Résultats sur le problème d'Elmsley pour les mélanges Horseshoe

Émile Nadeau et Stéphanie Schanck

6 novembre 2015

Résumé

Cet article a pour but d'étudier un problème présenté par Butler, Diaconis et Graham dans "The mathematics of the flip and horseshoe shuffles". Plus précisément, notre but était de déterminer une méthode générale pour déplacer n'importe quelle carte d'un paquet vers le dessus à l'aide des mélanges horseshoe. Nous avons développé des algorithmes qui déterminent les mélanges à effectuer pour certaines cartes, notamment les cartes frontières et les cartes milieux. De plus, nous avons démontré qu'une telle séquence est unique seulement pour les cartes frontières.

The purpose of this article is to study a problem presented by Butler, Diaconis and Graham in "The mathematics of the flip and horseshoe shuffles". More precisely, our goal was to determine a general method in order to move any card on top of the deck using horseshoe shuffles. We developed some algorithms which determine the sequence of shuffles to perform in some particular cases, mainly boundary cards and middle cards. Moreover, we proved that such a sequence is unique only for the boundary cards.

1 Introduction et définitions

Les mélanges de cartes présentent des problèmes intéressants autant pour les magiciens que pour les mathématiciens. Étudier la structure et le comportement de certains types de mélanges peut mener à la création de nouveaux tours de magie tout en développant nos connaissances en combinatoire et en théorie des groupes.

Cet article expose de nouveaux résultats en lien avec un type de mélange de cartes présenté dans l'article de Steve Butler, Persi Diaconis et Ron Graham,"The mathematics of the flip and horseshoe shuffles" (voir [1]). Dans cet article, on s'intéresse en particulier au problème d'Elmsley avec les mélanges de type horseshoe.

Le mélange horseshoe consiste à diviser un paquet contenant un nombre pair de cartes en son milieu, à inverser l'ordre des cartes de la deuxième moitié et à intercaler parfaitement les deux moitiés. Si, après avoir intercalé les deux moitiés, la carte sur le dessus du paquet est celle qui était sur le dessus de la première moitié, alors on dit que le mélange effectué est un *out horseshoe* (voir figure 1). Au contraire, si la carte sur le dessus est celle qui était au-dessus de la deuxième moitié (une fois son ordre inversé), alors le mélange est appelé *in horseshoe* (voir figure 2). Pour alléger le texte, on utilisera *in* pour désigner le mélange *in horseshoe* et *out* pour *out horseshoe*.

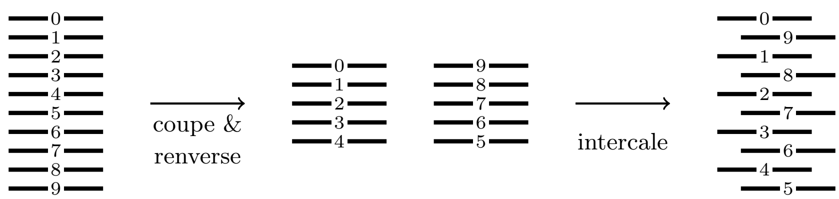

FIGURE 1 – Le mélange *out horseshoe* sur un paquet de 10 cartes (adaptée de [1])

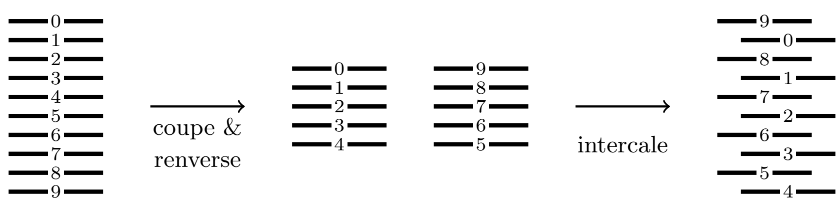

FIGURE 2 – Le mélange *in horseshoe* sur un paquet de 10 cartes (adaptée de [1])

Définition 1. *Étant donnée une carte d'un paquet à $2n$ cartes, une séquence d'Elmsley est une liste d'opérations* in *ou* out *à effectuer pour la transporter sur le dessus du paquet telle qu'il n'existe pas de liste plus courte ayant le même effet.*

Le but de l'article est donc de déterminer une méthode générale pour trouver la séquence d'Elmsley associée à n'importe quelle carte d'un paquet à $2n$ cartes. N'ayant trouvé la solution que pour certaines cartes, on peut dire que le but est partiellement atteint.

Les mélanges de type horseshoe ne sont pas faciles à réaliser, alors que les mélanges qui correspondent à leur inverse le sont. Nous avons donc également étudié le comportement des cartes avec les mélanges *inverse in horseshoe* et *inverse out horsehoe* pour pouvoir déterminer une façon de les amener sur le dessus du paquet. Le mélange *inverse out* (voir figure 3) consiste à "distribuer" les cartes en deux piles de cette façon : la première carte doit être posée face vers le haut dans le premier paquet, la deuxième doit être face vers le bas dans le deuxième paquet, la troisième face vers le haut dans le premier paquet, etc.

Ensuite, il suffit de prendre le premier paquet, de le retourner pour le poser sur le deuxième paquet. Pour le *inverse in* (voir figure 4), il faut distribuer les cartes vers le bas dans le premier paquet et vers le haut dans le deuxième paquet. Ensuite, on retourne le deuxième paquet pour aller le poser sur le premier. Pour alléger le texte, nous utiliserons *inverse in* pour désigner le mélange *inverse in horseshoe* et de même pour le *inverse out horseshoe*.

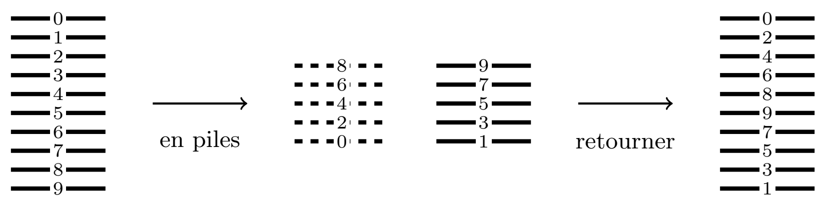

FIGURE 3 – Le mélange *inverse out horseshoe* sur un paquet de 10 cartes (adaptée de [1])

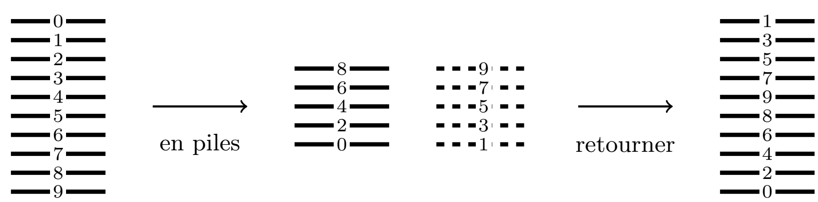

FIGURE 4 – Le mélange *inverse in horseshoe* sur un paquet de 10 cartes (adaptée de [1])

Dans une première partie, nous traiterons de la solution au problème d'Elmsley pour les mélanges horseshoe dans le cas où les paquets contiennent un nombre de cartes égal à une puissance de deux. Ensuite, nous ferons de même pour certaines cartes dans les paquets qui ne contiennent pas un nombre de cartes égal à une puissance de deux. Nous terminerons par la résolution du problème d'Elmsley pour les mélanges inverses. En guise de conclusion, nous présenterons les problèmes qui restent non résolus.

Tout au long de l'article, les positions des cartes seront numérotées de 0 à $2n-1$. On peut traduire les différents mélanges par les formules suivantes, où x correspond à la position d'une carte et le résultat de la fonction indique la nouvelle position de cette carte après le mélange correspondant.

$$out(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < n \\ 4n - 2x - 1 & \text{si } x \geq n \end{cases} \tag{1}$$

$$in(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < n \\ 4n-2x-2 & \text{si } x \geq n \end{cases} \tag{2}$$

$$out^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x \text{ est pair} \\ 2n - \frac{x+1}{2} & \text{si } x \text{ est impair} \end{cases} \tag{3}$$

$$in^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2} & \text{si } x \text{ est impair} \\ 2n - \frac{x}{2} - 1 & \text{si } x \text{ est pair} \end{cases} \tag{4}$$

2 Les paquets de 2^k cartes

Le cas où un paquet a un nombre de cartes égal à une puissance de deux a été présenté par Butler, Diaconis et Graham dans [1]. Nous exposerons ici leurs résultats.

Théorème 1. *Soit x la position d'une carte que l'on veut transporter sur le dessus d'un paquet à 2^k cartes. Alors, il y a une seule façon de le faire en un nombre minimal de coups.*

Démonstration. On veut montrer que pour un paquet contenant 2^k cartes, il existe une unique solution au problème d'Elsmley. Pour ce faire, nous décrirons un algorithme pour trouver la séquence d'Elmsley associée à n'importe quelle carte du paquet.

Comme les positions vont de 0 à $2^k - 1$, en les numérotant en binaire, nous obtenons des mots de longueur k que l'on représente ainsi : $x_{k-1}x_{k-2}...x_1x_0$. De plus, si une carte se trouve dans la moitié du dessus, alors $x_{k-1} = 0$ et si elle se trouve dans la moitié du dessous, $x_{k-1} = 1$.

En traduisant les équations associées aux mélanges *in* et *out* en termes binaires (voir les équations (1) et (2)), on obtient alors que l'effet d'un *in* ou d'un *out* sera le suivant :

$$\text{mélange } out : x_{k-1}x_{k-2}...x_1x_0 \longrightarrow \begin{cases} x_{k-2}...x_1x_0 0 \text{ si } x_{k-1} = 0 \\ \overline{x_{k-2}...x_1x_0} 1 \text{ si } x_{k-1} = 1 \end{cases}$$

$$\text{mélange in} : x_{k-1}x_{k-2}...x_1x_0 \longrightarrow \begin{cases} x_{k-2}...x_1x_0 1 \text{ si } x_{k-1} = 0 \\ \overline{x_{k-2}...x_1x_0} 0 \text{ si } x_{k-1} = 1 \end{cases}$$

où $\overline{x_i} = 1 - x_i$. On appelle $\overline{x_i}$ le conjugué de x_i.

Soit alors la carte en position $x_{k-1}x_{k-2}...x_1x_0 \neq 00...0$. On veut trouver une suite de *in* et *out* qui vont transformer sa position en la position 00...0. On considère la valeur de x_{k-1} :

— Si $x_{k-1} = 0$, peu importe si on fait un *in* ou un *out*, la position résultante débutera par $x_{k-2}...x_1x_0$. La dernière lettre sera un 1 ou un 0 dépendamment du type de mélange (*in* ou *out* respectivement). On peut alors écrire la nouvelle position comme étant $x_{k-2}...x_1x_0y_1$, où y_1 reste à déterminer.

— De même, si $x_{k-1} = 1$, peu importe le type de mélange que l'on fera, la position résultante débutera par $\overline{x_{k-2}...x_1x_0}$. La dernière lettre sera un 0 ou un 1 selon le type de mélange effectué (*in* ou *out* respectivement). La nouvelle position peut donc être écrite ainsi : $\overline{x_{k-2}...x_1x_0}y_1$.

Si après un mélange on obtient le mot $00....0y_1$, on sait alors qu'en fixant $y_1 = 0$, on aura transporté la carte sur le dessus en un seul coup. De plus, en sachant la valeur de x_{k-1} et de y_1, on détermine uniquement le type de mélange que l'on doit faire pour passer d'une position à l'autre (à l'aide du tableau 1). On obtient alors l'unique séquence d'Elsmley pour cette carte.

	$x_{k-1} = 0$	$x_{k-1} = 1$
$x'_0 = 0$	*out*	*in*
$x'_0 = 1$	*in*	*out*

Tableau 1 – Tableau déterminant le type de mélange selon la première lettre du mot représentant la position avant le mélange (x_{k-1}) et la dernière lettre du mot représentant la position après le mélange (x'_0).

Sinon, on répète le processus jusqu'à ce que toutes les lettres (sauf les indéterminées) soient des 0 ou jusqu'à ce que toutes les lettres soient rendues des indéterminées. À ce moment, on fixe la valeur des indéterminées de sorte que la position finale soit $000 \cdots 0$. Avec cette information, on peut écrire explicitement les positions successives auxquelles se retrouve la carte de départ. Alors, il est possible d'identifier l'unique type de mélange nous permettant de passer d'une position à la suivante. Finalement, on obtient une séquence unique, par unicité du choix du type à chaque étape. De plus, la séquence obtenue est la plus courte par construction. On a donc bien trouvé la séquence d'Elmsley associée à la position de la carte. On remarque aussi que le nombre maximal de mélanges sera k. □

Faisons un exemple pour clarifier l'algorithme. Considérons un paquet à 16 cartes et trouvons la séquence d'Elsmley associée à la carte en position 9 (voir figure 5). En binaire, sa position s'exprime ainsi 1001.

Pour passer de la première ligne à la seconde, on voit que la position commence par un 1 donc on décale et on conjugue toutes les lettres pour obtenir $110y_1$. On répète l'étape et on voit que l'algorithme s'arrête après quatre brassées, lorsque toutes les lettres sont devenues indéterminées. On fixe $y_1 = 0, \overline{y_2} = 0, \overline{y_3} = 0$ et $y_4 = 0$ pour envoyer la carte en position 1001 à la position 0000. On a donc $y_1 = 0, y_2 = 1, y_3 = 1$ et $y_4 = 0$. À l'aide du tableau 1, on peut déterminer que le premier type de mélange est un *in*, car $x_{k-1} = 1$ et $x'_0 = y_1 = 0$.

$$\begin{array}{cccc l}
1 & 0 & 0 & 1 & \\
 & & & & \textbf{in} \\
1 & 1 & 0 & y_1 & \\
 & & & & \textbf{out} \\
0 & 1 & \overline{y_1} & y_2 & \\
 & & & & \textbf{in} \\
1 & \overline{y_1} & y_2 & y_3 & \\
 & & & & \textbf{in} \\
y_1 & \overline{y_2} & \overline{y_3} & y_4 & \\
0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}$$

FIGURE 5 – Exemple de l'algorithme sur un paquet de 16 cartes pour la position 9. On construit d'abord toutes les lignes représentant les positions, puis en fixant les y_i, on trouve les mélanges à chaque étape.

On fait de même pour chaque étape et on obtient que la séquence d'Elmsley associée est *in*, *out*, *in*, *in*.

Si on souhaite transporter la carte en position 7 (0111 en binaire) sur le dessus, on fait de même (voir figure 6).

$$\begin{array}{cccc l}
0 & 1 & 1 & 1 & \\
 & & & & \textbf{in} \\
1 & 1 & 1 & y_1 & \\
 & & & & \textbf{in} \\
0 & 0 & \overline{y_1} & y_2 & \\
0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}$$

FIGURE 6 – Exemple de l'algorithme sur un paquet de 16 cartes pour la position 7

L'algorithme s'arrête, car toutes les lettres sauf les indéterminées sont des 0. On pose $\overline{y_1} = 0$ et $y_2 = 0$ et on obtient la séquence suivante : *in*, *in*.

On peut remarquer que cet algorithme nous permet de transporter une carte donnée à n'importe quelle position en nombre minimal de mélanges. Pour ce faire, au lieu d'utiliser 000...0 comme position d'arrivée, on utilise la position voulue sous forme binaire.

3 Le cas général

Comme le cas où le paquet contient 2^k cartes a été résolu dans la section précédente, nous nous concentrerons ici sur le cas où le paquet ne contient pas un nombre de cartes égal à une puissance de deux.

3.1 Le cas des cartes frontières

Cette section traitera de la résolution du problème d'Elmsley pour certaines cartes, les cartes frontières.

Définition 2. *On définit k comme étant le plus grand entier tel que 2^k divise $2n$.*

On peut aussi voir k comme le nombre de 2 dans la décomposition en facteurs premiers de $2n$, le nombre de cartes dans le paquet.

Définition 3. *La frontière d'ordre 1 est la séparation du paquet en deux moitiés qu'on appelle des sous-paquets. Les frontières d'ordre i, pour $2 \leqslant i \leqslant k$ sont toutes les séparations en deux parties égales des sous-paquets obtenus à partir des frontières d'ordre inférieur. Par commodité, nous définissons la frontière imaginaire (d'ordre 0) comme étant la séparation entre la carte en position 0 et $2n - 1$.*

La figure 7 montre un exemple des frontières dans un paquet de 24 cartes.

FIGURE 7 – Construction des frontières sur un paquet de 24 cartes

Définition 4. *On dit qu'une carte est une carte frontière si elle se trouve directement au-dessus ou au-dessous d'une frontière.*

On peut voir que les positions des cartes frontières dans un paquet sont données par :

$$\begin{cases} \frac{2n}{2^k}t, t \in \{0, 1, 2, ..., 2^k - 1\} \text{ (dessous)} \\ \frac{2n}{2^k}t - 1, t \in \{1, 2, 3, ..., 2^k\} \text{ (dessus).} \end{cases} \tag{5}$$

Lemme 1. *Soit $t > 0$. L'ordre i de la frontière donnée par t est $k - \ell$ où ℓ est le plus grand entier tel que $t \equiv 0 \mod 2^\ell$. Autrement dit, pour une frontière, être étiquetée par $t = 2^\ell \cdot m$ avec m impair est équivalent à être une frontière d'ordre $k - \ell$.*

Démonstration. Pour construire les frontières, on divise successivement le paquet en « moitiés ». Soit un paquet de $2^k \cdot m$ cartes où m est impair. Le paquet peut alors être divisé en deux exactement k fois. Pour construire les frontières, on divise d'abord le paquet en deux moitiés. Par définition, cette frontière est d'ordre 1. On étiquette la frontière imaginaire au-dessus du paquet par 0, celle au-dessous du paquet par 2 et la frontière d'ordre 1 par 1. En fait, on numérote les frontières selon leur position du haut vers le bas du paquet.

On effectue ainsi la division k fois, en renumérotant à chaque fois les frontières selon leur position de haut en bas du paquet (voir figure 8). À la fin du processus, toutes les frontières sont numérotées de 0 à 2^k. On remarque que cette numérotation concorde avec celle de la formule (5) nous donnant les positions des cartes frontières. En effet, pour une certaine frontière étiquetée t, on obtient la carte au-dessus et au-dessous en évaluant les deux parties de l'expression (5) en ce t.

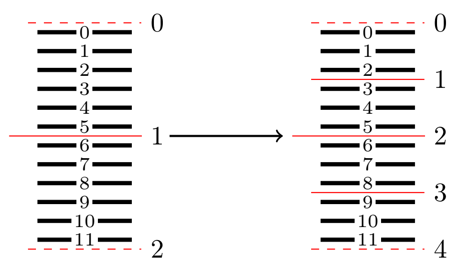

FIGURE 8 – Une étape de la division en sous-paquets d'un paquet à 12 cartes

Il est aussi assez facile de se convaincre que l'on peut interpréter la numérotation d'une frontière comme étant le nombre de sous-paquets se trouvant au-dessus de cette dernière. À chaque étape, comme l'on divise chaque sous-paquet en deux, chacune des frontières se retrouve avec deux fois plus de sous-paquets au-dessus d'elle. Son étiquette est donc doublé.

Les nouvelles frontières sont insérées entre les anciennes et portent donc les étiquettes impaires. Ainsi, plus une frontière est ajoutée tôt (plus son ordre est petit), plus la puissance de 2 dans la décomposition en facteurs premiers de son étiquette finale est grande. Une frontière d'ordre i sera insérée à la i^{e} étape avec une étiquette impaire et son étiquette sera multipliée par 2 pour les $k - i$ étapes restantes. Ainsi, le plus grand entier ℓ pour lequel l'étiquette finale t est congrue à 0 modulo 2^ℓ est $k - i$ et on a bien que $k - (k - i) = i$ est l'ordre de la frontière.

Pour le cas $t = 0$, il est clair qu'il désigne la frontière imaginaire et que par conséquent son ordre est 0. $\square$

Proposition 1. *L'action du* out *sur une carte se trouvant au-dessous d'une frontière d'ordre i l'envoie sur :*

- *le dessous d'une frontière d'ordre $i-1$ si elle se trouve dans la première moitié du paquet*
- *le dessus d'une frontière d'ordre $i-1$ si elle se trouve dans la deuxième moitié du paquet*

L'action du in *sur une carte se trouvant au-dessus d'une frontière d'ordre i l'envoie sur :*

- *le dessus d'une frontière d'ordre $i-1$ si elle se trouve dans la première moitié du paquet*
- *le dessous d'une frontière d'ordre $i-1$ si elle se trouve dans la deuxième moitié du paquet*

Démonstration. On sait que les positions des cartes frontières sont décrites par l'équation (5). Ainsi, les cartes sous les frontières ont des positions x satisfaisant $x = \frac{2n}{2^k}t$ pour un certain $t \in \{0, 1, 2, 3, ..., 2^k - 1\}$ et les cartes au-dessus des frontières ont des positions x satisfaisant $x = \frac{2n}{2^k}t - 1$ pour $t \in \{1, 2, 3, ..., 2^k\}$. Étudions chacun des cas sur une carte se trouvant à une frontière d'ordre i :

<u>*out* sur une carte dessous et dans la 1^{ere} moitié</u> :

$$\begin{aligned}\text{out}\left(\frac{2n}{2^k}t\right) &= 2 \cdot \frac{2n}{2^k}t \\ &= \frac{2n}{2^k}(2t)\end{aligned}$$

Comme la carte est dans la première moitié, on a que $0 \leqslant t < 2^{k-1}$, d'où $0 \leqslant 2t < 2^k$ et donc la position est bien une carte au-dessous d'une frontière. Par le lemme 1, comme la frontière de départ est d'ordre i, on sait que $t = 2^{k-i} \cdot m$ avec m impair. Ainsi $2t = 2^{k-i+1} \cdot m$ et donc l'ordre de la frontière où se trouve la carte après le mélange est $k - (k - i + 1) = i - 1$.

<u>*out* sur une carte dessous et dans la 2^e moitié</u> :

$$\begin{aligned}\text{out}\left(\frac{2n}{2^k}t\right) &= 4n - 2 \cdot \frac{2n}{2^k}t - 1 \\ &= 4n\left(1 - \frac{t}{2^k}\right) - 1 \\ &= \frac{4n}{2^k}\left(2^k - t\right) - 1 \\ &= \frac{2n}{2^k}\left(2^{k+1} - 2t\right) - 1\end{aligned}$$

Comme la carte est dans la 2^e moitié, on a que $2^{k-1} \leqslant t < 2^k$, d'où $2^k \leqslant 2t < 2^{k+1}$, d'où $0 < 2^{k+1} - 2t \leqslant 2^k$. Donc, la position résultante se trouve bien au-dessus une frontière. Par le lemme 1, comme la frontière de départ est d'ordre i, on sait que $t = 2^{k-i} \cdot m$ où m est impair. Donc, $2^{k+1} - 2t = 2^{k-i+1}(2^i - m)$

avec $(2^i - m)$ impair, car m l'est. Ainsi, l'ordre de la frontière où se trouve la carte après le mélange est $k - (k - i + 1) = i - 1$.

<u>*in* sur une carte dessus et dans la 1^{ere} moitié</u> :

$$\begin{aligned} \text{in}\left(\frac{2n}{2^k}t - 1\right) &= 2 \cdot \left(\frac{2n}{2^k}t - 1\right) + 1 \\ &= \frac{2n}{2^k}(2t) - 1 \end{aligned}$$

Comme la carte est dans la première moitié, on a que $0 < t \leqslant 2^{k-1}$, d'où $0 < 2t \leqslant 2^k$ et donc la position résultante correspond bien à une carte au-dessus d'une frontière.

<u>*in* sur une carte dessus et dans la 2^e moitié</u> :

$$\begin{aligned} \text{in}\left(\frac{2n}{2^k}t - 1\right) &= 4n - 2 \cdot \left(\frac{2n}{2^k}t - 1\right) - 2 \\ &= 4n - \frac{4n}{2^k}t \\ &= \frac{2n}{2^k}(2^{k+1} - 2t) \end{aligned}$$

Comme la carte est dans la 2^e moitié, on a que $2^{k-1} < t \leqslant 2^k$, d'où $2^k < 2t \leqslant 2^{k+1}$, d'où $0 \leqslant 2^{k+1} - 2t < 2^k$ et donc la carte résultante se trouve bien au-dessous une frontière.

Pour les mêmes raisons que pour les mélanges *out*, les cartes sont envoyées sur des frontières d'ordre $i - 1$ par le mélange *in*. □

Proposition 2. *Après un mélange, les cartes se retrouvant aux frontières d'ordre i, pour $1 \leqslant i \leqslant k - 1$, proviennent toutes soit du :*

— *dessus des frontières d'ordre $i + 1$ si on a fait un* in.

— *dessous des frontières d'ordre $i + 1$ si on a fait un* out.

Démonstration. Par la proposition 1, on sait que si on fait un *in* (resp. *out*), toutes les cartes au-dessus (resp. au-dessous) des frontières d'ordre i sont envoyées sur des frontières d'ordre $i - 1$.

Par récurrence, montrons qu'il y a exactement 2^{i-1} frontières d'ordre i. Pour $i = 1$, il y a bien une unique ($2^0 = 1$) frontière d'ordre 1. Supposons qu'il y a 2^{i-1} frontières d'ordre i. Pour créer les frontières d'ordre $i + 1$, on doit en insérer une de chaque côté des frontières d'ordre i. Donc, il y a deux fois plus de frontières d'ordre $i + 1$ que de frontières d'ordre i, ce qui complète la récurrence.

Comme il y a exactement 2^{i-1} frontières d'ordre i, il y a exactement 2^{i-1} cartes se trouvant au-dessus (resp. au-dessous) d'une frontière d'ordre i.

Il y a aussi 2^{i-2} frontières d'ordre $i - 1$ et on peut mettre une carte au-dessus et au-dessous de chacune de ces frontières. Il y a donc 2^{i-1} cartes se trouvant aux frontières d'ordre $i - 1$. Comme il y a autant de cartes aux frontières d'ordre $i - 1$ qu'au-dessus (resp. au-dessous) des frontières d'ordre i et que toutes les cartes au-dessus (resp. au-dessous) des frontières d'ordre i sont envoyées à des frontières d'ordre $i-1$ par un *in* (resp. *out*), on a bien que toutes les cartes sur les frontières d'ordre $i-1$ proviennent des frontières d'ordre i. □

Corollaire 1. *Il y a une unique façon d'amener une carte se trouvant à une frontière d'ordre $i+1$ vers celle d'ordre i.*

Démonstration. Soit une carte sur le dessus d'une frontière d'ordre i. Par la proposition 1, après un *in*, elle se retrouve à une frontière d'ordre $i-1$. Après un *out*, elle ne peut se retrouver à une frontière d'ordre $i-1$, car par la proposition 2, toutes ces positions sont occupées par des cartes qui étaient au-dessous des frontières d'ordre i avant le mélange. Il y a donc un unique mélange envoyant cette carte sur une frontière d'ordre $i-1$. Le raisonnement est symétrique pour une carte au-dessous d'une frontière d'ordre i. □

Lemme 2. *Pour arriver sur le dessus du paquet, un carte doit d'abord arriver à la frontière d'ordre 1 puis passer par le dessous du paquet.*

Démonstration. On sait par (1) et (2) que le mélange *out* fixe la carte du dessus et envoie la carte en position n au-dessous du paquet. De même, le mélange *in* envoie la carte au-dessous du paquet sur le dessus et envoie la carte en position $n-1$ au-dessous du paquet. Ainsi, pour arriver au-dessus, la seule façon est de se trouver au-dessous du paquet et de faire un *in*. Pour arriver au-dessous du paquet, on doit être en position n ou $n-1$ et faire un *out* ou un *in*, respectivement. Donc, il faut se trouver à la frontière d'ordre 1 puisque c'est cette frontière qui sépare ces deux cartes. □

Théorème 2. *Pour une carte se trouvant sur une frontière d'ordre i, il existe une unique séquence d'Elmsley, qui est de longueur $i+1$.*

Démonstration. Par le lemme 2, on doit d'abord amener la carte à la frontière d'ordre 1. Ensuite, deux mélanges sont nécessaires et suffisants pour amener la carte sur le dessus du paquet. Intéressons-nous donc à la façon d'apporter la carte à la frontière d'ordre 1. On établira d'abord un algorithme permettant de trouver une séquence amenant la carte à cette frontière, par la suite on vérifiera qu'il n'en existe pas de plus courte et qu'elle est unique.

Soit une carte à une frontière d'ordre i. Pour déterminer la séquence, on procède de la façon suivante : si la carte est au-dessus de la frontière, on fait un *in* et si elle est au-dessous, on fait un *out*. Après le mélange, on regarde si la carte est au-dessus ou au-dessous d'une frontière et on répète jusqu'à ce que la carte arrive à la frontière d'ordre 1. On sait par la proposition 1 que la carte restera toujours sur les frontières et qu'à chaque étape, l'ordre de la frontière sur laquelle elle se trouve diminuera de 1. Ainsi, on sait que l'on atteindra la frontière d'ordre 1 en $i-1$ étapes.

La séquence donnée par l'algorithme est forcément la plus courte pour se rendre à la frontière d'ordre 1. En effet, la proposition 2 énonce que pour se rendre à la frontière d'ordre 1, il faut passer par des frontières de tous les ordres plus petits que i en ordre décroissant tel qu'exécuté par l'algorithme.

De plus, il ne peut y avoir une seconde séquence de la même longueur. En effet, si à un certain moment on ne fait pas le mélange qui nous amène à une frontière d'ordre directement inférieur (voir corollaire 1), il y a deux possibilités : soit la carte se retrouvera sur une frontière d'ordre k, ou encore la carte ne sera plus une carte frontière. Dans les deux cas, il est évident que la séquence sera plus longue que celle donnée par l'algorithme. On a donc bien que la solution est unique et qu'elle est de longueur $i - 1 + 2 = i + 1$. $\square$

Faisons un exemple pour expliciter l'algorithme : déterminons la séquence d'Elmsley de la carte en position 3 dans un paquet à 24 cartes. Cette carte est au-dessous d'une frontière, alors l'algorithme indique qu'il faut appliquer le mélange *out*. Comme la carte se trouve dans la première moitié, la carte est transportée en position 6. Cette nouvelle position se trouve à nouveau sous une frontière, il faut donc encore appliquer un mélange *out*. Comme on est toujours dans la première moitié, la nouvelle position de notre carte est 12. Cette position est sous une frontière, il faut donc faire un mélange *out*. Comme la carte se trouve maintenant dans la deuxième moitié, la nouvelle position est 48-24-1=23, *i.e.* la dernière carte du paquet. Il faut alors faire un *in* pour que la carte se trouve en première position. La séquence d'Elmsley est donc *out*, *out*, *out*, *in*.

Lemme 3. *Après chaque mélange de leur séquence d'Elmsley respective sauf les deux derniers, deux cartes se trouvant à une même frontière sont envoyées aux deux positions d'une même frontière. L'avant-dernier mélange les envoie à la même position,* i.e. $2n - 1$.

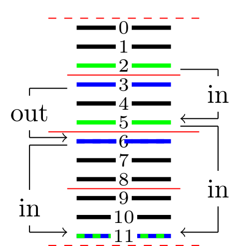

FIGURE 9 – Exemple illustrant le lemme 3 avec les cartes 2 et 3.

Démonstration. Supposons qu'on a deux cartes à la même frontière d'ordre supérieur à 1. Les positions des deux cartes sont donc de la forme $\frac{2n}{2^k}t - 1$ pour celle du dessus et $\frac{2n}{2^k}t$ pour celle du dessous (voir définition 4). De plus, comme elles sont voisines et se trouvent à une frontière d'ordre supérieur à un, elles se trouvent dans la même moitié du paquet. Étudions les deux cas possibles.

Si les deux cartes sont dans la première moitié. La séquence d'Elmsley de la carte du dessus débute par un *in* (voir théorème 2). Après un brassage, elle se retrouve alors à la position $\frac{2n}{2^k}(2t) - 1$ (voir preuve de la proposition 1). La séquence d'Elmsley de la carte du dessous débute par un *out*. Après un brassage, elle se retrouve alors à la position $\frac{2n}{2^k}(2t)$. Les deux cartes sont alors à nouveau à la même frontière, maintenant d'ordre directement inférieur.

Si les deux cartes sont dans la deuxième moitié. La séquence d'Elmsley de la carte du dessus débute par un *in*. Après un brassage, elle se retrouve alors à la position $\frac{2n}{2^k}(2^{k+1}-2t)$. La séquence d'Elmsley de la carte du dessous débute par un *out*. Après un brassage, elle se retrouve alors à la position $\frac{2n}{2^k}(2^{k+1}-2t)-1$. Encore une fois, les deux cartes sont à nouveau à la même frontière, maintenant d'ordre directement inférieur.

Si après le premier mélange, les cartes se retrouvent à la frontière d'ordre 1, alors on sait que le brassage suivant les amènera toutes les deux à la position $2n-1$. Sinon, on fait de même avec le deuxième brassage de la séquence d'Elmsley et ainsi de suite. La figure 9 illustre le cheminement de deux cartes se trouvant à la même frontière une fois appliqués les mélanges de leur séquence d'Elmsley respective. □

Corollaire 2. *Soit la séquence d'Elmsley d'une carte frontière. Pour obtenir celle de l'autre carte se trouvant sur cette même frontière, on remplace les* in *par les* out *et les* out *par les* in*, à l'exception du dernier* in*.*

Démonstration. On a vu, dans le lemme 3, que des cartes se trouvant à la même frontière le restent après le même nombre d'opérations de leur séquence d'Elmsley respective. Si elles sont à la frontière d'ordre 1, alors on doit faire un mélange *in* sur la carte du dessus pour qu'elle se retrouve à la position $2n-1$ et un mélange *out* sur la carte du dessous. Ensuite, elles pourront se retrouver en position 0 avec un *in*. Si les cartes sont à une frontière d'ordre supérieur, comme l'une est au-dessus et l'autre au-dessous, leur séquence d'Elmsley ne débutera pas par la même opération. On appliquera un *in* sur l'une des cartes et un *out* sur l'autre. Ensuite, comme elles se retrouvent à la même frontière sans être à la même position, les opérations suivantes ne pourront pas être les mêmes pour les deux cartes et ainsi de suite jusqu'à ce qu'elles se retrouvent à la position $2n-1$, où elles ont besoin d'un *in* pour terminer leur séquence d'Elsmley. □

Définition 5. *L'ensemble des cartes frontières d'un paquet avec l'ordre induit par l'ordre du paquet initial est le paquet restreint.*

La figure 10 montre le paquet restreint d'un paquet de 12 cartes. Les cartes grises ne sont pas aux frontières et ne sont donc pas considérées pour le paquet restreint.

Lemme 4. *Soit une carte frontière du paquet à $2n$ cartes. Sa position dans le paquet restreint (en binaire) peut être obtenue ainsi : en écrivant de gauche à droite, pour les frontières en ordre croissant (à partir de 1), on met un 0 si la carte est au-dessus de la frontière et un 1 sinon. À la fin, on ajoute un 0 ou un 1 si la carte se trouve respectivement au-dessus ou au-dessous du sous-paquet final. On appelle cette nouvelle position la position restreinte.*

Démonstration. Soit un paquet de $2n = 2^k \cdot m$ cartes avec m impair. Il y a alors 2^k sous-paquets et chacun contient deux cartes frontières, d'où il y a 2^{k+1} cartes

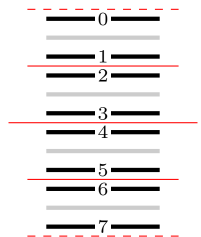

Figure 10 – Paquet restreint d'un paquet de 12 cartes

frontières. Leur position exprimée en binaire est alors un mot de $k+1$ lettres. Si une carte se trouve dans la première moitié du paquet, alors sa position en binaire commence par 0. Si elle se trouve dans la deuxième moitié, le mot commence par 1. Ensuite, on considère la moitié dans laquelle la carte se trouve. Si la carte est dans la première moitié de ce paquet, alors la deuxième lettre du mot est 0 et ainsi de suite.

Après avoir déterminé ainsi les k premières lettres, on va se retrouver à considérer le sous-paquet qui possède un nombre impair de cartes. Comme on cherche la position de la carte dans le paquet restreint, seules les première et dernière cartes du sous-paquet sont importantes. On peut donc ignorer toutes les cartes entre les deux et écrire un 0 comme dernière lettre du mot si la carte est la première du sous-paquet et un 1 si la carte est la dernière. □

Déterminons la position dans le paquet restreint associé à un paquet de taille 24 de la carte à la huitième position dans le paquet original (voir figure 7). Cette carte est au-dessus de la frontière d'ordre 1, donc sa position en binaire commence par un 0. Ensuite, elle est sous la frontière d'ordre 2 se trouvant dans la première moitié, donc sa position en binaire commence par 01. Comme elle se trouve au-dessus de la frontière d'ordre 3 la plus proche, la position commence par 010. Finalement, comme la carte est au-dessous du plus petit sous-paquet dans lequel elle se trouve, on a que sa position en binaire est 0101 . Quand on observe le paquet restreint, on remarque que la carte en position 8 dans le paquet original est bien en position 5 qui est 0101 en binaire.

Proposition 3. *À partir de la position restreinte d'une carte frontière (en binaire), on peut trouver la séquence d'Elmsley en appliquant l'algorithme décrit dans la preuve du théorème 1.*

Démonstration. Soit une carte dans un paquet à $2n = 2^k \cdot m$ cartes, avec m impair. Pour cette preuve, nous montrerons que :

1. Le diagramme de la figure 11 commute ;
2. L'algorithme défini dans la preuve du théorème 2 s'applique également dans le paquet restreint ;
3. L'algorithme du théorème 2 appliqué au paquet restreint donne la même séquence que l'algorithme du théorème 1 appliqué au même paquet ;

4. L'algorithme du thèorème 2 appliqué au paquet restreint donne la même séquence que le même algorithme appliqué au paquet initial ;

Ensuite, nous pourrons conclure que l'algorithme du théorème 1 appliqué au paquet restreint donne le même résultat que l'algorithme du théorème 2 appliqué au paquet initial.

1. On montrera d'abord que pour chaque mouvement de sa séquence d'Elmsley, effectuer le mouvement et ensuite trouver la position restreinte associée au résultat est équivalent à trouver la position restreinte de la carte de départ et d'appliquer le même mélange, mais cette fois, dans le paquet restreint. On remarque que toutes les cartes au-dessus d'une frontière ont une position restreinte impaire et toutes celles au-dessous ont une position restreinte paire. On cherche donc à démontrer la commutativité du diagramme de la figure 11.

$$\begin{tikzcd}
\text{Cartes frontières} \arrow[r, "\substack{\textit{in} \text{ si dessus} \\ \textit{out} \text{ si dessous}}"] \arrow[d, "p^{-1}"'] & \text{Cartes frontières} \arrow[d, "p^{-1}"] \\
\text{Paquet restreint} \arrow[r, "\substack{\textit{in} \text{ si impaire} \\ \textit{out} \text{ si paire}}"'] & \text{Paquet restreint}
\end{tikzcd}$$

FIGURE 11 – Diagramme illustrant le rapport entre le paquet initial et le paquet restreint, selon les mélanges *in* ou *out*

Pour trouver la position dans le paquet initial d'une carte restreinte, on utilise l'équation (6). Inversement, pour associer à une carte en position x dans le paquet initial sa position restreinte, on utilise l'équation (7).

$$\mathrm{p}(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} \cdot m & \text{si } x \text{ est pair} \\ \frac{x+1}{2} \cdot m - 1 & \text{si } x \text{ est impair} \end{cases} \tag{6}$$

$$\mathrm{p}^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{2x}{m} & \text{si } x \text{ est au-dessous d'une frontière} \\ \frac{2x+2}{m} - 1 & \text{si } x \text{ est au-dessus d'une frontière} \end{cases} \tag{7}$$

Supposons qu'une carte en position x dans le paquet initial est au-dessous d'une frontière. L'algorithme développé dans la preuve du théorème 2 indique que l'on doit appliquer un *out*. On a deux cas à traiter : celui où la carte est dans la première moitié du paquet, et celui où la carte se trouve dans la deuxième moitié.

Si la carte est dans la première moitié, on applique un *out* et on obtient la position $2x$ qui reste une position au-dessous d'une frontière. Pour obtenir la position associée dans le paquet restreint, on utilise la fonction p^{-1} et on obtient $\frac{4x}{m}$.

Si on désire trouver la carte restreinte associée à celle en position x pour ensuite appliquer un mélange *out*, on applique d'abord la fonction p^{-1} pour obtenir la position $\frac{2x}{m}$. Comme la carte initiale est dans la première moitié, la carte restreinte associée sera aussi dans la première moitié du paquet restreint. En appliquant le mélange *out*, on obtient alors la position $\frac{4x}{m}$. On a donc bien que les deux façons de faire sont équivalentes dans ce cas.

Si la carte est dans la deuxième moitié, on applique un *out* et on obtient la position $4n - 2x - 1$ qui est au-dessus d'une frontière. En appliquant p^{-1}, on obtient alors la position restreinte associée $\frac{8n-4x}{m} - 1$.

Si on inverse l'ordre, on trouve d'abord la position restreinte avec p^{-1}, ce qui nous donne $\frac{2x}{m}$. Ensuite, on applique le mélange *out* pour obtenir $2^{k+2} - \frac{4x}{m} - 1$. Comme la taille des sous-paquets est $m = \frac{2n}{2^k}$, on a que $\frac{8n}{m} = 2^{k+2}$ et donc que les deux positions sont bien égales.

On procède de même pour montrer que le diagramme commute pour les mélanges *in* avec la carte au-dessus des frontières.

2. Transposons maintenant le concept de frontières dans le paquet restreint. Pour ce faire, on transporte toutes les frontières du paquet vers le paquet restreint (elles restent entre les mêmes cartes). Les frontières conservent le même ordre et sont associées aux mêmes étiquettes t que celles de la formule (5). Toutefois, les cartes aux frontières sont maintenant aux positions $2t$ pour les cartes sous les frontières et $2t-1$ pour les cartes au-dessus des frontières. En effectuant des calculs similaires à ceux de la preuve de la proposition 1, on remarque que la proposition est également valide dans le paquet restreint.

On en conclut alors que pour se rendre au-dessus du paquet restreint à partir d'une frontière d'ordre i, une carte doit d'abord se rendre à la frontière d'ordre 1 en passant par chacune des frontières d'ordre j, pour $0 < j < i$. À partir de là, la carte doit se rendre sous le paquet pour finalement arriver à la position 0. On peut donc utiliser l'algorithme de la preuve du théorème 2 pour trouver la séquence de Elmsley de la carte dans le paquet restreint.

3. Comme la séquence d'Elmsley d'une carte dans le paquet restreint est unique, celle donnée au paragraphe précédent et celle donnée par l'algorithme du théorème 1 doivent être identiques.

4. Tel que vu précédemment, faire le mélange donné par l'algorithme du théorème 2 dans le paquet inital puis associer la position restreinte est équivalent à calculer la position restreinte d'abord pour ensuite effectuer le même mélange dans le paquet restreint. Ainsi, l'algorithme du théorème 2 appliqué au paquet initial et appliqué au paquet restreint donneront le même premier mélange. Le résultat du mélange, une fois appliqué dans le paquet initial, est la position associée à la position obtenue en effectuant le mélange dans le paquet restreint. Les mélanges suivants seront alors les mêmes, peu importe si on applique l'algorithme dans le paquet initial ou le paquet restreint.

On peut donc bien conclure que les deux algorithmes donnent la même séquence. □

3.2 Les autres cartes

Définition 6. *Une carte milieu est une carte se trouvant au centre d'un des plus petits sous-paquets.*

Les cartes milieux sont aux positions suivantes pour un paquet de $2n$ cartes :

$$\left\{ M, 2n - M - 1 \,\middle|\, M = \frac{\frac{2n}{2^k}t - 1}{2} \text{pour } t \in \{1, 3, 5, \cdots, 2^k - 1\} \right\} \tag{8}$$

En effet, la première carte milieu se trouve au centre du premier sous-paquet, qui comporte $\frac{2n}{2^k}$ cartes. Sa position est donc

$$\frac{\frac{2n}{2^k} - 1}{2}.$$

Pour trouver les positions des cartes milieux suivantes, on additionne successivement le nombre de cartes du sous-paquet. Ainsi, on trouve toutes les cartes milieux de la moitié du paquet. Pour trouver les positions des cartes milieux de la deuxième moitié du paquet, on utilise la symétrie par rapport à la frontière d'ordre 1.

La figure 12 met en évidence les cartes milieux dans des paquets de 10 et 12 cartes.

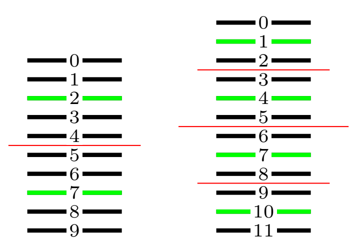

FIGURE 12 – Cartes milieux dans un paquet de 10 et 12 cartes

Proposition 4. *Après un mélange, toutes les cartes sur les frontières d'ordre k proviennent des cartes milieux du paquet initial.*

Démonstration. Pour vérifier ceci, on étudie l'effet du *inverse* out et du *inverse in* sur les cartes aux frontières d'ordre k. On sait, par le lemme 1, que les cartes aux frontières d'ordre k sont données par les t impairs. Ainsi, les cartes se trouvant au-dessous des frontières d'ordre k sont à des positions impaires de la forme $\frac{2n}{2^k}t$ pour $t \in \{1, 3, 5, \cdots, 2^k - 1\}$. De même, les cartes se trouvant au-dessus des frontières d'ordre k sont à des positions paires de la forme $\frac{2n}{2^k}t - 1$ pour $t \in \{1, 3, 5, \cdots, 2^k - 1\}$.

Si on fait un *inverse* out sur les cartes du dessus, comme leur position est paire, on trouve les positions de la forme

$$\frac{\frac{2n}{2^k}t - 1}{2},$$

c'est-à-dire les positions des cartes milieux de la première moitié du paquet. Si on fait un *inverse* out sur les cartes du dessous, comme leur position est impaire, on trouve les positions de la forme

$$2n - \frac{\frac{2n}{2^k}t + 1}{2} = 2n - \frac{\frac{2n}{2^k}t - 1}{2} - 1,$$

c'est-à-dire les positions des cartes milieux de la seconde moitié du paquet.

De même, si on fait un *inverse in* sur les cartes du dessus, on trouve les positions de la forme

$$2n - \frac{\frac{2n}{2^k}t - 1}{2} - 1,$$

i.e. les cartes milieux de la 2^e^ moitié du paquet. Si on fait un *inverse in* sur les cartes du dessous, on trouve les positions de la forme

$$\frac{\frac{2n}{2^k}t - 1}{2},$$

i.e. les cartes milieux dans la première moitié.

On a donc que peu importe que l'on ait fait un *in* ou un *out*, toutes les cartes aux frontières d'ordre k proviennent des cartes milieux. □

Corollaire 3. *Les cartes milieux sont envoyées sur les frontières d'ordre k peu importe si on fait un* in *ou un* out.

Démonstration. On sait qu'il y a exactement 2^k sous-paquets, donc 2^k cartes milieux. De plus, il y a 2^{k-1} frontières d'ordre k avec chacune 2 cartes frontières. Il y a donc 2^k cartes aux frontières d'ordre k. Comme après un *in* ou un *out* toutes les cartes frontières d'ordre k proviennent des cartes milieux et qu'il y a autant de cartes milieux que de cartes aux frontières d'ordre k, alors forcément toutes les cartes milieux sont envoyées sur les cartes aux frontières d'ordre k et ce, peu importe le mélange. □

À la lumière des nouveaux résultats, nous sommes en mesure de démontrer le théorème suivant :

Théorème 3. *Si une carte possède une unique séquence d'Elmsley, alors soit elle se trouve dans un paquet à 2^k cartes ou encore elle est une carte frontière.*

Démonstration. Par le théorème 2, on sait que les cartes frontières ont une unique séquence d'Elmsley. Aussi, on sait que pour arriver au-dessus du paquet, une carte doit passer par une position de carte milieu et ensuite par toutes les positions frontières (s'il y a lieu). Donc, si une carte n'est pas une carte frontière, elle a alors au moins deux séquences d'Elmsley puisqu'elle doit passer par une position de carte milieu et qu'à partir de cette position, les deux mélanges ont pour effet de la déplacer vers une frontière d'ordre k (voir corollaire 3).

Donc, si une carte a une séquence unique, alors soit elle se trouve dans un paquet dont le nombre de cartes est une puissance de deux ou soit elle est une carte frontière. $\square$

4 Problème de Elmsley avec les mélanges inverses

Nous nous intéressons maintenant au problème d'Elmsley, cette fois avec les mélanges inverses. Pour ce faire, nous devons introduire une nouvelle façon de diviser un paquet de cartes.

Définition 7. *La section d'ordre* 0 *est la première carte du paquet. On définit la section d'ordre* i *d'un paquet de* $2n$ *cartes comme les au plus* 2^{i-1} *cartes se trouvant après les cartes de la section d'ordre* $i-1$*. Une section est dite complète si elle contient exactement* 2^{i-1} *cartes. Sinon, elle est dite incomplète.*

On remarque que les sections sont toutes complètes sauf potentiellement celle de plus grand ordre si le paquet n'a pas assez de cartes pour qu'elle le soit (voir figure 13 où la section d'ordre 5 (en orange) est incomplète).

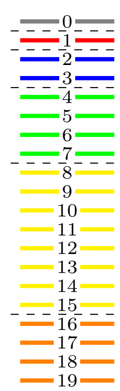

FIGURE 13 – Sections dans un paquet de 20 cartes

Définition 8. *On définit* k *comme l'ordre de la plus grande section complète d'un paquet.*

On a alors deux situations. Le paquet peut posséder une section incomplète d'ordre $k+1$ ou ne pas posséder de section d'ordre plus grand que k et être composé alors d'un nombre de cartes égal à une puissance de 2 ($1+\sum_{i=1}^{k} 2^{i-1} = 2^k$).

Définition 9. *On définit d comme le nombre de cartes dans la section incomplète (d'ordre $k+1$). S'il n'y a pas de de section incomplète alors d est nul.*

Lemme 5. *La moitié du paquet se trouve exactement au-dessus de la $(\frac{d}{2}+1)^{\text{e}}$ carte de la section d'ordre k.*

Démonstration. L'ensemble des cartes se trouvant dans les sections d'ordre plus petit que k est de cardinalité $1+\sum_{i=1}^{k-1} 2^{i-1} = 2^{k-1}$ cartes. La section d'ordre k contient aussi 2^{k-1} cartes. Dans le cas où $d=0$, il est clair que la moitié se trouve au-dessus de la première carte de la section d'ordre k.

Le nombre de cartes dans la section d'ordre $k+1$ doit être pair, car le paquet contient un nombre pair de cartes et la somme des cartes des autres sous-sections est paire. On peut donc ajouter les cartes deux à la fois à la section incomplète.

Supposons que le milieu du paquet se trouve au-dessus de la position x. Si on ajoute deux cartes à la section d'ordre $k+1$, alors le milieu se retrouve maintenant au-dessus de la carte à la position $x+1$. On retrouve donc bien que le milieu est au-dessus de $(\frac{d}{2}+1)^{\text{e}}$ carte. Le milieu reste au-dessus d'une carte de la section d'ordre k. En effet, $d < 2^k$, car sinon il y aurait une contradiction avec la maximalité de k. □

Proposition 5. *Les cartes qui se retrouvent dans une section d'ordre $0 < i < k$ après un* inverse in *(resp.* inverse out*) sont exactement les cartes impaires (resp. paires) se trouvant dans la section d'ordre $i+1$ avant le mélange.*

Démonstration. Soient les cartes se trouvant dans la section d'ordre i. Par le lemme 5, on sait qu'elles se trouvent dans la première moitié du paquet. On utilisera aussi que les cartes se trouvant dans la section d'ordre i sont situées aux positions 2^{i-1} à $2^i - 1$.

On sait alors que si on applique un mélange *out*, les cartes sont envoyées sur 2 fois leur position. Ainsi, elles sont envoyées sur les cartes paires situées entre 2^i et $2^{i+1}-2$. De même, si on applique un mélange *in*, elles sont envoyées sur 2 fois plus un leur position. Ainsi, elles sont envoyées sur les cartes impaires situées entre 2^i+1 à $2^{i+1}-1$. On voit donc que les cartes dans la section d'ordre i proviennent des cartes aux positions impaires (resp. paires) dans la section d'ordre $i+1$ si on a fait un *inverse in* (resp. *inverse out*). □

Lemme 6. *Pour qu'une carte arrive à la position 0, elle doit provenir de la section d'ordre 1 et on doit effectuer un* inverse in.

Démonstration. Comme le *inverse out* fixe la carte du dessus, il ne peut pas amener une nouvelle carte sur le dessus. Il y a donc seulement le *inverse in* qui peut le faire et il déplace effectivement la carte en position 1 vers le dessus. □

Lemme 7. *Pour les cartes se trouvant dans la section incomplète, si elles sont à une position paire (resp. impaire) et que l'on fait un* inverse out *(resp. un* inverse in*) elles se retrouvent dans la section d'ordre k au-dessus de la moitié du paquet.*

Démonstration. Les cartes qui se trouvent au-dessus de la moitié du paquet dans la section d'ordre k ont, par le lemme 5, une position se situant entre 2^{k-1} et $2^{k-1} + \frac{d}{2} - 1$. Ainsi, si on fait un *out*, ces cartes sont envoyées sur les positions paires entre 2^k et $2^k + d - 2$, soit les positions paires de la section incomplète. De même, si on fait un *in*, les cartes sont envoyées sur les positions impaires entre $2^k + 1$ et $2^k + d - 1$, soit les positions impaires de la section incomplète. On a donc que les inverses envoient les cartes de la façon décrite par le lemme. □

On voit donc que pour toutes les cartes du paquet sauf pour la première, il y a un mouvement qui les fait progresser vers la section d'ordre directement inférieur. On s'intéresse maintenant à l'effet du deuxième mélange possible sur les cartes.

Proposition 6. *Les seules cartes pour lesquelles les deux mélanges les font progresser dans la section d'ordre inférieur sont les* $\min(d, 2^k - d)$ *dernières cartes du paquet.*

Démonstration. Par les résultats précédents, on sait que les cartes progressent à la section d'ordre directement inférieur si on fait un *inverse out* et qu'elles sont paires ou encore si on fait un *inverse in* et qu'elles sont impaires.

Intéressons-nous d'abord à l'effet du *inverse out* sur une carte impaire. Le *inverse out* permute les cartes en plaçant d'abord toutes les cartes paires dans la première moitié en ordre croissant puis les cartes impaires dans la 2e moitié en ordre décroissant. Ainsi, toutes les cartes impaires se retrouvent dans la seconde moitié et donc dans les sections d'ordre k et $k + 1$. Par conséquent, les seules cartes qui peuvent se retrouver dans une section d'ordre inférieur à l'ordre de leur section actuelle sont les cartes qui se trouvent dans la section incomplète. Il y a donc au plus $\frac{d}{2}$ cartes impaires qui peuvent progresser, mais il y a aussi seulement $2^{k-1} - \frac{d}{2}$ positions sous la moitié dans la section d'ordre k. Comme les cartes impaires apparaissent en ordre décroissant après le mélange, ce sont les $\min(\frac{d}{2}, 2^{k-1} - \frac{d}{2})$ dernières cartes impaires qui vont progresser même si on fait un *inverse out*.

On raisonne de même pour voir que ce sont les $\min(\frac{d}{2}, 2^{k-1} - \frac{d}{2})$ dernières cartes paires qui vont progresser même si on fait un *inverse in*. En combinant les résultats, on en conclut que ce sont les $\min(d, 2^k - d)$ dernières cartes du paquet qui vont progresser peu importe le mélange effectué. □

Théorème 4. *La solution au problème d'Elmsley pour les mélanges inverses du* in *et* out horseshoe *est la suivante : pour un paquet de $2n$ cartes, si on veut amener la carte de la position x vers le dessus (position 0), on écrit x en binaire et on lit de droite à gauche en effectuant un* inverse in *s'il y a un 1 et un* inverse out *s'il y a un 0.*

De plus , les $\min(d, 2^k - d)$ *dernières cartes du paquet possèdent une deuxième solution qui est associée à la représentation binaire du nombre* $4n - x - 1$.

Démonstration. Pour une carte se trouvant dans une section complète, on sait par la proposition 5 que pour parvenir sur le dessus (section d'ordre 0), une carte se trouvant dans une section complète d'ordre i doit passer successivement par les sections d'ordre $i-1$, $i-2$, ..., 1, 0. De plus, on sait que pour l'amener dans la section d'ordre $i-1$, on doit faire un *inverse out* si la position de la carte est paire (*i.e.* sa représentation en binaire finit par un 0) ou un *inverse in* si la position de la carte est impaire (*i.e.* sa représentation en binaire finit par un 1). Aussi, si on fait un *inverse out* sur une carte paire, elle est envoyée à la moité de la position, ce qui correspond à retirer le dernier 0 de la représentation en binaire. De même, lorsqu'on fait un *inverse in*, on soustrait d'abord 1 puis on divise par 2, ce qui correspond à retirer le dernier 1 dans la représentation en binaire. On voit ainsi qu'en effectuant l'opération qui nous est donnée par le dernier chiffre de la représentation en binaire de la position, la carte progresse de section en section.

Si la carte se trouve dans la section incomplète, elle a aussi une première solution donnée par le lemme 7, qui l'amène dans la section d'ordre k de la même façon que décrite pour les cartes se trouvant dans des sections complètes. On peut ensuite suivre la méthode pour les cartes se trouvant dans les sections complètes pour trouver le reste de la séquence. On peut donc trouver une séquence de Elmsey pour ces cartes en lisant de droite à gauche leur représentation binaire.

La deuxième solution pour certaines cartes est décrite par la proposition 6. En effet les $\min(d, 2^k - d)$ dernières cartes du paquet possèdent une seconde solution qui les amène d'abord dans la section d'ordre k sous la moitié du paquet.

Si les cartes y sont parvenues par un *inverse out*, alors pour obtenir le nombre en binaire associé à la séquence d'Elmsley, on rajoute un 0 à la fin de la position actuelle (*i.e.* on fait fois 2). Donc, la carte qui est associée à la position x a comme seconde séquence la séquence associée à $2 \cdot (2n - \frac{x+1}{2}) = 4n - x - 1$.

De même, si les cartes y sont parvenues par un *inverse in*, alors pour obtenir le nombre en binaire associé à la séquence d'Elmsley, on rajoute un 1 à la fin de la position actuelle (*i.e.* on fait fois 2 plus 1). Donc, la carte qui est associée à la position x a comme seconde séquence la séquence associée à $2 \cdot (2n - \frac{x}{2} - 1) + 1 = 4n - x - 1$. □

À l'aide de cet algorithme, trouvons la séquence d'Elmsley de la carte en position 34 dans un paquet à 40 cartes. Dans ce cas, $k = 5$ et $d = 8$. On a donc que $\min(d, 2^k - d) = 8$. Les huit dernières cartes possèdent deux séquences d'Elmsley dont celle en position 34. En binaire, 34 s'écrit 100010. En suivant l'algorithme, on obtient qu'une de ses séquences d'Elmsley est *inverse out*, *inverse in*, *inverse out*, *inverse out*, *inverse out*, *inverse in*. Pour trouver la seconde, il faut faire de même avec la position associée, *i.e.* $4n - x - 1 = 45$. En binaire, 45 s'écrit 101101. À l'aide de l'algorithme, on trouve la séquence suivante : *inverse in*, *inverse out*, *inverse in*, *inverse in*, *inverse out*, *inverse in*.

5 Conclusion et problèmes non résolus

Résoudre le problème d'Elmsley pour un paquet à $2n$ cartes avec les mélanges *in horseshoe* et *out horseshoe* a été la motivation principale à l'écriture de cet article. Après avoir présenté le résultat connu pour un paquet à 2^k cartes, l'article a débouché sur de nouveaux résultats. Il a notamment été question du cas des cartes frontières et des cartes milieux, pour lesquelles le problème d'Elmsley a été résolu. Toutefois, le comportement des cartes qui ne sont ni des cartes milieux, ni des cartes frontières reste mal connu. Suite à certains calculs, nous faisons l'hypothèse que ces cartes posséderaient une unique séquence de mélanges pour se rendre à une position de carte milieu, d'où la formulation de la conjecture suivante :

Conjecture 1. *Le chemin que suit une carte qui n'est pas une carte frontière pour aller au-dessus du paquet se fait en trois parties :*

— *Se rendre à une position de carte milieu : le chemin le plus court est unique.*

— *Passer d'une carte milieu à une carte frontière d'ordre k : les mélanges* in *ou* out *ont le même effet.*

— *Passer de la carte frontière d'ordre k vers le dessus du paquet : le chemin le plus court est unique.*

Il y a donc exactement deux séquences d'Elmsley pour les cartes qui ne sont pas à une frontière.

Cette conjecture a été vérifiée à l'aide de l'ordinateur pour les paquets de 100 cartes et moins.

Il nous a ensuite semblé intéressant de solutionner le problème d'Elmsley pour les mélanges inverses dû à leur facilité d'exécution. La caractérisation du groupe engendré par les deux mélanges n'a toutefois pas été abordée, cela reste donc un problème ouvert.

Si le lecteur désire découvrir d'autres mélanges de cartes ayant des propriétés intéressantes, nous l'invitons à lire l'article de Butler, Diaconis et Graham [1].

Références

[1] Steve Butler, Persi Diaconis, and Ron Graham. The mathematics of the flip and horseshoe shuffles. *arXiv preprint arXiv :1412.8533*, 2014.