C_\beta$ et que $\mathrm{Fix}_{\mathrm{CEnd}}(\beta) \neq \emptyset$ ssi β est de type cyclique $(k)^{\beta_k}\ (2k)^{\beta_{2k}} \dots (mk)^{\beta_{mk}}$ pour certains entiers $m, k > 0$. En supposant remplie cette dernière condition sur β on trouve maintenant la formule (21) en choisissant d'abord (dans C_β) t cycles de longeur k, $1 \le t \le \beta_k$, de $\beta_k! / (t!\ (\beta_k - t)!)$ manières, pour créer K_δ et on multiplie ensuite par le coefficient approprié (voir Prop.3.2). Une fois K_δ créé, $|K_\delta| = t$, on choisit t familles de cycles dans $C_\beta - K_\delta$, un pour chaque élément de K_δ, et on construit une forêt d'aborescences avec chacune des familles, puis on attache chaque forêt au membre correspondant de K_δ . Les multinômes de (21) apparaissent clairement dans cette procédure, et avec l'aide de (13) (ou directement) on trouve aisément le dernier terme de (21). ❑

Remarque. Si on pose $k = 1$ et $t = 1$ dans (21) alors on obtient (2). Ici il serait intéressant de trouver une preuve algébrique ou analytique de (21).

Conclusion

Maintenant que nous sommes en possession de formules donnant $Fix_A(\beta)$ pour plusieurs espèces A, on peut facilement trouver des algorithmes qui engendrent ces structures fixées [B4]. On peut aussi engendrer *aléatoirement* des structures fixées et en étudier certaines statistiques. C'est le cas, par exemple, du nombre moyen de feuilles dans un arbre aléatoire laissé fixe par une permutation donnée β [BLL2].

Références

[B1] **F. Bergeron**, *Combinatoire des polynômes orthogonaux classiques: une approche unifiée,* Europ. J. Combinatorics, no.11, **1990**, 393-401.

[B2] **F. Bergeron**, *Une combinatoire du pléthysme*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, Vol. 46, no. 2, **1987**, 291-305.

[B3] **F. Bergeron**, *Une systématique de la combinatoire énumérative,* Thèse de Ph.D., UQAM et U. de Montréal, **1986**.

[B4] **F.Bergeron**, *Algorithms for Sequential Generation of Combinatorial Structures* , Discrete App. Maths., no. 24, **1989**, 29-35.

[BLL1] **F. Bergeron, G. Labelle and P. Leroux**, *Combinatoire et structures arborescentes,* Livre en préparation.

[BLL2] **F. Bergeron, G. Labelle and P. Leroux**, *Computation of the Expected Number of Leaves in a Tree Having a Given Automorphism,* Discrete Applied Mathematics, **1990**.

[C1] **I. Constantineau**, *Théorie des espèces et endofonctions* , Mémoire de maîtrise, UQAM, **1987**.

[C2] **I. Constantineau et J. Labelle**, *Calcul combinatoire du nombre d'endofonctions et d'arborescences laissées fixes par l'action d'une permutation,* Ann. Sc. Math. du Québec, Vol.XIII, no.2, **1989**.

[Da] **R.L.Davis**, *The number of structures of finite relations*, Proc.Amer. Math. Soc., Vol. 4, **1953**, 486-494.

[D1] **H. Décoste**, *Séries indicatrices d'espèces pondérées et q-analogues*, Thèse de Ph.D., UQAM et U. de Montréal,**1989**; publication du LACIM, #2, **1990**.

[D2] **H. Décoste**, *q-analogues en théorie des espèces,* Actes du XIV^{e} Séminaire Lotharingien de Combinatoire, Burg Feuerstein, Rép.Féd.d'Allemagne, **1986** (V.Strehl: éditeur), 33-49.

[FLj] **D. Foata et J. Labelle**, *Modèles combinatoires pour les polynômes de Meixner*, Europ. J. Comb., Acad. Press, **1983**, 305-311.

[Jo] **A. Joyal**, *Une théorie combinatoire des séries formelles*, Adv. in Math. 42, Acad. Press, **1981**, 1-82.

[Kr] **G. Kreweras**, *Permutations partiellement soulignées et polynômes géométriques*, Europ. J. Comb. 2 (1981), 155-163.

[Lg1] **G. Labelle**, *Une nouvelle démonstration combinatoire des formules d'inversion de Lagrange,* Adv. in Math. 42, Acad. Press, **1981**, 217-247.

[Lg2] **G. Labelle**, *Some New Computational Methods in the Theory of Species*, dans *Combinatoire Énumérative, Montréal Québec 1985, Proceedings*, G. Labelle et P. Leroux, editors. Lecture Notes in Mathematics no.1234, Springer-Verlag **1986**, 192-209.

[Lg3] **G. Labelle**, *The computation of the cycle index series of some combinatorial species,* Notes: Combinatorial Year, **M.I.T.**, Nov. **1984**.

[Lg4] **G. Labelle**, *The Cyclic Type of Combinatorial Species*, Notes: Special Session on Enumerative Combinatorics, 819th Meeting of the **A.M.S.**, Avril **1985**.

[Lj1] **J. Labelle**, *Applications diverses de la théorie combinatoire des espèces de structures,* Ann. Sc. Math. du Québec, 7, no.1, **1983**, 59-94.

[Lj2] **J. Labelle**, *Quelques espèces sur les ensembles de petite cardinalité*, Ann. Sc. Math. du Québec, vol.IX, no.1, **1985**, 31-58.

[LY1] **J. Labelle et Y.-N. Yeh**, *The relation between Burnside rings and combinatorial species* , Journal of Combinatorial Theory ; Series A, vol.50, no.2, **1989**, 269-284.

[LY2] **J. Labelle et Y.-N. Yeh**, *Combinatorial Species of Several Variables*, Rapport de recherche, # 61, Département de Mathématiques et d'Informatique, UQAM, août **1988**.

[Le] **P. Leroux**, *Methoden der Anzahlbestimmung für einege Klassen von Graphen*, Bayreuther mathematische Schriften; no.26, **1988**, 1-36.

[Lo] **L. Lovász**, *Combinatorial Problems and Exercices,* North-Holland, Amsterdam, New-York, Oxford, **1979**.

[Y1] **Y.-N. Yeh**, *On the Combinatorial Species of Joyal,* Ph.D. thesis, State University of New-York at Buffalo, **1985**.

[Y2] **Y.-N. Yeh**, *The Calculus of Virtual Species and K-Species*, dans *Combinatoire Énumérative, Montréal Québec 1985, Proceedings*, G. Labelle et P. Leroux, editeurs. Lecture Notes in Mathematics no.1234, Springer-Verlag **1986**, 351-369.

Ivan Constantineau et Jacques Labelle
Université du Québec à Montréal
Case postale 8888, Succ. "A"
Montréal, Québec, H3C 3P8, Canada.

Chapitre 3

Sur la construction des permutations d'un type donné laissées fixes par conjugaison*

Ivan Constantineau et Jacques Labelle (Université du Québec à Montréal)

Article à paraître dans la revue Journal of Combinatorial Theory, Series A (Accepté en 1990).

Résumé. Soit $\underline{\alpha}$ et $\underline{\beta}$ des partages de n. Etant donnée une permutation $\beta \in \mathfrak{S}_n$ de type $\underline{\beta}$, nous construisons et énumérons l'ensemble $\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma \text{ of type } \underline{\alpha},\ \beta\sigma\beta^{-1} = \sigma\}$. On obtient des formules explicites et des formules de récurrence.

Introduction.

Une ***espèce*** A est un foncteur covariant qui va de la catégorie des ensembles finis (comme objets) et bijections (comme morphismes) vers la catégorie des ensembles finis et fonctions. Si U est un ensemble fini, A[U] est l'ensemble des A-***structures*** sur U. Si $f:U \to V$ est une bijection alors $A[f]:A[U] \to A[V]$, qui est une bijection, est le ***morphisme de transport*** des A-structures le long de f.

Si A est une espèce et U est un ensemble fini, alors le groupe symétrique sur U, $\mathfrak{S}_U$, agit sur A[U] par transport de structures:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_U \times A[U] &\to A[U] \\ (\beta, s) &\mapsto A[\beta](s). \end{aligned}$$

Si β est dans $\mathfrak{S}_U$, on dénote par $\mathrm{Fix}_A(\beta)$ (et $\mathrm{fix}_A(\beta)$ sa cardinalité) l'ensemble des A-structures sur U ***fixées*** par transport le long de β.

Pour une espèce donnée A, $\mathrm{fix}_A(\beta)$ ne dépend que de la structure cyclique de β. Ainsi la notation $\mathrm{fix}_A(\underline{\beta})$ a du sens quand on pose $\mathrm{fix}_A(\underline{\beta}) := \mathrm{fix}_A(\beta)$ où β est une

---

* Travail partiellement subventionné par le CRSNG (Canada) et le FCAR (Québec).

permutation arbitraire de [n] de type $\underline{\beta}$. Rappellons [Jo] que la ***série indicatrice de cycles de*** A, Z_A, qui est une série formelle en une infinité de variables $\{x_1, x_2, \ldots\}$ est définie par:

$$Z_A(x_1,x_2,x_3,\ldots) \quad = \quad \sum_{n\geq 0} \sum_{\underline{d} \vdash n} \mathrm{fix}_A(\underline{d}) \, \frac{x_1^{d_1} x_2^{d_2} \cdots x_n^{d_n}}{1^{d_1} d_1! \cdot 2^{d_2} \cdot d_2! \cdot \cdots \cdot n^{d_n} d_n!} \ .$$

On peut définir ([Jo],[B4],[Lg1],[Lj1]) la ***somme*** et le ***produit*** d'espèces **A** et **B** quelconques, denotées respectivement **A+B** et **A·B**, et, aussi, lorsque **C** est une espèce telle que C[Ø]=Ø, la ***substitution*** de **C** dans **A**, dénotée A(C).

Théorème 1. Etant données des espèces **A**, **B** et **C** telles que C[Ø]=Ø, on a

$$Z_{A+B} = Z_A + Z_B \tag{1}$$

$$Z_{A\cdot B} = Z_A \cdot Z_B \tag{2}$$

$$Z_{A(C)} = Z_A(Z_C) = Z_A((Z_C)_1, (Z_C)_2, (Z_C)_3, \ldots) \tag{3}$$

où, pour tout $i \geq 1$, $(Z_C)_i = Z_C(x_i, x_{2i}, \ldots)$ et où la somme et le produit du côté droit de (2) et (3) sont respectivement la somme et le produit usuels des séries formelles.

Une autre opération sur les espèces consiste en la ***restriction*** aux ensembles d'une cardinalité donnée. Plus précisément, on définit l'espèce A_r, appelée la $r^{\text{ième}}$ composante de A, par:

$$A_r[U] \quad := \quad \begin{cases} A[U]\ , & \text{si } |U| = r, \\ \varnothing\ , & \text{autrement.} \end{cases}$$

(le transport le long des bijections est, évidemment, le même que pour A).

Pour les besoins de notre article, en utilisant les opérations que nous venons de décrire, seulement deux espèces de "base" seront utilisées: les espèces **Exp** et **Cyc**, définies par les règles suivantes: pour tous ensembles finis U,V, et toute bijection

$f:U \to V$, $\mathbf{Exp}[U] = \{U\}$, $\mathbf{Exp}[f](U) = V$; $\mathbf{Cyc}[U] = \{\sigma \in \mathfrak{S}_U \mid \sigma$ est une permutation circulaire sur $U\}$; $\mathbf{Cyc}[f](\sigma) = f\sigma f^{-1}$. Si **Prm** est l'espèce des permutations, alors on a

$$\mathbf{Prm} = \mathbf{Exp}(\mathbf{Cyc}), \tag{4}$$

ce qui revient à dire que toute permutation est un certain ensemble de cycles.

Soit $\underline{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ un partage fixé de n. On définit l'espèce $\mathbf{Prm}_{\underline{d}}$ comme étant la sous-espèce de **Prm** de toutes les permutations de type $\underline{d}$. Le lemme suivant est un raffinement de (4).

Lemme 1. On a:

$$\mathbf{Prm}_{\underline{d}} = \mathbf{Exp}_{d_1}(\mathbf{Cyc}_1) \cdot \mathbf{Exp}_{d_2}(\mathbf{Cyc}_2) \cdot \cdots \cdot \mathbf{Exp}_{d_n}(\mathbf{Cyc}_n) \ . \tag{5}$$

Avec (5), la version en n variables de (2) et la définition de $\mathrm{fix}_A(\underline{\beta})$, on a le lemme suivant:

Lemme 2. On a:

$$\mathrm{fix}_{\mathbf{Prm}_{\underline{d}}}(\underline{\beta}) = \sum \left(\prod_{k=1}^{n} \binom{\beta_k}{b_{k,1}, \ldots, b_{k,n}} \mathrm{fix}_{\mathbf{Exp}_{d_k}(\mathbf{Cyc}_k)} (1^{b_{1,k}} \cdots n^{b_{n,k}}) \right) \tag{6}$$

où la somme est sur toutes les matrices $n \times n$ $(b_{k,i})$ telles que $\sum_{i=1,\ldots,n} b_{k,i} = \beta_k$.

Comme le montre le lemme 2, pour trouver le fix de $\mathbf{Prm}_{\underline{d}}$ il suffit de calculer, pour tous entiers $i \geq 0$, $j \geq 1$ et tout partage $\underline{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ de $i \cdot j = n$ la valeur de l'expression

$$\mathrm{fix}_{\mathbf{Exp}_i(\mathbf{Cyc}_j)}(1^{d_1} \cdots n^{d_n}) \ . \tag{*}$$

Dans ce qui suit, nous calculons cette expression de deux manières différentes.

La première, essentiellement algébrique, utilise le ***pléthysme*** [qui est la formule (3) du théorème 1] pour calculer la série indicatrice de l'espèce **$\mathbf{Exp_i(Cyc_j)}$**. Par définition, il suffit alors d'extraire les coefficients de la série pour obtenir une expression pour $(*)$. La seconde, plus directe, utilise une approche constructive pour résoudre le problème.

1. La solution algébrique. Il est bien connu que

$$Z_{\mathrm{Exp}_i}(x_1,x_2,x_3,\ldots) = \sum_{\underline{b}\vdash i} \frac{x_1^{b_1}\cdots x_i^{b_i}}{1^{b_1}b_1!\cdots i^{b_i}b_i!} \tag{7}$$

$$Z_{\mathrm{Cyc}_j}(x_1,x_2,x_3,\ldots) = \frac{1}{j}\sum_{qr=j}\varphi(q)\,x_q^r \tag{8}$$

où φ est la fonction indicatrice d'Euler. Ainsi, par (3), on obtient

$$Z_{\mathrm{Exp}_i(\mathrm{Cyc}_j)}(x_1,x_2,x_3,\ldots) = \sum_{\underline{b}\vdash i} \frac{\left(\frac{1}{j}\sum_{qr=j}\varphi(q)\,x_{1q}^r\right)^{b_1}\cdots\left(\frac{1}{j}\sum_{qr=j}\varphi(q)\,x_{iq}^r\right)^{b_i}}{1^{b_1}b_1!\cdots i^{b_i}b_i!} \tag{9}$$

Ici, on pourrait développer le côté droit de (9) et essayer de trouver le coefficient de $x_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\cdots x_n^{\beta_n}$ (et de multiplier le résultat par $1^{\beta_1}\beta_1!2^{\beta_2}\beta_2!\cdots n^{\beta_n}\beta_n!$) pour obtenir le nombre de permutations de type j^i (sur $[n]$) fixées par β.

Cependant, aucune information pertinente au sujet des structures étudiées ne semble (directement à tout le moins) se dégager de ce dernier calcul.

Un problème semblable, pour l'espèce des dérangements, avait déjà été observé dans [CL2]. On trouvait alors deux expressions pour $\mathrm{fix}_{\mathrm{Der}}(\beta)$. La première,

$$\mathrm{fix}_{\mathrm{Der}}(\beta) = \sum_{0\le\delta_i\le\beta_i}\ \prod_i \frac{(-1)^{\delta_i}}{\delta_i!\,i^{\delta_i}}\,\beta_i!\,i^{\beta_i} \tag{10}$$

était obtenue algébriquement en calculant et développant le produit suivant de séries indicatrices des cycles

$$Z_{Der}(x_1,x_2,x_3,\ldots) \quad = \quad e^{-\sum_{n\geq 1}\frac{x_n}{n}} \prod_{n\geq 1} \frac{1}{1-x_n} \ . \tag{11}$$

La seconde,

$$fix_{Der}\ (\beta) \quad = \quad \prod_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{\beta_i} \binom{\beta_i}{j} |Der[j]| \ i^j\ (i-1)^{\beta_i-j} \tag{12}$$

qui est une formule qui *compte quelque chose* (!) [chaque terme de (12) est un entier positif, contrairement à (10)], a été obtenue par des raisonnements combinatoires. Il est intéressant de voir comment on obtient (12) de (10). Le calcul dépend essentiellement de l'identité triviale suivante pour des séries en une seule variable x:

$$e^{-x}\cdot e^{x}\cdot e^{-\frac{x}{a}}\cdot\frac{1}{1-x} \quad = \quad e^{-\frac{x}{a}}\cdot\frac{1}{1-x} \ . \tag{13}$$

En effet, en égalisant les coefficients de x^n de chaque côté de (13), on obtient

$$\sum_{0\leq i+j+k\leq n} \frac{(-1)^i}{i!}\frac{(-1)^k}{a^k k!}\frac{1}{j!} \quad = \quad \sum_{0\leq m\leq n} \frac{(-1)^m}{m!a^m} \ . \tag{14}$$

Lorsqu'on pose $i = \lambda$, $j = \alpha\text{-}\delta$, $k = \beta\text{-}\alpha$, $n = \beta$ et $m = \delta$ dans (14) et qu'on multiplie les deux côtés de (14) par $\beta!\ a^{\beta}$, on obtient:

$$\sum_{0\leq\lambda\leq\delta\leq\alpha\leq\beta} \frac{\beta!\ (-1)^{\lambda+\beta-\alpha}a^{\alpha}}{\lambda!(\beta-\alpha)!(\alpha-\delta)!} \quad = \quad \sum_{0\leq\delta\leq\beta} \frac{\beta!\ (-1)^{\delta}a^{\beta-\delta}}{\delta!} \ . \tag{15}$$

Puisque

$$\begin{aligned}\sum_{0\leq\lambda\leq\delta\leq\alpha\leq\beta} \frac{\beta!\ (-1)^{\lambda}(-1)^{\beta-\alpha}a^{\alpha}}{\lambda!(\beta-\alpha)!(\alpha-\delta)!} &= \sum_{0\leq\delta\leq\beta} \frac{\beta!}{\delta!(\beta-\delta)!}\left(\delta!\sum_{0\leq\lambda\leq\delta}\frac{(-1)^{\lambda}}{\lambda!}\right)a^{\delta}\left(\sum_{j=0}^{\beta-\delta}\binom{\beta-\delta}{j}a^j\ (-1)^{\beta-\delta-j}\right) \\ &= \sum_{0\leq\delta\leq\beta} \binom{\beta}{\delta}\left|Der\ [\delta]\right|\ a^{\delta}\ (a-1)^{\beta-\delta}\end{aligned} \tag{16}$$

on a

$$\sum_{0\le\delta\le\beta} \binom{\beta}{\delta} |\mathrm{Der}\,[\delta]|\; a^{\delta}\,(a-1)^{\beta-\delta} \;=\; \sum_{0\le\delta\le\beta} \frac{\beta!\,(-1)^{\delta} a^{\beta-\delta}}{\delta!}\,. \tag{17}$$

Si on substitue $\beta = \beta_i$ et $a = i$, et qu'on effectue le produit sur i, i variant de 1 à n, de chaque côté de (17), on trouve que le côté droit de (12) est égal au côté droit de (10).

2. La méthode constructive.

Dans [CL1, CL2], les auteurs ont développé une méthode directe pour construire des structures combinatoires laissées fixes par l'action d'une permutation donnée ß. Ici, on utilise cette méthode pour construire les permutations de type j^i laissées fixes par ß.

Puisque, pour tous entiers $i\ge0$, $j\ge1$, $\mathbf{Exp}_i\,(\mathbf{Cyc}_j)$ est une sous-espèce de **Prm**, on obtient (pour toute permutation ß) l'inclusion suivante:

$$\mathrm{Fix}_{\,\mathbf{Exp}_i(\mathbf{Cyc}_j)}(\beta) \;\subseteq\; \mathrm{Fix}_{\mathbf{Prm}}(\beta) \tag{18}$$

Dénotons par ß(k), $1\le k\le n$, la permutation induite de ß en ne prenant que les cycles de longueur k.

Lemme 3. On a

$$\mathrm{Fix}_{\mathbf{Prm}}(\beta) \;\cong\; \prod_{k=1}^{n} \mathrm{Fix}_{\mathbf{Prm}}\,(\beta(k)). \tag{19}$$

Par (18) il est clair que $\mathrm{Fix}_{\mathbf{Exp}_i(\mathbf{Cyc}_j)}(\beta)$ hérite de cette propriété.

Lemme 4. On a

$$\mathrm{Fix}_{\mathbf{Exp}_i(\mathbf{Cyc}_j)}\,(\beta) \;\cong\; \prod_{k=1}^{n} \mathrm{Fix}_{\mathbf{Exp}_i(\mathbf{Cyc}_j)}\,(\beta(k)). \tag{20}$$

Pour donner une solution complète à notre problème, il suffit d'obtenir, pour tout k, $1 \leq k \leq n$, l'expression $\mathrm{fix}_{\mathbf{Exp}_i(\mathbf{Cyc}_j)}(\beta(k))$. Pour y arriver on commence par construire $\mathrm{Fix}_{\mathbf{Prm}}(\beta(k))$ puis on spécialise la procédure pour obtenir $\mathrm{Fix}_{\mathbf{Exp}_i(\mathbf{Cyc}_j)}(\beta(k))$.

Pour $1 \leq k \leq n$, soient $C(k)$ l'ensemble des cycles constituant $\beta(k)$ et $[n(k)]$ l'ensemble sous-jacent à $\beta(k)$. On définit $\beta(k)$-**Prm**$[n(k)]$ comme étant l'ensemble des paires (δ, Δ) où $\delta: C(k) \to C(k)$ est une permutation de $C(k)$ et $\Delta: C(k) \to [n(k)]$ est une fonction telle que, pour tout c dans $C(k)$, $\Delta(c) \in \delta(c)$.

Lemme 5. On a
$$\mathrm{Fix}_{\mathbf{Prm}}(\beta(k)) \equiv \beta(k)\text{-}\mathbf{Prm}[n(k)]. \tag{21}$$
Preuve. Il y a une bijection $\Omega: \beta(k)\text{-}\mathbf{Prm}[n(k)] \to \mathrm{Fix}_{\mathbf{Prm}}(\beta(k))$ définie par la règle suivante: $\Omega(\delta, \Delta) = \sigma$ où, pour tout c dans $C(k)$ et tout entier $r \geq 1$,
$$\sigma(\beta^r(\min(c))) := \beta^r(\Delta(c)).$$

Remarque. A partir des lemmes 3 et 5, il est facile d'obtenir le résultat bien connu suivant:
$$\mathrm{fix}_{\mathbf{Prm}}(\beta) = \prod_{k=1}^{n} \beta_k! \cdot k^{\beta_k} .$$

Le problème maintenant est de déterminer l'ensemble des couples $(\delta, \Delta) \in \beta(k)\text{-}\mathbf{Prm}[n(k)]$ qui est en bijection avec $\mathrm{Fix}_{\mathbf{Exp}_i(\mathbf{Cyc}_j)}(\beta(k))$.

Supposons pour l'instant que β soit une permutation de $[n]$ de type k^{β_k}. Soit d un diviseur de n et $\delta: C(k) \to C(k)$ une permutation circulaire.On définit $\mathrm{Cut}_\delta(d)$ par $\mathrm{Cut}_\delta(d) := \{(\delta, \Delta) \in \beta\text{-}\mathbf{Prm}[n]$ tel que $\Omega(\delta, \Delta)$ soit de type $(d \cdot \beta_k)^{k/d}\}$.

Lemme 6. On a
$$|\,\mathrm{Cut}_\delta(d)\,| = \varphi(d) \cdot k^{(\beta_k - 1)}. \tag{22}$$

Preuve. Le facteur $\varphi(d)$ dans (22) apparaît clairement lorsque $\beta_k=1$. Quand $\beta_k>1$, on a tous les choix possibles (k choix) de définir Δ sur chaque cycle de β excepté un, pour lequel il n' y a que (comme dans le cas où $\beta_k=1$) $\varphi(d)$ choix.

Definition. Lorsque $\sigma\in\Omega(\mathrm{Cut}_\delta(d))$, on dit que σ est ***d-scindée.***

Si on veut qu'une permutation d-scindée soit de type $j^{(n/j)}$, on doit avoir $d|j$ puisque $d\cdot\beta_k=j$. Ainsi, comme $d|k$, une condition nécessaire pour que $\mathrm{Cut}_\delta(d)$ ne soit pas vide est que $d|(j,k)$ où $(j,k) := \mathrm{pgcd}\{j,k\}$. Cependant, cette condition n'est pas suffisante: cela dépend aussi de β_k, le nombre de cycles de β.

En fait, si pour tout $d|(j,k)$ on choisit une collection $\mathbf{F}(d)$ de μ_d ensembles de cycles de β, disons

$$\mathbf{F}(d)=\{\mathbf{F}(d,1), \mathbf{F}(d,2),\ldots, \mathbf{F}(d, \mu_d)\},$$

telle que $\cup_{d|(j,k)} \cup_{1\le i_d\le \mu_d} \mathbf{F}(d, i_d) = C(k)$ et, pour tout d et tout i_d, $1\le i_d\le \mu_d$, $|\mathbf{F}(d, i_d)| = j/d$ et qu'on construit, via Ω, toutes les permutations d-scindées à partir des cycles dans $\mathbf{F}(d, i_d)$, on va certainement obtenir des permutations σ n'ayant que des cycles de longueur j, tel que désiré, et, mieux encore, *toutes* celles que nous voulons. Cela mène à la condition suivante:

$$\sum_{d|(j,k)} \mu_d \frac{j}{d} = \beta_k \quad . \tag{23}$$

Ainsi, l'ensemble β - $\mathbf{Exp}_i(\mathbf{Cyc}_j)[n]$ défini par $\Omega(\beta\text{-}\mathbf{Exp}_i(\mathbf{Cyc}_j)[n]) = \mathrm{Fix}_{\mathbf{Exp}_i(\mathbf{Cyc}_j)}(\beta)$ consiste en tous les couples $(\delta, \Delta)\in \beta\text{-}\mathbf{Prm}[n]$ tels que δ est de type

$$\prod_{d|(j,t)} \left(\frac{j}{d}\right)^{\mu_d} \tag{24}$$

et tels que pour tous les cycles c de longueur j/d de β, $(\delta|c, \Delta)\in \mathrm{Cut}_{\delta|c}(d)$.

Proposition 1. Si ß est une permutation de [n] de type $k^{ß_k}$ alors il y a

$$ß_k!\, k^{ß_k} \sum_{(\mu_d)} \prod_{d|(j,t)} \frac{1}{\mu_d!} \left(\frac{\varphi(d)}{k\cdot(j/d)}\right)^{\mu_d} \tag{25}$$

permutations de n de type $j^{(n/j)}$ fixées par conjugaison avec ß, où la somme est sur l'ensemble des vecteurs $(\mu_d)_{d|(j,k)}$ satisfaisant (23).

Preuve. On calcule |ß - $\mathbf{Exp}_j$ $(\mathbf{Cyc}_j)$ [n]|; de (24), lorsque $(\mu_d)_{d|(j,k)}$ est déterminé, on obtient

$$\frac{ß_k!}{\prod_{d|(j,k)} (j/d)^{\mu_d}\, \mu_d!} \tag{26}$$

manières de choisir δ. Par (22) on peut compléter avec Δ de

$$\prod_{d|(j,k)} \left(\varphi(d)\cdot k^{(j/d)-1}\right)^{\mu_d} \tag{27}$$

façons. Ainsi on obtient l'expression

$$\sum_{(\mu_d)} \frac{ß_k!}{\prod_{d|(j,k)} (j/d)^{\mu_d}\, \mu_d!} \prod_{d|(j,k)} \left(\varphi(d)\, k^{(j/d)-1}\right)^{\mu_d} \tag{28}$$

où la somme est sur les vecteurs $(\mu_d)_{d|(j,k)}$ satisfaisant (23) . La proposition 1 suit.

De (20) on obtient alors

Corollaire. Si ß est une permutation de type $\prod_{1\le k\le n} k^{ß_k}$ alors

$$\mathrm{Fix}_{\mathbf{Exp}_j(\mathbf{Cyc}_j)}(ß) = \prod_{k=1}^{n} \left(ß_k!\, k^{ß_k} \sum_{(\mu_d)} \prod_{d|(j,k)} \frac{1}{\mu_d!} \left(\frac{\varphi(d)}{k\cdot(j/d)}\right)^{\mu_d} \right) \tag{29}$$

où la somme est sur les vecteurs $(\mu_d)_{d|(j,k)}$ satisfaisant (23).

Lorsqu'on introduit le résultat (29) dans (6), on obtient fix $\mathbf{Prm}_{\underline{\sigma}}(\underline{ß})$, pour tous partages $\underline{\sigma}$ et $\underline{ß}$ de n. Pour simplifier les notations, posons, pour toute paire $(\underline{\sigma}, \underline{ß})$

de partages, $f(\underline{\sigma},\underline{\beta}) := \mathrm{fix}\ \mathbf{Prm}_{\underline{\sigma}}(\underline{\beta})$. On obtient aussi une formule de récurrence pour $f(\underline{\sigma}, \underline{\beta})$.

Proposition 2. Soit k la plus petite part de $\underline{\beta}$. On a:

$$f(\underline{\sigma},\underline{\beta}) = \sum_{j=1}^{\beta_k} \binom{\beta_k-1}{j-1} (j-1)!\, k^{j-1} \sum_{d|k} \varphi\left(\frac{k}{d}\right) f(\underline{\sigma}/i^d, \underline{\beta}/k^j) \tag{30}$$

où $i = jk/d$, $f(0,0) = 1$, et si $\sigma_i - d < 0$ alors le dernier terme est 0.

Preuve. On prend ß, de type $\underline{\beta}$, telle que n soit dans un k-cycle et on choisit j-1 autres k-cycles parmi the β_k-1 qui restent. On donne ensuite une structure de permutation circulaire δ sur ces j k-cycles et, pour tout d|k, on construit toutes les permutations (k/d)-scindées possibles sur δ (toujours via Ω). Cela signifie que nous avons maintenant construit, à partir de j cycles de longueur k de ß, les permutations (partielles) de type $((k/d)\cdot j)^{(k/(k/d))} = i^d$ fixées par ces j cycles; et (30) suit.

La proposition 2 nous permet de calculer $f(\underline{\sigma}, \underline{\beta})$ récursivement. Cela est fait dans l'annexe qu'on trouvera à la fin de cet article, pour les partages de n jusqu'à n = 7. On a mis ces derniers résultats sous forme de matrices à 2 dimensions indicées par $\underline{\sigma}$ et $\underline{\beta}$.

Remarquons que ces matrices sont presque symétriques; la relation entre les entrées i,j et j,i est donnée par la proposition suivante.

Proposition 3. On a

$$\mathrm{fix}_{\mathrm{Prm}_{\underline{\sigma}}}(\underline{\beta}) \cdot \prod_{i=1}^{n} i^{\sigma_i} \sigma_i! = \mathrm{fix}_{\mathrm{Prm}_{\underline{\beta}}}(\underline{\sigma}) \cdot \prod_{i=1}^{n} i^{\beta_i} \beta_i! \tag{31}$$

Preuve. Considérons l'ensemble suivant $S = \{(\sigma,\beta)\colon \underline{\beta} = \prod_i i^{\beta_i}, \underline{\sigma} = \prod_i i^{\sigma_i}, \sigma\beta = \beta\sigma\}$.

Alors on a

$$|S| = \mathrm{fix}_{\mathrm{Prm}_{\underline{\sigma}}}(\underline{\beta}) \cdot \frac{n!}{\prod_i i^{\beta_i} \beta_i!} = \mathrm{fix}_{\mathrm{Prm}_{\underline{\beta}}}(\underline{\sigma}) \cdot \frac{n!}{\prod_i i^{\sigma_i} \sigma_i!}$$

et (31) suit.

ANNEXE.

$\sigma \backslash \beta$	1
1	1

n = 1

$\sigma \backslash \beta$	1^2	2
1^2	1	1
2	1	1

n = 2

$\sigma \backslash \beta$	1^3	1 2	3
1^3	1	1	1
1 2	3	1	0
3	2	0	2

n = 3

$\sigma \backslash \beta$	1^4	$1^2 2$	1 3	2^4	4
1^4	1	1	1	1	1
$1^2 2$	6	2	0	2	0
1 3	8	0	2	0	0
2^4	3	1	0	3	1
4	6	0	0	2	2

n = 4

$\sigma \backslash \beta$	1^5	$1^3 2$	$1^2 3$	2^2	14	2 3	5
1^5	1	1	1	1	1	1	1
$1^3 2$	10	4	1	2	0	1	0
$1^2 3$	20	2	2	0	0	2	0
12^2	15	1	0	3	1	0	0
14	30	0	0	2	2	0	0
2 3	20	2	2	0	0	2	0
5	24	0	0	0	0	0	4

n = 5

$\sigma \backslash \beta$	1^6	$1^4 2$	$1^3 3$	$1^2 2^2$	$1^2 4$	123	1 5	2^3	24	3^2	6
1^6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$1^4 2$	15	7	3	3	1	1	0	3	1	0	0
$1^3 3$	40	8	4	0	0	2	0	0	0	4	0
$1^2 2^2$	45	9	0	5	1	0	0	9	1	0	0
$1^2 4$	90	6	0	2	2	0	0	6	2	0	0
123	120	8	6	0	0	2	0	0	0	0	0
1 5	144	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0
2^3	15	3	0	3	1	0	0	7	1	3	1
2 4	90	6	0	2	2	0	0	6	2	0	0
3^2	40	0	4	0	0	0	0	8	0	4	0
6	120	0	0	0	0	0	0	8	0	0	2

n = 6

σ \ β	1^7	$1^5 2$	$1^4 3$	$1^3 2^2$	$1^3 4$	$1^2 2 3$	$1^2 5$	$1 2^3$	124	$1 3^2$	$1 6$	$2^2 3$	$2 5$	$3 4$	7
1^7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$1^5 2$	21	11	6	5	3	2	1	3	1	0	0	2	1	0	0
$1^4 3$	70	20	10	2	2	2	0	0	0	4	0	2	0	2	0
$1^3 2^2$	105	25	3	9	1	1	0	9	1	0	0	3	0	1	0
$1^3 4$	210	30	6	2	2	0	0	6	2	0	0	2	0	2	0
$1^2 2 3$	420	40	12	4	0	4	0	0	0	0	0	4	0	0	0
$1^2 5$	504	24	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	4	0	0
$1 2^3$	105	15	0	9	3	0	0	7	1	3	1	0	0	0	0
124	630	30	0	6	6	0	0	6	2	0	0	0	0	0	0
$1 3^2$	280	0	16	0	0	0	0	8	0	4	2	0	0	0	0
$1 6$	840	0	0	0	0	0	0	8	0	6	2	0	0	0	0
$2^2 3$	210	20	6	6	2	2	0	0	0	0	0	6	0	2	0
$2 5$	504	24	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	4	0	0
$3 4$	420	0	12	4	4	0	0	0	0	0	0	4	0	4	0
7	720	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6

$n = 7$

Références

[B1] **F. Bergeron**, *Combinatoire des polynômes orthogonaux classiques: une approche unifiée,* Europ. J. Combinatorics, **1990**, no.11, 393-401.

[B2] **F. Bergeron**, *Une combinatoire du pléthysme*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, Vol. 46, no. 2, **1987**, 291-305.

[B3] **F. Bergeron**, *Une systématique de la combinatoire énumérative,* Thèse de Ph.D., UQAM et U. de Montréal, **1986**.

[B4] **F. Bergeron, G. Labelle and P. Leroux**, *Combinatoire et structures arborescentes,* Livre en préparation.

[B5] **F. Bergeron, G. Labelle and P. Leroux,** *Computation of the Expected Number of Leaves in a Tree Having a Given Automorphism,* Discrete Applied Mathematics, **1990.**

[C1] **I. Constantineau,** *Théorie des espèces et endofonctions* , Mémoire de maîtrise, UQAM, **1987.**

[CL1] **I. Constantineau et J. Labelle,** *Calcul combinatoire du nombre d'endofonctions et d'arborescences laissées fixes par l'action d'une permutation,* Ann. Sc. Math. du Québec, Vol.XIII, no.2, **1989.**

[CL2] **I. Constantineau et J. Labelle,** *On Combinatorial Sructures Kept Fixed by the Action of a Given Permutation,* Studies in Applied Mathematics, (à paraître).

[Da] **R.L. Davis,** *The number of structures of finite relations,* Proc. of the Amer. Math. Soc., Vol. 4, **1953,** 486-494.

[D1] **H. Décoste,** *Séries indicatrices d'espèces pondérées et q-analogues,* Ph.D.thesis, UQAM and Université de Montréal, **1989**; publication du LACIM, #2, **1990.**

[D2] **H. Décoste,** *q-analogues en théorie des espèces,* Actes du XIV^{e} Séminaire Lotharingien de Combinatoire, Burg Feuerstein, Rép.Féd.d'Allemagne, **1986** (V. Strehl: éditeur), 33-49.

[FLj] **D. Foata et J. Labelle,** *Modèles combinatoires pour les polynômes de Meixner,* Europ. J. Comb., Acad. Press, **1983,** 305-311.

[Jo] **A. Joyal,** *Une théorie combinatoire des séries formelles,* Adv. in Math. 42, Acad. Press, **1981,** 1-82.

[Kr] **G. Kreweras,** *Permutations partiellement soulignées et polynômes géométriques* , Europ. J. Comb. 2, **1981,** 155-163.

[Lg1] **G. Labelle,** *Une nouvelle démonstration combinatoire des formules d'inversion de Lagrange,* Adv. in Math. 42, Acad. Press, **1981,** 217-247.

[Lg2] **G. Labelle,** *Some New Computational Methods in the Theory of Species,* dans *Combinatoire Énumérative, Montréal Québec 1985, Proceedings,* G.Labelle et P.Leroux, éditeurs, Lecture Notes in Mathematics no.1234, Springer-Verlag **1986,** 192-209.

[Lg3] **G. Labelle,** *The computation of the cycle index series of some combinatorial s pecies,* Notes: Combinatorial Year, **M.I.T.,** Nov. **1984.**

[Lg4] **G. Labelle,** *The Cyclic Type of Combinatorial Species,* Notes: Special Session on Enumerative Combinatorics, 819th Meeting of the **A.M.S.,** Avril **1985.**

[Lj1] **J. Labelle,** *Applications diverses de la théorie combinatoire des espèces de structures,* Ann. Sc. Math. du Québec, 7, no.1, **1983**, 59-94.

[Lj2] **J. Labelle,** *Quelques espèces sur les ensembles de petite cardinalité,* Ann. Sc. Math. du Québec, vol.IX, no.1, **1985**, 31-58.

[LY1] **J. Labelle et Y.-N. Yeh,** *The Relation Between Burnside Rings and Combinatorial Species* , Journal of Combinatorial Theory ; Series A, vol.50, no.2, **1989**, 269-284.

[LY2] **J. Labelle et Y.-N. Yeh,** *Combinatorial Species of Several Variables* , Rapport de recherche, # 61, Département de Mathématiques et d'Informatique, UQAM, **1988**.

[Le] **P. Leroux,** *Methoden der Anzahlbestimmung für einege Klassen von Graphen,* Bayreuther mathematische Schriften; no.26, **1988**, 1-36.

[Lo] **L. Lovász,** *Combinatorial Problems and Exercices,* North-Holland, Amsterdam, New-York, Oxford, **1979**.

[Y1] **Y.-N. Yeh,** *On the Combinatorial Species of Joyal,* Ph.D.thesis, State University of New-York at Buffalo, **1985**.

[Y2] **Y.-N. Yeh,** *The Calculus of Virtual Species and K-Species,* dans *Combinatoire Énumérative, Montréal Québec 1985, Proceedings,* G. Labelle et P. Leroux, éditeurs. Lecture Notes in Mathematics no.1234, Springer-Verlag **1986**, 351-369.

Ivan Constantineau et Jacques Labelle
Université du Québec à Montréal
Case postale 8888, Succ. "A"
Montréal, Québec, H3C 3P8, Canada.

Chapitre 4

Une construction des graphes connexes laissés fixes par permutation des sommets.

Ivan Constantineau (UQAM)

Résumé. Dans cet article nous donnons une expression explicite pour les coefficients de la série indicatrice de cycles des graphes simples connexes, de même que pour celle des digraphes connexes. Nous utilisons une méthode constructive appelée l'*auto-similarité* pour y arriver.

Introduction. Dans [CL1], [CL2], [CL3], Jacques Labelle et l'auteur ont développé une démarche *combinatoire* pour calculer les coefficients de séries indicatrices de cycles de certaines espèces telles celles des graphes orientés, des graphes simples, des endofonctions, des arbres, des arborescences, etc... Certaines de ces espèces sont liées l'une à l'autre par l'opération de *composition* d'espèces. Le cas le plus important de composition est sans contredit celui où on a deux espèces **A** et **B** telles que

$$\mathbf{A} = \mathcal{E}xp\,(\mathbf{B}), \tag{1}$$

où $\mathcal{E}xp$ est l'espèce uniforme [Jo].

L'espèce $\mathcal{G}rs$ des graphes simples admet une décomposition sous la forme (1):

$$\mathcal{G}rs = \mathcal{E}xp\,(\mathcal{G}sc), \tag{2}$$

où $\mathcal{G}sc$ est ici l'espèce des graphes (simples) connexes.

La relation (2) est très importante combinatoirement. Presque tous les résultats concernant l'énumération des graphes connexes étiquettés ou non, avec ou sans "propriétés topologiques", en dépendent plus ou moins explicitement. Même la série indicatrice $\mathbf{Z}_{\mathcal{G}sc}$ de $\mathcal{G}sc$ peut être calculée (récursivement) à l'aide de (2) et du *logarithme combinatoire* [Lg]. Cependant, les résultats obtenus par ce "puissant" logarithme ne semblent pas donner, à priori, beaucoup d'informations sur les structures énumérées.

La démarche combinatoire mentionnée plus haut est, au contraire, "constructive": on énumère les structures voulues en les fabriquant. Le but de cet article est de trouver et interpréter les coefficients de la série indicatrice des graphes connexes et des graphes orientés connexes en utilisant cette dernière méthode.

Dans la section 1 qui suit, nous décrivons le principe de "similarité" qui est à la base de ces constructions. Nous constatons ensuite dans la section 2, que, règle générale, bien qu'elle soit nécessaire, la similarité ne suffit pas à notre entreprise en ce qui a trait aux graphes connexes. On peut en effet obtenir des sujets indésirables que nous ne voulons pas énumérer. La proposition 3 et le corollaire 2 que l'on présente dans cette section nous permettront de les évincer. Il faudra au préalable pouvoir construire tous les graphes connexes sur C(ß) où C(ß) est l'ensemble des cycles constituant la permutation ß. Dans la section 3 nous introduisons un algorithme qui donne tous les graphes connexes sur un ensemble fini U arbitraire.

A la section 4, nous calculons la cardinalité de l'ensemble des graphes connexes laissés fixes par l'action d'une permutation ß sur les sommets de ces graphes, dans le cas où le p.g.c.d. des longueurs de tous les cycles de ß, que nous dénoterons *pgcd(ß)*, est égal à 1. Le résultat obtenu dans ce cas particulier est en fait le premier terme d'un somme associée à un processus d'inclusion-exclusion qui traite le cas général, quel que soit pgcd(ß), des graphes connexes fixés par ß. Ce processus d'inclusion-exclusion de même que la somme qui en résulte feront l'objet de la section 5.

1) Le principe de similarité.

Avant de dire ce qu'on entend ici par similarité, une mise en garde s'impose: le principe que nous allons énoncer n'est pas vraiment bien défini. Nous n'en connaissons ni les limites exactes, ni les failles précises et il reste encore beaucoup à faire avant de le caractériser entièrement. Notons aussi que le cadre dans lequel s'énonce ce principe est celui des espèces de structures, et qu'il intervient dans le calcul des coefficients des séries indicatrices de cycle.

Principe de similarité. Soit $\mathcal{A}$ une espèce de structures, n un entier de $\mathbb{N}$ et ß une permutation de [n]. On dira de $\mathcal{A}$ qu'elle est (auto)- ***similaire*** si pour toute permutation ß, l'ensemble $\mathbf{Fix}_{\mathcal{A}}$(ß) des structures d'espèce $\mathcal{A}$ laissées fixes par l'action de ß sur $\mathcal{A}$[n] est isomorphe à un ensemble de couples (δ,Δ), dénoté ß-$\mathcal{A}$, où δ est une $\mathcal{A}$-structure sur C(ß) (c'est-à-dire $\delta\in\mathcal{A}$[C(ß)]; d'où le nom de similarité) et où Δ est une "construction" particulière sur δ.

Pour bien comprendre ce principe, le mieux est probablement de l'illustrer à l'aide d'un exemple important. Nous considérons ici celui de l'espèce des relations m-aires, que l'on dénote $\mathcal{R}el^{[m]}$. Nous présentons d'abord une construction "classique" qui mène à un calcul bien connu (Davis[Da]) du nombre de relations m-aires laissées fixes par une permutation ß donnée. Nous montrons ensuite comment cette construction peut être retrouvée à partir du principe de similarité.

Exemple 1. L'espèce des relations m-aires peut être décrite de la manière suivante: pour tous ensembles U,V finis et toute bijection $f:U\to V$ on pose

(i) $$\mathcal{R}el^{[m]}[U] := \{\rho \mid \rho\subset U^m\}$$

et on définit le morphisme de transport le long de f, $\mathcal{R}el^{[m]}[f]$, par

(ii) $$\begin{aligned}\mathcal{R}el^{[m]}[f] := \mathcal{R}el^{[m]}[U] &\to \mathcal{R}el^{[m]}[V],\\ \rho &\mapsto \mathcal{R}el^{[m]}[f](\rho) = \{f^{[m]}(\mathbf{r}) \mid \mathbf{r}\in\rho\}\end{aligned}$$

où $f^{[m]}(\mathbf{r}) = (f(r_1),\ldots,f(r_m))$ si $\mathbf{r} = (r_1,\ldots,r_m)\in U^m$.

Soit ß une permutation de [n] et C(ß) l'ensemble des cycles constituant ß. Le groupe <ß> des itérées de ß agit sur $\mathcal{R}el^{[m]}[n]$ par transport de structures. On désigne par **Fix** $_{\mathcal{R}el^{[m]}}$ (ß) l'ensemble des relations m-aires sur [n] laissées fixes par ß. C'est -à dire :

$$\mathbf{Fix}_{\mathcal{R}el^{[m]}}(\beta) = \{\rho \in \mathcal{R}el^{[m]}[n] \mid \mathcal{R}el^{[m]}[\beta](\rho) = \rho\}.$$

De plus, on pose **fix** $_{\mathcal{R}el^{[m]}}(\beta) := |\mathbf{Fix}_{\mathcal{R}el^{[m]}}(\beta)|$, où $|A|$ désigne le cardinal d'un ensemble A.

Prenons m cycles dans C(ß), disons $C_1, C_2,\ldots, C_m$, pas forcément distincts les uns des autres, et $\mathbf{r} = (r_1,\ldots,r_m) \in \prod_{1\le j\le m} C_j$. L'orbite relativement à <ß> de **r** dans U^m, dénotée $\mathcal{O}_{<\beta>}(\mathbf{r})$, est évidemment contenue dans $\prod_{1\le j\le m} C_j$. Si on pose $|C_j| = c_j$ et q = $[c_1,c_2,\ldots,c_m] = \mathrm{ppcm}\{c_1,c_2,\ldots,c_m\}$ alors q est tel que $\beta^q(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$ et q est le plus petit entier strictement positif satisfaisant cette propriété. Donc $|\mathcal{O}_{<\beta>}(\mathbf{r})| = q$. Ainsi, en restreignant l'action de <ß> à $\prod_{1\le j\le m} C_j$, on obtient un ensemble de $(\prod_{1\le j\le m} c_j)/q$ orbites distinctes que l'on dénote $(\prod_{1\le j\le m} C_j)/<\beta>$. On a alors que l'ensemble de toutes les orbites de l'action de <ß> sur U^m est donné par la réunion suivante:

$$\mathrm{Orb}(\beta;m) = \bigcup_{(C_1,C_2,\ldots,C_m)\in C(\beta)^m} \left(\prod_{1\le j\le m} C_j\right) / <\beta> . \qquad (3)$$

Supposons maintenant que $\mathbf{r} \in \rho \in \mathrm{Fix}_{\mathcal{R}el^{[m]}}(\beta)$. Puisque $\mathcal{R}el^{[m]}[\beta](\rho) = \rho$, on a $\beta^{[m]}(\mathbf{r}) \in \rho$. La relation ρ ne peut donc être que la réunion des orbites d'une des parties (possiblement vide) de l'ensemble Orb(ß;m). De même, réciproquement, toute partie de Orb(ß;m), lorsqu'on en fait la réunion, définit bien une relation m-aire ρ laissée fixe par ß. Ainsi, en dénotant par $\mathbb{P}[U]$ l'ensemble des parties d'un ensemble U, on a démontré la proposition suivante:

Proposition 1. On a:

$$\mathbb{P}[\mathrm{Orb}(\beta;m)] \quad \tilde{\rightarrow} \quad \mathbf{Fix}_{\mathcal{R}el^{[m]}}(\beta).$$

Corollaire 1.(Davis[Da]; Décoste, Labelle, Leroux[DLL]; Labelle [Lg3]).

Soit ß une permutation de [n]. On a

$$\mathbf{fix}_{\mathcal{R}el^{[m]}}(\beta) = 2^{\sum_{k_1,k_2,\ldots,k_m=1}^{n} \beta_{k_1}\beta_{k_2}\cdots\beta_{k_m} \frac{k_1\cdot k_2\cdot\cdots\cdot k_m}{[k_1,k_2,\ldots,k_m]}} \tag{4}$$

Preuve. Par la proposition 1et (3) on a

$$\mathbf{fix}_{\mathcal{R}el^{[m]}}(\beta) = \left| \mathbb{P}\left(\bigcup_{(C_{i_1},C_{i_2},\ldots,C_{i_m}) \in C(\beta)^m} \left(\prod_{1\le j\le m} C_j \right) / <\beta> \right) \right|$$

$$= 2^{\left| \left(\bigcup_{(C_{i_1},C_{i_2},\ldots,C_{i_m}) \in C(\beta)^m} \left(\prod_{1\le j\le m} C_j \right) / <\beta> \right) \right|}.$$

■

Vérifions maintenant que $\mathcal{R}el^{[m]}$ est auto-similaire. Supposons ρ dans $\mathrm{Fix}_{\mathcal{R}el^{[m]}}(\beta)$. Nous savons déjà que ρ est la réunion de certaines orbites de Orb(ß;m). Chacune de ces orbites fait partie d'un certain produit cartésien de m cycles de ß. Ainsi on peut définir une fonction Δ à partir de ρ qui associe à chaque m-uplet $(C_1,C_2,\ldots,C_m)$ de cycles de ß l'ensemble des orbites de $\rho\cap(\prod_{1\le j\le m}C_j)$. Puisque chaque m-uplet de cycles de ß est précisément un élément de $C(\beta)^m$, on obtient les couples (δ,Δ) voulus pour la similarité où δ est élément arbitraire de $\mathcal{R}el^{[m]}[C(\beta)]$ et où Δ est une construction sur δ.

Définition 1. Soit ß une permutation de [n] et C(ß) l'ensemble de ses cycles. On dénote par ß-($\mathcal{R}el^{[m]}$) l'ensemble constitué par les couples (δ,Δ) où $\delta \in \mathcal{R}el^{[m]}[C(\beta)]$ et où Δ est une fonction qui associe à chaque $(C_1,C_2,\ldots,C_m)$ de δ une partie (*non-vide*) de $(\prod_{1\leq j\leq m} C_j)/<\beta>$.

Proposition 2. Pour tous entiers $m,n \geq 0$ et toute permutation β de $[n]$, on a une bijection $\Gamma^{[m]}$:

$$\Gamma^{[m]}:\ \mathrm{Fix}_{\mathcal{Rel}^{[m]}}(\beta) \rightarrow \beta\text{-}\mathcal{Rel}^{[m]}.$$

Preuve. Le paragraphe précédant la définition 1 montre comment on fait pour obtenir $\Gamma^{[m]}(\rho)$, pour toute ρ dans $\mathrm{Fix}_{\mathcal{Rel}^{[m]}}(\beta)$. La bijectivité est évidente. ■

2) Graphes simples et disconnexité.

L'espèce $\mathcal{Grs}$ des graphes simples peut être identifiée à l'espèce des relations binaires symétriques anti-réflexives qui est elle-même une sous-espèce de $\mathcal{Rel}^{[2]}$, l'espèce des relations binaires. On peut donc systématiquement traduire dans le langage des graphes simples tous les concepts introduits à la définition 1 et aux propositions 1 et 2. Posons, pour simplifier la notation, $\Gamma := \Gamma^{[2]}$ et $\beta\text{-}\mathcal{Grs} := \Gamma(\mathrm{Fix}_{\mathcal{Grs}}(\beta))$.

Tout graphe simple ρ de $\mathrm{Fix}_{\mathcal{Grs}}(\beta)$ (et, à fortiori, tout graphe simple connexe), laissé fixe par β, peut être identifié au couple $(\delta,\Delta) = \Gamma(\rho)$ de $\beta\text{-}\mathcal{Grs}$. Notons immédiatement que le graphe δ *peut* avoir des *boucles* en certains de ses sommets (une seule par sommet). C'est-à-dire que le graphe δ induit du graphe simple ρ de $\mathrm{Fix}_{\mathcal{Grs}}(\beta)$ n'est pas en général un graphe simple mais bien un graphe simple avec boucles. Pour tout $A \in C(\beta)$, la boucle en A est dénotée $\{A\}=\{A,A\}$. En fait, dès que $|A| > 1$, le graphe δ peut admettre une boucle en A.

Si $\{A,B\}$ est une arête de δ le nombre de possibilités que l'on a de déterminer l'image $\Delta(\{A,B\})$ dépend non seulement des cardinalités des cycles A et B mais aussi du fait que $\{A,B\}$ soit une boucle ou non.

Soient A = $(a_0,a_1,...)$ et B = $(b_0,b_1,...)$ deux cycles *distincts* de C(ß), respectivement de longueur a et b. Si $\{a_i,b_j\}$ est une arête de $\rho\in \mathrm{Fix}_{\mathcal{G}rs}(\beta)$ alors on a que, pour tout entier $k \geq 0$, $\{\beta^k(a_i),\beta^k(b_j)\}$ doit aussi être une arête de ρ. Comme dans le cas des relations binaires, on dénote par $\mathcal{O}_{<\beta>}(\{a_i,b_j\})$ cet ensemble d'arêtes, c'est-à-dire que $\mathcal{O}_{<\beta>}(\{a_i,b_j\}) = \{\{\beta^k(a_i),\beta^k(b_j)\} \mid k\in \mathbb{N}\}$. Dénotons par **Bip**(A,B) l'ensemble des arêtes du graphe biparti entre A et B. La fonction Δ associe donc à l'arête {A,B} de δ un ensemble non-vide d'orbites constituées d'arêtes de **Bip**(A,B). On a alors, comme dans le cas des relations binaires, (a·b)/ppcm(a,b) = pgcd(a,b) orbites possibles entre A et B. On dénotera cet ensemble d'orbites par **Bip**(A,B)/<ß>. Puisque Δ({A,B}) est constituée d'une partie non-vide de **Bip**(A,B)/<ß>, il y a $2^{\mathrm{pgcd}(a,b)} - 1$ manières de déterminer Δ({A,B}).

Si A et B sont un seul et même cycle et si la boucle en A apparaît dans δ alors Δ associe encore à cette boucle un ensemble non-vide d'orbites constituées maintenant d'arêtes qui sont des paires d'éléments *distincts* de A (pour éviter les boucles - sur [n] - dans $\Gamma^{-1}(\delta,\Delta)$). Il est aisé de voir qu'on a ici $\lfloor a/2 \rfloor$ orbites possibles donnant lieu à $2^{\lfloor a/2 \rfloor} - 1$ manières de déterminer Δ({A}). Par extension, on peut dénoter, sans confusion possible, ce dernier ensemble d'orbites par **Bip**(A)/<ß>.

Nous voulons maintenant caractériser le sous-ensemble de ß-$\mathcal{G}rs$, que l'on dénotera ß-$\mathcal{G}sc$, qui sera tel que $\Gamma^{-1}(\beta\text{-}\mathcal{G}sc) = \mathrm{Fix}_{\mathcal{G}sc}(\beta)$, c'est-à-dire qui est en bijection, via Γ^{-1}, avec l'ensemble des graphes simples *connexes* laissés fixes par ß. En fait nous allons trouver les conditions supplémentaires à imposer aux couples $(\delta,\Delta)\in$ ß-$\mathcal{G}rs$ qui vont faire que $\Gamma^{-1}(\delta,\Delta)$ est connexe.

La première condition qui vient naturellement (par similarité...) à l'esprit est d'exiger la connexité de δ. En effet, pour tout $(\delta,\Delta)\in$ ß-$\mathcal{G}rs$, si δ n'est pas un graphe connexe alors $\Gamma^{-1}(\delta,\Delta)$ n'est pas connexe. Mais cela ne suffit pas *en général*, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 2. Prenons le cas où $[n] = [4]$, $\beta = \{A,B\}$, où $A = (1,4)$, $B = (2,3)$, δ est le graphe constitué de l'unique arête $\{A,B\}$ où δ est connexe,

Figure 1: δ est connexe.

et où $\Delta(\{A,B\}) = \mathcal{O}_{<\beta>}(\{1,2\}) = \{\{1,2\},\{4,3\}\}$. La figure 2, où les cycles A,B sont indiqués en pointillés, montre le graphe $\Gamma^{-1}(\delta,\Delta)$ qui est bien disconnexe.

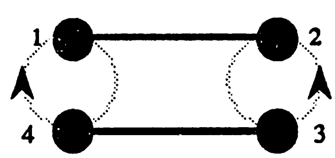


Figure 2 : $\Gamma^{-1}(\delta, \Delta)$ n'est pas connexe, alors que δ l' est.

L'exemple 2 illustre une situation qu'il faut étudier attentivement. Pour ce faire convenons immédiatement de dénoter par $CC(\delta,\Delta)$ l'ensemble des composantes connexes de $\Gamma^{-1}(\delta,\Delta)$. Posons aussi que $NCC(\delta,\Delta) = |CC(\delta,\Delta)|$. Pour l'exemple 2 on a $NCC(\delta,\Delta) = 2$. On peut remarquer dans ce dernier cas que le nombre de composantes (2) divise $\text{pgcd}(\beta) = 2$. Cela n'est pas un hasard, comme nous le verrons plus bas.

Toujours avec l'exemple 2 on voit que β induit une permutation circulaire bien définie β' des composantes connexes obtenues dans $\Gamma^{-1}(\delta,\Delta)$. En effet si on pose que

$\beta'(\{1,2\}) = \{4,3\}$ et $\beta'(\{4,3\}) = \{1,2\}$, on vient de (bien) définir la permutation β' souhaitée. Remarquons qu'on aurait pu tout aussi bien définir β' en posant, pour toutes composantes connexes C,D de $CC(\delta,\Delta)$, que

$$\beta'(C) = D \text{ ssi il existe un sommet } x \in C \text{ tel que } \beta(x) \in D. \qquad (5)$$

Si (δ,Δ) est dans β-$\mathcal{G}rs$ alors β induit toujours, comme nous le verrons, une permutation β' de $CC(\delta,\Delta)$ bien définie par la règle (5). En fait , on aura alors, pout tout (δ,Δ) dans β-$\mathcal{G}rs$, que β' est une permutation de $CC(\delta,\Delta)$ et que cette permutation β' est *circulaire* si δ est connexe.

Le nombre $NCC(\delta,\Delta)$ de composantes connexes dans $\Gamma^{-1}(\delta,\Delta)$ dépend de pgcd(β), de δ et de Δ. Si on fixe δ, il suffit, pour déterminer $NCC(\delta,\Delta)$, de connaître le nombre de composantes connexes que l'on obtient pour chaque arête (indépendamment l'une de l'autre) de δ, c'est-à-dire de calculer pour toute arête $\{A,B\}$ de δ, $NCC(\delta_{|\{A,B\}},\Delta_{|\{A,B\}})$. C'est l'objet des proposition et corollaire suivants.

Proposition 3. Soit β une permutation de [n] constituée de deux cycles A,B respectivement de longueurs a et b où $A = (a_0,a_1,a_2,\ldots)$ et $B = (b_0,b_1,b_2,\ldots)$. Supposons que (δ,Δ) soit dans β-$\mathcal{G}rs$ et que δ soit constitué de l'unique arête $\{A,B\}$. Supposons aussi que $\Delta(\delta)$ soit constitué au moins de l'orbite $\mathcal{O}_{<\beta>}(\{a_0,b_0\})$et, possiblement, de certaines autres orbites, disons $\{\mathcal{O}_{<\beta>}(\{a_0,b_{r_j}\}) \mid 1 \leq j \leq u\}$. Alors on a

i) $NCC(\delta,\Delta) = \text{pgcd}(a,b,r_1, r_2,\ldots, r_u)$, et

ii) la permutation β induit une permutation circulaire β' de $CC(\delta,\Delta)$ définie plus haut par la règle (5).

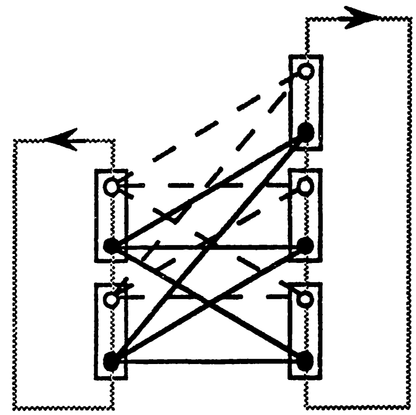
Preuve. On procède par récurrence sur le nombre d'orbites contenues dans $\Delta(\delta)$.

Supposons d'abord que ce nombre soit 1 et supposons aussi que $A \neq B$. Dans ce cas on a forcément $\Delta(\delta) = \mathcal{O}_{<B>}(\{a_0,b_0\})$, c'est-à-dire que $\Delta(\delta)$ n'est constituée que de cette dernière orbite.

Si pgcd(a,b) = 1 , il n'y a alors qu'une seule image possible pour $\Delta(\delta)$ et ainsi, pour tout x de A et tout y de B, il y a une arête $\{x,y\}$ dans $\Gamma^{-1}(\delta,\Delta)$. En d'autres termes, $\Gamma^{-1}(\delta,\Delta)$ est le graphe biparti complet de A à B. Bien entendu, $\Gamma^{-1}(\delta,\Delta)$ n'a qu'une composante connexe et la proposition est vérifiée.

Soit pgcd(a,b) = k > 1. On "découpe" d'abord A (resp.B) en classes $\mathcal{A}_i$ (resp. $\mathcal{B}_i$), $i \geq 1$, de k éléments chacune $A = (\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2,\ldots)$ (resp. $B = (\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2,\ldots)$) où, pour tout i, $\mathcal{A}_i = (a_{(i-1)\cdot k},\ldots,a_{(i\cdot k)-1})$ (resp. $\mathcal{B}_i = (b_{(i-1)\cdot k},\ldots,b_{(i\cdot k)-1})$).

Par exemple avec a = 4 et b = 6, on obtient la configuration de la figure 3, où les classes, de cardinalité 2 = pgcd(4,6), sont représentées par des rectangles:



A B

Figure 3.

On remarque maintenant que pour tous entiers f, f ' ≥ 1, toutes classes $\mathcal{A}_f$ et $\mathcal{B}_{f'}$ et tout i, $1 \leq i \leq k$, le $i^{\text{ème}}$ élément de chaque classe $\mathcal{A}_f$ est lié aux $i^{\text{èmes}}$ éléments de *toutes* les classes $\mathcal{B}_{f'}$, et *à rien d'autre* . Cela tient au fait bien connu en théorie des nombres qu'il n' y a de solution entière x à la conguence

$$gx \equiv w \pmod h \qquad (6)$$

où g,h,w sont tous des entiers fixés que si (et seulement si) pgcd(g,h) divise w . Ce résultat s'applique effectivement à notre cas lorsqu'on pose, dans (6), $g = a$, $h = b$, et $w = r \cdot \mathrm{pgcd}(a,b)$, où r est un entier quelconque. On obtient alors la congruence suivante

$$ax \equiv r \cdot \mathrm{pgcd}(a,b) \pmod b \qquad (7)$$

qui admet toujours, pour tout entier r, une solution entière x. Ainsi puisque nous avons choisi l'orbite $\Delta(\delta) = \mathcal{O}_{<B>}(\{a_0,b_0\})$ on a , pour tout entier m, que $\mathcal{O}_{<B>}(\{a_0,b_0\})$ contient l'arête $\{a_{ma(\mathrm{mod}\ a)}, b_{ma(\mathrm{mod}\ b)}\}$ et, par (7), que pour tout entier r tel que $0 \leq rk \leq b-1$, $\{a_0,b_{rk}\}$ est dans $\mathcal{O}_{<B>}(\{a_0,b_0\})$; il suffit alors de "translater" ce résultat pour obtenir, pour tout i tel que $0 \leq i \leq k-1$, et tout r tel que $i \leq i+rk \leq b-1$, que $\{a_i,b_{i+rk}\} \in \mathcal{O}_{<B>}(\{a_0,b_0\})$. Par le même genre de raisonnement, il est facile de voir que pour tout entier s tel que $0 \leq sk \leq a-1$, et pour tout i, $0 \leq i \leq k-1$, $\{a_{i+sk},b_{i+rk}\} \in \mathcal{O}_{<B>}(\{a_0,b_0\})$ et que ces dernières arêtes sont les seules arêtes contenues dans l'orbite $\mathcal{O}_{<B>}(\{a_0,b_0\})$.

On obtient alors $k = \mathrm{pgcd}(a,b)$ copies disjointes d'un même graphe (connexe) , c'est-à-dire pgcd(a,b) composantes connexes dans $\Gamma^{-1}(\delta,\Delta)$. Pour l'exemple en cours, les 2 = pgcd(4,6) composantes apparaissent dans la figure 4.

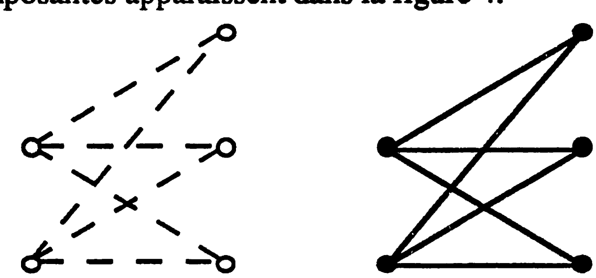


Figure 4. Les deux composantes connexes issue de la figure 3.

Il est évident que si, au lieu de $\mathcal{O}_{<B>}(\{a_0,b_0\})$, on avait pris une (et une seule) autre orbite $\mathcal{O}_{<B>}(\{a_0,b_j\})$ déterminée disons par $\{a_0,b_j\}$ pour un certain j, on aurait obtenu la même genre de construction, à translation près (dans le cycle B), et exactement le même nombre de composantes connexes. En fait, lorsqu'on ne choisit qu'une seule orbite comme image pour $\Delta(\delta)$ on obtient toujours pgcd(a,b) composantes connexes dans $\Gamma^{-1}(\delta,\Delta)$.

Remarquons aussi que l'orbite déterminée par $\{a_0,b_j\}$ est la même que celle déterminée par $\{a_0,b\}$, pour tout b de B qui se trouve dans la composante connexe où se trouve a_0.

Il est clair que la relation (5) définit bien une permutation circulaire ß' de ces pgcd(a,b) composantes qu'on vient d'obtenir. Ainsi la proposition est démontrée dans le cas où A≠B et où on n'a qu'une seule orbite dans $\Delta(\delta)$.

Supposons maintenant que A=B. Prenons comme image pour $\Delta(\delta)$ la seule orbite $\mathcal{O}_{<ß>}(\{a_0,a_r\})$ où r≠0 (pour éviter les boucles). En se servant de l'expression (7) on voit que le plus petit indice j tel que $0 < j \leq r$ pour lequel $\{a_0,a_j\} \in \mathcal{O}_{<ß>}(\{a_0,a_r\})$ est précisément j = pgcd(r,a). On a alors que les diverses composantes connexes sont données par l'ensemble suivant:

$$\{\{a_{[i+m\cdot pgcd(r,a)]mod\ a}, a_{[i+(m+1)\cdot pgcd(r,a)]mod\ a}\} \mid 0 \leq i < pgcd(r,a), m \in \mathbb{N}\}.$$

On obtient bien pgcd(a,r) composantes sur lesquelles ß agit de manière à bien définir la permutation ß' décrite en (5).

Bref la proposition est maintenant démontrée pour tout couple (δ,Δ) de ß-$\mathcal{G}rs$, où δ est constitué de l'unique arête {A,B}et tel que $|\Delta(\delta)| = 1$. Supposons la proposition vraie lorsque, dans les mêmes conditions, $|\Delta(\delta)| = u \geq 1$. Nous voulons la démontrer pour $|\Delta(\delta)| = u+1$. Supposons donc que $\Delta(\delta)$ soit constitué de l'orbite $\mathcal{O}_{<ß>}(\{a_0,b_0\})$ et des orbites $\{\mathcal{O}_{<ß>}(\{a_0,b_{r_j}\}) \mid 1 \leq j \leq u\}$.

Supposons que $\Delta'(\delta)$ soit constitué de l'orbite $\mathcal{O}_{<ß>}(\{a_0,b_0\})$ et des orbites $\{\mathcal{O}_{<ß>}(\{a_0,b_{r_j}\}) \mid 1 \leq j \leq u-1\}$. Alors on a, par hypothèse de récurrence, $NCC(\delta,\Delta')$ = pgcd(a,b,r_1, r_2,..., r_{u-1}) et on a aussi qu' on peut induire de ß une permutation circulaire $\mathcal{B}'$ de $CC(\delta,\Delta')$ de la manière décrite en (5). On se ramène donc au cas où on n'a qu'un cycle de longueur $NCC(\delta,\Delta')$ et qu'une orbite déterminée par $\{a_0, b_{r_u}\}$. Maintenant, les points a_0 et b_{r_u} déterminent chacun une (et une seule) composante de $CC(\delta,\Delta')$ disons, respectivement , $K(a_0)$ et $K(b_{r_u})$ telles que $a_0 \in K(a_0)=K_0$ et $b_r \in K(b_{r_u})=K_{r_u}$. Ainsi, l'orbite $\{a_0, b_{r_u}\}$ détermine une et une seule orbite $\mathcal{O}_{<\mathcal{B}'>}(\{K_0,K_{r_u}\})$ où r_u est pris ici modulo $\mathrm{pgcd}(a,b,r_1, r_2,\ldots, r_{u-1})$. On se retrouve donc essentiellement dans la position (traitée plus haut) où on n'a qu'un seul cycle $\mathcal{B}'$ de longueur $\mathrm{pgcd}(a,b,r_1, r_2,\ldots, r_{u-1})$ et une seule orbite $\mathcal{O}_{<\mathcal{B}'>}(\{K_0,K_{r_u}\})$. Ainsi

$$\begin{aligned} NCC(\delta,\Delta) &= \mathrm{pgcd}(\mathrm{pgcd}(a,b,r_1, r_2,\ldots, r_{u-1}), r_u \bmod(\mathrm{pgcd}(a,b,r_1, r_2,\ldots, r_{u-1}))) \\ &= \mathrm{pgcd}(a,b,r_1, r_2,\ldots, r_{u-1}, r_u \bmod(\mathrm{pgcd}(a,b,r_1, r_2,\ldots,r_{u-1}))) \\ &= \mathrm{pgcd}(a,b,r_1, r_2,\ldots, r_{u-1}, r_u). \end{aligned}$$

Il est clair qu'on peut induire une permutation $\mathcal{B}''$ de $CC(\delta,\Delta)$ à partir de $\mathcal{B}'$, toujours définie par la règle (5). Cela complète la récurrence et la démonstration est terminée. ■

Corollaire 2. Pour tout $(\delta,\Delta)\in \mathcal{B}\text{-}\mathcal{G}rs$ tel que δ est connexe on a

$$NCC(\delta,\Delta) = \underset{\{A,B\}\in\delta}{\mathrm{PGCD}}\left(NCC(\delta_{|\{A,B\}}, \Delta_{|\{A,B\}})\right).$$

De plus $\mathcal{B}$ induit une permutation (circulaire) $\mathcal{B}'$ de $CC(\delta,\Delta)$ où $\mathcal{B}'$ est définie par (5).

Preuve. On procède par récurrence sur le nombre d'arêtes de δ. Si ce nombre est 1, alors on est dans la position de la proposition 3 et on n'a rien à démontrer. Supposons la formule vraie si le nombre d'arêtes de δ est $k \geq 1$. Supposons maintenant que δ ait $k+1$ arêtes. Choisissons une arête arbitraire $\{A,B\}$ dans δ où $A = (a_0,a_1,a_2,\ldots)$ et $B = (b_0,b_1,b_2,\ldots)$. On a deux cas à examiner pour établir la récurrence: (i) $\{A,B\}$ est un isthme (c'est-à-dire que de soustraire l'arête $\{A,B\}$ à δ déconnecte le graphe connexe δ) et (ii) $\{A,B\}$ n'est pas un isthme.

(i) Lorsque {A,B} est un isthme dans δ et qu'on soustrait {A,B} à δ on obtient deux sous-graphes δ' et δ'' (connexes) de δ tels que (disons) A est un sommet de δ' et B un sommet de δ''. Par hypothèse de récurrence, on a que ß induit des permutations circulaires ß' et ß'' de $CC(\delta',\Delta')$ et $CC(\delta'',\Delta'')$ respectivement. Les orbites constituant $\Delta(\{A,B\})$, disons $\{\mathcal{O}_{<ß>}(\{a_0,b_{r_j}\}) \mid 1 \leq j \leq u\}$ dans δ, induisent un ensemble d'orbites bien déterminé entre ces deux "nouveaux" cycles $CC(\delta',\Delta')$ et $CC(\delta'',\Delta'')$. Il suffit en effet de "réduire" modulo($NCC(\delta'',\Delta'')$) les choix r_j, $1 \leq j \leq u$, donnés pour $\Delta(\{A,B\})$. Pour simplifier la notation, posons, pour tout j, $1 \leq j \leq u$, $r_j' = r_j \bmod(NCC(\delta'',\Delta''))$.

On se retrouve alors dans le cas traité par la proposition 3 où on a un cycle de longueur $NCC(\delta',\Delta')$, un autre de longueur $NCC(\delta'',\Delta'')$ et un ensemble d'orbites déterminées par $\Delta(\{A,B\})$. Par la proposition 3 on alors que

$$\begin{aligned} NCC(\delta,\Delta) &= \text{pgcd}\,(NCC(\delta',\Delta'), NCC(\delta'',\Delta''), \text{pgcd}(r_1',\ldots, r_u')) \\ &= \text{pgcd}\,(NCC(\delta',\Delta'), NCC(\delta'',\Delta''), \text{pgcd}(r_1,\ldots, r_u)) \\ &= \text{pgcd}\,(NCC(\delta',\Delta'), NCC(\delta'',\Delta''), \text{pgcd}(a,b,r_1,\ldots, r_u)) \\ &= \text{pgcd}\,(NCC(\delta',\Delta'), NCC(\delta'',\Delta''), NCC\,(\delta_{|\{A,B\}},\Delta_{|\{A,B\}})). \end{aligned}$$

et (par hypothèse de récurrence) le corollaire 2 est démontré lorsque {A,B} est un isthme.

(ii) Le cas (ii) se traite essentiellement de la même manière que dans (i), la seule différence (d'une certaine importance) intervenant dans le fait qu'on n'a alors qu'un seul cycle induit $CC(\delta',\Delta')$ à considérer auquel on ajoute une boucle. Le détail de cette partie (ii) est laissé au lecteur. ■

3) Une construction des graphes connexes.

La construction que l'on donne ici des graphes connexes repose essentiellement sur la notion de distance dans un graphe simple. Rappelons que la distance entre deux sommets u et v d'un graphe g , dénotée d(u,v), est la longueur de la plus courte chaîne allant de u à v.

Fixons u_0 dans U. La notion de distance dans un graphe connexe g = (U,F) que nous venons de décrire permet d'établir des relations d'équivalences, relativement à u_0, d'abord sur l'ensemble U des sommets de g, puis sur l'ensemble F des arêtes de g. Si, pour tout entier $k \geq 0$, on désigne par $D_k(u_0)$ l'ensemble des sommets de g qui sont à distance k de u_0, alors $(D_0(u_0), D_1(u_0), D_2(u_0),\ldots)$ est en effet une partition de U, que l'on dénotera $\pi[g,u_0]$, qui est munie d'un ordre total. De même, pour toutes $f_1 = (u_1,v_1)$, $f_2 = (u_2,v_2)$ dans F on définit une relation d'équivalence "$\equiv_{u_0}$" en posant $f_1 \equiv_{u_0} f_2$ ssi $d(u_0,u_1) = d(u_0,u_2)$ et $d(u_0,v_1) = d(u_0,v_2)$.

Les différentes classes de $F/\equiv_{u_0}$ peuvent être décrites comme suit. Soit $f = \{u,v\} \in F$. Si, pour un certain entier $t \geq 0$, $d(u_0,u) = d(u_0,v) = t$, on dira que $f \in \mathcal{D}_t[g,u_0]$; sinon il y a un entier $t \geq 0$ tel que $d(u_0,u) = t$ et $d(u_0,v) = t+1$ ou $d(u_0,v) = t$ et $d(u_0,u) = t+1$ et on écrira alors que $f \in \mathbb{D}_{t,t+1}[g,u_0]$. Les $\mathcal{D}_s[g,u_0]$ et les $\mathbb{D}_{t,t+1}[g,u_0]$, $s,t \geq 0$, *non-vides* sont précisément les classes d'équivalences de "$\equiv_{u_0}$" sur F. De plus on pose $\mathcal{D}[g,u_0] = \cup_{t\geq 0} \mathcal{D}_t[g,u_0]$ et $\mathbb{D}[g,u_0] = \cup_{t\geq 0}\mathbb{D}_{t,t+1}[g,u_0]$.

Ainsi tout graphe connexe $g \in \mathcal{G}sc[U]$ détermine, relativement à $u_0 \in U$, un unique triplet d'ensembles $(\pi[g,u_0], \mathcal{D}[g,u_0], \mathbb{D}[g,u_0])$. Nous voulons maintenant caractériser entièrement l'ensemble de tous les triplets de cette forme que l'on peut obtenir à partir des graphes $g \in \mathcal{G}sc[U]$. Pour arriver à cette fin on décrit, à la remarque 1, une propriété des ensembles $\mathbb{D}_{t,t+1}[g,u_0]$ qui motivera l'introduction de la définition 2. On donne aussi, dans le même sens, quelques précisions utiles sur la nature des ensembles $\mathcal{D}_s[g,u_0]$ à la remarque 2.

Remarque 1. Soient $g \in \mathcal{Gsc}[U]$ et $u_0 \in U$. Alors il existe un entier $r \geq 0$, dépendant de g, tel que $D_r(u_0) \neq \emptyset$ et $D_{r+1}(u_0) = \emptyset$. Ainsi, pour tout i, $0 \leq i \leq r$, $D_i(u_0) \neq \emptyset$ et, pour tout j, $0 \leq j \leq r-1$, $\mathbb{D}_{j,j+1}[g,u_0] \neq \emptyset$. On a aussi, pour tout i, $1 \leq i \leq r$, que tout sommet de $D_i(u_0)$ est en relation avec *au moins* un sommet de $D_{i-1}(u_0)$. C'est-à-dire que si on a $v \in D_i(u_0)$ alors il y a $u \in D_{i-1}(u_0)$ tel que $\{u,v\}$ est dans F. En effet, les sommets à distance $i \geq 1$ de u_0 sont, par définition, tous à distance 1 de $D_{i-1}(u_0)$. En termes de relations binaires, ce que nous venons de dire est que, pour tout j, $0 \leq j \leq r-1$, $\mathbb{D}_{j,j+1}[g,u_0]$ est une relation de $D_j(u_0)$ à $D_{j+1}(u_0)$ qui *sature* $D_{j+1}(u_0)$. Cela motive la définition suivante.

Définition 2. Soient V et W deux ensembles finis disjoints quelconques. Alors $\mathbf{Sat}[V,W] \subset \mathcal{Grs}[V \cup W]$ désignera l'ensemble des graphes simples sur $V \cup W$ dont les arêtes $\{x,y\}$ doivent avoir un sommet dans V et l'autre dans W, et qui, de plus, saturent W, c'est-à-dire que pour tout sommet x de W il y a au moins une arête $\{x,y\}$ où y est un sommet de V. On appellera les éléments de $\mathbf{Sat}[V,W]$ des *saturations* de V dans W.

Remarque 2. Si $f=\{u,v\} \in \mathcal{D}[g,u_0]$ alors le graphe $g \backslash f := (U, F \backslash \{f\})$ demeure *connexe*, car il existe deux chemins dans $g \backslash f$ de longueur *minimum* qui vont un de u_0 à u et l'autre de u_0 à v, connectant ainsi u à v via u_0. En effet, le fait que ces chemins soient de longueur minimum indique précisément qu'ils sont tous deux dans $\mathbb{D}[g,u_0]$. Ainsi que $\mathcal{D}[g,u_0]$ soit vide ou non n'altère en rien la connexité du graphe g.

Nous avons maintenant tous les ingrédients nécessaires pour définir l'ensemble des triplets voulus. Nous démontrons ensuite, dans le théorème 1, que ce dernier ensemble est en bijection avec $\mathcal{Gsc}[U]$.

Définition 3. Soient U un ensemble fini, $|U| \geq 1$, $u_0 \in U$ et $j \in \mathbb{N}$. On définit d'abord l'ensemble $\mathbf{Par}^{[j]}[U,u_0]$ de la manière suivante:

(i) $\mathbf{Par}^{[j]}[U,u_0] = \{\pi \mid \pi = (U_0,U_1,\ldots,U_j)$ est une partition *ordonnée* de U en (j+1) classes (non-vides), $U_0 = \{u_0\}\}$;

Ensuite, si $\pi = (U_0,U_1,\ldots,U_j)$ est dans $\mathbf{Par}^{[j]}[U,u_0]$, on définit les ensembles $\mathbf{Grs}[\pi]$ et $\mathbf{Sat}[\pi]$ de la manière suivante:

(ii) $\mathbf{Grs}[\pi] = \{G \mid G = (g_0,g_1,\ldots,g_j)$ où, pour tout i, $0 \leq i \leq j$, $g_i \in \mathcal{Grs}[U_i]\}$;

(iii) $\mathbf{Sat}[\pi] = \{S \mid S = (s_0,\ldots,s_{j-1})$ où, pour tout i, $0 \leq i \leq j-1$, $s_i \in \mathbf{Sat}[U_i,U_{i+1}]$;

L'ensemble des triplets (π,G,S) tels que $\pi \in \mathbf{Par}^{[j]}[U,u_0]$, $G \in \mathbf{Grs}[\pi]$ et $S \in \mathbf{Sat}[\pi]$ est dénoté par $\mathbf{Décomp}_j[U;u_0]$. On pose enfin que

$$\mathbf{Décomp}[U;u_0] := \bigcup_{0 \leq j \leq (|u|-1)} \mathbf{Décomp}_j[U;u_0].$$

Proposition 4. Pour tout ensemble fini U et tout $u_0 \in U$ on a, avec les notations de la définition 3

$$\mathcal{Gsc}[U] \cong \mathbf{Décomp}[U;u_0].$$

Dém. Soit $g \in \mathcal{Gsc}[U]$ et $u_0 \in U$. Alors, comme on l'a vu, g définit un unique triplet $(\pi[g,u_0], \mathcal{D}[g,u_0], \mathbb{D}[g,u_0])$. Si $\pi[g,u_0] = (D_0(u_0), D_1(u_0), D_2(u_0),\ldots)$ et si j_0 est l'entier tel que $D_{j_0}(u_0) \neq \emptyset$ et $D_{j_0+1}(u_0) = \emptyset$ alors $\pi[g,u_0]$ est dans $\mathbf{Par}^{[j_0]}[U,u_0]$. On peut alors considérer $\mathcal{D}[g,u_0]$ comme un élément de $\mathbf{Grs}[\pi[g,u_0]]$: en effet, pour $0 \leq t \leq j_0$, $\mathcal{D}_t[g,u_0]$ est un ensemble d'arêtes qui vont toutes de $D_t(u_0)$ dans lui-même, définissant par le fait même un graphe $g_t \in \mathcal{Grs}[D_t(u_0)]$. De même, par la remarque 2, on a que $\mathbb{D}[g,u_0]$ est un élément de $\mathbf{Sat}[\pi[g,u_0]]$.

Réciproquement, supposons $(\pi,G,S) \in \mathbf{Décomp}_j[U;u_0]$, pour un certain j fixé. Lorsqu'on réunit les arêtes de G et celles de S on obtient un graphe sur U. La famille S des saturations nous assure que ce graphe est bien connexe. Ces constructions sont bien inverses l'une de l'autre. ∎

4) La série indicatrice des graphes connexes: pgcd(ß) = 1.

Proposition 5. Soit ß une permutation telle que le pgcd(ß) = 1. Soit $(\delta,\Delta)\in ß\text{-}\mathcal{G}rs$. Alors il suffit que δ soit connexe pour que $\Gamma^{-1}(\delta,\Delta)$ soit connexe.

Preuve. La preuve se déduit immédiatement de la proposition 3 et du corollaire 2. ∎

Théorème 1. Soit ß une permutation de [n] de type $1^{ß_1} 2^{ß_2} \ldots n^{ß_n}$. Supposons que l'élément "1" de [n] soit dans A_0, un des cycles de ß, et supposons de plus que $|A_0| = \ell$. Soit ß* la permutation induite de ß en lui enlevant le cycle A_0, c'est-à-dire $ß^* = ß \backslash A_0$. Notons que ß* est de type $1^{ß_1^*} 2^{ß_2^*} \ldots n^{ß_n^*}$ où $ß_i^* = ß_i - 1$, si $i = \ell$, et $ß_i^* = ß_i$ autrement. Soit $K = |C(ß)|$ et $\overline{K} = K-1$. Lorsque pgcd(ß)=1, alors $\mathbf{fix}_{\mathcal{G}sc}(ß)$ est donné par la formule suivante:

$$\mathbf{fix}_{\mathcal{G}sc}(ß) = \mathbf{fix}_{\mathcal{G}rs}(\ell^1) \times \sum_{k=1}^{\bar{K}} \sum_{[\alpha_{ts}]} \left(\prod_{s=1}^{n} \binom{ß_s^*}{\alpha_{1,s},\alpha_{2,s},\ldots,\alpha_{k,s}} \prod_{t=1}^{k} \mathbf{fix}_{\mathcal{G}rs}(1^{\alpha_{t,1}} 2^{\alpha_{t,2}} \cdots n^{\alpha_{t,n}}) \right.$$

$$\left. \prod_{s=1}^{n} (2^{\mathrm{pgcd}(\ell,s)} - 1)^{\alpha_{1,s}} \times \prod_{t=1}^{k-1} \prod_{s=1}^{n} \left(2^{\sum_{m=1}^{n} \mathrm{pgcd}(s,m)\alpha_{t,m}} - 1 \right)^{\alpha_{(t+1),s}} \right).$$

où la somme est indicée par la matrice $[\alpha_{t,s}]_{1\le t\le k, 1\le s\le n}$ telle que, pour tout s, $\Sigma_{1\le t\le k}\alpha_{t,s} = ß_s^*$ et, pour tout t, $\Sigma_{1\le s\le n}\alpha_{t,s} > 0$.

Preuve. Par la proposition 5 on a $ß\text{-}\mathcal{G}sc = \{(\delta,\Delta)\in ß - \mathcal{G}rs \mid \delta \text{ est connexe}\}$. C'est ce dernier ensemble de couples que nous énumérons ici.

Avec A_0 jouant, dans les hypothèses de la proposition 4 le rôle de u_0, on se donne tous les graphes connexes δ sur $C(\beta)$ et on complète le calcul, pour chacun des graphes δ , en déterminant le nombre de possibilités que l'on a de définir $\Delta(\delta) = \prod_{\{\delta_1,\delta_2\}\in\delta} \Delta(\{\delta_1,\delta_2\})$.

Si $\overline{K} = 0$, alors β est l'identité sur un ensemble à un élément, $\mathbf{fix}_{\mathcal{G}sc}(\beta) = 2^0 = 1$ et la formule est vraie, puisqu'il n'y a qu'un seul graphe simple sur 1 sommet et qu'il est laissé fixe par β.

Pour $\overline{K} \geq 1$, fixons k, $1 \leq k \leq \overline{K}$. On détermine une partition ordonnée de $C(\beta^*)$ en k classes $F = (F_1,F_2,\ldots,F_k)$. On a

$$\sum_{[\alpha_{ts}]} \left(\prod_{s=1}^{n} \binom{\beta_s^*}{\alpha_{1,s},\alpha_{2,s},\ldots,\alpha_{k,s}} \right)$$

manières de faire le choix de la partition F où la matrice$[\alpha_{t,s}]_{1\leq t\leq k, 1\leq s\leq n}$ est telle que, pour tout s, $\Sigma_{1\leq t\leq k}\alpha_{t,s} = \beta_s^*$ et, telle que pour tout t, puisque ces classes sont non-vides, $\Sigma_{1\leq s\leq n}\alpha_{t,s} > 0$.

Une fois les classes choisies on doit, pour tout t, $0 \leq t \leq k\text{-}1$, ($F_0 = \{A_0\}$) choisir des saturations de F_t dans F_{t+1}. C'est-à-dire que pour chaque cycle D de F_{t+1} on doit choisir au moins un cycle D' de F_t tel que l'arête$\{D',D\}$ soit dans δ. Si t = 0, chaque cycle de F_1 doit être en relation (d'une manière ou d'une autre) avec A_0. On a donc

$$\prod_{s=1}^{n} \left(2^{\mathrm{pgcd}\,(\ell,s)} - 1\right)^{\alpha_{1,s}}$$

choix pour définir la restriction de Δ à la saturation de F_0 dans F_1. Par le même genre d'arguments on voit facilement comment, pour dénombrer l'ensemble des choix pour la restriction de Δ aux saturations r_t de F_t dans F_{t+1}, t variant ici de 1 à k-1, on obtient le terme

$$\prod_{t=1}^{k-1} \prod_{s=1}^{n} \left(\sum_{(\nu_{t,m})} \prod_{m=1}^{n} \binom{\alpha_{t,m}}{\nu_{t,m}} \left(2^{\mathrm{pgcd}(s,m)} - 1\right)^{\nu_{t,m}} \right)^{\alpha_{t+1,s}}$$

où la suite $(\nu_{t,m})$ est telle que $\Sigma_{1\leq m\leq n} \nu_{t,m} > 0$. On remarque au passage, avec cette dernière condition, qu'on a bien l'identité suivante:

$$\sum_{(\nu_{t,m})} \prod_{m=1}^{n} \binom{\alpha_{t,m}}{\nu_{t,m}} \left(2^{\mathrm{pgcd}\,(s,m)} - 1\right)^{\nu_{t,m}} = \left(\prod_{m=1}^{n} 2^{\mathrm{pgcd}\,(s,m)\,\cdot\,\alpha_{t,m}} \right) - 1 \quad .$$

Pour terminer le calcul, il ne reste qu'à déterminer le cardinal de l'ensemble des choix pour la restriction de Δ aux divers graphes g_t (arbitraires) sur F_t, t variant de 0 à k. Ce nombre est évidemment donné par l'expression suivante:

$$\mathbf{fix}_{\mathcal{G}rs}\,(\ell^1) \times \left(\prod_{t=1}^{k} \mathbf{fix}_{\mathcal{G}rs}\,\left(1^{\alpha_{t,1}} 2^{\alpha_{t,2}} \cdots\, n^{\alpha_{t,n}}\right) \right) .$$

■

5) La série indicatrice des graphes simples connexes: le cas général.

Comme le montre l'exemple 2, il ne suffit pas, si $(\delta,\Delta)\in \beta$-$\mathcal{G}rs$, que δ soit connexe pour que $\Gamma^{-1}(\delta,\Delta)$ le soit. En fait, dès que pgcd(β) $\neq$ 1, on peut toujours, quelque soit le graphe connexe $\delta\in \mathcal{G}sc[C(\beta)]$, construire (au moins) un couple (δ,Δ) tel que $\Gamma^{-1}(\delta,\Delta)$ soit disconnexe, en choisissant soigneusement Δ.

Toutefois, ici, lorsqu'on veut trouver $\mathbf{Fix}_{\mathcal{G}sc}$ (β) pour une permutation β arbitraire, on commence quand même par construire l'ensemble $\{(\delta,\Delta)\in \beta$ - $\mathcal{G}rs \mid \delta$ est connexe$\}$, que nous dénoterons β - $\mathcal{G}rs\delta c$, puisque β - $\mathcal{G}sc$ y est inclus. On identifie ensuite (via Γ^{-1}) l'ensemble des graphes disconnexes qu'il contient et on lui soustrait ce dernier pour ne trouver finalement que les graphes connexes désirés.

Supposons $(\delta,\Delta)\in ß$ - $\mathcal{G}rs\delta c$ tel que NCC$(\delta,\Delta) = q \geq 1$. Alors, évidemment, q divise pgcd(ß). Pour alléger l'écriture, convenons de dire que (δ,Δ) est *q-déconnecté* lorsque q *divise* NCC(δ,Δ) et posons, pour toute permutation ß de [n] et tout nombre entier d>0, que Dis(d,ß) := $|\{(\delta,\Delta)\in ß - \mathcal{G}rs\delta c$: d divise NCC$(\delta,\Delta)\}|$. Notons que Dis(1,ß) = $|ß - \mathcal{G}rs\delta c\,|$.

Si $(\delta,\Delta)\in ß - \mathcal{G}rs\delta c$ est q-déconnecté et si p est un nombre premier qui divise q alors (δ,Δ) est aussi p-déconnecté. Ainsi on a

$$ß - \mathcal{G}sc = ß - \mathcal{G}rs\delta c \setminus \cup_{q|pgcd(ß),q>1}\{(\delta,\Delta)\in ß - \mathcal{G}rs\delta c \mid (\delta,\Delta) \text{ est q-déconnecté}\}$$

$$= ß - \mathcal{G}rs\delta c \setminus \cup_{p|pgcd(ß),p\ premier}\{(\delta,\Delta)\in ß - \mathcal{G}rs\delta c \mid (\delta,\Delta) \text{ est p-déconnecté}\}. \quad (8)$$

La dernière réunion n'est pas disjointe en général. Par exemple, si p_1 et p_2 sont deux nombres premiers distincts et si (δ,Δ) est $(p_1\cdot p_2)$-déconnecté alors (δ,Δ) est à la fois p_1-déconnecté et p_2-déconnecté. C'est d'ailleurs en cherchant à trouver la cardinalité de ß - $\mathcal{G}sc$ à l'aide de (8) qu'apparaît le processus d'inclusion-exclusion déjà annoncé. En effet, on obtient clairement l'identité suivante:

$$|ß - \mathcal{G}sc| = |ß - \mathcal{G}rs\delta c\,| - \sum_{\substack{p|pgcd(ß)\\ p\ premier}} Dis(p,ß) + \sum_{\substack{p_1p_2|pgcd(ß)\\ p_1,p_2\ des\ premiers\ distincts}} Dis(p_1p_2,ß) - \sum_{\substack{p_1p_2p_3|\ pgcd(ß)\\ p_1,p_2,p_3\ des\ premiers\ distincts}} Dis(p_1p_2p_3,ß) + \cdots \quad (9)$$

Théorème 2. Pour tout n≥1 et toute permutation ß de [n], on a

$$fix_{\mathcal{G}sc}(ß) = \sum_{d|\ pgcd(ß)} \mu(d)\cdot Dis\,(d,ß)\ . \quad (10)$$

Preuve. Par (9) et par la définition de ß - $\mathcal{G}sc$, la preuve est immédiate. ■

Pour terminer le calcul général de $\mathbf{fix}_{\mathcal{G}_{sc}}(\beta)$, il ne reste plus qu'à trouver, pour toute permutation ß et tout d divisant pgcd(ß), les divers Dis(d,ß). C'est que nous faisons dans ce qui suit.

Par la proposition 3 et le corollaire 2 on a que (δ,Δ) est q-déconnecté, pour un certain entier $q > 0$, si, et seulement si, pour toute arête $\{A,B\}$ dans δ, $(\delta_{|\{A,B\}},\Delta_{|\{A,B\}})$ est q-déconnecté. A ce sujet on a la proposition suivante:

Proposition 6. Soit ß une permutation de [n] constituée des cycles A et B où $|A| = a$, $|B| = b$, $A = (a_0,a_1,a_2,\ldots)$, $B = (b_0,b_1,b_2,\ldots)$. Supposons que δ soit le graphe simple sur C(ß) constitué de la seule arête $\{A,B\}$ et soit $q > 0$ est un entier divisant pgcd(a,b) $= k$. Alors il y a

$$q\cdot(2^{(\mathrm{pgcd}(a,b)/q)}-1) \tag{11}$$

et, (resp.)

$$q\cdot(2^{\left\lfloor \frac{a}{2q} \right\rfloor}-1) \tag{12}$$

manières de définir $\Delta(\delta)$ pour faire en sorte que (δ,Δ) soit q-déconnecté lorsque $A \neq B$ et (resp.) $A=B$.

Preuve. Supposons d'abord que $A \neq B$ et que pour un certain entier m, $0 \leq m < k/q$, $\mathcal{O}_{<\beta>}(\{a_0,b_{mq}\})$ soit dans $\Delta(\delta)$ déterminant ainsi pgcd(a,b) composantes connexes dans $\Gamma^{-1}(\Delta,\delta)$. Remarquons maintenant que si $\mathcal{O}_{<\beta>}(\{a_0,b_{rq}\}) = \mathcal{O}_{<\beta>}(\{a_0,b_{sq}\})$ et si $0 \leq r,s < k/q$, alors $r = s$. De plus, si $\Delta(\delta)$ est constitué d'un sous-ensemble non-vide arbitraire de $\{\mathcal{O}_{<\beta>}(\{a_0,b_{mq}\}) \mid 0 \leq m < k/q\}$ alors (δ,Δ) est q-déconnecté. D'autre part, si on ajoute à l'image $\Delta(\delta)$ une orbite $\mathcal{O}_{<\beta>}(\{a_0,b_t\})$ telle que $\mathcal{O}_{<\beta>}(\{a_0,b_t\}) \notin \{\mathcal{O}_{<\beta>}(\{a_0,b_{mq}\}) \mid 0 \leq m < k/q\}$ alors (δ,Δ) n'est pas q-déconnecté.

Ainsi, avec l'orbite $\mathcal{O}_{<\beta>}(\{a_0, b_{mq}\})$ comme "orbite initiale" (puisqu'il en faut au moins une) on obtient k/q = pgcd(a,b)/q orbites possibles qui permettent de q-déconnecter (δ,Δ), ce qui mène à un total de $2^{(pgcd(a,b)/q)}-1$ manières de déterminer Δ(δ) qui q-déconnectent (δ,Δ). Puisque ce calcul est valide en choisissant n'importe quelle orbite initiale $\mathcal{O}_{<\beta>}(\{a_0, b_{i+hq}\})$, $0 \leq i < q$, $0 \leq h < k/q$, on a au total

$$q\cdot(2^{(pgcd(a,b)/q)}-1)$$

manières de déterminer Δ(δ) qui q-déconnectent (δ,Δ).

Enfin, si A = B, c'est-à-dire que l'arête de δ est une boucle en A, alors on voit bien, en raisonnant de la même manière qu'il y a

$$q\cdot(2^{\left\lfloor \frac{a}{2q} \right\rfloor}-1)$$

manières de choisir Δ(δ) qui q-déconnectent (δ,Δ). ■

Nous venons de calculer, lorsque δ est le graphe simple constitué de la seule arête {A,B} le nombre de manières que l'on a de définir Δ(δ) qui font en sorte que (δ,Δ) est q-déconnecté.

Ici, une mise en garde s'impose. Les expressions trouvées en (10) et (11) tiennent compte du choix d'une orbite initiale $\mathcal{O}_{<\beta>}(\{a_0, b_{i+hq}\})$, $0 \leq i < q$, $0 \leq h < k/q$. Cette orbite initiale peut être représentée par l'unique point b_j de B tel que j est le plus petit indice pour lequel l'arête $\{a_0, b_j\}$ est dans cette orbite initiale.

Lorsqu'on construit, en général, un couple (δ,Δ) de ß - $\mathcal{G}rs\delta_{\mathcal{C}}$, q-déconnecté pour un certain q ≥ 1, on doit aussi déterminer certaines "orbites initiales". Il faut et suffit d'en déterminer une pour chacun des cycles de ß* où ß* a été définie dans l'énoncé du théorème 1. Chacune de ces orbites initiales doit bien sûr faire partie de l'image $\Delta(\delta_{|\{A,B\}})$ d'une certaine arête {A,B} du graphe δ. Remarquons que le choix de cette arête "privilégiée" {A,B} n'est pas unique en général. En effet, il pourrait y

Ainsi, avec l'orbite $\mathcal{O}_{<\beta>}(\{a_0,b_{mq}\})$ comme "orbite initiale" (puisqu'il en faut au moins une) on obtient k/q = pgcd(a,b)/q orbites possibles qui permettent de q-déconnecter (δ,Δ), ce qui mène à un total de $2^{(pgcd(a,b)/q)}-1$ manières de déterminer Δ(δ) qui q-déconnectent (δ,Δ) . Puisque ce calcul est valide en choisissant n'importe quelle orbite initiale $\mathcal{O}_{<\beta>}(\{a_0,b_{i+hq}\})$, $0 \le i < q$, $0 \le h < k/q$, on a au total

$$q\cdot(2^{(pgcd(a,b)/q)}-1)$$

manières de déterminer Δ(δ) qui q-déconnectent (δ,Δ).

Enfin, si A = B, c'est-à-dire que l'arête de δ est une boucle en A, alors on voit bien, en raisonnant de la même manière qu'il y a

$$q\cdot(2^{\left\lfloor \frac{a}{2q} \right\rfloor}-1)$$

manières de choisir Δ(δ) qui q-déconnectent (δ,Δ). ■

Nous venons de calculer, lorsque δ est le graphe simple constitué de la seule arête {A,B} le nombre de manières que l'on a de définir Δ(δ) qui font en sorte que (δ,Δ) est q-déconnecté.

Ici, une mise en garde s'impose. Les expressions trouvées en (10) et (11) tiennent compte du choix d'une orbite initiale $\mathcal{O}_{<\beta>}(\{a_0,b_{i+hq}\})$, $0 \le i < q$, $0 \le h < k/q$. Cette orbite initiale peut être représentée par l'unique point b_j de B tel que j est le plus petit indice pour lequel l'arête $\{a_0,b_j\}$ est dans cette orbite initiale.

Lorsqu'on construit, en général, un couple (δ,Δ) de ß - $\mathcal{G}rs\delta c$, q-déconnecté pour un certain q ≥ 1, on doit aussi déterminer certaines "orbites initiales". Il faut et suffit d'en déterminer une pour chacun des cycles de ß* où ß* a été définie dans l'énoncé du théorème 1. Chacune de ces orbites initiales doit bien sûr faire partie de l'image $\Delta(\delta_{|\{A,B\}})$ d'une certaine arête {A,B} du graphe δ. Remarquons que le choix de cette arête "privilégiée" {A,B} n'est pas unique en général. En effet, il pourrait y

Ainsi, avec l'orbite $\mathcal{O}_{<\beta>}(\{a_0,b_{mq}\})$ comme "orbite initiale" (puisqu'il en faut au moins une) on obtient k/q = pgcd(a,b)/q orbites possibles qui permettent de q-déconnecter (δ,Δ), ce qui mène à un total de $2^{(\mathrm{pgcd}(a,b)/q)}-1$ manières de déterminer $\Delta(\delta)$ qui q-déconnectent (δ,Δ) . Puisque ce calcul est valide en choisissant n'importe quelle orbite initiale $\mathcal{O}_{<\beta>}(\{a_0,b_{i+hq}\})$, $0 \le i < q$, $0 \le h < k/q$, on a au total

$$q\cdot(2^{(\mathrm{pgcd}(a,b)/q)}-1)$$

manières de déterminer $\Delta(\delta)$ qui q-déconnectent (δ,Δ).

Enfin, si A = B, c'est-à-dire que l'arête de δ est une boucle en A, alors on voit bien, en raisonnant de la même manière qu'il y a

$$q\cdot(2^{\left\lfloor \frac{a}{2q} \right\rfloor}-1)$$

manières de choisir $\Delta(\delta)$ qui q-déconnectent (δ,Δ). ■

Nous venons de calculer, lorsque δ est le graphe simple constitué de la seule arête {A,B} le nombre de manières que l'on a de définir $\Delta(\delta)$ qui font en sorte que (δ,Δ) est q-déconnecté.

Ici, une mise en garde s'impose. Les expressions trouvées en (10) et (11) tiennent compte du choix d'une orbite initiale $\mathcal{O}_{<\beta>}(\{a_0,b_{i+hq}\})$, $0 \le i < q$, $0 \le h < k/q$. Cette orbite initiale peut être représentée par l'unique point b_j de B tel que j est le plus petit indice pour lequel l'arête $\{a_0,b_j\}$ est dans cette orbite initiale.

Lorsqu'on construit, en général, un couple (δ,Δ) de ß - $\mathcal{G}rs\delta c$, q-déconnecté pour un certain $q \ge 1$, on doit aussi déterminer certaines "orbites initiales". Il faut et suffit d'en déterminer une pour chacun des cycles de ß* où ß* a été définie dans l'énoncé du théorème 1. Chacune de ces orbites initiales doit bien sûr faire partie de l'image $\Delta(\delta_{|\{A,B\}})$ d'une certaine arête {A,B} du graphe δ. Remarquons que le choix de cette arête "privilégiée" {A,B} n'est pas unique en général. En effet, il pourrait y avoir, par exemple, une seconde arête $\{A',B\}$ dans δ qui pourrait permettre de définir l'orbite initiale associée au cycle B. Mais cela n'a aucune importance puisque l'ordre dans lequel on détermine les diverses orbites de l'image $\Delta(\delta)$ n'a, lui aussi, précisément, aucune importance.

Si on veut que $(\delta,\Delta) \in ß$ - $\mathcal{G}rs\delta c$ soit q-déconnecté, on a alors $q^{|ß^*|}$ manières de déterminer la totalité des orbites initiales, où $|ß^*|$ est le nombre de cycles dans $ß^*$.

Une fois cette coordonnée initiale déterminée pour tous les cycles de $ß^*$, alors, pour toute arête $\{A,B\}$ dans le graphe δ telle que $|A| = a$ et $|B| = b$, le nombre de manières qu'on a de définir $\Delta(\{A,B\})$ qui font en sorte que (δ,Δ) est q-déconnecté devient respectivement

$$(2^{(\mathrm{pgcd}(a,b)/q)} - 1)$$

(11')

si $A \neq B$ et

$$(2^{\left\lfloor \frac{a}{2q} \right\rfloor} - 1) \qquad (12')$$

si $A=B$.

Notons que cette mise en garde n'était pas nécessaire dans le cas du théorème 1 puisqu'il n'y avait alors que le cas $q = 1$ à considérer.

Proposition 7. Soit ß une permutation de [n] de type $1^{ß_1} 2^{ß_2} \dots n^{ß_n}$. Supposons que l'élément "1" de [n] soit dans C_0, un des cycles de ß et supposons de plus que $|C_0| = \ell$. Soit $ß^*$ la permutation induite de ß en lui enlevant le cycle C_0, c'est-à-dire $ß^* = ß \setminus C_0$. Supposons de même que $ß^*$ soit de type $= 1^{ß_1^*} 2^{ß_2^*} \dots n^{ß_n^*}$, où $ß_i^* = ß_i - 1$, si $i = \ell$, et $ß_i^* = ß_i$ autrement. Soit $K = |C(ß)|$ et $\overline{K} = K-1$. Alors, pour tout entier $d \geq 1$, Dis(d,ß) est donné par la formule suivante:

$$\mathrm{Dis}(d,\beta) = d^{K-1} \sum_{k=1}^{\bar{K}} \sum_{[\alpha_{t,s}]} \left(\prod_{s=1}^{n} \binom{\beta_s^*}{\alpha_{1,s}, \alpha_{2,s}, \ldots, \alpha_{k,s}} \right. \tag{13}$$

$$\times \prod_{s=1}^{n} \left(2^{\frac{\mathrm{pgcd}(\ell,s)}{d}} - 1 \right)^{\alpha_{1,s}} \times \prod_{t=1}^{k-1} \prod_{s=1}^{n} \left(2^{\sum_{m=1}^{n} \alpha_{t,m} \frac{\mathrm{pgcd}(s,m)}{d}} - 1 \right)^{\alpha_{(t+1),s}}$$

$$\left. \times 2^{\left\lfloor \frac{\ell}{2d} \right\rfloor} \times \prod_{t=1}^{k} 2^{\sum_{1 \le u < v \le n} \alpha_{t,u}\, \alpha_{t,v} \frac{\mathrm{pgcd}(u,v)}{d} + \sum_{u=1}^{n} \frac{u}{d} \frac{\alpha_{t,u}(\alpha_{t,u}-1)}{2} + \sum_{u=1}^{n} \alpha_{t,u} \left\lfloor \frac{u}{2d} \right\rfloor} \right)$$

où la somme est indicée par la matrice $[\alpha_{t,s}]_{1 \le t \le k, 1 \le s \le n}$ telle que, pour tout s, $\Sigma_{1 \le t \le k} \alpha_{t,s} = \beta_s^*$ et, pour tout t, $\Sigma_{1 \le s \le n} \alpha_{t,s} > 0$.

Preuve. Le facteur d^{K-1} énumère le choix des "orbites initiales". Ce qui reste dans formule (13) est, à quelques divisions par d près, exactement la même construction que celle qu'on trouve dans le théorème 1. Remarquons qu'il a fallu donner ici explicitement le terme suivant

$$\times 2^{\left\lfloor \frac{\ell}{2d} \right\rfloor} \times \prod_{t=1}^{k} 2^{\sum_{1 \le u < v \le n} \alpha_{t,u}\, \alpha_{t,v} \frac{\mathrm{pgcd}(u,v)}{d} + \sum_{u=1}^{n} \frac{u}{d} \frac{\alpha_{t,u}(\alpha_{t,u}-1)}{2} + \sum_{u=1}^{n} \alpha_{t,u} \left\lfloor \frac{u}{2d} \right\rfloor}$$

qui est le "(divisé par d)-analogue" du terme

$$\mathbf{fix}_{\mathcal{G}rs}\,(\ell^1) \times \left(\prod_{t=1}^{k} \mathbf{fix}_{\mathcal{G}rs}\,(1^{\alpha_{t,1}} 2^{\alpha_{t,2}} \cdots n^{\alpha_{t,n}}) \right).$$

Le calcul de ce dernier terme étant déjà connu (voir [CL2],[Da]), la démonstration est terminée. ■

Théorème 3. Soit β une permutation de [n] de type $1^{\beta_1} 2^{\beta_2} \ldots n^{\beta_n}$. Supposons que l'élément "1" de [n] soit dans C_0, un des cycles de β et supposons de plus que $|C_0| = \ell$. Soit β^* la permutation induite de β en lui enlevant le cycle C_0, c'est-à-dire $\beta^* = \beta \setminus C_0$. Supposons de même que β^* soit de type $= 1^{\beta_1^*} 2^{\beta_2^*} \ldots n^{\beta_n^*}$, où $\beta_i^* = \beta_i - 1$, si $i = \ell$, et $\beta_i^* = \beta_i$ autrement. Soit $K = |C(\beta)|$ et $\overline{K} = K-1$. Alors le nombre de graphes *orientés* connexes fixés par β, $\mathrm{fix}_{\mathcal{G}r\chi}(\beta)$, est donné par la formule suivante:

$$\mathrm{fix}_{\mathcal{G}r\chi}(\beta) = \sum_{d \mid \mathrm{pgcd}(\beta)} \frac{\mu(d)}{d} \, d^{K} \times 2^{\ell/d} \times \prod_{s=1}^{n} \left(4^{\frac{(\ell,s)}{d}} - 1\right)^{\alpha_{1,s}}$$
$$\times \sum_{k=1}^{\bar{K}} \sum_{[\alpha_{ts}]} \left(\prod_{s=1}^{n} \binom{\beta_s^*}{\alpha_{1,s}, \alpha_{2,s}, \ldots, \alpha_{k,s}} \right) \prod_{t=1}^{k} 2^{\sum_{u,v=1}^{n} \alpha_{t,u} \alpha_{t,v} \frac{(u,v)}{d}}$$
$$\times \prod_{t=1}^{k-1} \prod_{s=1}^{n} \left(\sum_{(\nu_{t,m})} \prod_{m=1}^{n} \binom{\alpha_{t,m}}{\nu_{t,m}} \left(4^{\frac{(s,m)}{d}} - 1\right)^{\nu_{t,m}} \right)^{\alpha_{t+1,s}} .$$

Preuve. La preuve est laissée au lecteur. ■

Remarque 3. Dans [Lg1], p. 200, Gilbert Labelle donne la formule suivante: si M et N sont deux espèces telles que $M = \mathcal{E}xp\,(N)$ alors

$$Z_N(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \sum_{k \geq 1} \frac{\mu(k)}{k} \log Z_M(x_k, x_{2k}, x_{3k}, \ldots) .$$

Puisque $\mathcal{G}rs = \mathcal{E}xp\,(\mathcal{G}sc)$, on obtient alors

$$Z_{\mathcal{G}sc}(x_1,x_2,x_3,\ldots) = \sum_{k\geq 1} \frac{\mu(k)}{k} \log Z_{\mathcal{G}rs}(x_k,x_{2k},x_{3k},\ldots) \ .$$

D'autre part on a par (10) et par définition de série indicatrice que

$$Z_{\mathcal{G}sc}(x_1,x_2,x_3,\ldots) = \sum_{\beta}\left(\sum_{d|\mathrm{pgcd}(\beta)} \mu(d)\ \mathrm{Dis}(d,\beta)\ \frac{x^{\beta}}{\mathrm{aut}(\beta)} \right)$$

$$= \sum_{k\geq 1} \frac{\mu(k)}{k} \left(\sum_{\substack{\beta \\ k\,|\,\mathrm{pgcd}(\beta)}} k\cdot\mathrm{Dis}(k,\beta)\ \frac{x^{\beta}}{\mathrm{aut}(\beta)} \right) \qquad (14)$$

où $x^{\beta} = x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \ldots x_n^{\beta_n}$ et $\mathrm{aut}(\beta) = 1^{\beta_1}\beta_1!\cdot 2^{\beta_2}\beta_2!\cdot \ldots \cdot n^{\beta_n}\beta_n!$. Maintenant, puisque, dans (14), $k \mid \mathrm{pgcd}(\beta)$, on a que x^{β} est de la forme $x^{\beta} = x_k^{\beta_k} x_{2k}^{\beta_{2k}}\ldots$ Il est donc raisonnable de faire la conjecture suivante:

$$\log Z_{\mathcal{G}rs}(x_k,x_{2k},x_{3k},\ldots) = \left(\sum_{\substack{\beta \\ k\,|\,\mathrm{pgcd}(\beta)}} k\cdot\mathrm{Dis}(k,\beta)\ \frac{x^{\beta}}{\mathrm{aut}(\beta)} \right).$$

Bibliographie

[B] **F. Bergeron**, *Une combinatoire du pléthysme* , Journal of Combinatorial Theory, Series A, Vol 46, no.2, **1987**, 291-305.

[Ca] **C.C. Cadogan**, *The Möbius Function and Connected Graphs* , Journal of Combinatorial Theory, 11, 193-200 (**1971**).

[Co1] **I. Constantineau**, *Théorie des espèces et endofonctions* , Mémoire de Maîtrise, UQAM, **1987**.

[CL1] **I. Constantineau et J. Labelle**, *Calcul combinatoire du nombre d'endofonctions et d'arborescences laissées fixes par l'action d'une permutation,* Ann. Sc. Math. du Québec, Vol.XIII, no.2, **1989**.

[CL2] **I. Constantineau et J. Labelle**, *On Combinatorial Sructures Kept Fixed by the Action of a Given Permutation*, Studies in Applied Maths., (à paraître).

[CL3] **I. Constantineau et J. Labelle,** *On the Construction of Permutations of a Given Type Kept Fixed by Conjugation,* J.of Comb.Theo. Series A., (à paraître).

[Da] **R.L. Davis,** *The number of structures of finite relations,* Proc. of the Amer. Math. Soc., Vol. 4, **1953**, 486-494.

[D1] **H. Décoste,** *Séries indicatrices d'espèces pondérées et q-analogues*, Thèse de Ph.D., UQAM et U.de Montréal, **1989**; publication du LACIM, #2, **1990**.

[H&P] **F. Harary et E.M. Palmer.** "Graphical Enumeration", Academic Press, **1973**.

[Lg1] **G. Labelle,** *Some New Computational Methods in the Theory of Species,* dans *Combinatoire Énumérative, Montréal Québec 1985, Proceedings*, G.Labelle et P.Leroux, editors. Lecture Notes in Mathematics no.1234, Springer-Verlag **1986**, 192-209.

[Lg2] **G. Labelle,** *The computation of the cycle index series of some combinatorial species,* Notes: Combinatorial Year, **M.I.T.**, Nov. **1984**.

[Lg3] **G. Labelle,** *The Cyclic Type of Combinatorial Species*, Notes: Special Session on Enumerative Combinatorics, 819th Meeting of the **A.M.S.**, Avril **1985**.

[Lj] **J. Labelle,** *Applications diverses de la théorie combinatoire des espèces de structures,* Ann. Sc. Math. du Québec, 7, no.1, **1983**, 59-94.

[Le] **P. Leroux,** *Methoden der Anzahlbestimmung für einege Klassen von Graphen,* Bayreuther mathematische Schriften; no.26, **1988**, 1-36.

[Ro] **R.W. Robinson,** *Enumeration of non-separable Graphs* , Journal of Combinatorial Theory, 9, 327-356 (**1970**).

Ivan Constantineau
Université du Québec à Montréal
Case postale 8888, Succ. "A"
Montréal, Québec, H3C 3P8, Canada.

Chapitre 5

Similarité dans les modèles combinatoires de polynômes orthogonaux.

Ivan Constantineau (UQAM)

Résumé. Cet article est consacré au calcul combinatoire de coefficients de séries indicatrices de cycles pour certains modèles combinatoires de polynômes orthogonaux.

§ 0. Introduction .

L'objet de cet article est de calculer, pour certaines familles de structures constituant des modèles combinatoires de polynômes orthogonaux, le nombre de structures laissées fixes par l'action d'une permutation donnée en se servant d'une méthode directe que l'on appelle le *principe de similarité* . La plupart des résultats que l'on présente ici ont déjà été trouvés par Hélène Décoste dans sa thèse de doctorat ([De] chapitre 2) en s'appuyant sur des méthodes propres à la théorie des espèces de structures. Notre méthode, plus directe, est fondée sur le principe d'autosimilarité introduit précédemment. On construit les structures voulues pour pouvoir les dénombrer . Il est bon de préciser ici qu'on obtient, grâce à cette dernière façon de procéder, des résultats qu'il semble impossible ou enfin extrêmement difficile d'obtenir autrement. A cet égard, le cas du premier modèle pour les polynômes d'Hermite, traité plus bas dans l'exemple 1 du § 1, est probant.

Pour traiter les modèles combinatoires des polynômes orthogonaux que nous analysons, nous utilisons le cadre des *espèces de structures* et, plus spécialement, celui des espèces de structures *pondérées*. Brièvement, disons qu'une espèce de structures pondérée $\mathcal{Q} = (A, w_{\mathcal{Q}})$ est une règle qui associe à tout ensemble fini U un ensemble fini de *A-structures*, dénoté A[U], muni d'une *fonction de poids* $w_{\mathcal{Q}}$ qui associe à chaque A-structure s un poids $w_{\mathcal{Q}}(s) \in R$ où R est ici une anneau commutatif unitaire de caractérisque nulle. On pose, pour tout ensemble fini U, $\mathcal{Q}[U] = \Sigma_{s\in A[U]} w_{\mathcal{Q}}(s)$.

Si U et V sont deux ensembles finis et si $f: U \rightarrow V$ est une bijection alors l'espèce $\mathcal{Q}$ prodigue aussi, par définition, une bijection $A[f]: A[U] \rightarrow A[V]$, préservant les poids que l'on appelle le *transport le long de f*, telle que (i) pour tout ensemble fini U, $A[1_U] = 1_{A[U]}$ et (ii) pour tout triplet (U,V,W) d'ensembles finis et toute paire de bijections $f: U \rightarrow V$, $g: V \rightarrow W$, $A[g \circ f] = A[g] \circ A[f]$.

A toute espèce pondérée $\mathcal{Q}$ on peut associer une série génératrice exponentielle que l'on dénote $\mathcal{Q}(x)$ et qui est définie comme suit:

$$\mathcal{Q}(x) = \sum_{n\geq 0} \mathcal{Q}[n] \frac{x^n}{n!} ,$$

où $\mathcal{Q}[n]$ signifie $\mathcal{Q}[[n]]$, avec $[n] = \{1,\ldots,n\}$.

Soit $\{Q_n(t)\}_{n\geq 0}$ une suite de polynômes orthogonaux. On dit que l'espèce $\mathcal{Q}$ est un *modèle combinatoire* pour cette suite de polynômes si, pour tout entier $n \geq 0$ on a $\mathcal{Q}[n] = Q_n(t)$.

On peut définir plusieurs opérations sur les espèces (pondérées), comme la somme, le produit, la composition et la dérivée d'espèces, pour ne citer que les plus importantes. Ces opérations ont évidemment été définies pour que le passage respectivement à la somme, au produit, à la composition et à la dérivée (formelle) des séries soit cohérent.

Pour toute espèce $\mathcal{Q}$, le transport donné par $\mathcal{Q}$ permet de parler de structures à isomorphisme près. Si n est un entier naturel et ß une permutation de [n] on pose

$\mathbf{Fix}_A(\beta) = \{s \in A[U]: A[\beta](s)=s\}$ et $\mathbf{fix}_A(\beta) = |\mathbf{Fix}_A(\beta)|$. De plus, on pose

$$\mathit{fix}_{\mathcal{Q}}(\beta) = \sum_{s \in \mathbf{Fix}_A[\beta]} w_{\mathcal{Q}}(s) .$$

Comme il en est fait mention plus haut dans le premier paragraphe, on calcule dans cet article, de manière directe, pour tout entier n et toute permutation β de [n] les termes $\mathit{fix}_{\mathcal{Q}}(\beta)$ pour certaines espèces pondérées $\mathcal{Q}$. Pour donner une idée du calcul algébrique des $\mathit{fix}_{\mathcal{Q}}(\beta)$ et établir un parallèle entre les deux méthodes on doit maintenant introduire les *séries indicatrices de cycles* (d'espèces pondérées).

Disons d'abord que $\mathit{fix}_{\mathcal{Q}}$ est une fonction de classe. C'est-à-dire que si σ et τ sont deux permutations de même type alors $\mathit{fix}_{\mathcal{Q}}(\sigma) = \mathit{fix}_{\mathcal{Q}}(\tau)$. On peut donc évaluer, pour tout entier $n \geq 0$ et tout *partage* $\underline{\beta}$ de n, $\mathit{fix}_{\mathcal{Q}}(\underline{\beta})$ sans ambiguité en posant $\mathit{fix}_{\mathcal{Q}}(\underline{\beta}) := \mathit{fix}_{\mathcal{Q}}(\beta)$ où β est une permutation de type $\underline{\beta}$. La série indicatrice $Z_{\mathcal{Q}}(x_1, x_2,\ldots)$ en une infinité d'indéterminées est alors définie de la manière suivante:

$$Z_{\mathcal{Q}}(x_1,x_2,\ldots)=\sum_{n\geq 0}\sum_{\sum_{i=1}^{n} i\beta_i=n} \mathit{fix}_{\mathcal{Q}}(\beta_1,\beta_2,\ldots)\,\frac{x_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\cdots}{1^{\beta_1}\beta_1!\cdot 2^{\beta_2}\beta_2!\cdots} .$$

A l'instar des séries génératrices ordinaires on peut maintenant définir les opérations formelles de somme, produit, composition, etc, pour ces séries indicatrices. On a encore ici que les opérations entre espèces sont préservées en passant à ces séries. C'est-à-dire que si $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{B}$ sont deux espèces pondérées alors on a $Z_{\mathcal{Q}} + Z_{\mathcal{B}} = Z_{\mathcal{Q}+\mathcal{B}}$, $Z_{\mathcal{Q}} \cdot Z_{\mathcal{B}} = Z_{\mathcal{Q}\cdot\mathcal{B}}$, $Z_{\mathcal{Q}}(Z_{\mathcal{B}}) = Z_{\mathcal{Q}(\mathcal{B})}$ où $Z_{\mathcal{Q}}(Z_{\mathcal{B}})$ est ici la *composition pléthystique* [Jo].

Ce que nous entendons maintenant par "méthode algébrique" pour trouver les coefficients de séries indicatrices de cycles est un procédé qui se divise en deux étapes:

1. La première consiste à établir d'abord une identité (isomorphisme) au niveau *combinatoire* des espèces de structures. Généralement on décompose, via la somme, le produit, la composition et la dérivée d'espèces [et d'autres opérations plus sophistiquées] des espèces "complexes" en d'autres plus simples déjà bien étudiées.

2. Puis on se ramène au niveau (algébrique) des séries indicatrices de cycles pour finalement (tenter d') isoler les coefficients de la série obtenue.

La méthode que nous utilisons pour calculer les $\mathit{fix}_{\mathcal{Q}}(\beta)$ est directe. On trouve plutôt $\mathit{fix}_{\mathcal{Q}}(\beta)$ en construisant d'abord $\mathbf{Fix}_A(\beta)$ dont on pondère ensuite les structures pour finalement en faire la somme et trouver (par définition de $\mathit{fix}_{\mathcal{Q}}(\beta)$) le résultat souhaité.

Le principe de similarité, dont on fait mention plus haut et qui est à la base de cette approche directe, intervient précisément dans la construction de $\mathbf{Fix}_A(\beta)$. Tous les modèles de polynômes orthogonaux traités ici respectent ce principe.

Le principe d'(auto)-similarité. Soit n un entier naturel, β une permutation de $[n]$, $\mathcal{Q} = (A, w_{\mathcal{Q}})$ une espèce pondérée. On dénote par $C(\beta)$ l'ensemble des cycles constituant la permutation β. On dit de l'espèce $\mathcal{Q}$ qu'elle est *auto-similaire* , ou, simplement *similaire,* ssi pour tout n et toute permutation β de $[n]$, l'ensemble $\mathbf{Fix}_A(\beta)$ des A-structures laissées fixes par β est isomorphe à un ensemble de couples (δ,Δ) où $\delta \in A[C(\beta)]$ (de là l'appellation d'auto-similarité) et où Δ est une construction particulière qui dépend de δ.

Dans le premier exemple de modèle de polynômes orthogonaux que nous examinons plus bas, $\mathbf{H} = (H, w_H)$, concernant les polynômes d'Hermite on fait en détail la construction de $\mathbf{Fix}_H(\beta)$ à l'aide de la similarité. Pour les autres exemples on esquisse seulement cette construction (presque redondante d'un modèle à l'autre) dont le détail est laissé au lecteur.

Nous terminons cette introduction en soulignant l'apparition d'une autre "forme" (pondérée!) d'auto-similarité qui intervient ici. Pour certains modèles $\mathfrak{Q}$ de polynômes orthogonaux on peut utiliser les polynômes associés à $\mathfrak{Q}$ pour exprimer $\mathit{fix}_{\mathfrak{Q}}(\beta)$. On doit alors, bien sûr, ajuster les paramètres du polynôme d'origine, mais le résultat est quand même tout à fait surprenant. En effet, le principe de similarité explique, d'une certaine manière, pourquoi se produit ce phénomène. Il est alors relativement facile, avec cette approche combinatoire "directe", de faire apparaître (lorsque cela est possible) les polynômes en question dans le calcul de $\mathit{fix}_{\mathfrak{Q}}(\beta)$ [c'est ce que nous faisons plus bas]. Il reste cependant à dire que certains modèles $\mathfrak{Q}$ sont tout à fait réfractaires à ce genre de pratique (voir [De]).

§ 1. Exemples.

1. Les polynômes d'Hermite.

On peut définir les polynômes d'Hermite, $H_n(t)$, en posant

$$\sum_{n\geq 0} H_n(t) \frac{x^n}{n!} = e^{2tx-x^2}.$$

Définition 1. [Fo1] L'espèce $\mathbf{H} = (H, w_H)$ est définie en posant, pour tout ensemble fini U, que H[U] est l'ensemble des involutions sur U, c'est-à-dire que $H[U] = \{\rho\in \mathfrak{S}_U \mid \rho^2 = \rho\}$ et, pour toute ρ dans H[U], $w_H(\rho) = (2t)^{\#\text{pts fixes de } \rho} \cdot (-2)^{\#\text{couples de } \rho}$.

Proposition 1. Pour tout entier $n \geq 0$ on a

$$H_n(t) = \mathbf{H}[n] \ .$$

Preuve. Voir [Fo1], [De], [LY89a] ou [Ber 89]. ■

Pour tout ensemble fini U et toute involution g sur U, dénotons par Pf(g) et Co(g) respectivement l'ensemble des points fixes et des couples de g.

Soit τ une involution sur [n] invariante sous conjugaison avec ß, c'est-à-dire que $ß\tau = \tau ß$. Si $x \in C \in C(ß)$, $\tau(x) = y \in D \in C(ß)$, alors pour tout entier k on a $\tau(ß^k(x)) = ß^k(y)$. Donc si $\tau \in \mathbf{Fix}_H[ß]$, il suffit de connaître l'image par τ d'un seul point de C pour déterminer l'image, forcément dans D, de tous les autres points de C. Ainsi l'involution τ induit une endofonction δ ($= \delta_\tau$) bien définie sur C(ß) en posant, pour tous cycles C,D dans C(ß)

$$\delta(C) := D \text{ s'il existe } x \in C, y \in D \text{ tels que } \tau(x) = y.$$

La fonction δ satisfait les trois propriétés **P1,P2,P3** suivantes:

P1. La fonction δ est une involution de C(ß). En effet si $x \in C$ et $\tau(x) = y \in D$ alors $\tau^2(x) = \tau(y) = x$ et, ainsi, $\delta(C) = D$ entraîne que $\delta(D) = C$.

P2. Si $\delta(C) = D$ alors $|C| = |D|$, puisque τ est une permutation de [n].

P3. Si $x \in Pf(\tau)$ et $x \in C \in C(ß)$, alors $C \in Pf(\delta)$.

L'involution τ induit aussi une fonction $\Delta : C(ß) \to [n]$ que l'on définit, pour tout C dans C(ß), par

$$\Delta(C) := \tau(\min(C))$$

[le choix du minimum de C n'est pas indispensable: n'importe quel autre point de C fixé au préalable fait l'affaire].

La fonction Δ a les propriétés **Q1** et **Q2** suivantes:

Q1. Si $C \in Pf(\delta)$ alors on a $\Delta(C) = \min(C)$.

Q2. Si $(x,\tau(x)) \in Co(\tau)$, $x \in C$, $\tau(x) = y \in D$, on considère deux cas: (i) celui où $\tau(x)$ n'est pas dans le même cycle que x et (ii) celui où il l'est. Pour (i) le choix de $\Delta(C)$ est arbitraire dans D. De plus, $\Delta(D)$ est entièrement déterminé par $\Delta(C)$. Pour (ii), $\Delta(C)$ est le point "antipodal" à min(C) dans C. C'est-à-dire que $\Delta(C) = \beta^{|C|/2}(\min(C))$. On remarque ici que ce dernier cas ne peut se produire que si $|C|$ est pair.

Nous venons de montrer que toute involution τ sur [n] invariante sous conjugaison avec β détermine un couple (δ,Δ) où δ est une endofonction de $C(\beta)$ satisfaisant **P1, P2, P3** et Δ est une fonction Δ: $C(\beta) \to [n]$ dotée des propriétés **Q1** et **Q2** décrites plus haut. On dénote ce dernier ensemble de couples par β-H[n].

L'intérêt de la construction que nous venons de faire vient de ce qu'elle est bijective: à tout couple (δ,Δ) décrit dans le paragraphe précédent correspond (réciproquement) une et une seule involution τ sur [n] invariante sous conjugaison avec β. En fait on a obtenu une bijection Γ_H,

$$\Gamma_H : \mathbf{Fix}_H(\beta) \xrightarrow{\sim} \beta\text{-}H[n] \quad ,$$

dont l'inverse, Γ_H^{-1}, peut être décrite de la manière suivante: pour tout (δ,Δ) dans β-H[n], $\Gamma_H^{-1}(\delta,\Delta) = \tau$ ssi pour tout $C \in C(\beta)$ et tout $x \in C$, $\tau(x) = \beta^k(\Delta(\min C))$ lorsque $\beta^k(\min(C)) = x$. Pour trouver $\mathbf{fix}_H(\beta)$, il suffit donc de construire β-H[n] et d'en trouver la cardinalité.

Soit δ une involution donnée sur $C(\beta)$ et soit $C \in C(\beta)$. Le nombre de choix que l'on a pour déterminer $\Delta(C)$ est fonction de la nature de C dans δ de même que de la longueur du cycle C, $|C|$.

A. Supposons d'abord C dans $Pf(\delta)$.

A.1. Si $|C|$ est impair alors, forcément, $\Delta(C) := \min(C)$ et on obtient $|C|$ points fixes dans $\Gamma^{-1}(\delta,\Delta)$ (à partir de C).

A.2. Si $|C|$ est pair alors soit que $\Delta(C) = \min(C)$, soit que $\Delta(C) = \beta^{|C|/2}(\min(C))$. Dans le premier cas on a créé $|C|$ points fixes de $\Gamma_H^{-1}(\delta,\Delta)$, dans le second, $|C|/2$ couples .

B. Si C fait partie d'un couple (C,D) de $Co(\delta)$ alors $|C| = |D|$. En effet en supposant (sans perte de généralité) $|C| > |D|$, on ne pourrait pas définir, quelque soit Δ, $\Delta(D)$ dans C sans que, dans $\Gamma_H^{-1}(\delta,\Delta)$, tous les points de D aient chacun au moins deux images dans C. Lorsque $|C| = |D|$ tout point de D peut être choisi comme image de min(C). On a donc $|C|$ choix pour $\Delta(C)$. Puisque $\Gamma_H^{-1}(\delta,\Delta)$ est une involution, $\Delta(D)$ est déterminé dès que $\Delta(C)$ l'est. Une fois choisie $\Delta(C)$ on a créé $|C|$ couples dans $\Gamma_H^{-1}(\delta,\Delta)$ à partir du couple (C,D).

Le fait que $(C,D) \in Co(\delta)$ implique l'égalité $|C| = |D|$ entraîne que pour tout r, $1 \leq r \leq n$, la restriction de δ à l'ensemble $\beta\langle r\rangle$ des cycles de longueur r de β est elle-même une involution bien définie sur $\beta\langle r\rangle$. Ainsi tout couple (δ,Δ) de β-H[n] détermine un unique n-uplet de couples $((\delta_1,\Delta_1),(\delta_2,\Delta_2),\ldots, (\delta_n,\Delta_n))$ où, pour tout r, $(\delta_r,\Delta_r) \in \beta\langle r\rangle\text{-}H[n_r]$ où n_r est le support de $\beta\langle r\rangle$ et $(\delta_r,\Delta_r)=(\emptyset,\emptyset)$ ssi $\beta\langle r\rangle=\emptyset$. On peut alors écrire que $\beta\text{-}H[n] \cong \prod_{1\leq r\leq n}\beta\langle r\rangle\text{-}H[n_r]$.

Evidemment, on *définit* le poids $w_H(\delta,\Delta)$ de tout élément (δ,Δ) de β-H[n] comme étant celui de $\Gamma_H^{-1}(\delta,\Delta)$, $w_H(\delta,\Delta) := w_H(\Gamma_H^{-1}(\delta,\Delta))$. En faisant la somme des poids de toutes les structures de β-H[n] on trouve, par définition, $\mathit{fix}_H(\beta)$. De plus, pour toute δ dans $H[C(\beta)]$, on pose

$$w_H(\delta) := \sum_{\Delta} w_H(\delta,\Delta) \ ,$$

où la dernière somme est sur l'ensemble des (δ,Δ) possibles lorsque δ est fixée. Evidemment on a l'identité suivante:

$$\mathit{fix}_H(\beta) = \sum_{\delta\in H[C(\beta)]} w_H(\delta) \ .$$

Il est tout à fait remarquable que l'on puisse exprimer ce $\mathit{fix}_{\mathbf{H}}(\beta)$ à l'aide de polynômes d'Hermite, $H_n(t)$, ajustés en conséquence. C'est l'objet de la proposition suivante.

Théorème 1. Le poids total des **H**-structures laissées fixes par ß est donné par l'expression suivante:

$$\mathit{fix}_{\mathbf{H}}(\beta) = \prod_{r=1}^{n} ((-2)^{r-1}r)^{\frac{\beta_r}{2}} H_{\beta_r}(t_r),$$

$$\text{où} \quad t_r = \begin{cases} \dfrac{2^{r-1}t^r}{((-2)^{r-1}r)^{1/2}}, \text{ si r est impair et} \\[2ex] \dfrac{1}{((-2)^{r-1}r)^{1/2}}\left(2^{r-1}t^r - (-2)^{\frac{r}{2}-1}\right), \text{ si r est pair.} \end{cases}$$

Preuve. Soit $(\delta,\Delta) = \prod_{1\le r\le n} (\delta_r,\Delta_r) \in \prod_{1\le r\le n} \beta_r\text{-}H[n_r]$. Fixons r, $1 \le r \le n$. Si $C \in \beta\langle r\rangle$ est dans $\mathrm{Pf}(\delta)$ et si r est impair alors on a $w_{\mathbf{H}}(\delta_{|C}) = (2t)^{|C|} = (2t)^r$, puisque, comme nous l'avons déjà remarqué, on a forcément $\Delta(\min(C)) = \min(C)$ [*on dira alors que C a le poids* $(2t)^r$]. Par contre si r est pair, C peut soit avoir le poids $(2t)^r$, soit le poids $(-2)^{r/2}$, les deux cas s'excluant mutuellement en fonction du choix de l'image $\Delta(C)$. C'est-à-dire que $w_{\mathbf{H}}(\delta_{|(C,D)}) = (2t)^r+(-2)^{r/2}$.

D'autre part, pour tout couple (C,D) de $\mathrm{Co}(\delta_r)$, une fois déterminé $\Delta_r(C)$ [ce qui peut se faire de r manières] le poids des couples obtenus dans $\Gamma_{\mathbf{H}}^{-1}(\delta,\Delta)$ sera de $(-2)^r$. Ainsi, lorsque (C,D) est donné dans $\mathrm{Co}(\delta_r)$ on a que $w_{\mathbf{H}}(\delta_{|(C,D)}) = r\cdot(-2)^r$.

Ainsi on a

$$w_{\mathbf{H}}(\delta_r) = \begin{cases} \left\{[(2t)^r]^{\#\text{pts fixes de }\delta_r}\right\} \cdot \left\{[r\cdot(-2)^r]^{\#\text{couples de }\delta_r}\right\}, \text{ lorsque r est impair,} \\[2ex] \left\{[(2t)^r+(-2)^{r/2}]^{\#\text{pts fixes de }\delta_r}\right\} \cdot \left\{[r\cdot(-2)^r]^{\#\text{couples de }\delta_r}\right\}, \text{ lorsque r est pair.} \end{cases}$$

Supposons maintenant que l'on substitue à t le poids t_r dans $H_n(t)$

$$\text{où}\quad t_r = \begin{cases} \dfrac{2^{r-1}\,t^r}{((-2)^{r-1}r)^{1/2}}\ , \text{ si r est impair et} \\[2ex] \dfrac{1}{((-2)^{r-1}r)^{1/2}}\left(2^{r-1}\,t^r - (-2)^{\frac{r}{2}-1}\right)\ , \text{ si r est pair.} \end{cases}$$

Posons aussi n = $ß_r$. On obtient le polynôme $H_{ßr}(t_r)$, qui donne, *par définition*, la somme des poids de toutes les involutions sur ß<r> où chaque point fixe de ces involutions reçoit le poids $2t_r$ et chaque couple le poids -2. C'est-à-dire que

$$H_{ß_r}(t_r) = \sum_{\delta_r \in H[ß<r>]} \left(2\cdot\left(\frac{A}{((-2)^{r-1}r)^{1/2}}\right)\right)^{\#\text{pts fixes}(\delta_r)} \cdot(-2)^{\#\text{couples}(\delta_r)}\ ,$$

où A = $(2)^{r-1}t^r$ si r est impair et $(2)^{r-1}t^r - (2)^{(r/2)-1}$ si r est pair. Multiplions maintenant $H_{ßr}(t_r)$ par $((-2)^{r-1}r)^{ß_r/2}$. On obtient alors

$$H_{ß_r}(t_r)\cdot((-2)^{r-1}r)^{ß_r/2} = \sum_{\delta_r \in H[ß<r>]} \left(\frac{2A}{((-2)^{r-1}r)^{1/2}}\right)^{\#\text{pts fixes}(\delta_r)} \cdot(-2)^{\#\text{couples}(\delta_r)}\cdot((-2)^{r-1}r)^{ß_r/2},$$

$$= \sum_{\delta_r \in H[ß<r>]} (2A)^{\#\text{pts fixes }(\delta_r)}\cdot((-2)^{r-1}r)^{\frac{ß_r - \#\text{pts fixes}(\delta_r)}{2}}\cdot(-2)^{\#\text{couples}(\delta_r)}$$

$$= \sum_{\delta_r \in H[ß<r>]} (2A)^{\#\text{pts fixes }(\delta_r)}\cdot((-2)^r r)^{\#\text{ couples}(\delta_r)}\ .$$

■

Definition 2.[De] On définit l'espèce $\mathcal{H} = (\mathcal{H}, w_{\mathcal{H}})$ de la manière suivante: pour tout ensemble fini U, une $\mathcal{H}$-structure sur U consiste en une assemblée de flèches (deux à deux disjointes) donnée sur un sous-ensemble de U (de cardinalité paire) et d'une assemblée de points sur les éléments de U qui restent. De plus, pour toute structure s dans $\mathcal{H}[U]$, $w_{\mathcal{H}}(s) = (2t)^{\#\text{points}(s)}\,(-1)^{\#\text{flèches}(s)}$.

Proposition 2. Pour tout entier $n \geq 0$ on a

$$H_n(t) = \mathcal{H}[n] \ .$$

Preuve. Voir [De] p.57. ■

Théorème 2.[De] On a

$$\mathit{fix}_{\mathcal{H}}(\beta) \;=\; i^{\,n-\sum_{v=1}^{n} \beta_v} \prod_{r=1}^{n} r^{\beta_r/2}\, H_{\beta_r}(t_r)$$

où $i = \sqrt{-1}$ et $t_r = (2/i)^{r-1} \cdot (t^r/\sqrt{r})$.

Preuve. Soit k un entier $1 \leq k \leq n$. Soit $(\beta\langle k\rangle\text{-}\mathcal{H})[n_k] = \{(\delta,\Delta) \mid \delta \in \mathcal{H}[\beta\langle k\rangle]$ et $\Delta : \beta\langle k\rangle \to [n]$ est telle que, pour tout C dans $\beta\langle k\rangle$, $\Delta(C) := \min(C)$ si C est un point dans l'assemblée de points de δ et $\Delta(C)$ est arbitrairement choisi dans D si (C,D) est une flèche de $\delta\}$. On a une bijection $\Gamma_{\mathcal{H}} : \mathrm{Fix}_{\mathcal{H}}(\beta) \to \prod_{1\leq k\leq n} \beta\langle k\rangle\text{-}\mathcal{H}[n_k]$, définie de la même manière que dans l'exemple 1. De plus, si, pour tout k et tout (δ,Δ) dans $\beta\langle k\rangle\text{-}\mathcal{H}[n_k]$ on pose $w_{\mathcal{H}}(\delta,\Delta) = [(2t)^k]^{\#\mathrm{points}(\delta)}\,[k(-1)^k]^{\#\mathrm{flèches}(\delta)}$ alors

$$\mathit{fix}_{\mathcal{H}}(\beta) = \prod_{1\leq k\leq n} \;\sum_{(\delta,\Delta)\in \beta\langle k\rangle\text{-}\mathcal{H}[n_k]} w_{\mathcal{H}}(\delta,\Delta) \ .$$

D'autre part, on a

$$i^{\,n-\sum_{v=1}^{n}\beta_v} \prod_{k=1}^{n} k^{\beta_k/2}\, H_{\beta_k}(t_k) = \prod_{k=1}^{n} (-1)^{\frac{(k-1)\cdot\beta_k}{2}} (k)^{\frac{\beta_k}{2}}\, H_{\beta_k}(t_k)$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \left((-1)^{(k-1)}k\right)^{\frac{\beta_k}{2}} \sum_{\delta_k\in H[\beta\langle k\rangle]} \left(2\cdot\left(\frac{2}{i}\right)^{k-1}\cdot\frac{t^k}{\sqrt{k}}\right)^{\#\mathrm{pts\ fixes}(\delta_k)} (-2)^{\#\mathrm{couples}(\delta_r)}$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \sum_{\delta_k\in H[\beta\langle k\rangle]} \left((2t)^k\right)^{\#\ \mathrm{points\ fixes}\ \delta_k} \left(2(-1)^k k\right)^{\#\mathrm{couples}(\delta_k)}$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \sum_{\delta_k \in H[\beta<k>]} \left((2t)^k\right)^{\#\text{ points fixes } \delta_k} \left((-1)^k k\right)^{\#\text{flèches}(\delta_k)} .$$

■

Dans les calculs que nous venons de faire au sujet des deux modèles des polynômes d'Hermite, le poids des involutions laissées fixes par ß dépend de la structure cyclique de ces involutions. Il en va de même pour les modèles des polynômes orthogonaux qui vont suivre. On traitera alors des cas de permutations ou encore de fonctions injectives mais le poids sera encore établi en fonction de la structure cyclique de ces dernières. En fait, le problème qui se pose lorsqu'on construit une permutation (resp. injection) laissée fixe par ß en utilisant le principe de similarité est de pouvoir retrouver la structure cyclique de cette permutation (resp. injection) à partir de la permutation (resp. injection) δ induite sur les cycles de ß. C'est l'objet du lemme suivant.

Lemme 1. Soit $n \geq 0$, ß une permutation de $[n]$ constituée de n/r cycles de longueur r et soit δ une permutation circulaire de ces n/r cycles. Alors, pour tout d divisant r il y a $\varphi(d) \cdot r^{(n/r)-1}$ permutations ayant (r/d) cycles de longueur $(n/r) \cdot d$ qui sont laissées fixes par ß et dont la permutation induite sur les cycles de ß est égale à δ.

Preuve. Pour une preuve détaillée, voir [CL3], lemme 6. Nous illustrons, avec la figure 1, ce qui se passe dans le cas où ß est une permutation d'un ensemble à 12 éléments constituée de 3 cycles C_1, C_2, C_3 de longueur 4. La permutation δ circulaire donnée de C(ß) est $\delta = (C_1, C_2, C_3)$. On veut construire une permutation f laissée fixe par conjugaison avec ß. On a 4 choix pour définir $f(\min(C_1))$ dans C_2, 4 autres pour

$f^2(\min(C_1))$ dans C_3 et 4 pour $f^3(\min(C_1))$ dans C_1. Evidemment il suffit des trois choix $f(\min(C_1))$, $f^2(\min(C_1))$, $f^3(\min(C_1))$ pour déterminer f entièrement. Maintenant, fixons, comme l'indiquent les traits gras de la figure 1, $f(\min(C_1))$ dans C_2 et $f^2(\min(C_1))$ dans C_3. Il n'y a qu'un seul choix ($1 = \varphi(1)$, où φ est la fonction indicatrice d'Euler) pour choisir $f^3(\min(C_1))$ de manière à obtenir 4 cycles de longueur 3 dans f, avec $f(\min(C_1))$ dans C_2 et $f^2(\min(C_1))$ dans C_3 déjà choisis. C'est le cas indiqué par la flèche "a" dans la figure 1. De même ($1 = \varphi(2)$), on n'a qu'un seul choix, la flèche "c" dans la figure 1, qui mène à 2 cycles de longueur 6. Finalement on a 2 choix ($2 = \varphi(4)$) qui mènent à un seul cycle de longueur 12 pour f (les flèches "b" dans la figure 1) [on peut remarquer ici que le compte est bon puisque, pour tout entier n, $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$].

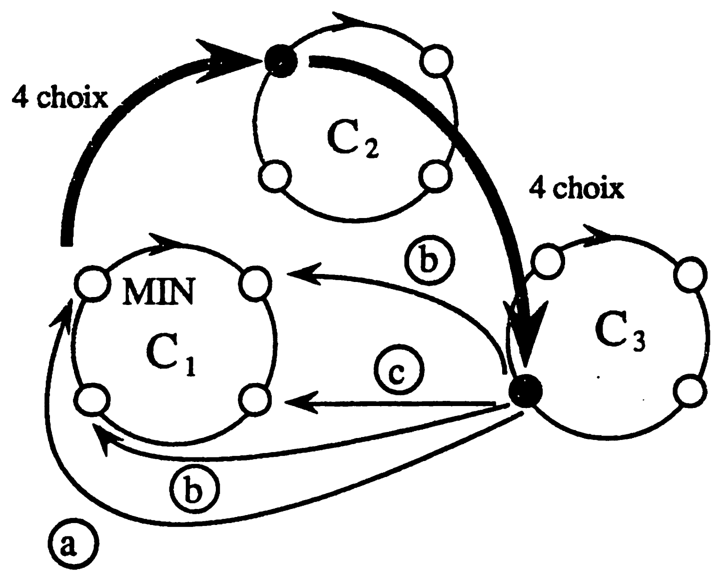


figure 1.

■

Corollaire 1. Soit ß une permutation de [n] constituée de n/r cycles de longueur r et soit δ une permutation circulaire de ces n/r cycles. Soit p un poids dans un anneau commutatif unitaire de caractéristique nulle. Si le poids w(f) d'une permutation f est donné par $w(f) = p^{\#cycles(f)}$ alors le poids total de **toutes** les permutations laissées fixes par ß induisant δ comme permutation sur C(ß) est donné par $r^{(n/r)-1} \cdot \omega_r(p)$ où $\omega_r(p)$ est l'expression suivante:

$$\omega_r(p) = \sum_{d|r} \varphi(d)\, p^{r/d} .$$

Remarque 1. Il est important de noter que le nombre de cycles obtenus ne dépend, avec les notations du lemme 1, que de la longueur r des cycles d'origine, c'est-à-dire que ce nombre ne dépend d 'aucune façon de la longueur du cycle δ que l'on a donné sur les (n/r) cycles de ß.

2. Les polynômes de Laguerre.

On définit les polynômes de Laguerre, $L_n^{(\alpha)}(t)$, en posant

$$\sum_{n\geq 0} L_n^{(\alpha)}(t)\, x^n = (1-x)^{-(1+\alpha)}\, e^{\frac{-tx}{1-x}} .$$

Définition 3. [FS 84] L'espèce $\mathfrak{L} = (\mathfrak{L}, w_{\mathfrak{L}})$ est definie comme suit: pour tout ensemble fini U, $\mathfrak{L}[U]$ consiste en l'ensemble des triplets (f,A,B), dénommés des *configurations de Laguerre*, tels que (i) $A \cup B = U$, $A \cap B = \emptyset$ et (ii) $f{:}A \rightarrow U$ est une fonction injective. De plus, pour tout triplet (f,A,B) dans $\mathfrak{L}[U]$ on pose $w_{\mathfrak{L}}(f,A,B) = (1+\alpha)^{\#cycles(f)}(-t)^{|B|}$.

Proposition 3. Pour tout entier naturel n on a

$$n!\, L_n^{(\alpha)}(t) = \mathfrak{L}[n] .$$

Preuve. Voir [De] p.63, [FS84], [LY89a]. ■

Théorème 3. [De] On a

$$\mathit{fix}_{\mathfrak{B}}(\beta) = \prod_{r \geq 1} r^{\beta_r}\, \beta_r!\; L_{\beta_r}^{(\alpha_r)}(t_r),$$

où $\quad 1+\alpha_r = \frac{1}{r} \sum_{d|r} \varphi(d)\,(1+\alpha)^{r/d}$ et où $t_r = \frac{(-1)^{r-1} t^r}{r}$.

Preuve. Soit r un entier fixé, $1 \leq r \leq n$. Soit $(\beta\langle r\rangle\text{-}\mathfrak{B})[n_r] = \{(\delta,\Delta) \mid \delta \in \mathfrak{B}[\beta\langle r\rangle]$ et $\Delta : \beta\langle r\rangle \to [n]$ est telle que pour tout $\delta = (\eta, V, W) \in \mathfrak{B}[\beta\langle r\rangle]$ et tout cycle C dans V, $\Delta(C)$ est arbitrairement choisi dans $\delta(C)$ et $\Delta(C) := \min(C)$ si C est dans W$\}$. On a une bijection $\qquad \Gamma_{\mathfrak{B}} : \mathbf{Fix}_{\mathfrak{B}}(\beta) \to \prod_{1 \leq r \leq n} \beta\langle r\rangle\text{-}\mathfrak{B}[n_r]$.

Soit $\delta \in \mathfrak{B}[\beta\langle r\rangle]$, $\delta = (\eta, V, W)$. Les cycles de V peuvent être regroupés en deux classes P et Q selon qu'ils font respectivement partie ou non des ordres totaux aboutissant dans W.

Pour tous les cycles C dans P, $\Delta(C)$ est arbitrairement choisi dans $\delta(C)$ et on a alors r manières de déterminer $\Delta(C)$. On a aussi que chaque ordre total T dans $\delta \in \mathfrak{B}[\beta\langle r\rangle]$ induit r ordres totaux dans $\Gamma_{\mathfrak{B}}^{-1}(\delta,\Delta)$ [quelque soit Δ]. De plus, pour tout C dans W, il n'y a qu'un choix pour $\Delta(C)$ $(\Delta(C) := \min(C))$. Ainsi on a que $w_{\mathfrak{B}}(\delta_{|T}) = (-t)^r\, r^{|T|-1}$.

Quant aux éléments de Q, ils constituent, par définition de $\mathfrak{B}[\beta\langle r\rangle]$, le support d'une permutation τ de Q. On a encore, pour tout C dans Q, un choix de $\Delta(C)$ arbitraire dans $\delta(C)$. Prenons K un cycle de τ. Par le corollaire 1, puisque chacun des cycles (dans $\Gamma_{\mathfrak{B}}^{-1}(\delta,\Delta)$) a un poids de $(1+\alpha)$ on obtient évidemment

$$w_{\mathfrak{B}}(K) = r^{|K|} \cdot \left(\frac{1}{r} \sum_{d|r} \varphi(d)\,(1+\alpha)^{r/d} \right) .$$

Ainsi, pour tout r, on a

$$r^{\beta_r}\, \beta_r!\; L_{\beta_r}^{(\alpha_r)}(t_r) = r^{\beta_r} \sum_{(f,A,B) \in \mathfrak{B}[\beta\langle r\rangle]} \left(\frac{1}{r} \sum_{d|r} \varphi(d)\,(1+\alpha)^{r/d} \right)^{\#\mathrm{cycles}(f)} \cdot \left(- \left(\frac{(-1)^{r-1} t^r}{r} \right) \right)^{|B|}$$

$$= \sum_{(f,A,B)\in \mathcal{B}[\beta<r>]} r^{\beta_r - |B| - \#cycles(f)} \left(\sum_{d|r} \varphi(d)\,(1+\alpha)^{r/d}\right)^{\#cycles(f)} \left((-t)^r\right)^{|B|}$$

$$= \mathit{fix}_{\mathcal{B}}(\beta<K>).$$

■

Définition 4. Soit A un anneau commutatif unitaire de caractéristique nulle. Soit $\{c_i\}_{i\geq 1}$ et $\{t_i\}_{i\geq 1}$ deux suites d'éléments de A. On définit l'espèce pondérée $\mathbf{Pie}_{(c_1,c_2,\ldots;\, t_1,\, t_2,\ldots)} = (\mathrm{Pie},\, w_{\mathrm{Pie}})$ en posant pour tout ensemble fini U, que Pie[U] est l'ensemble des pieuvres p sur U (voir [Ber89], [LY86],[De])dont le poids est donné par l'expression $w_{\mathrm{Pie}}(p) = c_i \cdot \prod_j t_j^{\#\text{tentacules de longueur } j \text{ dans } p}$ où i est la longueur du cycle de p et où la longueur d'une tentacule est le nombre de points (sommets) qu'elle contient. L'espèce $\mathbf{Api}_{(c_1,\, c_2,\ldots;\, t_1,\, t_2,\ldots)} = (\mathrm{Api},\, w_{\mathrm{Api}})$ où Api = Exp • Pie est définie en posant que $\mathbf{Api}_{(c_1,\, c_2,\ldots;\, t_1,\, t_2,\ldots)} = \mathbf{Exp} \circ \mathbf{Pie}_{(c_1,\, c_2,\ldots;\, t_1,\, t_2,\ldots)}$.

Théorème 4. Si dans $\mathbf{Api}_{(c_1,\, c_2,\ldots;\, t_1,\, t_2,\ldots)}$, on fixe $c = c_1 = c_2 = c_3 = \ldots$ alors on a

$$\mathit{fix}_{\mathbf{Api}_{(c,c,c,\ldots;\, t_1,t_2,t_3,\ldots)}}(\beta) = \prod_{k=1}^{n} k^{\beta_k} \left|\mathbf{Api}_{(c^{(k)},c^{(k)},c^{(k)},\ldots;\, t_1^k,\, t_2^k,\, t_3^k,\ldots)}[\beta<k>]\right| ,$$

où $c^{(k)} = \frac{1}{k}\ \omega_k(c)$.

Preuve. Pour tout entier k, $1\leq k \leq n$, soit $(\beta<k>\text{-Api})[n_k] = \{(\delta,\Delta) \mid \delta\in \mathrm{Api}[\beta<k>]$ et $\Delta{:}\beta<k>\rightarrow[n]$ est telle que pour tout $\delta\in \mathrm{Api}[\beta<k>]$ et tout C dans $\beta<k>$, $\Delta(C)$ est arbitrairement choisi dans $\delta(C)$. Alors on a une bijection

$$\Gamma_{\mathrm{Api}}: \mathrm{Fix}_{\mathrm{Api}}(\beta)\rightarrow\prod_{1\leq k\leq n} (\beta<k>\text{-Api})[n_k].$$

Chaque tentacule T de longueur j, ($j \geq 1$), dans $\delta \in \mathrm{Api}[\beta\langle k\rangle]$ induit, quel que soit Δ dans (δ,Δ), k tentacules de longueur j dans $\Gamma_{\mathrm{Api}}{}^{-1}|_{\beta\langle k\rangle}(\delta,\Delta)$. Ainsi $w_{\mathrm{Api}}(T) = k^j\cdot(t_j)^k$. De plus, tout cycle C de longueur i dans $\beta\langle k\rangle$ prend le poids $w_{\mathrm{Api}}(C) = k^{i-1}\omega_k(c)$. ■

Définition 5. On définit une famille d'espèce $\{\mathcal{L}^{(n)} = (\mathcal{L}^{(n)}, w_{\mathcal{L}^{(n)}})\}_{n\geq 1}$ en posant, pour tout n et tout ensemble fini U, $\mathcal{L}^{(n)}[U]$ est l'ensemble des quadruplets (A,B,f,g) tels que $A\cup B=U$, $A\cap B=\emptyset$, f est une assemblée de pieuvres à tentacules de longueur $\leq$ n sur A et g est une assemblée d'ordres linéaires non-vide sur B. Pour tout (A,B,f,g) dans $\mathcal{L}^{(n)}[U]$, on pose

$$w_{\mathcal{L}^{(n)}}(A,B,f,g) = \left(\frac{1+\alpha}{n}\right)^{\#\,\text{cycles}(f)} \cdot \prod_{i=1}^{n}\left((-1)^{i+1}\binom{n}{i}\right)^{\#\text{tentacules long. } i\ (f)} \cdot (-t)^{\#\text{ord. lin.}(g)} .$$

Proposition 4. Pour tous entiers $n,m \geq 1$ on a

$$\mathcal{L}^{(n)}[m] = m!\, L_m^{(\alpha)}(t).$$

Preuve.

$$\mathcal{L}^{(n)}(x) = \left(\frac{1}{1-\left(\binom{n}{1}x-\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{3}x^3\cdots\right)}\right)^{\left(\frac{1+\alpha}{n}\right)} \cdot e^{\frac{-tx}{1-x}} = \left(\frac{1}{(1-x)^n}\right)^{\frac{1+\alpha}{n}} e^{\frac{-tx}{1-x}} .$$

■

Remarque 2. On a $\mathcal{L}^{(1)} = \mathfrak{L}$. De plus, bien que, pour tout $n \geq 1$, $\mathcal{L}^{(n)}$ soit une espèce auto-similaire, on ne peut utiliser la famille des polynômes de Laguerre pour exprimer $\mathit{fix}_{\mathfrak{L}}(\beta)$ que dans le cas où n = 1. (On aurait besoin d'un paramètre "n"...).

Proposition 5. Pour tout entier n≥1 on a

$$\mathcal{L}^{(n)} = \mathrm{Api}_{\left(\frac{1+\alpha}{n}, \frac{1+\alpha}{n}, \frac{1+\alpha}{n}, \ldots; \binom{n}{1}, -\binom{n}{2}, \binom{n}{3}, \ldots\right)} \cdot \mathrm{Api}_{(-t,0,0,0,\ldots;\ 1,1,1,\ldots)} \cdot$$

Preuve. La proposition découle immédiatement des définitions 4 et 5. ■

3. Les polynômes de Charlier.

On définit les polynômes de Charlier, $C_n^{(a)}(t)$, en posant

$$\sum_{n\geq 0} C_n^{(a)}(t)\,\frac{x^n}{n!} = \left(1-\frac{x}{a}\right)^t \cdot e^x .$$

Définition 6. Pour définir l'espèce $\mathfrak{C} = (\mathfrak{C}, w_{\mathfrak{C}})$, on pose, pour tout ensemble fini U, que $\mathfrak{C}[U]$ est l'ensemble des couples (A,σ) où A est un sous-ensemble de U et σ est une permutation de A. De plus, quelque soit (A,σ) dans $\mathfrak{C}[U]$, on pose $w_{\mathfrak{C}}(A,\sigma) = (1/a)^{|A|}(-t)^{\#\mathrm{cycles}(\sigma)}$.

Proposition 6. Pour tout entier n ≥ 0 on a

$$C_n^{(a)}(t) = \mathfrak{C}[n] \ .$$

Preuve. Voir [De] p.66. ■

Théorème 5. [De] On a

$$\mathit{fix}_{\mathfrak{C}}(\beta) = \prod_{r\geq 1} C_{\beta_r}^{(a_r)}(t_r) \ ,$$

où $a_r = a^r/r$ et $t_r = (-1/r)\,\omega_r(-t)$.

Preuve. Pour tout entier k, $1 \leq k \leq n$, soit $(\beta\langle k\rangle\text{-}\mathfrak{S})[n_k] = \{(\delta,\Delta) \mid \delta = (A,\sigma) \in \mathfrak{S}[\beta\langle k\rangle]$, $\Delta : \beta\langle k\rangle \to [n]$ est telle que pour tout $\delta \in \mathfrak{S}[\beta\langle k\rangle]$ et tout C dans A, $\Delta(C)$ est arbitrairement choisi dans $\delta(C)$ et $\Delta(C) := \min(C)$ sinon$\}$. Alors on a une bijection $$\Gamma_{\mathfrak{S}} : \mathrm{Fix}_{\mathfrak{S}}(\beta) \to \prod_{1 \leq k \leq n} (\beta\langle k\rangle\text{-}\mathfrak{S})[n_k].$$

Fixons k. Soit $(A,\sigma) \in \mathfrak{S}[\beta\langle k\rangle]$. Il est clair que chaque éléments de A a le poids $(1/a)^k$. De plus chaque cycle de σ de longueur i doit avoir le poids $k^{i-1}\omega_k(-t)$. Ainsi on a

$$\begin{aligned} fix_{\mathfrak{S}}(\beta\langle k\rangle) &= \sum_{(A,\sigma) \in \mathfrak{S}[\beta\langle k\rangle]} k^{|A|-\#cyc(\sigma)} (\omega_k(-t))^{\#cyc(\sigma)} (1/a)^{k|A|} \\ &= \sum_{(A,\sigma) \in \mathfrak{S}[\beta\langle k\rangle]} \left(\frac{k}{a^k}\right)^{|A|} \left(\frac{1}{k}\omega_k(-t)\right)^{\#cyc(\sigma)} \\ &= \sum_{(A,\sigma) \in \mathfrak{S}[\beta\langle k\rangle]} (a_k)^{|A|} (-t_k)^{\#cyc(\sigma)} \quad = \quad C_{\beta_k}^{(a_k)}(t_k) \;. \end{aligned}$$

Définition 7. L'espèce $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, w_{\mathcal{C}})$ est définie de la manière suivante: pour tout ensemble fini U, $\mathcal{C}[U]$ est l'ensemble des quadruplets (A,B,f,g) tels que $A \cup B = U$, $A \cap B = \emptyset$, f est une assemblée de pieuvres sur A et g est une assemblée de points sur B. Pour tout (A,B,f,g) dans $\mathcal{C}[U]$, $w_{\mathcal{C}}(A,B,f,g) = (-1)^{\#tentacules(f)} \cdot (-t)^{\#cycles(f)} \cdot (-1)^{|A|} \cdot (-a)^{|B|}$.

Proposition 7. Pour tout entier $n \geq 0$, on a

$$\mathcal{C}[n] = (-a)^n C_n^{(a)}(t).$$

Preuve. Voir [De] p.68. ■

Proposition 8. On a l'isomorphisme d'espèces pondérées suivant:

$$\mathcal{C} = \mathrm{Api}_{(t,t,t,\ldots;1,-1,1,-1,\ldots)} \cdot e^{-aX}.$$

Preuve. La proposition découle immédiatement des définitions 4 et 7. ■

4. Les configurations de Meixner

Définition 8. L'espèce $\mathcal{M}_{srvu} = (\mathcal{M}, w_{\mathcal{M}_{srvu}})$ des *configurations de Meixner* est définie comme suit: pour tout ensemble U, $\mathcal{M}[U]$ consiste en l'ensemble de tous les quadruplets (A,B,f,τ) tels que $A\cup B=U$, $A\cap B=\emptyset$, $f:A\to U$ est une injection et τ est une permutation de B. Pour tout (A,B,f,τ) dans $\mathcal{M}[U]$ on pose aussi $w_{\mathcal{M}_{srvu}}(A,B,f,\tau) = (s)^{|A|}.(r)^{|B|}.(v)^{\#cycles(f)}.(u)^{\#cycles(\tau)}$.

Définition 9. Pour tout $n \geq 0$, on définit les polynômes $m_n(s,r,v,u)$ par l'équation suivante:

$$\sum_{n\geq 0} m_n(s,r,v,u) \frac{x^n}{n!} = (1 - sx)^{u-v}(1-(s+r)x)^{-u}$$

Proposition 9. Pour tout entier $n \geq 0$ on a

$$\mathcal{M}_{srvu}[n] = m_n(s,r,v,u) .$$

Preuve. Voir [De] p.71. ■

Théorème 6. [De] On a

$$fix_{\mathcal{M}_{srvu}}(\beta) = \prod_{k=1}^{n} k^{\beta_k} m_{\beta_k}(s_k,r_k,v_k,u_k) ,$$

où $u_n = \frac{1}{n}\omega_n(u)$, $v_n = \frac{1}{n}\omega_n(v)$, $s_n = s^n$, $r_n = r^n$.

Preuve. Pour tout entier k, $1\leq k \leq n$, soit $(\beta<k>-\mathcal{M})[n_k] = \{(\delta,\Delta) \mid \delta\in \mathcal{M}[\beta<k>]$ et $\Delta : \beta<k> \to [n]$ est telle que pour tout $\delta\in \mathcal{M}[\beta<k>]$ et tout C dans $\beta<k>$, $\Delta(C)$ est arbitrairement choisi dans $\delta(C)\}$. Alors on a une bijection

$$\Gamma: \mathrm{Fix}_{\mathcal{M}}(\beta) \to \prod_{1\leq k\leq n} (\beta<k>-\mathcal{M})[n_k].$$

Soit k fixé et $\delta = (A,B,f,\tau)\in \mathcal{M}[\beta<k>]$. On a, pour tout C dans $\beta<k>$ que $\Delta(C)$ est arbitrairement choisi dans $\delta(C)$. Maintenant, si G est un cycle de longueur j dans f alors $w_{\mathcal{M}_{srvu}}(\delta_{|G}) = k^{j-1}\omega_k(v)\cdot(s)^{k|G|}$. De même pour un cycle G' de longueur j' dans τ on a $w_{\mathfrak{M}_{srvu}}(\delta_{|G'}) = k^{j'-1}\omega_k(u)\,(r)^{k|G'|}$. On obtient alors

$$fix_{\mathfrak{M}_{srvu}}(\beta\langle k\rangle) = \sum_{(A,B,f,\tau)\in\mathfrak{M}[\beta\langle k\rangle]} k^{\beta_k - \#cyc(f) - \#cyc(\tau)}\, s^{k|A|}\, r^{k|B|}\, (\omega_k(u))^{\#cyc(f)} (\omega_k(v))^{\#cyc(\tau)}$$
$$= k^{\beta_k}\, m_{\beta_k}(s_k, r_k, v_k, u_k)$$

■

Proposition 10. On a l'isomorphisme d'espèces pondérées suivant:

$$\mathfrak{M}_{srvu} = \mathbf{Api}_{(u,u,u,\ldots;r,rs,rs^2,rs^3,\ldots)} \cdot \mathbf{Api}_{(v,v,v,\ldots;s,0,0,0,\ldots)}.$$

Preuve. La proposition découle immédiatement des définitions 4 et 8. ■

5. Les polynômes de Krawtchouk.

Pour définir les polynômes de Krawtchouk, $K_n(t;\, p,N)$, on pose

$$\sum_{n\geq 0} (-N)_n\, p^n\, K_n(t;\, p,N)\, \frac{x^n}{n!} = (1+x(1-p))^t\,(1-px)^{N-t}\ .$$

Définition 10. On définit les espèces **a.** $\mathbf{K} = (K, w_K)$ et **b.** $\mathbf{K1} = (K1, w_{K1})$, de la manière suivante: pour tout ensemble fini U, K[U] = K1[U] = $\{(A,B,\sigma,\tau) \mid A\cup B=U,$ $A\cap B=\emptyset$, σ est une permutation de A et τ est une permutation de B$\}$. De plus, pour tout quadruplet (A,B,σ,τ) dans K[U], (K1[U]), on pose:

a. $w_K\,(A,B,\sigma,\tau) = (t-N)^{\#cycles(\tau)}\,(-t)^{\#cycles(\sigma)}\,(1-1/p)^{|A|}$ et

b. $w_{K1}\,(A,B,\sigma,\tau) = (t-N)^{\#cycles(\tau)}\,(-t)^{\#cycles(\sigma)}\,(p-1)^{|A|}\,p^{|B|}$.

Proposition 11. Pour tout entier $n \geq 0$ on a

a. $\mathbf{K}[n] = (-N)_n\, K_n(t;\, p, N)$ et

b. $\mathbf{K1}[n] = (-N)_n\, p^n K_n(t;\, p, N)$.

Preuve. Voir [De] p.74. ■

Théorème 7. [De] On a

$$\textbf{a.}\ \mathit{fix}_{\mathbf{K}}(\beta) = \prod_{k=1}^{n} k^{\beta_k} (-N_k)_{\beta_k} \, K_{d_k}(t_k;\, p_k, N_k) \quad \text{et}$$

$$\textbf{b.}\ \mathit{fix}_{\mathbf{K1}}(\beta) = \prod_{k=1}^{n} (pk)^{\beta_k} (-N_k)_{\beta_k} \, K_{d_k}(t_k;\, p_k, N_k),$$

où $t_k = -\frac{1}{k}\omega_k(-t)$, $N_k = -\frac{1}{k}(\omega_k(t-N) + \omega_k(-t))$ et $p_k = \dfrac{p^k}{p^k - (p-1)^k}$.

Preuves. **a.** Pour tout entier k, $1 \le k \le n$, soit $(\beta\langle k\rangle - K)[n_k] = \{(\delta,\Delta) \mid \delta \in K[\beta\langle k\rangle]$ et $\Delta : \beta\langle k\rangle \longrightarrow [n]$ est telle que pour tout $\delta \in K[\beta\langle k\rangle]$ et tout C dans $\beta\langle k\rangle$, $\Delta(C)$ est arbitrairement choisi dans $\delta(C)\}$. On a une bijection

$$\Gamma_K : \mathrm{Fix}_K(\beta) \to \Pi_{1 \le k \le n} (\beta\langle k\rangle - K)[n_k].$$

Fixons k. Soit (A,B,σ,τ) dans $K[\beta\langle k\rangle]$. Il est clair que les éléments de A ont le poids $(1-1/p)^k$. De plus chaque cycle de σ de longueur i doit avoir le poids $k^{i-1}\omega_k(-t)$ et chaque cycle de τ (de longueur i) le poids $k^{i-1}\omega_k(t-N)$. Ainsi on a

$$\begin{aligned}
\mathit{fix}_{\mathbf{K}}(\beta\langle k\rangle) &= \sum_{(A,B,\sigma,\tau)\in K[\beta\langle k\rangle]} k^{\beta_k - \#cyc(\sigma) - \#cyc(\tau)} (\omega_k(-t))^{\#cyc(\sigma)} (\omega_k(t-N))^{\#cyc(\tau)} (1-1/p)^{k|A|} \\
&= k^{\beta_k} \sum_{(A,B,\sigma,\tau)\in K[\beta\langle k\rangle]} (1 - 1/p_k)^{|A|} (-t_k)^{\#cyc(\sigma)} (t_k - N_k)^{\#cyc(\tau)} \\
&= k^{\beta_k} (-N)_{\beta_k} K_{\beta_k}(t_k; p_k, N_k)
\end{aligned}$$

b. La preuve est exactement la même qu'en a. au niveau des structures non-pondérées puisque K= K1. Les seules différences se retrouvent au niveau des poids où, maintenant, pour tout (A,B,σ,τ) dans $K1[\beta\langle k\rangle]$, les éléments de A ont chacun le poids $(p-1)^k$ et ceux de B le poids p^k. Le calcul final est sensiblement le même que le précédent et est laissé au lecteur. ■

Définition 11. L'espèce $\mathcal{K} = (\mathcal{K}, w_{\mathcal{K}})$ est définie comme suit: pour tout ensemble fini U, $\mathcal{K}[U]$ est l'ensemble de quadruplets (A,B,s,τ) tels que $A \cup B = U$, $A \cap B = \emptyset$, s est une assemblée de pieuvre sur A et τ est une permutation de B. Pour tout quadruplet (A,B,s,τ) dans $\mathcal{K}[U]$, on pose aussi $w_{\mathcal{K}}(A,B,s,\tau) = (-N)^{\#cycles(\tau)} (-t)^{\#cycles(s)} (1/(p-1))^{\#tentacules(s)} (p-1)^{|A|} p^{|B|}$.

Proposition 12. Pour tout entier $n \geq 0$, on a

$$\mathcal{K}[n] = (-N)_n\, p^n K_n(t;\, p,\, N).$$

Preuve. Voir [De] p.74. ■

Proposition 13. L'espèce $\mathcal{K}$ s'exprime comme le produit suivant d'espèces:

$$\mathcal{K} = \mathbf{Api}_{(t,t,t,\ldots;1,(p-1),\,(p-1)^2,\,(p-1)^3,\ldots)} \cdot \mathbf{Api}_{(-N,-N,-N,\ldots;p,0,0,0,\ldots)}.$$

Preuve. La proposition découle immédiatement des définitions 4 et 11. ■

Définition 12. On définit les espèces **d.** $\mathcal{K} = (\mathcal{K}, w_{\mathcal{K}})$ et **e.** $\mathcal{K}\mathbf{1} = (\mathcal{K}1, w_{\mathcal{K}1})$ à partir des configurations de Meixner où on pose

$$\textbf{d. } \mathcal{K} = \mathfrak{M}_{(1)(-1/p)(-N)(-t)} = \mathfrak{M}_{(s=1)(r=-1/p)(v=-N)(u=-t)} \text{ et}$$
$$\textbf{e. } \mathcal{K}\mathbf{1} = \mathfrak{M}_{(1-1/p)(1/p)(1/p)(t-N)} = \mathfrak{M}_{(s=1-1/p)(r=1/p)(v=-N)(u=t-N)}\,.$$

Proposition 14. Pour tout entier naturel n on a

$$|\mathcal{K}[n]| = |\mathcal{K}\mathbf{1}[n]| = (-N)_n\, K_n(t;\, p,\, N).$$

Preuve. Voir [De] p.74. ■

Théorème 8. **[De]** On a

$$\mathit{fix}_{\mathcal{K}}\,(ß\langle k\rangle) = k^{ß_k}\,(-N_k)_{ß_k}\,K_{ß_k}(t_k;\,p_k,N_k)\,,$$

où $t_k = \frac{1}{k}\,\omega_k(-t)$, $N_k = -\frac{1}{k}\,\omega_k(-N)$, $p_k = (-1)^{k-1}p^k$.

Preuve. Pour tout entier k, $1 \leq k \leq n$, soit $(ß\langle k\rangle\text{-}\mathcal{K})[n_k] = \{(\delta,\Delta) \mid \delta \in \mathcal{K}[ß\langle k\rangle]$ et $\Delta : ß\langle k\rangle \to [n]$ est telle que pour tout $\delta \in \mathcal{K}[ß\langle k\rangle]$ et tout C dans $ß\langle k\rangle$, $\Delta(C)$ est arbitrairement choisi dans $\delta(C)\}$. Alors on a une bijection

$$\Gamma_{\mathcal{K}}: \mathbf{Fix}_{\mathcal{K}}(ß) \to \prod_{1\leq k\leq n} (ß\langle k\rangle\text{-}\mathcal{K})[n_k].$$

Fixons k. Soit (A,B,σ,τ) dans $\mathcal{K}[ß\langle k\rangle]$. Il est clair que les éléments de B ont le poids $(-1/p)^k$. De plus chaque cycle de σ de longueur i doit avoir le poids $k^{i-1}\omega_k(-N)$ et chaque cycle de τ (de longueur i) le poids $k^{i-1}\omega_k(-t)$. Ainsi on a

$$\begin{aligned}\mathit{fix}_{\mathcal{K}}(ß\langle k\rangle) &= \sum_{(A,B,\sigma,\tau)\in \mathcal{M}[ß\langle k\rangle]} k^{ß_k} \left(\frac{1}{k}\,\omega_k(-t)\right)^{\#cyc(\sigma)} \left(\frac{1}{k}\,\omega_k(-N)\right)^{\#cyc(\tau)} (-1/p)^{k|B|} \\ &= k^{ß_k} \sum_{(A,B,\sigma,\tau)\in \mathcal{M}[ß\langle k\rangle]} (-t_k)^{\#cyc(\sigma)}\,(-N_k)^{\#cyc(\tau)}\,(-1/p_k)^{|B|} \\ &= k^{ß_k}\,(-N_k)_{ß_k}\,K_{ß_k}(t_k;\,p_k,N_k)\end{aligned}$$

■

6. Les polynômes de Meixner.

On définit les polynômes de Meixner, $m_n(t;\,\kappa,c)$, en posant

$$\sum_{n\geq 0} m_n(t;\,\kappa,c)\,\frac{x^n}{n!} = \left(1-\frac{x}{c}\right)^{t}(1-x)^{-t-\kappa}\quad .$$

Définition 13. On définit les espèces **a.** $\mathfrak{M} = (\mathfrak{M}, w_{\mathfrak{M}})$ et **b.** $\mathfrak{M}1 = (\mathfrak{M}1, w_{\mathfrak{M}1})$ des *endofonctions de Meixner* de la manière suivante: pour tout ensemble fini U, $\mathfrak{M}[U] = \mathfrak{M}1[U]$ est l'ensemble des triplets (A,B,f) tels que $A \cup B = U$, $A \cap B = \emptyset$ et tels que $f \in \mathcal{End}[U]$ où la restriction de f à A, $f_{|A}: A \rightarrow U$, est injective, et où la restriction de f à B, $f_{|B}: B \rightarrow U$, est une permutation de B. Puis, pour tout triplet (A,B,f) dans $\mathfrak{M}[U]$, on pose

a. $w_{\mathfrak{M}}(A,B,f) = \kappa^{\#cycles(f_{|A})} (-t)^{\#cycles(f_{|B})} ((1/c) - 1)^{|B|}$ et

b. $w_{\mathfrak{M}1}(A,B,f) = \kappa^{\#cycles(f_{|A})} (\kappa+t)^{\#cycles(f_{|B})} ((1/c) - 1)^{|B|} (1/c)^{|A|}$.

Proposition 15. Pour tout entier $n \geq 0$, on a

$$\mathfrak{M}[n] = \mathfrak{M}1[n] = m_n(t;\kappa,c).$$

Preuve. Voir [De] p.81. ■

Théorème 9. [De] On a

$$fix_{\mathfrak{M}}(\beta) = \prod_{i=1}^{n} i^{\beta_i} m_{\beta_i}(t_i,\kappa_i,c_i) \quad ,$$

où $t_i = \frac{1}{i}\omega_i(-t)$, $\kappa_i = \frac{1}{i}\omega_i(\kappa)$ et $c_i = \dfrac{c^i}{c^i + (1-c)^i}$.

Preuve. Pour tout entier i, $1 \leq i \leq n$, soit $(\beta\langle k\rangle\text{-}\mathfrak{M})[n_i] = \{(\delta,\Delta) \mid \delta \in \mathfrak{M}[\beta\langle i\rangle]$ et $\Delta : \beta\langle i\rangle \rightarrow [n]$ est telle que pour tout $\delta \in \mathfrak{M}[\beta\langle i\rangle]$ et tout C dans $\beta\langle i\rangle$, $\Delta(C)$ est arbitrairement choisi dans $\delta(C)\}$. Alors on a une bijection

$$\Gamma_{\mathfrak{M}}: \mathbf{Fix}_{\mathfrak{M}}(\beta) \rightarrow \prod_{1\leq k\leq n} (\beta\langle i\rangle\text{-}\mathfrak{M})[n_i].$$

Fixons i. Soit (A,B,f) dans $\mathfrak{M}[\beta\langle i\rangle]$. Il est clair que les éléments de B ont le poids $(1/c-1)^i$. De plus chaque cycle de longueur r de f qui est dans A doit avoir le poids $i^{r-1}\omega_i(\kappa)$ alors que chaque cycle dans B de longueur s doit avoir le poids i^{s-1} $(-\omega_i(-t))$. Ainsi on a

$$fix_{\mathfrak{M}}(ß\langle i\rangle) = \sum_{(A,B,f)\in \mathfrak{M}[ß\langle i\rangle]} i^{ß_i - \#\mathrm{cyc}(f)} (1/c - 1)^{|B|i} (\omega_i(\kappa))^{\#\mathrm{cyc}(f_{|A})} (-\omega_i(-t))^{\#\mathrm{cyc}(f_{|B})} .$$

$$= \sum_{(A,B,f)\in \mathfrak{M}[ß\langle i\rangle]} i^{ß_i} (1/c_i-1)^{|B|} (\kappa_i)^{\#\mathrm{cyc}(f_{|A})} (t_i)^{\#\mathrm{cyc}(f_{|B})}$$

$$= i^{ß_i} m_{ß_i}(t_i,\kappa_i,c_i) .$$

■

Définition 14. On dénote par $\mathbf{M}=(M,w_M)$ l'espèce définie comme suit: pour tout ensemble fini U on pose $M[U] = \{(A,B,\sigma,\tau) \mid A\cup B=U,\ A\cap B=\emptyset,\ \sigma$ est une permutation de A et τ est une permutation de $B\}$ avec comme un poids défini, pour tout (A,B,σ,τ) dans $M[U]$, par $w_M(A,B,\sigma,\tau) = (1/c)^{|A|} (-t)^{\#\mathrm{cycles}(\sigma)} (t+\kappa)^{\#\mathrm{cycles}(\tau)}$.

Proposition 16. Pour tout entier $n \geq 0$, on a

$$\mathbf{M}[n] = m_n(t; \kappa, c).$$

Preuve. Voir [De] p.81. ■

Théorème 10. [De] On a

$$fix_{\mathbf{M}}(ß) = \prod_{i=1}^{n} i^{ß_i} m_{ß_i}(t_i; \kappa_i, c^i) ,$$

où $t_i = -\frac{1}{i}\omega_i(-t)$ et $\kappa_i = \frac{1}{i}[\omega_i(t+\kappa) + \omega_i(-t)]$.

Preuve. Pour tout entier i, $1\leq i \leq n$, soit $(ß\langle k\rangle\text{-}M)[n_i] = \{(\delta,\Delta) \mid \delta\in M[ß\langle i\rangle]$ et $\Delta : ß\langle i\rangle \rightarrow [n]$ est telle que pour tout $\delta\in M[ß\langle i\rangle]$ et tout C dans $ß\langle i\rangle$, $\Delta(C)$ est arbitrairement choisi dans $\delta(C)\}$. Alors on a une bijection

$$\Gamma_M: \mathrm{Fix}_M(ß) \rightarrow \prod_{1\leq k\leq n} (ß\langle i\rangle\text{-}M)[n_i].$$

Fixons i. Soit (A,B,σ,τ) dans $M[ß\langle i\rangle]$. Il est clair que les éléments de A ont le poids $(1/c)^i$. De plus chaque cycle de longueur r de σ qui est dans A doit avoir le poids

$i^{r-1}\omega_i(-t)$ alors que chaque cycle dans B de longueur s doit avoir le poids i^{s-1} $(\omega_i(t+\kappa))$. Ainsi on a

$$\mathit{fix}_{\mathbf{M}}(\text{ß}<i>) = \sum_{(A,B,\sigma,\tau)\in M[\text{ß}<i>]} i^{\text{ß}_i} (1/c)^{i|A|} \left(\frac{1}{i}\,\omega_i(t+\kappa)\right)^{\#cyc(\tau)} \left(\frac{1}{i}\,\omega_i(-t)\right)^{\#cyc(\sigma)}$$

$$= \sum_{(A,B,\sigma,\tau)\in M[\text{ß}<i>]} i^{\text{ß}_i} (1/c^i)^{|A|} \quad (t_i+\kappa_i)^{\#cyc(\tau)} \, (-t_i)^{\#cyc(\sigma)}$$

$$= i^{\text{ß}_i}\, m_{\text{ß}_i}(t_i;\ \kappa_i, c^i) \quad .$$

■

7. Les polynômes de Meixner-Pollaczek.

Nous définissons les polynômes de Meixner-Pollaczek, $P^a_n(t;\ \varphi)$, par

$$\sum_{n\geq 0} P^a_n(t,\varphi)\, x^n = \frac{(1-xe^{i\varphi})^{-a+it}}{(1-xe^{-i\varphi})^{a+it}} \quad .$$

Définitions 15. Les espèces $\mathbf{P} = (P, w_P)$ et $\mathbf{P1} = (P1, w_{P1})$ sont définies de la manière suivante: pour tout ensemble fini U, on pose que P[U] (= P1[U]) est l'ensemble des quadruplets (A,B,σ,τ) tels que $A\cup B=U$, $A\cap B=\emptyset$, σ est une permutation de A et τ est une permutation de B. Pour les poids, on pose, pour tout quadruplet (A,B,σ,τ) dans P[U],

a. $w_P(A,B,\sigma,\tau) = (e^{-i\varphi})^{|A|} (e^{i\varphi})^{|B|} (a+it)^{\#cycle(\sigma)} (a-it)^{\#cycle(\tau)}$ et

b. $w_{P1}(A,B,\sigma,\tau) = (e^{-2i\varphi})^{|A|} (a+it)^{\#cycle(\sigma)} (a-it)^{\#cycle(\tau)}$.

Proposition 15. Pour tout entier $n \geq 0$, on a

a. $\mathbf{P}[n] = n!P^a_n(t;\ \varphi)$, et

b. $\mathbf{P1}[n] = n!e^{in\varphi}P^a_n(t;\ \varphi)$.

Preuve. Voir [De] p.85. ■

Théorème 11. **[De]** On a

$$\textbf{a}.\ \mathit{fix}_P(\beta) = \prod_{k=1}^{n} k^{\beta_k}\, \beta_k!\, P_{\beta_k}^{a_k}(t_k;\, k\varphi) \quad \text{, et}$$

$$\textbf{b}.\ \mathit{fix}_{P1}(\beta) = e^{in\varphi} \prod_{k=1}^{n} k^{\beta_k}\, \beta_k!\, P_{\beta_k}^{a_k}(t_k;\, k\varphi) \quad ,$$

où $a_k = \frac{1}{2k}(\omega_k(a+it) + \omega_k(a-it))$ et $t_k = \frac{-i}{2k}(\omega_k(a+it) - \omega_k(a-it))$.

Preuves. **a.** Pour tout entier k, $1 \leq k \leq n$, soit $(\beta\langle k\rangle\text{-}P)[n_k] = \{(\delta,\Delta) \mid \delta \in P[\beta\langle k\rangle]$ et $\Delta : \beta\langle k\rangle \longrightarrow [n]$ est telle que pour tout $\delta \in P[\beta\langle k\rangle]$ et tout C dans $\beta\langle k\rangle$, $\Delta(C)$ est arbitrairement choisi dans $\delta(C)\}$. Alors on a une bijection

$$\Gamma_P\text{: } \mathbf{Fix}_P(\beta) \rightarrow \prod_{1\leq k\leq n} (\beta\langle k\rangle\text{-}P)[n_k].$$

Fixons k. Soit (A,B,σ,τ) dans $P[\beta\langle k\rangle]$. La partie A du quadruplet (A,B,σ,τ) doit avoir un poids de $(e^{-i(\varphi k)})^{|A|}$ (et resp., la partie B un poids de $(e^{i(\varphi k)})^{|B|}$) dans $\Gamma^{-1}|_{\beta\langle k\rangle}(A,B,\sigma,\tau)$. De plus, tout cycle de longueur s (resp.t) dans σ (resp. τ) aura comme poids total $k^{s-1}\cdot\omega_n(a+it)$ (resp. $k^{t-1}\cdot\omega_n(a-it)$). On a donc clairement

$$\mathit{fix}_P(\beta\langle k\rangle) = \sum_{(A,B,\sigma,\tau)\in P[\beta_k]} k^{\beta_k - \#cyc(\sigma) - \#cyc(\tau)} (e^{-i\varphi})^{k|A|} (e^{i\varphi})^{k|B|} (\omega_n(a+it))^{\#cyc(\sigma)} (\omega_n(a-it))^{\#cyc(\tau)}$$

$$= \sum_{(A,B,\sigma,\tau)\in P[\beta_k]} k^{\beta_k} (e^{-i\varphi})^{k|A|} (e^{i\varphi})^{k|B|} (a_k+it_k)^{\#cycles(\sigma)} (a_k-it_k)^{\#cycles(\tau)}$$

$$= k^{\beta_k} \beta_k!\, P_{\beta_k}^{a_k}(t_k;k\varphi)$$

b. La preuve est la même qu'en **a.** mis à part le fait que la partie A doit maintenant avoir le poids $(e^{-2i(\varphi k)})^{|A|}$ et la partie B le poids 1. Ainsi on trouve

$$\mathit{fix}_{P1}(\beta\langle k\rangle) = \sum_{(A,B,\sigma,\tau)\in P1[\beta_k]} k^{\beta_k - \#cyc(\sigma) - \#cyc(\tau)} (e^{-2i\varphi})^{k|A|} (\omega_n(a+it))^{\#cyc(\sigma)} (\omega_n(a-it))^{\#cyc(\tau)}$$

$$= \sum_{(A,B,\sigma,\tau)\in P1[\beta_k]} k^{\beta_k} (e^{-2i\varphi})^{k|A|} e^{k\beta_k i\varphi} e^{-k\beta_k i\varphi} (a_k+it_k)^{\#cycles(\sigma)} (a_k-it_k)^{\#cycles(\tau)}$$

$$= (e^{-k\beta_k i\varphi}) \sum_{(A,B,\sigma,\tau)\in P1[\beta_k]} k^{\beta_k} (e^{-i\varphi})^{k|A|} (e^{k(\beta_k-|A|)i\varphi})(a_k+it_k)^{\#cycles(\sigma)} (a_k-it_k)^{\#cycles(\tau)}$$

$$= (e^{-k\beta_k i\varphi}) \sum_{(A,B,\sigma,\tau)\in P1[\beta_k]} k^{\beta_k} (e^{-i\varphi})^{k|A|} (e^{k|B|i\varphi})(a_k+it_k)^{\#cycles(\sigma)} (a_k-it_k)^{\#cycles(\tau)}$$

■

Définitions 16. On définit les espèces **c.** $\mathcal{P} = (\mathcal{P}, w_{\mathcal{P}})$ et **d.** $\mathcal{P}1 = (\mathcal{P}1, w_{\mathcal{P}1})$ à partir des configurations de Meixner où on pose

$$\text{c. } \mathcal{P} = \mathcal{M}_{(s=1)(r=e^{-2i\varphi}-1)(v=2a)(u=a+it)} \text{ et}$$

$$\text{d. } \mathcal{P}1 = \mathcal{M}_{(s=e^{-2i\varphi})(r=1-e^{-2i\varphi}-1)(v=2a)(u=a-it)}.$$

Proposition 15. Pour tout entier $n \geq 0$, on a

$$\mathcal{P}[n] = \mathcal{P}1[n] = n!\, e^{in\varphi} P^{a}_{n}(t;\varphi).$$

Preuve. Voir [De] p.85. ■

Théorème 12. [De] On a

$$fix_{\mathcal{P}}(\beta) = \prod_{k=1}^{n} k^{\beta_k} \beta_k! \left((e^{-2i\varphi}-1)^k + 1\right)^{\beta_k/2} P^{a_k}_{\beta_k}(t_k;\varphi_k) ,$$

où $a_k = \frac{1}{2k}\omega_k(2a)$, $t_k = \frac{-i}{k}[\omega_k(a+it) - \frac{1}{2}\omega_k(2a)]$ et φ_k est tel que $e^{-2i\varphi_k} = (e^{-2i\varphi}-1)^k - 1$.

Preuve. Pour tout entier k, $1 \leq k \leq n$, soit $(\beta\langle k\rangle\text{-}\mathcal{P})[n_k] = \{(\delta,\Delta) \mid \delta \in \mathcal{P}[\beta\langle k\rangle]$ et $\Delta : \beta\langle k\rangle \to [n]$ est telle que pour tout $\delta \in \mathcal{P}[\beta\langle k\rangle]$ et tout C dans $\beta\langle i\rangle$, $\Delta(C)$ est arbitrairement choisi dans $\delta(C)\}$. Alors on a une bijection

$$\Gamma_{\mathcal{P}} : \mathrm{Fix}_{\mathcal{P}}(\beta) \to \prod_{1\leq k\leq n} (\beta\langle k\rangle\text{-}\mathcal{P})[n_k].$$

Fixons k. Soit (A,B,f,τ) dans $\mathcal{P}[\text{ß}\langle k\rangle]$. Les éléments de B ont le poids $(e^{-2i\varphi}-1)^k$. De plus chaque cycle de longueur r de f qui est dans A doit avoir le poids $k^{r-1}\omega_k(2a)$ alors que chaque cycle dans B de longueur s doit avoir le poids k^{s-1} $(\omega_k(a+it))$. Ainsi on a

$$fix_{\mathcal{P}}(\text{ß}\langle k\rangle) = \sum_{(A,B,f,\tau)\in \mathcal{M}[\text{ß}\langle k\rangle]} k^{\text{ß}_k} (e^{-2i\varphi}-1)^{k|B|} \left(\frac{1}{k}\,\omega_k(2a)\right)^{\#cyc(f)} \left(\frac{1}{k}\,\omega_k(a+it)\right)^{\#cyc(\tau)}$$

$$= \sum_{(A,B,f,\tau)\in \mathcal{M}[\text{ß}\langle k\rangle]} k^{\text{ß}_k} (e^{-2i\varphi_k}-1)^{|B|} (2a_k)^{cyc(f)} (a_k+it_k)^{cyc(\tau)}$$

$$= P^{a_k}_{\text{ß}_k}(t_k;\varphi_k)\cdot \text{ß}_k!\cdot e^{-i\text{ß}_k\varphi_k} = P^{a_k}_{\text{ß}_k}(t_k;\varphi_k)\cdot \text{ß}_k!\,\left(e^{-2i\varphi_k}\right)^{\text{ß}_k/2}$$

■

8. Les polynômes de Jacobi.

On définit les polynômes de Jacobi, $P^{(\alpha,\gamma)}{}_n(t;\varphi)$, en posant

$$\sum_{n\geq 0} P_n^{(\alpha,\gamma)}(t)\,x^n = 2^{\alpha+\gamma}\; R^{-1}\,(1-x+R)^{-\alpha}\,(1+x+R)^{-\gamma},$$

où $R = R(x;t) = (1 - 2tx + x^2)^{1/2}$.

On définit maintenant les polynômes *homogènes* de Jacobi, dénotés $\wp_n^{(\alpha,\gamma)}(s;t)$, par

$$\wp_n^{(\alpha,\gamma)}(s,t) = n!\; P_n^{(\alpha,\gamma)}\left(\frac{s+t}{s-t}\right)(s-t)^n.$$

Définition 17. L'espèce $\mathbf{J} = (J, w_J)$ des endofonctions de Jacobi est définie de la manière suivante: pour tout ensemble fini U, J[U] est l'ensemble de tous les triplets (A,B,f) tels que $A\cup B=U$, $A\cap B=\emptyset$, où f est une endofonction de U telle que les restrictions $f_{|A}$: $A \to U$, $f_{|B}$: $B \to U$, aux parties A et B de U sont injectives. Pour tout (A,B,f) dans J[U] on pose $w_J(A,B,f) = (1+\alpha)^{\#cyc(f_{|A})}(1+\gamma)^{\#cyc(f_{|B})} S^{|A|} T^{|B|}$.

Proposition 16. Pour tout entier $n \geq 0$, on a

$$J[n] = \wp_n^{(\alpha,\gamma)}(S,T).$$

Preuve. Voir [De] p.96. ■

Théorème 13. [De] On a

$$\mathit{fix}_J(\beta) = \prod_{k=1}^{n} k^{\beta_k} \wp_{\beta_k}^{(\alpha_k,\gamma_k)}(S^k,T^k)$$

où $\alpha_k = \frac{1}{k}\omega_k(1+\alpha) - 1$ et où $\gamma_k = \frac{1}{k}\omega_k(1+\gamma) - 1$.

Preuve. Pour tout entier k, $1 \leq k \leq n$, soit $(\beta<k>\text{-}J)[n_k] = \{(\delta,\Delta) \mid \delta \in J[\beta<i>]$ et $\Delta : \beta<k> \to [n]$ est telle que pour tout $\delta \in J[\beta<k>]$ et tout C dans $\beta<k>$, $\Delta(C)$ est arbitrairement choisi dans $\delta(C)\}$. Alors on a une bijection

$$\Gamma_J\text{: Fix}_J(\beta) \to \prod_{1 \leq k \leq n} (\beta<i>\text{-}J)[n_k].$$

Fixons i. Soit (A,B,f) dans $J[\beta<k>]$. Chaque élément de A a le poids S^k et chaque élément de B le poids T^k. De plus chaque cycle de longueur r de f qui est dans A doit avoir le poids $k^{r-1}\omega_k(1+\alpha)$ et chaque cycle dans B de longueur s doit avoir le poids $k^{s-1}\omega_k(1+\alpha)$.Ainsi

$$\mathit{fix}_J(\beta<k>) = \sum_{(A,B,f) \in J[\beta<k>]} k^{\beta_k} \left(\frac{1}{k}\omega_k(1+\alpha)\right)^{\#cyc(f_{|A})} \left(\frac{1}{k}\omega_k(1+\gamma)\right)^{\#cyc(f_{|B})} S^{k|A|} T^{k|B|}$$

$$= \sum_{(A,B,f) \in J[\beta<k>]} k^{\beta_k} \alpha_k^{\#cyc(f_{|A})} \gamma_k^{\#cyc(f_{|B})} (S^k)^{|A|} (T^k)^{|B|} = \wp_{\beta_k}^{(\alpha_k,\gamma_k)}(S^k,T^k) .$$

■

Bibliographie

[Be] **F.Bergeron,** *Modèles combinatoires de familles de polynômes orthogonaux: une approche unifiée,* European J. Comb., no.11, **1990**, 393-401.

[Co] **I. Constantineau,** *Théorie des espèces et endofonctions* , Mémoire de maîtrise, UQAM, **1987**.

[CL1] **I. Constantineau, J. Labelle,** *Calcul combinatoire du nombre d'endofonctions et d'arborescences laissées fixes par l'action d'une permutation,* Ann. Sc. Math. du Québec, Vol.XIII, no.2, **1989**.

[CL2] **I. Constantineau, J. Labelle,** *On Combinatorial Sructures Kept Fixed by the Action of a Given Permutation,* Studies in Applied Maths., (à paraître).

[CL3] **I. Constantineau, J. Labelle,** *On the Construction of Permutations of a Given Type Kept Fixed by Conjugation.,* J.Combinatorial Theory. Series A, (a paraître).

[Da] **R.L.Davis,** *The number of structures of finite relations,* Proc. of the Amer. Math. Soc., Vol. 4, **1953**, 486-494.

[De] **H. Décoste,** *Séries indicatrices d'espèces pondérées et q-analogues,* Thèse de Ph.D., UQAM et U. de Montréal,**1989**; publication du LACIM, #2, **1990**.

[Fo1] **D.Foata,** *A Combinatorial Proof of the Mehler Formula* , J. Comb. Th. Series A, Vol.24, No.3, **1978**

[Fo2] **D.Foata,** *Combinatoire des identités sur les polynômes orthogonaux,* Internat. Congress Math.(Warsaw, Poland, **1983**).

[FLa] **D.Foata, J.Labelle,** *Modèles combinatoires pour les polynômes de Meixner,* Europ. J. Combina.,vol. 4,**1983**, pp.305-311.

[FLe] **D.Foata, P.Leroux,** *Polynômes de Jacobi, interprétation combinatoire et fonction génératrice,* Proc. Amer. Math. Soc.,vol 87,**1983**, pp.47-53.

[Fs] **D.Foata, V.Strehl,** *Combinatorics of the Laguerre polynomials,* *Enumeration and Designs*, Proc.Waterloo Silver Jubilee, 1982, D.M. Jackson and S.A. Vanstone, ed. Academic Press, Toronto, 1984, pp.123-140.

[H&P] **F.Harary, E.M. Palmer.** *Graphical Enumeration* , Academic Press, **1973**.

[Jo] **A. Joyal,** *Une théorie combinatoire des séries formelles,* Adv. in Math. 42, Acad. Press, **1981**, 1-82.

[Lg1] **G. Labelle,** *Some New Computational Methods in the Theory of Species*, dans *Combinatoire Énumérative, Montréal Québec 1985, Proceedings*, G. Labelle et P. Leroux, editors. Lecture Notes in Mathematics no.1234, Springer-Verlag **1986**, 192-209.

[Lg2] **G. Labelle,** *The computation of the cycle index series of some combinatorial species,* Notes: Combinatorial Year, **M.I.T.**, Nov. **1984.**

[Lg3] **G. Labelle,** *The Cyclic Type of Combinatorial Species*, Notes: Special Session on Enumerative Combinatorics, 819th Meeting of the **A.M.S.**, Avril **1985**.

[Lj1] **J. Labelle,** *Applications diverses de la théorie combinatoire des espèces de structures,* Ann. Sc. Math. du Québec, 7, no.1, **1983**, 59-94.

[LY1] **J. Labelle,Y.N.Yeh,** *A combinatorial model for Hahn polynomials,* Publ. I.R.M.A., Strasbourg, **1988**, 341/S-16, Actes 16e Séminaire Lothsringien, p. 99-107.

[LY2] **J. Labelle, Y.N.Yeh,** *The combinatorics of Laguerre, Charlier abd Hermite Polynomials revisited,* Studies in Applied Mathematics, vol.80, **1989**, pp.25-36.

[LY3] **J. Labelle, Y.N.Yeh,** *Combinatorial proofs of some limit formulas involving orthogonal polynomials*, Discrete Mathematics, voil. 79, **1989-90**, pp.77-93.

[LY4] **J. Labelle, Y.N.Yeh,** *Some combinatorics of the Hypergeometric series,* Europ. J. Combinatorics, vol.9, **1988**, pp.593-605.

[LY5] **J. Labelle, Y.N.Yeh,** *Combinatorial Proofs of Symmetry Formulas for the Generalized Hypergeometric Series*, J. of Math. Anal. and Appl., vol. 139, no.1, avril **1989**.

[Le] **P.Leroux,** *Methoden der Anzahlbestimmung für einege Klassen von Graphen*, Bayreuther mathematische Schriften; no.26, **1988**, 1-36.

[LS] **P.Leroux, V.Strehl,** *Jacobi polynomials: Combinatorics of the basic identities.* Discrete Mathemathics, vol. 57, **1985**, pp.167-186.

[S] **V. Strehl,** *Zykel-Enumeration bei lokal-strukturierten Funktionen* , Habilitationsschrift, Institut für Mathematische Maschinen und Datenverarbeitung der Universität Erlangen-Nürnberg, **Novembre 1989.**

Ivan Constantineau Montréal,
Québec, H3C 3P8, Canada.
Université du Québec à Montréal
Case postale 8888, Succ. "A"

Chapitre 6

Une généralisation du théorème de Pfaff-Saalschütz*

Ivan Constantineau, UQAM

Article à paraître dans la revue Studies in Applied Mathematics (accepté en 1990).

Résumé. Dans cet article on généralise le théorème de Pfaff-Saaschütz et on donne des preuves algébrique et combinatoire de cette généralisation.

Introduction. Dans [5], I. Gessel et D. Stanton ont montré que pour toute série de Laurent en deux variables, f(x,y), on a (où TC signifie "terme constant de"):

$$\mathbf{TC}\left\{f\left(\frac{x}{1+y},\frac{y}{1+x}\right)\right\} = \mathbf{TC}\left\{\frac{1}{1-xy}f(x,y)\right\}. \tag{i}$$

En posant

$$f(x,y) = \frac{(1+x)^a(1+y)^b}{x^r y^s (1-xy)^{a+b}} \tag{ii}$$

ils obtiennent aussi

$$\sum_{\gamma_1,\gamma_2\geq 0}\binom{a+\gamma_2}{\gamma_1}\binom{b+\gamma_1}{\gamma_2}x^{\gamma_1}y^{\gamma_2} = \frac{(1+x)^a\ (1+y)^b}{(1-xy)^{a+b+1}}. \tag{iii}$$

Si on développe le second membre de (iii), on trouve, pour tous entiers m, n ≥0,

$$\sum_{k\geq 0}\binom{a}{n-k}\binom{b}{m-k}\binom{a+b+k}{k} = \binom{a+m}{n}\binom{b+n}{m} \tag{iv}$$

qui est une forme équivalente du théorème de Pfaff-Saaschutz.

Dans le même article Gessel et Stanton donnent des résultats analogues à (i) et (iii) pour des séries de Laurent à trois variables. I. Gessel and D. Sturtevant donnent aussi une preuve combinatoire de (iii) dans [6].

*Avec les soutiens partiels du CRSNG (Canada) et du FCAR (Québec).

Dans le présent article, nous suivons les idées de [5] et [6] pour généraliser (i) et (iii) en des identités de $n \geq 2$ variables. Nous donnons des preuves algébriques de ces généralisations de même qu'une preuve combinatoire de la n-version de (iii). Notons que V. Strehl a donné indépendamment une preuve de cette formule (théorème 1) en utilisant une approche différente [8].

1. Partie algébrique.

Lemme 1. Pour toute série de Laurent en n variables, $f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$, on a

$$\mathrm{TC}\left\{f\left(\frac{x_1}{1+x_2}, \frac{x_2}{1+x_3}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{1+x_n}, \frac{x_n}{1+x_1}\right)\right\} = \mathrm{TC}\left\{\frac{1}{1-x_1x_2\ldots x_n} f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\right\} \quad .(1)$$

Preuve On prouve d'abord le théorème pour les monômes $x_1^{d_1} x_2^{d_2} \ldots x_n^{d_n}$; on obtient alors que le premier membre de (1) = le second membre de (1) = 1 si $d_1 = d_2 = \ldots = d_n \leq 0$ et est 0 autrement. Le résultat final suit par linéarité. ■

Lemme 2. Pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$1 + \frac{z_1}{1+z_2} + \frac{z_1z_2}{(1+z_2)(1+z_3)} + \cdots + \frac{\prod_{i=1}^{n-1} z_i}{\prod_{i=2}^{n} (1+z_i)} = \frac{\prod_{i=1}^{n} (1+z_i) - \prod_{i=1}^{n} z_i}{\prod_{i=2}^{n} (1+z_i)} \quad . \qquad (2)$$

Preuve. Il suffit de procéder par récurrence sur n. ■

Théorème 1. Pour tout entier $n \geq 2$ et tout $(u_1, u_2,\ldots, u_n) \in \mathbb{N}^n$ on a l'identité suivante:

$$\sum_{\gamma_1, \gamma_2,\ldots,\gamma_n \geq 0} \binom{u_1+\gamma_n}{\gamma_1}\binom{u_2+\gamma_1}{\gamma_2}\binom{u_3+\gamma_2}{\gamma_3} \cdots \binom{u_n+\gamma_{n-1}}{\gamma_n} \; x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} \cdots x_n^{\gamma_n}$$

$$= \frac{\prod_{1\le i\le n} A_i(x_1, x_2,\dots, x_n)^{u_i}}{(1-x_1x_2\cdots x_n)^{u_1+u_2+\cdots+u_n+1}} \tag{3}$$

où, pour $1\le i \le n$

$$A_i(x_1, x_2,\dots, x_n) = (1+ x_i+ x_ix_{i+1}+ \cdots + x_ix_{i+1}\cdots x_{i-2}) \tag{4}$$

et où les indices dans (4) sont pris modulo n.

Preuve. Nous prouvons que pour tout $(\alpha_1, \alpha_2,\dots, \alpha_n)\in \mathbb{Z}^n$

$$\mathrm{TC}\left\{\frac{1}{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}} \sum_{\gamma_1, \gamma_2,\dots,\gamma_n\ge 0} \binom{u_1+\gamma_n}{\gamma_1}\binom{u_2+\gamma_1}{\gamma_2}\cdots\binom{u_n+\gamma_{n-1}}{\gamma_n} x_1^{\gamma_1}x_2^{\gamma_2}\cdots x_n^{\gamma_n}\right\}$$

$$= \mathrm{TC}\left\{\frac{1}{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}} \frac{A_1^{u_1} A_2^{u_2}\cdots A_n^{u_n}}{(1-x_1x_2\cdots x_n)^{u_1+u_2+\cdots+u_n+1}}\right\} \tag{5}$$

où, pour $1 \le i \le n$, $A_i = A_i(x_1, x_2,\dots, x_n)$.

Quand on applique le lemme 1 à

$$f(x_1, x_2,\dots, x_n) = \frac{1}{x^{\alpha}} \frac{A_1^{u_1} A_2^{u_2}\cdots A_n^{u_n}}{(1-x_1x_2\cdots x_n)^{\sum_{i=1}^n u_i}} \tag{6}$$

où $x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$, on obtient l'identité suivante:

$$\mathrm{TC}\left\{\frac{(1+x_2)^{\alpha_1}}{x_1^{\alpha_1}} \frac{(1+x_3)^{\alpha_3}}{x_2^{\alpha_2}}\cdots\frac{(1+x_1)^{\alpha_n}}{x_n^{\alpha_n}} \frac{\prod_{i=1}^n B_i^{u_i}}{\left(1 - \frac{x_1x_2\cdots x_n}{(1+x_2)\cdots(1+x_n)(1+x_1)}\right)^{\sum_{i=1}^n u_i}}\right\}$$

$$= \quad TC\ \frac{1}{x^{\alpha}}\left\{\frac{A_1^{u_1}A_2^{u_2}\cdots A_n^{u_n}}{(1-x_1x_2\cdots x_n)^{1+\sum_{i=1}^{n}u_i}}\right\} \tag{7}$$

où, pour $1\leq i\leq n$,

$$B_i = B_i(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \left(1+\frac{x_i}{1+x_{i+1}}+\frac{x_i}{1+x_{i+1}}\frac{x_{i+1}}{1+x_{i+2}}+\cdots+\frac{x_i}{1+x_{i+1}}\frac{x_{i+1}}{1+x_{i+2}}\cdots\frac{x_{i-2}}{1+x_{i-1}}\right),$$

et où les indices sont pris modulo n.

Maintenant, pour tout i, $1 \leq i \leq n$, isi on substitue l'expression suivante dans le premier membre de (2)

$$z_j \quad \leftarrow \quad x_{i+j-1\ (\mathrm{mod}\ n)}\ , \quad 1\leq j\leq n,$$

on trouve $B_i(x_1, x_2,\ldots, x_n)$. Ainsi, par le lemme 2, on a

$$B_i(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \frac{\prod_{i=1}^{n}(1+x_i) - \prod_{i=1}^{n}x_i}{\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)}\quad(1+x_i)\quad . \tag{8}$$

En introduisant (8) dans le premier membre de (7) on obtient:

$$\text{premier membre de (7)} = TC\left\{\frac{(1+x_2)^{\alpha_1}}{x_1^{\alpha_1}}\ \frac{(1+x_3)^{\alpha_3}}{x_2^{\alpha_2}}\cdots\frac{(1+x_1)^{\alpha_n}}{x_n^{\alpha_n}}\ \prod_{i=1}^{n}(1+x_i)^{u_i}\right\}. \tag{9}$$

En développant (9) on trouve:

$$TC\left\{\left(\sum_{m\geq 0}\binom{\alpha_n+u_1}{m}x_1^{m-\alpha_1}\right)\left(\sum_{m\geq 0}\binom{\alpha_1+u_2}{m}x_2^{m-\alpha_2}\right)\cdots\left(\sum_{m=0}\binom{\alpha_{n-1}+u_n}{m}x_n^{m-\alpha_n}\right)\right\}$$

$$= \binom{\alpha_n+u_1}{\alpha_1}\cdots\binom{\alpha_1+u_2}{\alpha_2}\binom{\alpha_{n-1}+u_n}{\alpha_n}\ .$$

Ainsi (5) est prouvée, de même que le théorème. ■

2.Preuve combinatoire du théorème 1.

L'idée principale de la preuve combinatoire du théorème 1 consiste, comme c'est souvent le cas, à calculer la série génératrice d'une certaine famille de structures de deux manières différentes. Ici, les structures que nous examinons sont des fonctions injectives spéciales. Chaque membre de (3) est une série génératrice pour ces structures. Le calcul du premier membre de (3) est direct alors que celui du second membre est obtenu en analysant les composantes connexes de ces structures.

Soit $n \geq 2$ et soit $U=(U_1, U_2,\ldots, U_n)$ un n-uplet fixé d'ensembles (disjoints) totalement ordonnés tels que pour tout i, $|U_i| = u_i$. Soit c la permutation de $[n]=\{1,2,\ldots,n\}$ pour laquelle $c(i) = i-1 (\mathrm{mod}\ n)$. Pour tout n-uplet d'ensembles totalement ordonnés disjoints $\Gamma=(\Gamma_1, \Gamma_2,\ldots, \Gamma_n)$ et tout $i\in [n]$, posons que tout $x\in U_i$ est plus petit que tout $y\in \Gamma_{c(i)}$ de sorte que l'union disjointe $U_i+\Gamma_{c(i)}$ est aussi totalement ordonnée. Il est bien commode d'identifier Γ avec la réunion disjointe de ses composantes: $\Gamma = \Sigma_{i\in [n]} \Gamma_i$, et de considérer Γ_i comme l'ensemble des éléments de Γ "de sorte i". On définit alors la classe ($\mathbb{L}$-espèce) des structures $\mathbf{Inj}_U$ sur n sortes de la manière suivante:

Definition 1. Pour tout $\Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_2,\ldots, \Gamma_n)$, $\mathbf{Inj}_U[\Gamma]$ dénote l'ensemble de toutes les injections $\varphi: \Gamma \to U+\Gamma$ telles que pout tout $i\in [n]$,

i) la restriction φ_i de φ à Γ_i est à valeurs dans $U_i+\Gamma_{c(i)}$,

ii) $\varphi_i : \Gamma_i \to U_i+\Gamma_{c(i)}$ est strictement croissante.

La figure 1 donne un exemple d'une $\mathbf{Inj}_U$-structure .

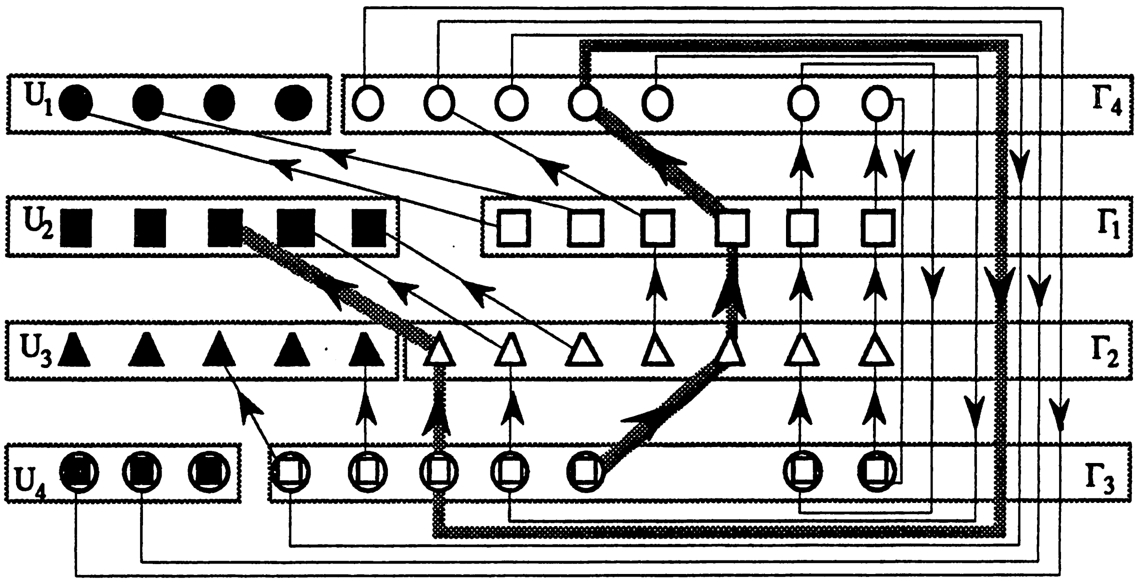


Figure 1.

Si $|\Gamma_i| = \gamma_i$ pour tout i, alors on a évidemment

$$\left|\mathbf{Inj}_U[\Gamma]\right| = \binom{u_1+\gamma_n}{\gamma_1}\binom{u_2+\gamma_1}{\gamma_2}\binom{u_3+\gamma_2}{\gamma_3}\cdots\binom{u_n+\gamma_{n-1}}{\gamma_n} \quad . \tag{10}$$

Ainsi il est clair que le premier membre de (3) est la série génératrice de $\mathbf{Inj}_U$.

Les fonctions injectives de la forme $\varphi: \Gamma \to U+\Gamma$ sont fondamentales dans l'analyse combinatoire des polynômes orthogonaux (spécialement dans les cas Laguerre et Jacobi; voir, par exemple, [1], [2], [3], [4], [7]) et il est bien connu que le graphe saggital de φ consiste en des cycles contenus dans Γ ou en des chaînes qui se terminent en des éléments de U. De plus, dans notre cas, les conditions supplémentaires i) et ii) permettent de présenter les chaînes et cycles de φ d'une manière caractéristique (unique), sans croisement, comme dans la figure 1.

En particulier, la longueur de chaque cycle doit être égale à n. Ainsi, on voit que φ est uniquement déterminée par la longueur des chaînes se terminant en chaque $u \in U$ et par le nombre de cycles. Il est alors possible d'évaluer la contribution de chacun de ces éléments à la fonction génératrice de $\mathbf{Inj}_U$. Par exemple, la chaîne se terminant au $3^{\text{ième}}$ élément de U_2 (flèches épaisses) dans la figure 1 mène, quand on revient sur ses pas, au monôme $x_2x_3x_4x_1x_2x_3 = x_1(x_2)^2(x_3)^2x_4$. Lorsqu'on additionne toutes les contributions de chaines possibles se terminant en un $u \in U_i$ spécifique, on obtient alors

$$1 + x_i + x_ix_{i+1} + x_ix_{i+1}x_{i+2} + \cdots = \frac{A_i(x_1,\ldots,x_n)}{1 - x_1x_2\cdots x_n}$$

et les contributions possibles des cycles donnent

$$1 + x_1x_2\cdots x_n + (x_1x_2\cdots x_n)^2 + \cdots = \frac{1}{1 - x_1x_2\cdots x_n} \quad .$$

Puisque ces choix (longueur de chaque chaîne individuelle et nombre de cycles) se font indépendamment l'un de l'autre, la fonction génératrice de $\mathbf{Inj}_U$ est bien donnée par le produit

$$\prod_{1\leq i\leq n} \left(\frac{A_i(x_1,\ldots,x_n)}{1-x_1x_2\cdots x_n}\right)^{u_i} \cdot \frac{1}{1- x_1x_2\cdots x_n}$$

ce qui complète la preuve du théorème.

Remerciements. L'auteur désire remercier Ira Gessel pour la prépublication [6] et pour les suggestions faites au sujet de la première version du présent article. Il remercie également Laurent Habsieger de lui avoir suggéré ce travail.

Bibliographie

[1] F. Bergeron; *Combinatoire des polynômes orthogonaux classiques, une approche unifiée*; Europ. J. of Combinatorics, no.11, **1990**, 393-401.

[2] D. Foata; *Combinatoire des identités sur les polynômes orthogonaux*, Internat. Congress Math. (Warsaw, Poland, 1983).

[3] D. Foata and P. Leroux; *Polynômes de Jacobi, interprétation combinatoire et fonction génératrice*, Proc. Amer. Math. Soc. 87 (1983), 47-53.

[4] D. Foata and V. Strehl; *Combinatorics of Laguerre polynomials*, In D.M.Jackson and S.A. Vanstone, ed., Enumeration and Design, Waterloo, 1982, pp 123-140, Academic Press, Toronto,1984.

[5] I. Gessel and D. Stanton; *Short Proofs of Saalschutz and Dixon's Theorem*, J. of Combinatorial Theory. Ser. A , Vol 38, no.1,1985.

[6] I. Gessel and D. Sturtevant; *A Combinatorial Proof of Saalschutz Theorem* , prépublication.

[7] J. Labelle and Y.N. Yeh; *Combinatorial proofs of some limit formulas involving orthogonal polynomials* , Discrete Mathematics 79 (1989/90) 77-93.

[8] V. Strehl; *Zykel-Enumeration bei lokal-strukturierten Funktionen* , Habilitationsschrift, Institut für Mathematische Maschinen und Datenverarbeitung der Universität Erlangen-Nürnberg, November 1989.

Conclusion

Il y a plusieurs façons d'étendre et de poursuivre la recherche entreprise dans cette thèse. Manifestement, une première voie consiste à préciser le concept d'auto-similarité que nous avons introduit et dont les aspects théoriques n'ont été qu'effleurés. A la lumière des divers exemples d'espèces auto-similaires que nous avons étudiés, il semble maintenant souhaitable en effet d' "asseoir" ce principe sur des bases solides, de manière à en préciser les limites mais aussi afin d'en généraliser l'usage. A cet égard, il serait intéressant de voir, avec l'idée d'en faire un jour une *méthode combinatoire* bien précise, ce qu'il advient de l'auto-similarité lorsqu'on opère (systématiquement) par récurrence sur des structures [comme c'est le cas, par exemple, de la proposition 2 du chapitre 3 de la présente thèse], ou encore lorsqu'on procède par inclusion-exclusion [comme au chapitre 4].

Une autre voie à suivre, concernant le chapitre 4, serait de démontrer la conjecture formulée à la remarque 3 en ce qui a trait au logarithme combinatoire de l'espèce des graphes simples. Résoudre cette conjecture pourrait d'ailleurs s'avérer être le point de départ d'une étude très pertinente des séries indicatrices de cycles non seulement des espèces exponentielles [les espèces A qui sont telles qu'il existe une espèce B telle que $A=\mathcal{E}xp(B)$] mais aussi des espèces A qui sont décomposables sous la substitution en général, c'est-à-dire des espèces A telles que $A=B\circ C$ pour certaines espèces B et C.

Pour ce qui est des modèles de polynômes orthogonaux, l'étude entreprise dans notre thèse est loin d'être achevée. Par exemple, si on s'en tient uniquement à ce que nous avons développé dans le chapitre 5, l'espèce des pieuvres pondérées, dont on se sert alors largement, mérite un traitement beaucoup plus approfondi et raffiné que celui (accessoire) que nous en avons fait. Dans cette veine il serait particulièrement intéressant d'analyser en détail ce qui se passe lorsque le poids des cycles n'est pas le même pour tous les cycles d'une pieuvre.

Mais ce que ce chapitre sur les modèles de familles de polynômes orthogonaux met surtout en lumière est qu 'il y a ou, enfin, qu'il *peut* y avoir des liens très forts entre l'auto-similarité (à plusieurs niveaux!) et les espèces pondérées. Le terrain semble ici particulièrement vaste, riche et propice à des constructions combinatoires de toutes sortes.

Dans la section 1 du chapitre 3 de notre thèse nous avons établi l'équivalence entre les résultats que nous avons obtenus de manière combinatoire d'une part et algébrique de l'autre, concernant la série indicatrice de cycles de l'espèce des dérangements (voir aussi la remarque 3.4 du chapitre 2).

Cette équivalence est loin d'être évidente. On pourrait alors se demander comment il se fait que les deux méthodes arrivent à des résultats qui s'expriment de manière si différentes et chercher aussi à voir s'il n'y a pas un procédé *systématique* qui permette de passer d'un à l'autre (par le biais, par exemple, d' *involutions* particulières...). Un bon point de départ ici pourrait être de trouver l'équivalence qu'il y a entre la formule (14) du chapitre 2 et la formule qu'on trouve (dans le même chapitre) dans la remarque qui suit immédiatement la proposition 5.3 [page 33 de notre thèse].

Un dernier aspect, et non le moindre, qu'il devient impératif de développer, est l'implantation sur ordinateur du calcul (symbolique) de séries indicatrices de cycles. En effet, quand on examine la complexité (au sens large) des calculs auxquels on a affaire, il devient presque nécessaire d'avoir un support informatique permettant de vérifier [en partie au moins] ces derniers. D'autre part, rien n'empêche d'espérer qu'un jour on pourra aussi obtenir des résultats entièrement nouveaux de manière strictement (ou presque) automatique.

Annexe

Lettre de Jacques Labelle au doyen-adjoint des étude avancées et de la recherches, Monsieur Claude Hamel.

Montréal, le 21 septembre 1990

Monsieur Claude Hamel
doyen-adjoint des études avancées et de la recherche

Monsieur Ivan Constantineau vient tout juste de déposer sa thèse de Ph.D. en mathématiques (concentration mathématiques combinatoires) sous la direction de Pierre Leroux et de moi-même. Comme trois des chapitres de cette thèse correspondent à des articles écrits conjointement par Ivan et moi, voici quelques précisions sur la contribution respective de chacun.

$\boxed{1}$ *Le nombre d'endofonctions et d'arborescences laissées fixes par l'action d'une permutation,* Ann. Sc. Math. Québec, 13 (2), 1989, 33-38.

Après que Gilbert Labelle m'eut montré ses deux formules pour $\mathrm{Fix}_{\mathrm{End}}(\beta)$ et $\mathrm{Fix}_{\mathrm{Ars}}(\beta)$, j'ai trouvé la preuve bijective de la première (ce qui n'est pas très difficile) en construisant les endofonctions laissées fixes par β à partir d'une endofonction sur l'ensemble des cycles. Je n'arrivais pas à trouver une preuve analogue pour les arborescences; Pierre Leroux, Gilbert Labelle et moi avons essayé ensemble une heure ou deux. Ivan a résolu (en une nuit blanche, je crois) ce cas plus difficile.

$\boxed{2}$ *On Combinatorial Structures Kept Fixed by the Action of Given Permutation,* Studies in Applied Mathematics (à paraître).

La contribution de chacun de nous est très bien partagée. J'ai fait "dérangement", "arbre" et "pieuvre", Ivan a fait "partition", "involution" et "endofonction connexe". Les autres cas ont été fait simultanément, i.e. nous nous posions une question et arrivions avec la même réponse le lendemain.

$\boxed{3}$ *On the Number of Permutations of a Given Type Kept Fixed by Conjugaison,* Journal of Combinatorial Theory Series A (à paraître).

Le problème a été posé par Christophe Reutenauer. Encore là la plupart des résultats ont été trouvé simultanément. J'ai trouvé la récurrence pour les $f(\alpha,\beta)$.

Les trois derniers chapitres (articles) de la thèse sont entièrement dus à Ivan et donneront lieu à des articles autonomes.

Globalement il ne fait aucun doute que son travail constitue une contribution majeure en mathématiques et qu'il mérite l'obtenir le diplôme de doctorat.

En espérant ces précisions utiles, je demeure votre tout dévoué,

Jacques Labelle

Jacques Labelle