

Un CSP sur des tableaux décalés en forme d'escalier

Sarah Sekheri, Stéphanie Schank, Fatiha Djermane
Université du Québec à Montréal

Le 22 août 2014

1 Introduction

Le phénomène de tamisage cyclique (en anglais, “the cyclic sieving phenomenon”) a été défini par V. Reiner, D. Stanton et D. White en 2004 et il illustre une très belle interaction entre la combinatoire et l’algèbre.

Définition 1 ([5]). Soit X un ensemble fini, C un groupe cyclique agissant sur X et $f(q)$ un polynôme à coefficients entiers non négatifs. Alors, le triplet $(X, C, f(q))$ présente un **phénomène de tamisage cyclique** si pour tout $g \in C$ nous avons :

$$\# X^g = f(\omega),$$

où $\#$ désigne la cardinalité, X^g est l’ensemble des points fixes de g et ω est une racine de l’unité tel que $\text{ord}(\omega) = \text{ord}(g)$.

Il peut sembler étrange que la substitution d’une racine de l’unité dans un polynôme à coefficients entiers ait un sens énumératif, mais de nombreux exemples de ce phénomène ont été découverts (voir, par exemple, le survey [5]). En outre, les preuves de certains exemples de ce phénomène impliquent des résultats intéressants et parfois profonds en ce qui a trait à la théorie de la représentation. Dans cet article, nous allons prouver un nouvel exemple basé sur les tableaux de Young standard décalé en forme d’escalier sous l’action de promotion.

Théorème 1. Soit

$$\square_n(q) = \frac{[\frac{n(n+1)}{2}]_q!}{\prod_{x \in \square_n} [h(x)]_q} \in \mathbb{N}[q].$$

Alors, $(\text{SYT}(\square_n), \square_n(q), C)$ présente un phénomène de tamisage cyclique, où C est le groupe cyclique généré par l’opération promotion.

Dans la section 2, nous allons présenter quelques définitions et résultats de base. Ensuite, dans la section 3, nous présenterons les outils nécessaires à la preuve. Enfin, dans la section 4, nous prouverons que cela présente bien un phénomène de tamisage cyclique.

Mentionnons que la preuve utilise des résultats de Kevin Purbhoo [4] qui n’ont pas été explicitement détaillés, mais qui découlent de travaux existants.

2 Définitions

2.1 Partitions and SYT

Une **partition** d’un entier positif n est une décomposition de $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s$ en une somme d’entiers λ_i strictement positifs. Une partition λ est représentée par la

suite des termes $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s)$ de la somme, rangés par ordre décroissant. On peut la visualiser à l'aide de son **diagramme de Ferrers**, qui est une collection finie de cases organisées en lignes alignées à gauche, avec la propriété que la longueur de la ligne i soit égal à λ_i . La figure 1 est un exemple de diagramme de Ferrers associé à une partition.

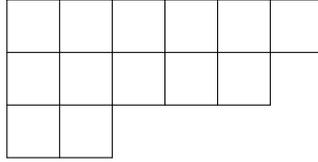


FIGURE 1 – Diagramme de Ferrers associé à la partition $\lambda = (6, 5, 2)$

Un **diagramme de Ferrers décalé** est un diagramme de Ferrers tel que les longueurs de ses lignes sont strictement décroissantes et où la ligne i est en retrait de i boîtes. La figure 2 est un exemple de diagramme de ferrers décalé.

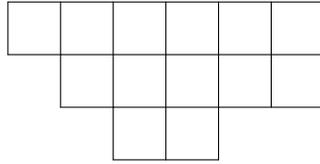


FIGURE 2 – Diagramme de Ferrers décalé associé à la partition $\lambda = (6, 5, 2)$

Un **tableau de Young standard** est obtenu en remplissant les cases d'un diagramme de Ferrers à n cases avec les entiers de 1 jusqu'à n tel que les lignes et les colonnes soient croissantes. **La promotion** est une opération sur les tableaux de Young standard : étant donné T un tableau de Young standard, soit $\rho_i(T)$ le tableau de Young standard obtenu à partir de T en inversant les étiquettes i et $i + 1$ si elle ne sont pas adjacentes. On définit alors le promotion de T par $\rho(T) := \rho_{n-1}\rho_{n-2}\dots\rho_1(\mathcal{L})$.

Soit $\text{SYT}(\sqsubset_n)$ l'ensemble des tableaux de Young standard en forme d'escalier, i.e. $\text{SYT}(\lambda)$ ou $\lambda = (n, n - 1, n - 2, \dots, 1)$ et soit $\text{SYT}(\sqsupset_n)$ l'ensemble des tableaux de Young standard décalés en forme d'escalier.

En utilisant les équerres et les équerres décalées, on peut calculer la cardinalité de $\text{SYT}(\sqsupset_n)$ et $\text{SYT}(\sqsubset_n)$. On rappelle que pour une case x d'un diagramme de Ferrers, l'**équerre** $h(x)$ associée à x est donnée par le nombre de cases à droite et en dessous de x (y compris la case x elle-même). De même, pour une case x qui se trouve à la $i^{\text{ème}}$ ligne d'un diagramme de Ferrers décalé, l'**équerre décalée** $h(x)$ associée à x est donnée par le nombre de cases à droite et en dessous de x avec les cases de la $(j + 1)^{\text{ème}}$ ligne.

Théorème 2. $|\text{SYT}(\sqsupset_n)| = \frac{\binom{n+1}{2}!}{\prod_{x \in \sqsupset_n} h(x)}$ et $|\text{SYT}(\sqsubset_n)| = \frac{\binom{n+1}{2}!}{\prod_{x \in \sqsubset_n} h(x)}$.

2.2 L'abaque

Chaque partition peut être encodée sous forme de mots contenant des zéros ou des uns. En commençant en haut à droite, les zéros correspondent à des pas verticaux et les uns à des pas horizontaux. Par exemple, la partition $(5, 3, 2, 1)$ correspond au mot $\dots 11101101010100\dots$ (voir figure 3).

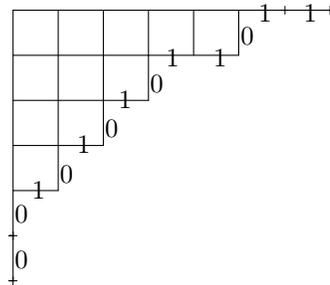


FIGURE 3 – Partition sous forme d’abaque

Notons que le début du mot est une suite infinie de uns et que la fin du mot est une suite infinie de zéros. On peut ensuite encoder ce mot dans ce que l’on appelle un **abaque**. On écrit notre mot dans un tableau à r colonnes (on prend la convention de débiter l’écriture du mot avec le premier zéro rencontré). Un abaque consiste en un tableau avec un certain nombre de colonnes qui représentent les tiges sur lesquelles peuvent glisser verticalement les billes représentées par les uns. [1]

La partition $(5, 3, 2, 1)$ sous forme d’abaque pour $r = 3$ est donné en figure 4.

1	2	3
0	1	1
0	1	0
1	0	1
0	0	0

FIGURE 4 – Abaque

2.3 r -ribbons

Soit $\text{SYT}(\square_n)$ l’ensemble des tableaux de Young standards dont la forme est rectangulaire $n \times (n + 1)$. Pour une question de comodité, nous allons représenter les tableaux

de $\text{SYT}(\square_n)$ avec les entrées dans $M = \{1, 2, \dots, m, 1', 2', \dots, m'\}$, où $m = \frac{n(n+1)}{2}$ et $1' < 1 < 2' < 2 \dots < m' < m$.

Un **r -ruban**—ou un ruban de taille r —est une collection de r boîtes contiguës qui contient au plus une boîte sur chaque diagonale. Soit $T \in \text{SYT}(\square_n)$, on dit que T est un **tableaux r -ruban symétrique en diagonale** si :

- T est formé de rubans de taille r , où chaque ruban est étiqueté avec seulement k ou(et) k' pour un certain k .
- Pour $i \leq j$, si l'entrée de la ligne i et la colonne j est t ou t' , alors l'entrée de la ligne j et la colonne $i + 1$ est t ou t' .

Des exemples pour $n = 3$ et $n = 4$ sont donnés en figures 5 et 6.

1'	1	2	3'	5'
2'	4'	4	6'	8
3	6	7'	7	9
5	8'	9'	10'	10

1	2	7	10	10'
3	6	8	8'	7'
4	9	9'	6'	2'
5	5'	4'	3'	1'

FIGURE 5 – Les deux tableaux pour $n = 4$. [4]

1'	1'	1'	2
1	1	1	2
2'	2'	2'	2

1'	1	1	1
1'	2'	2'	2
1'	2'	2	2

1'	1	1	1
1'	2'	2'	2'
1'	2	2	2

1'	1	1	1
1'	2'	2'	2
1'	2'	2	2

FIGURE 6 – [4] Les quatre tableaux 3-ruban pour $n = 3$. On remarque que le deuxième et le quatrième tableau ont la propriété que le k' le plus à droite est strictement à gauche du k le plus à droite.

La notion de r -décomposition pour une forme escalier décalé \square_n est défini sur sa forme symétrisée—la forme \square_n , considérée avec un axe de symétrie bordant supérieurement la diagonale principale. Pour r -décomposer \square_n , on procède en enlevant des paires de r -rim hook pour s'assurer de conserver la symétrie de la forme. Si le premier r -rim-hook d'une paire est composé de i cases de la forme décalée (\square_n) et de j cases de la parties ajoutée pour la forme symétrisée, le deuxième r -rim hook doit être composé de j cases de la forme décalée (image) et de i cases de la forme ajoutée. De plus, le point de départ du deuxième r -rim hook doit être la case qui est symétrique à celle du point de départ du premier r -rim-hook. Par exemple, la figure 7 représente une décomposition possible pour $n = 6$ et $r = 7$.

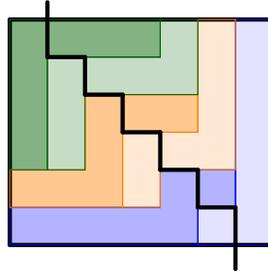


FIGURE 7 – Décomposition d’un tableau avec $n = 6$ $r = 7$

1	2	3
1	1	1
0	1	1
0	0	0
0	0	0

FIGURE 8 – En glissant tous les uns de Figure 4 vers le haut, on obtient l’abaque dessinée. Cela correspond au mot $\dots 111011000000 \dots$ et donc à la partition $\lambda = (1)$. Comme ce n’est pas la partition vide, on conclut que la partition $(5, 3, 2, 1)$ n’est pas 3-décomposable.

Sur l’abaque, une r -ruban est équivalent à une inversion de longueur r dans le mot correspondant, c’est-à-dire une inversion entre un 1 et un 0 séparés de $r - 1$ autres lettres. De là, on peut voir que l’action d’enlever un r -rim hook revient à défaire l’inversion de longueur r (en échangeant le 1 et le 0). Alors, enlever un r -rim hook revient à glisser une bille vers le haut. Figure 8 illustre que $(5, 3, 2, 1)$ n’est pas 3-decomposable.

3 Outils de la preuve

Lemme 1 (S.Fomin et N.Lulov, Corollaire 3.2 de [2]). Pour une forme r -décomposable décalée σ ,

$$g_r^\sigma = \frac{p!}{\prod_{h(t) \equiv 0} \frac{h(t)}{r}}$$

Lemme 2 (B.Sagan, Lemme 2,4 de [5]). Supposons que $m, n \in \mathbb{N}$ satisfont $m \equiv n \pmod{d}$, et soit $\omega = \omega_d$, alors

$$\lim_{q \rightarrow \omega} \frac{[m]_q}{[n]_q} := \begin{cases} \frac{m}{n} & \text{si } n \equiv 0 \pmod{r} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Maintenant, si le dernier 1 se trouve sur la ligne $2\ell + 2$, en glissant toutes les billes vers le haut, on obtient entre une et $k - 1$ colonnes contenant $\ell + 1$ uns suivies de colonnes en contenant ℓ (entre une et $k - 1$) suivies de $r - k$ colonnes en contenant $\ell + 1$. Il y a alors au moins un zéro compris entre des 1 donc la forme n'est pas r -décomposable. Prenons l'exemple où le dernier un et le 1_{max} :

1	2	3	...	$k - 1$	k	$k + 1$	$k + 2$...	$r - 1$	r
1	1	1	...	1	1	1	1	...	1	1
1	1	1	...	1	1	1	1	...	1	1
⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮
1	1	1	...	1	1	1	1	...	1	1
1	1	1	...	1	1	1	1	...	1	1
1	1	1	...	1_{max}	0	1	1	...	1	1
0	0	0	...	0	0	0	0	...	0	0
⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	0
0	0	0	...	0	0	0	0	...	0	0

On a donc bien montré que si une forme est r -décomposable, alors r divise n ou r divise $n + 1$. ■

Lemme 4. Soit r pair.

1. la forme n'est pas r -décomposable, donc le nombre de tableaux r -ruban est zéro.
2. le nombre de $h(x)$ tel que $h(x) \equiv 0 \pmod r$ est plus petit que p .

Démonstration. **1.** Pour montrer qu'une forme décalée en escalier n'est pas r -décomposable si r est pair, nous pouvons imaginer la forme comme un damier, c'est à dire une case noire suivie d'une case blanche dans chaque rangée.

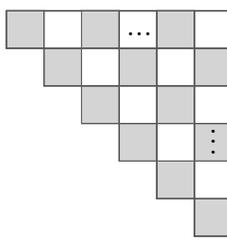


FIGURE 9 – Damier

Pour $r = 2$, il suffit de voir qu'il est impossible de disposer des "dominos" (deux cases adjacentes, une blanche et une noire) sur toute la forme. Examinons les cases qui sont sur la diagonale principale (axe nord-ouest). La première case doit être incluse dans un domino placé horizontalement, donc la deuxième case de la diagonale doit absolument être incluse dans un domino placé horizontalement également, et ainsi de suite. Toutefois, la dernière

case doit être incluse dans un domino placé verticalement, ce qui est impossible. Pour un r pair, on fait le même raisonnement, mais en tentant de placer un certain nombre de dominos sur la forme.

2. Dans le cas où $r = n + 1$, comme r est pair, n doit être impair. Le nombre de cases multiples de r sera

$$\frac{n-1}{2} = \frac{r-2}{2},$$

par le fait que le nombre d'élément dans la diagonale $n+k$ est égal à celui de la diagonale $n-k$. Comme $n = r - 1$, on a que le nombre total de cases est

$$\frac{r(r-1)}{2}.$$

Comme

$$rp = \frac{r(r-1)}{2},$$

on a

$$p = \frac{r-1}{2} > \frac{r-2}{2}.$$

Donc, le nombre de cases multiples de r est inférieur à p .

Dans le cas où $r > n + 1$, on pose $r = n + k$ ($1 < k < n$). Le nombre de cases multiples de r sera $\lceil \frac{n-k}{2} \rceil$ (par le fait que le nombre d'élément dans la diagonale $n+k$ est égal à celui de la diagonale $n-k$). Les classes d'équivalences $n-k+1$ à $n+k-1$ contiennent toutes plus de cases que la classe d'équivalence $n+k$. Donc, le nombre de cases congrues à r est inférieur à p .

Maintenant, si $r \leq n$, considérons la forme décalée en escalier de taille n . Posons $n = \ell r + (n \bmod r)$. On peut subdiviser la forme en ℓ carrés de taille r , ℓ forme escalier décalée de taille r , ℓ rectangles de taille $n \times n \bmod r$ et une petite forme escalier décalée de taille $n \bmod r$.

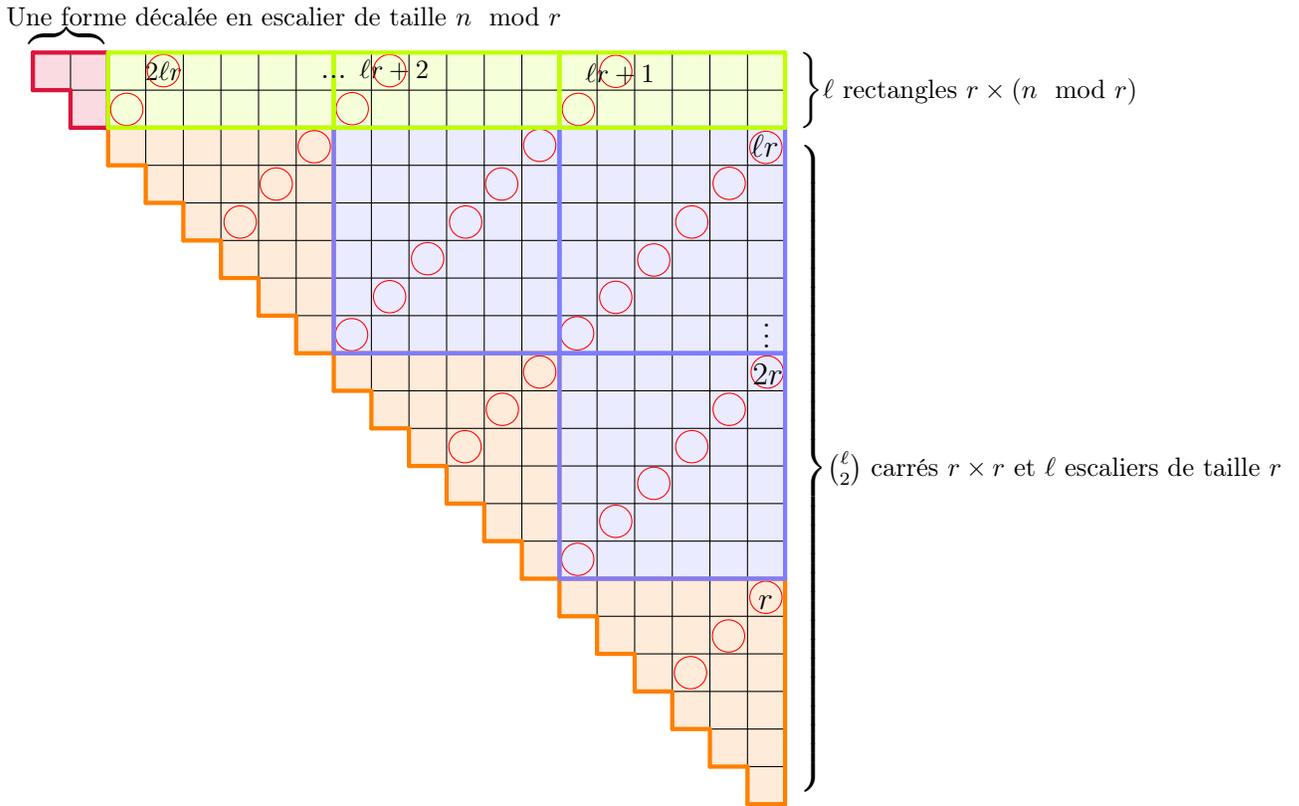


FIGURE 10 – Subdivision du tableau décalé en forme d’escalier

Considérons chacune de ces formes. Dans chaque carré, il y a toujours une seule case multiple de r par ligne et cette ligne contient exactement un élément de chacune des autres classes d’équivalence. Donc, pour les carrés, chaque classe d’équivalence contient un même nombre de cases. Le raisonnement est le même pour les rectangles $r \times n \bmod r$.

Considérons maintenant les formes escalier décalées de taille r et montrons que la classe d’équivalence 0 est celle qui contient le moins de cases. Comme r est pair, il y a $\frac{r}{2}$ cases encerclées (car ce sont seulement les éléments de la diagonale principale). Le nombre de cases est $\frac{r(r+1)}{2}$ et on a aussi que $rp = \frac{r(r+1)}{2}$. On a alors $p = \frac{r+1}{2}$ et donc $\frac{r}{2} < p$. Donc, pour chaque forme escalier décalé de taille r , on a moins de p cases multiples de r .

Finalement, pour la petite forme escalier décalé de taille $n \bmod r$, il suffit d’observer qu’elle ne contiendra jamais de cases multiples de r . Considérons la forme escalier de taille r la plus au nord. Dans cette forme, le coin nord-est sera toujours encerclé puisque multiple de r . À la ligne supérieure, comme les cercles sont disposés en diagonales, on aura que le coin sud-ouest de l’avant dernier rectangle sera encerclé. En ajoutant r cases, on obtient que le coin sud-ouest du dernier rectangle sera encerclé. Comme on ne peut plus ajouter r cases sans sortir de la forme, le petit escalier décalé sera vide de cercle.

Au final, les carrés et les rectangles sont composés du même nombre de cases pour

chaque classe de congruence, les formes escalier décalé de taille r comporte moins de p cases multiples de r , et la petite forme escalier n'en contient aucune. On peut donc conclure qu'il y a toujours moins de p cases multiples de r pour r pair. ■

Lemme 5. Soit r impair.

1. $\#\{h(x) \text{ tel que } h(x) \equiv 0 \pmod{r}\} = p$ si $r \leq n + 1$.
2. $\#\{h(x) \text{ tel que } h(x) \equiv 0 \pmod{r}\} < p$ si $r > n + 1$.

Démonstration. 1. Nous avons prouvé au lemme 3 que si une forme en escalier décalée est r -décomposable, alors r divise n ou r divise $n + 1$. Nous allons montrer qu'en remplissant chaque case d'une telle forme par la longueur d'équerre correspondant à cette case, nous obtiendrons $p = \frac{n(n+1)}{2r}$ cases de chaque classe de congruence modulo r . La figure 11 illustre cela avec $n = 5, r = 3, p = 5$:

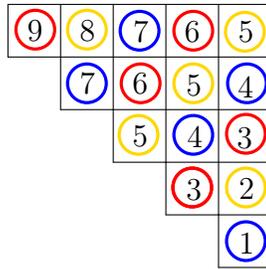


FIGURE 11 – Exemple avec $n = 5$ et $r = 3$

On voit qu'il y a p éléments congrus à chacune des classes de congruence en \pmod{r} (illustrés par les cercles de différentes couleurs).

Nous étudierons séparément le cas où r divise n et le cas où r divise $n + 1$.

cas où r divise $n + 1$ Nous travaillerons avec les formes en escalier décalée où dans chaque case est inscrit la longueur d'équerre correspondant à la case. Dans notre cas, en encerclant toutes les cases contenant un multiple de r , on obtient le tableau de la figure 12.

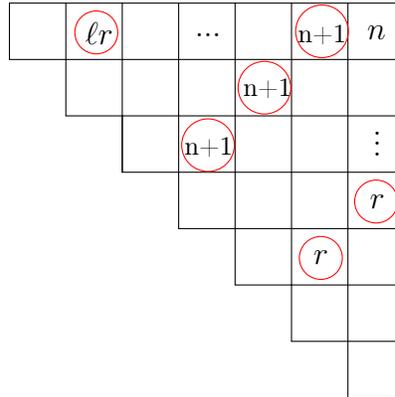


FIGURE 12 – Longueurs d'équerre multiples de r

où lr est le plus grand facteur de r présent dans la forme. Dans la figure suivante, les cercles déterminent les longueurs d'équerre qui sont congrues à $0 \pmod r$. Avec un simple déplacement de ligne, nous obtenons les cases congrues à $2 \pmod r$ puisque l'on sait que la case contenant $n + 1$ sera toujours encerclée. La figure 13 illustre ce déplacement.

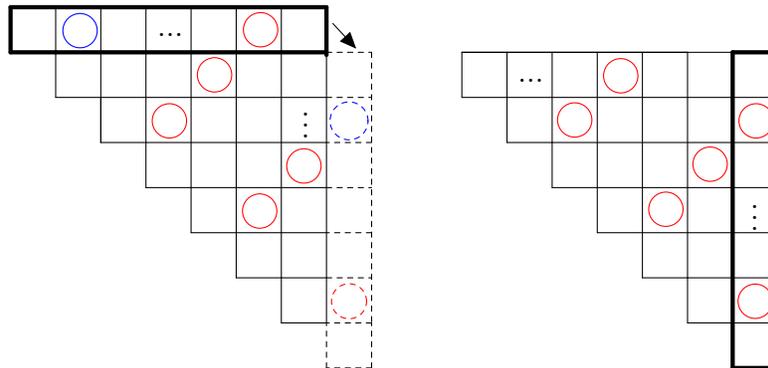
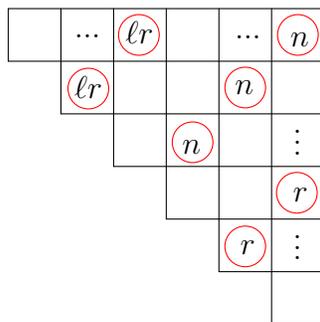


FIGURE 13 – Déplacement de ligne

Si on répète de nouveau ce déplacement à partir de la forme obtenue, les cases encerclées seront les cases congrues à $4 \pmod r$, ensuite celles congrues à $6 \pmod r$ et ainsi de suite (il y a un bond de deux entre chaque étape). Comme r est impair, après un r déplacements, on aura obtenu toutes les classes d'équivalence possibles. Comme la translation d'une ligne ne change pas le nombre de cases encerclées, on a bien que la cardinalité de chaque classe de congruence est la même, soit $\frac{n(n+1)}{2r} = p$.

cas où r divise n Dans ce cas, nous procéderons de façon très similaire. En encerclant toutes les cases contenant un multiple de r , on obtient :

FIGURE 14 – Longueurs d'équerre multiples de r

Nous placerons r copies de cette précédente forme en les emboîtant de telle façon que les cercles restent enlignés en diagonale (voir figure suivante). Le mouvement consiste à déplacer la première ligne de la figure totale de telle façon à "ajouter" une nouvelle colonne à la dernière forme. En considérant la figure totale, on voit que les cercles désigneront dorénavant les cases congrues à $2 \pmod r$

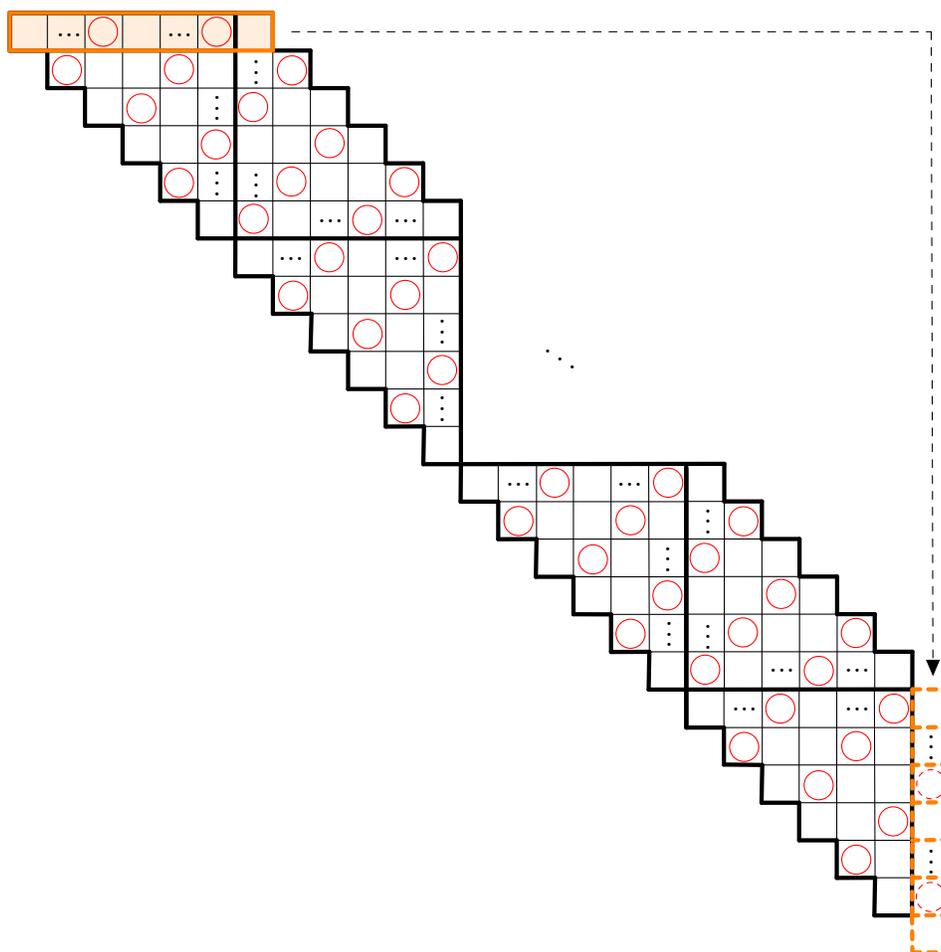


FIGURE 15 – Mouvement de ligne

Au final, on obtient la forme suivante emboîtée r fois :

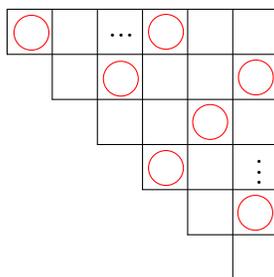


FIGURE 16 – Forme obtenue après le mouvement

De la même façon que dans le cas r divise $n + 1$, en répétant ce déplacement r fois,

on obtient toutes les classes d'équivalences. On a alors que chaque classe d'équivalence contient un même nombre de cases, soit p .

2- Preuve qu'il y a moins de p cases qui ont $h(x)$ multiple de r .

Calculons le nombre de cases dans \sqsupseteq_n qui sont multiples de r .

Soit $r = n + k$ ($n - 1 > k > 1$).

Le nombre d'éléments dans la $n - k^{ieme}$ diagonale est $\lceil \frac{n-k}{2} \rceil$

r est impair alors :

$$\begin{cases} \text{si } n \text{ est pair, } k \text{ est impair} \\ \text{si } n \text{ est impair, } k \text{ est pair} \end{cases} \quad (\text{car } r = n + k)$$

Donc, $n - k$ est toujours impair.

Ainsi, $\lceil \frac{n-k}{2} \rceil = \frac{n-k+1}{2}$.

On veut montrer que $\frac{n-k+1}{2} < p = \frac{n(n+1)}{2r} = \frac{n(n+1)}{2(n+k)}$.

$n^2 + n - k^2 < n^2 + n$ car $k^2 > 0$ puisque $k > 1$.

$n^2 + n - nk + nk - k^2 < n^2 + n$.

$(n - k + 1)(n + k) < n(n + 1)$.

$n - k + 1 < \frac{n(n+1)}{n+k}$ car $n + k > 0$.

cases multiples de $r = \frac{n-k+1}{2} < \frac{n(n+1)}{2(n+k)} = p$. ■

4 Preuve

Pour montrer que le triplet $(\text{SYT}(\sqsupseteq_n), \sqsupseteq_n(q), C)$ définit un CSP, d'après le Théorème 2 et le Lemme 1, il nous faut montrer que :

$$\sqsupseteq_n(\omega) = \frac{p!}{\prod_{h(t)=0} \frac{h(t)}{r}}$$

où $h(x)$ est la longueur d'équerre associée à la case x , ω est la racine primitive de l'unité d'ordre r et $\frac{n(n+1)}{2} = rp$

Et pour cela nous allons étudier 3 cas :

1- r impair et $r \leq n + 1$.

2- r impair et $r > n + 1$.

3- r pair.

Avant cela, montrons d'abord que \sqsupseteq_n est bien un polynôme de $\mathbb{N}[q]$:

\sqsupseteq_n est un polynôme

Démonstration.

Lemme 6 (John R.Stembridge, Corollaire 5.2 de [6]). Soit λ une partition de m , $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i \neq \lambda_j \forall i, j$ avec $1 \leq i, j \leq n$. Alors

$$\sum_T q^{\text{ind}(T)} = \frac{(q)_m!}{(q)_{\lambda_1} \cdots (q)_{\lambda_n}} \prod_{i < j} \frac{q^{\lambda_j} - q^{\lambda_i}}{1 - q^{\lambda_i + \lambda_j}},$$

où T représente le tableau standard décalé de forme λ et où

$$(q)_r = (1 - q)(1 - q^2) \cdots (1 - q^r).$$

Nous utiliserons le lemme 6 pour faire la preuve. Posons

$$P(q) = \frac{(q)_m!}{(q)_{\lambda_1} \cdots (q)_{\lambda_n}} \prod_{i < j} \frac{q^{\lambda_j} - q^{\lambda_i}}{1 - q^{\lambda_i + \lambda_j}}$$

Nous allons montrer que $\square_n(q) = q^k P(q)$ avec $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} P(q) &= \frac{(q)_m!}{(q)_{\lambda_1} \cdots (q)_{\lambda_n}} \prod_{i < j} \frac{q^{\lambda_j} - q^{\lambda_i}}{1 - q^{\lambda_i + \lambda_j}} \\ &= \frac{(q)_m!}{(q)_{\lambda_1} \cdots (q)_{\lambda_n}} \frac{q^{\lambda_2} - q^{\lambda_1}}{1 - q^{\lambda_1 + \lambda_2}} \frac{q^{\lambda_3} - q^{\lambda_1}}{1 - q^{\lambda_1 + \lambda_3}} \cdots \frac{q^{\lambda_n} - q^{\lambda_1}}{1 - q^{\lambda_1 + \lambda_n}} \cdots \frac{q^{\lambda_n} - q^{\lambda_{n-1}}}{1 - q^{\lambda_{n-1} + \lambda_n}} \\ &= \frac{(q)_m!}{(q)_{\lambda_1} \cdots (q)_{\lambda_n}} \frac{q^{\lambda_2}(1 - q^{\lambda_1 - \lambda_2})}{1 - q^{\lambda_1 + \lambda_2}} \frac{q^{\lambda_3}(1 - q^{\lambda_1 - \lambda_3})}{1 - q^{\lambda_1 + \lambda_3}} \cdots \frac{q^{\lambda_n}(1 - q^{\lambda_1 - \lambda_n})}{1 - q^{\lambda_1 + \lambda_n}} \cdots \frac{q^{\lambda_n}(1 - q^{\lambda_{n-1} - \lambda_n})}{1 - q^{\lambda_{n-1} + \lambda_n}} \end{aligned}$$

blablabla

$$\begin{aligned} &= \frac{(q)_m!}{(1 - q^{\lambda_1})(1 - q^{\lambda_2}) \cdots (1 - q^{\lambda_n})} \frac{q^k}{(1 - q^{\lambda_1 + \lambda_2})(1 - q^{\lambda_1 + \lambda_3}) \cdots (1 - q^{\lambda_1 + \lambda_n}) \cdots (1 - q^{\lambda_{n-1} + \lambda_n})} \\ &= \frac{q^k (q)_m!}{\prod_{i=1}^n (1 - q^{\lambda_i}) \prod_{i < j} (1 - q^{\lambda_i + \lambda_j})} \end{aligned}$$

où $k =$

Montrons maintenant que :

$$\square_n(q) = \frac{(q)_m!}{\prod_{i=1}^n (1 - q^{\lambda_i}) \prod_{i < j} (1 - q^{\lambda_i + \lambda_j})}. \quad (1)$$

Comme nous travaillons avec les formes en escaliers décalées \square_n , on a :

$$\begin{aligned} \square_n(q) &= \frac{[m]!_q}{\prod_{x \in \square_n} [h(x)]_q} \\ &= \frac{[m]!_q}{\prod_{i=1}^n [\lambda_i]_q \prod_{i < j} [\lambda_i + \lambda_j]_q} \end{aligned}$$

On a que $\forall r \in \mathbb{N}$

$$[r]_q = 1 + q + q^2 + \dots + q^{r-1} = \frac{1 - q^r}{1 - q}$$

Donc,

$$\frac{1 - q^{\lambda_i}}{1 - q} = [\lambda_i]_q, \forall 1 \leq i \leq n$$

On obtient $\varpi_n(q)$ en multipliant (1) par $\frac{1}{(1-q)^m}$.

Ainsi, $\varpi_n(q) = \frac{P(q)}{q^k} \dots$



Cas 1 : r impair et $r \leq n + 1$

Démonstration. r est impair et $r < n$. Rappelons que $rp = \frac{n(n+1)}{2}$. Nous allons montrer que :

$$\varpi_n(\omega) = \frac{p!}{\prod_{h(x) \equiv 0 \pmod r} \frac{h(x)}{r}}$$

où $h(x)$ est la longueur d'équerre associée à la case x et ω est la racine primitive de l'unité d'ordre r .

$$\begin{aligned} \varpi_n(q) &= \frac{[\frac{n(n+1)}{2}]_q!}{\prod_{x \in \varpi_n} [h(x)]_q} \\ &= \frac{[rp]_q!}{\prod_{x \in \varpi_n} [h(x)]_q} \\ &= \frac{[rp]_q [rp-1]_q \dots [rp-r]_q [rp-r-1]_q \dots [rp-2r]_q \dots [1]_q}{\prod_{x \in \varpi_n} [h(x)]_q} \end{aligned}$$

En regroupant les multiples de r au numérateur on obtient :

$$\varpi_n(q) = \frac{([rp]_q [r(p-1)]_q \dots [r]_q) ([rp-1]_q \dots [rp-(r-1)]_q [rp-(r+1)]_q \dots [1]_q)}{\prod_{h(x) \equiv 0 \pmod r} [h(x)]_q \prod_{h(x) \equiv 1 \pmod r} [h(x)]_q \dots \prod_{h(x) \equiv r-1 \pmod r} [h(x)]_q}$$

Par le lemme 4, on a que $\#\{h(x) | h(x) \equiv k \pmod r\} = p$ pour $0 \leq k \leq r-1$.

D'où :

$$\begin{aligned} \square_n(q) &= \left(\frac{[rp]_q [r(p-1)]_q \cdots [r]_q}{\prod_{h(x) \equiv 0 \pmod r} [h(x)]_q} \right) \left(\frac{[rp-1]_q \cdots [rp-(r-1)]_q [rp-(r+1)]_q \cdots [1]_q}{\prod_{h(x) \equiv 1 \pmod r} [h(x)]_q \cdots \prod_{h(x) \equiv r-1 \pmod r} [h(x)]_q} \right) \\ &= \left(\frac{\binom{[rp]_q}{[r]_q} \binom{[r(p-1)]_q}{[r]_q} \cdots \binom{[r]_q}{[r]_q}}{\prod_{h(x) \equiv 0 \pmod r} \frac{[h(x)]_q}{[r]_q}} \right) \left(\frac{[rp-1]_q [rp-(r-1)]_q [rp-(r+1)]_q \cdots [1]_q}{\prod_{h(x) \not\equiv 0 \pmod r} [h(x)]_q} \right) \end{aligned}$$

étudions séparément le premier élément de (1) et évaluons le en ω . Par le lemme (insérer le numéro approprié), on peut le réduire ainsi :

$$\left(\frac{\binom{[rp]_\omega}{[r]_\omega} \binom{[r(p-1)]_\omega}{[r]_\omega} \cdots \binom{[r]_\omega}{[r]_\omega}}{\prod_{h(x) \equiv 0 \pmod r} \frac{[h(x)]_\omega}{[r]_\omega}} \right) = \frac{p!}{\prod_{h(x) \equiv 0 \pmod r} \frac{h(x)}{r}}$$

étudions maintenant le deuxième élément de (1). Nous pouvons le réécrire ainsi :

$$\left(\frac{\prod_{k \equiv 1 \pmod r} [k]_q}{\prod_{h(x) \equiv 1 \pmod r} [h(x)]_q} \right) \left(\frac{\prod_{k \equiv 2 \pmod r} [k]_q}{\prod_{h(x) \equiv 2 \pmod r} [h(x)]_q} \right) \cdots \left(\frac{\prod_{k \equiv r-1 \pmod r} [k]_q}{\prod_{h(x) \equiv r-1 \pmod r} [h(x)]_q} \right)$$

Pour chaque fraction, il y a p éléments au numérateur et au dénominateur. On utilise alors le lemme (insérer le numéro) et on obtient :

$$\left(\frac{[rp]_q [rp-1]_q \cdots [rp-r]_q [rp-r-1]_q}{\prod_{h(x) \equiv 1 \pmod r} [h(x)]_w} \right) \left(\frac{\prod_{k \equiv 2 \pmod r} [k]_w}{\prod_{h(x) \equiv 2 \pmod r} [h(x)]_w} \right) \cdots \left(\frac{\prod_{k \equiv r-1 \pmod r} [k]_w}{\prod_{h(x) \equiv r-1 \pmod r} [h(x)]_w} \right) = 1$$

Donc, pour $r < n$ et r impair on a :

$$\square_n(w) = \frac{p!}{\prod_{h(x) \equiv 0 \pmod r} \frac{h(x)}{r}} = g_r^\sigma$$

■

Cas 2 : r impair et $r > n + 1$

Démonstration. D'après le Lemme 4, pour $r > n + 1$, la forme n'est pas r -décomposable. Ainsi, il n'existe pas de tableau r -ruban symétrique, c'est-à-dire $|\{ T \in \text{SYT}(\square_n) : \rho^p(T) = T \}| = 0$. Donc, on veut voir que $\square_n(\omega) = 0$ dans ce cas.

On a que :

$$\begin{aligned}
 \square_n(q) &= \frac{[rp]_q!}{\prod_{x \in \square_n} [h(x)]_q} \\
 &= \frac{[rp]_q!}{\prod_{x \in \square_n} [h(x)]_q} \\
 &= \frac{[rp]_q [r(p-1)]_q [r(p-2)]_q \dots [r]_q \prod_{m \neq 0 \pmod r} [m]_q}{[r]_q^{\lceil \frac{n-k+1}{2} \rceil} \prod_{h(x) \neq r} [h(x)]_q}
 \end{aligned}$$

Une fois évalué en ω , il reste au moins un $[\ell r]_\omega$ ($\ell \in \mathbb{N}$) au numérateur, aucun au dénominateur et le reste ne donne pas une indétermination.

Or, $[\ell r]_\omega = 0$, donc, $\square_n(\omega) = 0$. ■

Cas 3 : r pair

Démonstration. D'après le Lemme 3, pour r pair, la forme n'est pas r -décomposable. Ainsi, il n'existe pas de tableau r -ruban symétrique, c'est-à-dire $|\{ T \in \text{SYT}(\square_n) : \rho^p(T) = T \}| = 0$. Donc, on veut voir que $\square_n(\omega) = 0$ dans ce cas.

$$\begin{aligned}
 \square_n(q) &= \frac{[rp]_q!}{\prod_{x \in \square_n} [h(x)]_q} \\
 &= \frac{\overbrace{[rp]_q [r(p-1)]_q \dots [r]_q}^{p \text{ éléments}} \overbrace{\prod_{k \equiv 1 \pmod r} [k]_q \dots}^{p \text{ éléments}} \overbrace{\prod_{k \equiv r-1 \pmod r} [k]_q}^{p \text{ éléments}}}{\prod_{h(x) \equiv 0 \pmod r} [h(x)]_q \prod_{h(x) \equiv 1 \pmod r} [h(x)]_q \dots \prod_{h(x) \equiv r-1 \pmod r} [h(x)]_q}
 \end{aligned}$$

Nous avons remarqué que lorsque r est pair le nombre de $h(x)$ tel que $h(x) \equiv 0 \pmod r$ est plus petit que p (voir Lemme3). Donc,

$$\square_n(q) = \underbrace{\left(\frac{\overbrace{[rp]_q[r(p-1)]_q \dots [r(p-p)]_q}^{p \text{ éléments}}}{\underbrace{\prod_{\substack{x \in \square_n \\ h(x) \equiv 0 \pmod r}} [h(x)]_q}_{< p \text{ éléments}}} \right)}_A \underbrace{\left(\frac{\prod_{k \equiv 1 \pmod r} [k]_q \prod_{k \equiv 2 \pmod r} [k]_q \dots \prod_{k \equiv (r-1) \pmod r} [k]_q}{\prod_{k \equiv 1 \pmod r} [h(x)]_q \dots \prod_{k \equiv (r-1) \pmod r} [h(x)]_q} \right)}_B$$

Dans le numérateur de la parenthèse A, il va nous rester au moins un $[kr]_q$, et on sait que $[kr]_\omega = 0$. Dans le dénominateur de la parenthèse B, on ne pourra jamais avoir un zéro. Donc, $P(\omega) = 0$, tel que voulu.



Bibliographie

- [1] Drew Armstrong, Christopher RH Hanusa, and Brant C Jones. Results and conjectures on simultaneous core partitions. *European Journal of Combinatorics*, 41 :205–220, 2014.
- [2] Sergei Vasil’evich Fomin and Nathan Lulov. On the number of rim hook tableaux. *Journal of Mathematical Sciences*, 87(6) :4118–4123, 1997.
- [3] Sergey Fomin and Dennis Stanton. Rim hook lattices. *ST PETERSBURG MATHEMATICAL JOURNAL C/C OF ALGEBRA I ANALIZ*, 9 :1007–1016, 1998.
- [4] Kevin Purbhoo. A marvellous embedding of the lagrangian grassmannian. *arXiv preprint arXiv :1403.0984*, 2014.
- [5] Bruce E Sagan. The cyclic sieving phenomenon : a survey. *arXiv preprint arXiv :1008.0790*, 2010.
- [6] John R Stembridge. Nonintersecting paths, pfaffians, and plane partitions. *Advances in Mathematics*, 83(1) :96–131, 1990.