Résolution du problème d'Elmsley pour les mélanges *horseshoe*

Émile Nadeau

5 septembre 2016

1 Introduction

Ce document présente le travail réalisé lors d'un stage d'été en 2016. Ce rapport est la suite d'un travail effectué avec Stéphanie Schanck durant l'été 2015 et présenté dans [1]. Le lecteur est invité à consulter ce dernier rapport pour avoir toutes les définitions ainsi que la résolution des premiers cas du problème. Rappelons tous de même que le problème se sépare en 3 cas. Ce document complétera la résolution amorcée dans [1] en traitant le cas des autres cartes.

Aperçu. Pour un paquet de $2n$ cartes, on utilisera la factorisation $2n = 2^r m$ avec r maximal. Le problème d'Elmsley pour les mélanges *horseshoe* se sépare en trois cas :

Cartes frontières. Divisons le paquet en sous-paquets de m cartes. Les cartes du dessus et du dessous de chacun des sous-paquets sont les *cartes frontières*. Pour chaque carte frontière, on prouve qu'un des mélanges *in* ou *out* l'envoie à une autre frontière. Cela permet de prouver que la séquence d'Elmsley est unique pour les cartes frontières.

Cartes milieux Une *carte milieu* est une carte qui est au centre d'un des sous-paquets de taille m construit précédemment. À la fois le *in* et le *out* envoient les cartes milieux à des positions frontières, qui ont des séquences d'Elmsley de même longueur. Par conséquent, il y a exactement deux séquences d'Elmsley pour les cartes milieux.

Autres cartes On classe les cartes selon leur congruence modulo m dans des *classes de type A et B* (Figure 1). On prouve que chaque classe de type A est envoyée par un certain mélange sur une classe de type B (Proposition 1). On montre alors qu'il existe un seul plus court chemin pour se rendre à une carte milieu (Théorème 1).

2 Amener une carte à une position milieu

On considérera souvent les positions $x = tm + p$ pour considérer la position modulo m des cartes.

Définition 1. *Une classe de type A de cartes, est l'ensemble des cartes qui sont congrues modulo m.*

Définition 2. *Une classe de type B de cartes est un ensemble de position de la forme* $\left\{2sm + p, (2s+1)m + (m-1-p) | s \in \{0, 1, ..., 2^{k-1} - 1\}\right\}$.

Définition 3. *Deux classes de type B sont complémentaires, si elles contiennent des cartes qui sont de même congruence modulo m.*

On remarquera dans les faits qu'une classe de type B est l'ensemble des cartes congrues à p modulo m prise dans un sous-paquet sur deux et de l'ensemble des cartes miroir à celle-ci par par rapport à la carte milieux prise dans les autres sous-paquets. La figure 1 montre des exemples de classe de type B de carte. On remarque aussi que l'ensemble des cartes milieux (la classe de type A de $\frac{m-1}{2}$) forme une classe de type B qui est son propre complémentaire et que toutes les autres classes de type B sont associées avec une et une seule classe de type B complémentaire. Les classes de type B forment en fait une partition du paquet.

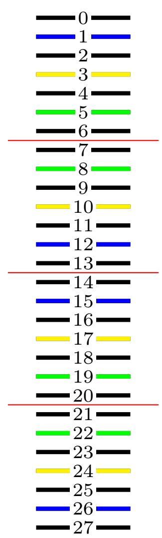

FIGURE 1 – En vert et en bleu, deux classes de type B qui sont les complémentaires l'une de l'autre. Les frontières sont en rouge et les cartes milieux en jaune

On s'intéresse maintenant à l'effet des mélanges sur les classes. Soit $x = tm + p$ une carte dans un paquet de $2n = 2^r m$ cartes, alors modulo m l'effet des mélanges *inverse out* et *inverse in* est décrit par le tableau 1.

Voici un exemple de calcul qui permet de compléter le tableau. Si x est pair

	p est pair	p est impair
x est pair	$\mathrm{out}^{-1}(tm+p) \equiv \frac{p}{2}$ $\mathrm{in}^{-1}(tm+p) \equiv (m-1)-\frac{p}{2}$	$\mathrm{out}^{-1}(tm+p) \equiv \frac{m-1}{2}+\frac{p+1}{2}$ $\mathrm{in}^{-1}(tm+p) \equiv \frac{m-1}{2}-\frac{p+1}{2}$
x est impair	$\mathrm{out}^{-1}(tm+p) \equiv \frac{m-1}{2}-\frac{p}{2}$ $\mathrm{in}^{-1}(tm+p) \equiv \frac{m-1}{2}+\frac{p}{2}$	$\mathrm{out}^{-1}(tm+p) \equiv (m-1)-\frac{p-1}{2}$ $\mathrm{in}^{-1}(tm+p) \equiv \frac{p-1}{2}$

Tableau 1 – Image des mélanges inverses en modulo m

et p est pair on doit alors forcément avoir que t est pair. On a alors

$$\mathrm{out}^{-1}(x) = \mathrm{out}^{-1}(tm+p) = \frac{tm+p}{2} = \frac{t}{2}m + \frac{p}{2} \equiv \frac{p}{2}$$
$$\mathrm{in}^{-1}(x) = \mathrm{in}^{-1}(tm+p) = 2n - \frac{tm+p}{2} - 1 \equiv (m-1) - \frac{p}{2}$$

Proposition 1. *Soit $0 \leq p < m$. Après un mélange* out, *toutes les cartes qui se trouvent dans la classe de type B de la carte p proviennent de carte de la classe de type A*

- *de la carte $\frac{p}{2}$ si p est pair*
- *de la carte $(m-1) - \frac{p-1}{2}$ si p est impair*

De même, après un mélange in, *toutes les cartes qui se trouvent dans la classe de type B de la carte p proviennent de la classe de type A*

- *de la carte $(m-1) - \frac{p}{2}$ si p est pair*
- *de la carte $\frac{p-1}{2}$ si p est impair*

Démonstration. Soit p une position dans le premier sous-paquet. Commençons par le cas où p est pair. On considère l'ensemble des cartes de la classe de type B de la carte p *i.e.*

$$\left\{2sm+p, (2s+1)m + (m-1-p) | s \in \{0, 1, ..., 2^{k-1}-1\}\right\}$$

On considère l'effet du *inverse out* sur les cartes de la classe de type B de p pour savoir où elle se trouvait avant le mélange *out*. Si la carte est de la forme $2sm+p$ alors c'est une position paire et

$$\mathrm{out}^{-1}(2sm+p) \equiv \frac{p}{2}$$

Si la carte est de la forme $(2s+1)m+(m-1-p)$ alors c'est une position impaire et

$$\mathrm{out}^{-1}((2s+1)m + (m-1-p)) \equiv \frac{m-1}{2} - \frac{m-1-p}{2} = \frac{p}{2}$$

On a donc bien qu'avant le mélange *out* toutes les cartes étaient dans la classe de type A de $\frac{p}{2}$

Regardons maintenant l'effet du *inverse in* sur les cartes de la classe de type B de p pour savoir où elle se trouvait avant le mélange *in*. Si la carte est de la forme $2sm + p$ alors c'est une position paire et

$$\mathrm{in}^{-1}(2sm + p) \equiv (m-1) - \frac{p}{2}$$

Si la carte est de la forme $(2s+1)m + (m-1-p)$ alors c'est une position impaire et

$$\mathrm{in}^{-1}((2s+1)m + (m-1-p)) \equiv \frac{m-1}{2} + \frac{m-1-p}{2} = (m-1) - \frac{p}{2}$$

On a donc bien qu'avant le mélange *in* toutes les cartes étaient dans la classe de type A de $\frac{m-1}{2} - \frac{p}{2}$

Regardons maintenant le cas où p est impair. On considère l'ensemble des cartes de la classe de type B de la carte p *i.e.*

$$\left\{2sm + p, (2s+1)m + (m-1-p) | s \in \{0, 1, ..., 2^{k-1} - 1\}\right\}$$

On considère l'effet du *inverse out* sur les cartes de la classe de type B de p pour savoir où elles se trouvaient avant le mélange *out*. Si la carte est de la forme $2sm + p$ alors c'est une position impaire et

$$\mathrm{out}^{-1}(2sm + p) \equiv (m-1) - \frac{p-1}{2}$$

Si la carte est de la forme $(2s+1)m + (m-1-p)$ alors c'est une position paire et

$$\mathrm{out}^{-1}((2s+1)m + (m-1-p)) \equiv \frac{m-1}{2} + \frac{m-1-p+1}{2} = (m-1) - \frac{p-1}{2}$$

On a donc bien qu' avant le mélange *out* toutes les cartes étaient dans la classe de type A de $(m-1) - \frac{p-1}{2}$

Regardons maintenant l'effet du *inverse in* sur les cartes de la classe de type B de p pour savoir où elle se trouvait avant le mélange *in*. Si la carte est de la forme $2sm + p$ alors c'est une position impaire et

$$\mathrm{in}^{-1}(2sm + p) \equiv \frac{p-1}{2}$$

Si la carte est de la forme $(2s+1)m + (m-1-p)$ alors c'est une position paire et

$$\mathrm{in}^{-1}((2s+1)m + (m-1-p)) \equiv \frac{m-1}{2} - \frac{m-1-p+1}{2} = \frac{p-1}{2}$$

On a donc bien qu'avant le mélange *in* toutes les cartes étaient dans la classe de type A de $\frac{p-1}{2}$ $\square$

Corollaire 1. *Toutes les cartes de la classe de type A contenant la carte p (pour $0 \leq p < m$) sont envoyées sur la classe de type B*

— *de la carte $2p$ si on fait un* out

— *de la carte $2p+1$ si on fait un* in

Démonstration. On sait que $\text{out}(p) = 2p$. Toutes les cartes de la classe de type B de $2p$ proviennent de carte de la classe A de p lorsqu'on a fait un *out* par la proposition 1. Comme les classes de type A et B sont de même cardinalité m alors ont doit forcément avoir que toutes les cartes de la classe de type A contenant la carte p sont envoyé dans la classe de type B de $2p$.

De même, on vérifie que les cartes de la classe de type A contenant la carte p (pour $0 \leq p < m$) sont envoyé sur la classe de type B de la carte $2p+1$ si on fait un *in*. □

Proposition 2. *Soit U l'ensemble des cartes d'une classe de type B et de sa classe complémentaire. Alors l'ensemble V des cartes qui sont envoyées sur cet ensemble est l'union de paire de classes de type B complémentaire.*

De plus, $\#V = 2 \cdot \#U$

Démonstration. Par la proposition 1 et le corollaire 1, on sait que V est une union de classe de type A. Il suffit donc de vérifier que si une carte $0 \leq y < m$ est dans V alors une carte de la classe de type A de $m-1-y$ est aussi dans V. En effet, on aura alors la classe de type A de y et $m-1-y$ sont dans V et l'union de ces deux classes et égal à l'union de la classe de type B de y et sa classe complémentaire. On a donc bien que V est l'union de paire de classe de type B complémentaire.

Soit $0 \leq y < m$ tel que y est dans V. Alors il existe $x = tm + p$ dans U tel que

$$\text{out}^{-1}(x) = y \text{ ou } \text{in}^{-1}(x) = y$$

Si $\text{out}^{-1}(x) = y$, alors on sépare en quatre cas. On note que la congruence à y mod p nous donne l'égalité, car y est dans le premier sous-paquet.

1. Si x est pair et p est pair alors

$$\begin{aligned} y = & \text{out}^{-1}(tm+p) = \frac{p}{2} \\ & \text{in}^{-1}(tm+p) \equiv (m-1) - \frac{p}{2} = (m-1) - y \end{aligned}$$

2. Si x est pair et p est impair alors

$$\begin{aligned} y = & \text{out}^{-1}(tm+p) = \frac{m-1}{2} + \frac{p+1}{2} \\ & \text{in}^{-1}(tm+p) \equiv \frac{m-1}{2} - \frac{p+1}{2} = (m-1) - y \end{aligned}$$

3. Si x est impair et p est pair alors

$$\begin{aligned} y = & \text{out}^{-1}(tm+p) = \frac{m-1}{2} - \frac{p}{2} \\ & \text{in}^{-1}(tm+p) \equiv \frac{m-1}{2} + \frac{p}{2} = (m-1) - y \end{aligned}$$

4. Si x est impair et p est impair alors

$$y = \text{out}^{-1}(tm+p) = (m-1) - \frac{p-1}{2}$$
$$\text{in}^{-1}(tm+p) \equiv \frac{p-1}{2} = (m-1) - y$$

On a donc bien dans les quatre cas, on a que V contient au moins une carte de la classe de type A de $(m-1)-y$.

Le cas où $y = in^{-1}(x)$ se vérifie de façon symétrique.

On vérifie maintenant que $\#V = 2 \cdot \#U$. On a tous d'abord que

$$\#V \leq 2 \cdot \#U$$

, car au plus deux cartes distinctes peuvent être envoyées sur chaque carte de U car on a deux opérations. Pour voir que $\#V \geq 2 \cdot \#U$, on sépare en deux cas.

Tout d'abord, si la classe de type B qui est utilisé pour construire U est la classe des cartes milieux et $\#U = 2^r$. On a alors $\frac{x}{2} = \text{out}^{-1}(x)$ est dans V (si x est pair) ou $\frac{x-1}{2} = \text{in}^{-1}(x)$ est dans V (si x est impair). Comme $\frac{x}{2}$ et $\frac{x-1}{2}$ ne sont pas des cartes milieux leur classe de type B complémentaire est différente de leur classe de type B et donc V contient au moins deux classes de type B (de cardinalité 2^r) et donc

$$\#V \geq 2^{r+1} = 2\#U$$

Si la classe de type B qui sert à construire U n'est pas la classe des cartes milieux alors U contient deux classes de type B distinctes et $\#U = 2^{r+1}$. On a que U contient deux cartes distinctes dans le premier sous-paquet, qui sont distinctes de la carte milieux. Soit p et $m-1-p$ ces cartes. Si p est pair alors $\frac{p}{2} = \text{out}^{-1}(p)$ et $\frac{m-1}{2} - \frac{p}{2} = \text{out}^{-1}(m-1-p)$. On a alors que V contient la classe de type B de deux cartes au-dessus de la carte milieux dans le sous-paquet. Les deux classes sont donc distinctes et pas complémentaires l'une de l'autre. En ajoutant les classes complémentaires on a que V contient au moins quatre classes de type B et donc

$$\#V \geq 2^{r+2} = 2 \cdot \#U$$

Si p est impair alors $\frac{p-1}{2} = \text{in}^{-1}(p)$ et $\frac{m-1}{2} - \frac{p-1}{2} = \text{in}^{-1}(m-1-p)$ et on raisonne de même que pour le cas où p est pair. $\square$

On construit les ensembles $U_k(2n)$ des cartes d'un paquet de taille $2n$ qui peuvent être envoyées sur une carte milieux en $k-1$ coup. Rigoureusement, on construit les ensembles U_k récursivement de la façon suivante :

Définition 4. *Soit un paquet de $2n$ cartes. On définit.*

$$U_1(2n) = \{\textit{cartes milieux d'un paquet de } 2n \textit{ cartes}\}$$
$$U_{k+1}(2n) = \{\textit{cartes d'un paquet de } 2n \textit{ envoyées sur } U_k(2n) \textit{ par les mélanges } \text{in } \textit{et } \text{out}\}$$

Par la proposition 2, si une carte est dans U_k alors toutes les cartes de sa classe de type A, sa classe de type B et sa classe complémentaire sont dans U_k. En particulier, si une carte est dans U_k, toutes les cartes qui lui sont congru modulo m sont aussi dans U_k.

On construit maintenant un arbre quaternaire complet ayant comme sommet certains types de triplets d'entier. Bien que le lien avec le problème ne soit pas évident à première vue, il sera détaillé par la suite.

Définition 5. *On construit l'arbre T récursivement. On commence la construction de T avec $(1, 1, 1)$ comme racine et on utilise la règle de construction de la figure 2 pour obtenir les quatre enfants d'un sommet.*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & (i,j,k) \arrow[dll, dashed, "1"'] \arrow[dl, dashed, "2"'] \arrow[d, dashed, "3"] \arrow[dr, dashed, "4"] & \\ (i,j,k+1) & (2^{k+1}-i, 2^k-j, k+1) & (i, 2^k+j, k+1) & (2^{k+1}-i, 2^{k+1}-j, k+1) \end{tikzcd}$$

FIGURE 2 – Comment calculer les quatre enfants d'un sommet de T

Pour bien comprendre quels sont les entiers qui forment les triplets de T, on considère les ensembles suivants :

Définition 6. *L'ensemble A_k pour k un entier strictement positif est l'ensemble des nombres impairs entre 0 et 2^k. Autrement dit, $A_k = \{1, 3, 5, ..., 2^k - 1\}$.*

Le lemme suivant nous aide à comprendre comment les A_k et les sommets de l'arbre sont lié.

Lemme 1. *Les sommets de T sont exactement les triplets de*

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} {A_k}^2 \times \{k\}$$

Démonstration. Il est clair que chaque niveau est constitué de triplet dans ${A_k}^2 \times \{k\}$ si on est sur le niveau k. On veut vérifier que chaque paire de ${A_k}^2$ apparaît une et une seule fois sur le niveau k. On sait que pour le premier niveau c'est vrai. Supposons que c'est vrai pour le niveau k. Soit (a, b, k) et (i, j, k) deux sommets de ce niveau alors aucune combinaison d'opération ne permet d'obtenir deux enfants identiques. Donc chaque paire n'apparaît qu'une fois sur chaque niveau. De plus, le niveau k est de cardinalité 4^{k-1} et

$$|{A_k}^2| = \left(\frac{2^k}{2}\right)^2 = (2^{k-1})^2 = 4^{k-1}$$

. On a donc que chaque paire doit apparaître une fois sur le niveau. $\square$

Pour m impair fixé, on défini ici une fonction s_m de l'ensemble des sommets de T dans $\mathbb{Q}$

Définition 7. *Soit* (i, j, k) *un sommet de* T*, alors pour* m *impair positif,* $s_m(i, j, k) = \frac{im-j}{2^k}$.

Lemme 2. *Pour tout* (i, j, k) *sommet de* T *et pour tout* m *impair, on a que* $-1 < s_m(i, j, k) < m$*. En particulier, si* $s_m(i, j, k)$ *est un nombre entier,* $s_m(i, j, k) \in \{0, 1, 2, ..., m-1\}$

Démonstration. Comme $i, j \in A_k$, on a que

$$0 < \frac{im}{2^k} < m \text{ et } 0 < \frac{j}{2^k} < 1$$

On a donc que

$$\begin{aligned} \frac{im-j}{2^k} &< m - \frac{j}{2^k} < m - 0 = m \\ \frac{im-j}{2^k} &> 0 - \frac{j}{2^k} > 0 - 1 = -1 \end{aligned}$$

Ce qui démontre ce que l'on voulait vérifier. □

Lemme 3. *Soit* m *impair. Soit* (i, j, k), (x, y, k) *des sommets de* T *tel que* $i < x$ *et* $s(i, j, k) = s(x, y, k)$*. Alors pour tout* $i < r < x$ *impair, il existe* $t = (r-i)m+j$ *tel que* $(r, t) \in {A_k}^2$ *et* $s(r, t, k) = s(i, j, k)$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} &s_m(i, j, k) = s_m(x, y, k) \\ \Rightarrow &\frac{im-j}{2^k} = \frac{xm-y}{2^k} \\ \Rightarrow &im - j = xm - y \end{aligned}$$

Soit r impair tel que $i < r < x$, on fixe $t = (r-i)m + j$. $(r-i)m$ est pair et j est impair donc t est impair et $t > 0$, car $r > i$ et $j > 0$. Par notre choix de t, on a que

$$rm - t = rm - ((r-i)m + j) = rm - rm + im - j = im - j$$

Ainsi,

$$s_m(i, j, k) = s_m(r, t, k)$$

Comme $im - j = xm - y$, on a ainsi que

$$\begin{aligned} &xm - y = rm - t \\ \Rightarrow &t - y = (r-x)m < 0 \\ \Rightarrow &t < y < 2^k \end{aligned}$$

On a donc que $0 < t < 2^k$ et t est impair donc $(r, t) \in {A_k}^2$. Ainsi pour tout $i < r < x$, il existe $t = (r-i)m + j$ tel que $s_m(i, j, k) = s_m(r, t, k)$. □

Si on considère $x = 0m + p$ une carte dans le premier sous-paquet. On sait donc que la parité de p et de x est la même. On se trouve donc dans un des deux cas suivants :

1. x est pair et p est pair
2. x est impair et p est impair

En oubliant la parité, on peut donc définir quatre opérations sur les cartes p du premier sous-paquet à l'aide tu tableau 1 (on est conscient que certaines opérations ne donneront pas des positions entières). Nos quatre opérations sont donc

① $\frac{p}{2}$ (proviens du *inverse out* sur une position paire)

② $\frac{p-1}{2}$ (proviens du *inverse in* sur une position impaire)

③ $(m-1) - \frac{p-1}{2}$ (proviens du *inverse out* sur une position impaire)

④ $(m-1) - \frac{p}{2}$ (proviens du *inverse in* sur une position paire)

Les positions des cartes milieux sont toutes congrues à $\frac{m-1}{2}$. On s'intéresse aux positions qui peuvent être envoyées sur les cartes milieux.

Définition 8. *On construit un arbre T_m en partant de la valeur $\frac{m-1}{2}$ et en appliquant les quatre opérations précédentes sur un sommet pour obtenir ses quatre enfants.*

La figure 3 montre les premiers niveaux de l'arbre pour m quelconque.

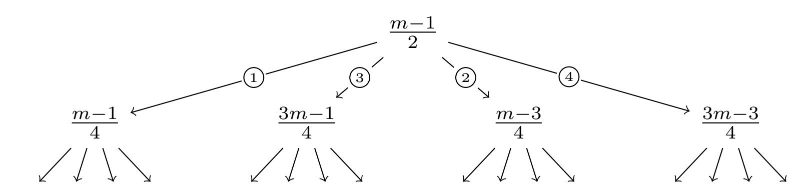

FIGURE 3 – Début de l'arbre T_m

On remarque une structure particulière dans la façon d'écrire les sommets. Ceci ce généralise de la façon suivante, pour un sommet de la forme $\frac{im-j}{2^k}$, les quatre enfants de ce sommet sont illustrés sur la figure 4. De plus, on remarque que T_m peut être obtenu de T en appliquant s_m sur tous les sommets.

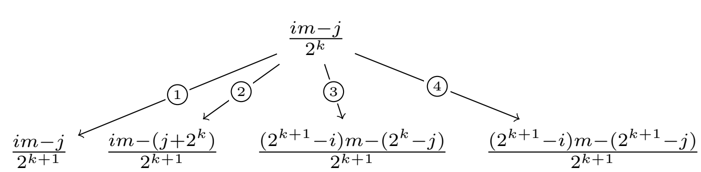

FIGURE 4 – Comment calculer les 4 enfants d'un sommet de T_m

Proposition 3. *Soit m impair, k et r fixé. Soit $N_{m,k}$ les sommets du k-ème niveau de T_m. Alors,*

a) $N_{m,k}$ contient un représentant de la classe de type A de chaque élément de $U_k(2^r m)$

b) $U_k(2^r m)$ contient chaque entier qui est dans $N_{m,k}$

Démonstration.

a) Vérifions d'abord que le niveau k de T_m contient un représentant de la classe de type A de chaque élément de $U_k(2^r m)$. On a d'abord que le premier niveau $N_{m,1}$ contient un représentant de la classe des cartes milieux.

Si le k-ème niveau $N_{m,k}$ contient un représentant de la classe de type A de chaque carte de $U_k(2^r m)$ alors ce représentant est dans le premier sous-paquet par le lemme 2. Soit $x = tm + p$ dans $U_{k+1}(2^r m)$ alors p est aussi dans $U_{k+1}(2^r m)$, car les U sont fermés pour les classes de type A.

Si $p < \frac{m-1}{2}$ alors on a

$$\begin{aligned} &\mathrm{out}(p) = 2p < m \\ \textbf{ou } &\mathrm{in}(p) = 2p + 1 < m \end{aligned}$$

est dans $U_k(2^r m)$. Donc $2p$ ou $2p+1$ est dans $N_{m,k}$ par hypothèse de récurrence. Or

$$\frac{2p}{2} = p \text{ et } \frac{(2p+1)-1}{2} = p$$

on a donc que p est dans $N_{m,k+1}$ soit avec $2p$ comme parent et l'opération 1 ou avec $2p+1$ comme parent et l'opération 2.

Si $p > \frac{m-1}{2}$ alors $m - 1 - p \in U_{k+1}(2^r m)$ et $m - 1 - p < \frac{m-1}{2}$. On a alors

$$\begin{aligned} &\mathrm{out}(m-1-p) = 2(m-1-p) < m \\ \textbf{ou } &\mathrm{in}(m-1-p) = 2(m-1-p) + 1 < m \end{aligned}$$

est dans $U_k(2^r m)$. Donc $2(m-1-p)$ ou $2(m-1-p)+1$ est dans $N_{m,k}$ par hypothèse de récurrence. Or

$$(m-1) - \frac{2(m-1-p)}{2} = p \text{ et } (m-1) - \frac{(2(m-1-p)+1)-1}{2} = p$$

on a donc que p est dans $N_{m,k+1}$ soit à partir de $2(m-1-p)$ avec l'opération 4 où à partir de $2(m-1-p)+1$ avec l'opération 3.

Si $p = \frac{m-1}{2}$ alors

$$\begin{aligned} &\mathrm{out}(p) = m - 1 \\ \textbf{ou } &\mathrm{in}(p) = m \end{aligned}$$

est dans $U_k(2^r m)$. De façon équivalente, 0 ou $m-1$ sont dans $U_k(2^r m)$. Si $m-1$ est dans $U_k(2^r m)$, on a que $m-1$ est dans N_k et donc $\frac{m-1}{2}$ est dans N_{k+1} par l'opération 1. Si 0 est dans $U_k(2^r m)$ alors 0 est dans $N_{m,k}$ par hypothèse de récurrence. On sait donc que 0 ou 1 est dans $N_{m,k-1}$, car seules les opérations 1 et 2 peuvent engendré 0 sur le niveau k. Dans les deux cas, par l'opération 4 ou 3, on a que $m-1$ est dans $N_{m,k}$ ce qui nous ramène au cas précédent.

b) On vérifie maintenant que si une position entière est dans $N_{m,k}$ alors elle est dans $U_k(2^r m)$. Tout d'abord, si il y a une position entière sur un certain niveau $N_{m,k}$, il y a un chemin de position entière dans T_m qui va de la racine à celle-ci. En effet, ceci découle du fait que si on a un nombre non entier, alors peu importe quelle opération on effectue dessus, on se retrouvera avec une position non entière. On vérifie maintenant la propriété par récurrence sur k. Pour $N_{m,1}$ c'est évident. Supposons que tous les entiers de $N_{m,k}$ sont dans $U_k(2^r m)$. Soit un entier p de $N_{m,k+1}$ alors il existe un entier r dans $N_{m,k}$ telle qu'une des quatre opérations sur cet entier donne p. On sait aussi par hypothèse de récurrence que r est dans $U_k(2^r m)$. Si r est pair alors $p = \frac{r}{2}$ ou $p = (m-1) - \frac{r}{2}$. Si $p = \frac{r}{2}$ alors $p = \mathrm{out}^{-1}(r)$ est dans $U_{k+1}(2^r m)$, car r est dans $U_k(2^r m)$. Si $p = (m-1) - \frac{r}{2}$ alors on a que $m - 1 - p = \frac{r}{2} = \mathrm{out}^{-1}(r)$ et donc $m - 1 - p$ est dans $U_{k+1}(2^r m)$ et conséquemment p est dans $U_{k+1}(2^r m)$. Si r est impair alors $p = \frac{r-1}{2}$ ou $p = (m-1) - \frac{r-1}{2}$ et on raisonne de même que pour le cas où r est pair. □

On utilise maintenant notre arbre T pour montrer que pour tous les arbres T_m, le premier niveau sur lequel apparaît un nombre entier contient une seule fois ce nombre.

Proposition 4. *Soit m impair fixé. Soit (i,j,k) un sommet du T tel que $s_m(i,j,k)$ soit entier et que pour tout sommet (a,b,c) avec $c < k$, $s_m(a,b,c) \neq s_m(i,j,k)$. Alors pour tout $(x,y) \in {A_k}^2$,*

$$s_m(i,j,k) \neq s_m(x,y,k)$$

Démonstration. On procède par l'absurde, supposons qu'il existe un tel (x,y). Sans perte de généralité, disons $x > i$. Par le lemme 3, on sait donc que $s_m(i,j,k) = s_m(i+2, 2m+j, k)$ et que $(i+2, 2m+j, k)$ est un sommet de T. De plus,

$$\begin{aligned} s_m(i,j,k) &= \frac{s_m(i,j,k) + s_m(i+2, 2m+j, k)}{2} \\ &= \frac{\frac{im-j}{2^k} + \frac{(i+2)m-(2m+j)}{2^k}}{2} \\ &= \frac{(2i+2)m - (2m+2j)}{2^{k+1}} \\ &= \frac{(i+1)m - (m+j)}{2^k} \end{aligned}$$

Si on écrit

$$\begin{aligned} i+1 &= 2^{k_1} t_1 \\ m+j &= 2^{k_2} t_2 \end{aligned}$$

avec t_1, t_2 impair, on a

$$\begin{aligned} i+1 \leq 2^k &\Rightarrow k_1 \leq k \\ 2m+j \leq 2^k &\Rightarrow m+j \leq 2^k \\ &\Rightarrow k_2 \leq k \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} s_m(i,j,k) &= \frac{(i+1)m-(m+j)}{2^k} \\ &= \frac{2^{k_1}t_1m - 2^{k_2}t_2}{2^k} \\ &= \frac{t_1m}{2^{k-k_1}} - \frac{t_2}{2^{k-k_2}} \end{aligned}$$

et comme $s_m(i,j,k)$ est entier, on doit avoir que $k_1 = k_2$ sinon on a deux fractions irréductibles sur des dénominateurs différents et il est donc impossible que leur différence donne un entier. Donc,

$$s_m(i,j,k) = \frac{t_1m - t_2}{2^{k-k_1}}$$

Comme $i+1$ est pair $k_1 > 0$ et

$$\begin{aligned} 0 < 2^{k_1}t_1 = i+1 \leq 2^k &\Rightarrow 0 < t_1 \leq 2^{k-k_1} \\ 0 < 2^{k_1}t_2 = m+j \leq 2^k &\Rightarrow 0 < t_2 \leq 2^{k-k_1} \end{aligned}$$

Donc $(t_1, t_2, k-k_1)$ est un triplet de ${A_{k_1}}^2 \times \{k-k_1\}$ et est donc un sommet de T d'un niveau plus petit que k qui donne aussi la position $s_m(i,j,k)$. Ceci est une contradiction avec le fait que $s_m(i,j,k)$ apparaît pour la première fois sur le niveau k. Donc il n'existe pas d'autre triplet tel que $s_m(x,y,k) = s_m(i,j,k)$. $\square$

On déduit directement de la proposition précédente le corollaire suivant.

Corollaire 2. *Soit m impair fixé. Alors le premier niveau de T_m sur lequel apparaît un entier contient une seule fois cet entier.*

Proposition 5. *Soit $tm+p$ et $tm+p+1$ deux cartes non-frontières d'un paquet de 2^rm cartes. Alors ces deux cartes ne peuvent pas avoir la même longueur de séquence de Elmsley.*

Démonstration. On montrera que la longueur de la séquence pour se rendre à une carte milieux est différente pour $tm+p$ et $tm+p+1$ puisque l'on sait qu'une fois qu'on atteint la carte milieux le nombre de mélanges restant est identique pour les deux cartes.

On procède par l'absurde. Supposons qu'il existe $x = tm+p$ et $x+1 = tm+p+1$ deux cartes contiguës qui on la même longueur k de séquences pour se rendre à une carte milieu et qui ne sont pas des cartes frontières.

Comme x et $x+1$ on la même longueur de séquences, il apparaisse dans $U_k(2^rm)$ mais pas dans $U_{k'}$ pour tout $k' < k$. Donc $p, p+1$ apparaissent pour la première fois sur le même niveau $N_{m,k}$ dans T_m par la proposition 3. Pour trouver la contradiction, on montrera qu'on doit avoir que p ou $p+1$ sont dans un certain $N_{m,k'}$ avec $k' < k$.

Comme on suppose que p et $p+1$ apparaisse pour la première fois dans $N_{m,k}$, on a par la proposition 4 que $p, p+1$ sont une seule fois dans sur le niveau $N_{m,k}$. Ainsi il existe un unique triplet (i,j,k) et un unique triplet (x,y,k) de T tel que $s_m(i,j,k) = p$ et $s_m(x,y,k) = p+1$.

On montrera les résultats suivants :

1) $2^k < 2m + j$
2) $j < 2m$
3) $2m < 2^k$
4) $2m + j < 2^{k+1}$
5) Le triplet de T qui donne $p+1$ dans $N_{m,k}$ est $(i+2, 2m+j-2^k, k)$
6) Il existe un triplet (a,b,k') de T tel que $k' < k$ et $s_m(a,b,k') = p$ ou $p+1$

1) $2^k < 2m + j$ On sait que $s_m(i,j,k) = p$. On a aussi que

$$p = \frac{(i+2)m - (j+2m)}{2^k}$$

Or comme p est une seule fois sur le niveau $N_{m,k}$, il ne peut y avoir qu'une seule paire de $(a,b) \in {A_k}^2$ tel que $s_m(a,b,k) = p$. On a donc que $(i+2, j+2m) \notin {A_k}^2$. On a donc que $i+2 \notin A_k$ ou bien $j+2m \notin A_k$. Si $i+2 \notin A_k$ alors

$$i + 2 > 2^k \implies i = 2^k - 1$$

Essayons maintenant d'écrire $p+1$ comme $s_m(x,y,k)$. Si $x = i$ alors

$$\begin{aligned} p+1 =& \frac{(2^k-1)m - y}{2^k} \\ \implies p =& \frac{(2^k-1)m - y}{2^k} - 1 \\ =& \frac{(2^k-1)m - (2^k+y)}{2^k} \\ \implies j &= 2^k + y > 2^k \end{aligned}$$

Ce qui contredit que j est dans A_k. Si $x < i$ alors

$$\begin{aligned} p+1 = \frac{xm-y}{2^k} &= \frac{im-j}{2^k} + 1 \\ \implies xm - y &= im - j + 2^k \\ \implies y &= (x-i)m + j - 2^k \\ \implies 0 &< (x-i)m + j - 2^k \\ \implies 0 &< j - 2^k \\ \implies 2^k &< j \end{aligned}$$

Ce qui contredit que j est dans A_k. Comme tous les cas mènent à une contradiction, on doit donc avoir que $i+2$ est dans A_k. On a donc que $j+2m$ n'est pas dans A_k ce qui nous donne que

$$2m + j > 2^k$$

2) $j < 2m$ On a aussi que $p = \frac{(i-2)m-(j-2m)}{2^k}$ donc $(i-2, j-2m) \notin {A_k}^2$. Si $i-2$ n'est pas dans A_k alors $i = 1$. On a que $p \neq 0$ sinon $tm + p$ est une carte frontière. On a donc

$$\begin{aligned} p &= \frac{m-j}{2^k} \\ &\implies 2^k p = m - j \\ &\implies m - j \geq 2^k \\ &\implies m > 2^k \end{aligned}$$

On sait que $s_m(x, y, k) = p + 1$. Si $x > 1$ alors

$$\begin{aligned} p + 1 &= \frac{xm - y}{2^k} \\ &> \frac{xm - 2^k}{2^k} \\ &= \frac{(x-2)m + 2m - 2^k}{2^k} \\ &> \frac{(x-2)m + 2^{k+1} - 2^k}{2^k} \\ &= \frac{(x-2)m}{2^k} + 1 \\ &> \frac{m}{2^k} + 1 \\ &> p + 1 \end{aligned}$$

Ce qui est impossible. On doit donc avoir $x = 1$ mais alors

$$\frac{m-y}{2^k} = p + 1 = \frac{m-j}{2^k} + 1 = \frac{m - j + 2^k}{2^k} = \frac{m - (j - 2^k)}{2^k}$$

Donc $y = j - 2^k < 0$ ce qui est impossible. On doit donc avoir que $i \neq 1$, $i - 2 \in A_k$ et $j - 2m \notin A_k$. Comme $j - 2m < 1$, on a que $j < 2m$.

3) $2m < 2^k$ On veut montrer ici que $2m < 2^k$. Par l'absurde on suppose que $2m \geq 2^k$ et on considère la paire $(x, y) \in {A_k}^2$ tel que $s_m(x, y, k) = p + 1$. On vérifiera 3 cas soit $x = i$, $x < i$ et $x > i$.

Si $x = i$ alors

$$p + 1 = \frac{im - j}{2^k} + 1 = \frac{im + 2^k - j}{2^k} = \frac{im - (j - 2^k)}{2^k}$$

Donc $y = j - 2^k < 0$ ce qui est impossible, car $y \in A_k$. Ce cas est donc impossible.

Si $x < i$, on fixe $t = i - x$. On a alors

$$p + 1 = \frac{xm - y}{2^k} = \frac{\overbrace{(x+t)}^{i} m - (tm + y)}{2^k}$$

Or on sait par hypothèse que

$$tm + y \geq 2m + y \geq 2^k + y > 2^k > j$$

$$\implies p + 1 = \frac{im - (tm + y)}{2^k} < \frac{im - j}{2^k} = p$$

Ce cas est donc impossible.

Si $x > i$, on fixe $t = x - i$. On a alors

$$p + 1 = \frac{xm - y}{2^k} = \frac{\overbrace{(x - t)}^{i} m + tm - y}{2^k}$$

Comme $x > i$, on a que $t > 2$ et donc $tm \geq 2m \geq 2^k$. Donc

$$p + 1 \geq \frac{im + 2^k - y}{2^k} = \frac{im - y}{2^k} + 1$$
$$\implies \frac{im - y}{2^k} \leq p = \frac{im - j}{2^k}$$
$$\implies y > j$$

Ceci nous donne

$$p+1 = \frac{xm - y}{2^k} > \frac{xm - j}{2^k} = \frac{im + tm - j}{2^k} \geq \frac{im + 2^k - j}{2^k} = \frac{im - j}{2^k} + 1 = p + 1$$

Ce qui est une contradiction. Ce cas est donc impossible.

Comme on a une contradiction dans tous les cas, on doit donc avoir que $2m < 2^k$.

4) $2m + j < 2^{k+1}$ On a vue que $j < 2m$ et $2m < 2^k$ on a donc que

$$2m + j < 2m + 2m < 2^{k+1}$$

5) Le triplet de T qui donne $p + 1$ dans $N_{m,k}$ est $(i + 2, 2m + j - 2^k, k)$
On considère maintenant $(i + 2, 2m + j - 2^k)$. On a que $i + 2 \in A_k$ comme vu dans **1)**. De plus, $2m + j - 2^k$ est impair et

$$2m + j < 2^{k+1} \implies 2m + j - 2^k < 2^k$$
$$2^k < 2m + j \implies 0 < 2m + j - 2^k$$

On a donc que $2m + j - 2^k$ est dans A_k. Finalement, on a

$$s_m(i + 2, 2m + j - 2^k, k) = \frac{(i + 2)m - (2m + j - 2^k)}{2^k} = \frac{im - j}{2^k} + 1 = p + 1$$

On a donc trouvé le triplet du niveau k de T qui nous donne la position $p + 1$ dans $N_{m,k}$.

6) Il existe un triplet (a,b,k') de T tel que $k' < k$ et $s_m(a,b,k') = p$ ou $p+1$ On a que

$$p + \frac{1}{2} = \frac{s_m(i,j,k) + s_m(i+2, 2m+j-2^k, k)}{2} = \frac{(i+1)m - (m+j-2^{k-1})}{2^k}$$

En soustrayant ou en ajoutant $\frac{1}{2}$, on trouve que

$$p = \frac{(i+1)m - (m+j)}{2^k}$$
$$p+1 = \frac{(i+1)m - (m+j-2^k)}{2^k}$$

On réécrit avec t_1 et t_2 impairs

$$i+1 = 2^{k_1}t_1$$
$$m+j = 2^{k_2}t_2$$
$$m+j-2^k = 2^{k_2}t_2 - 2^k$$

Comme i est pair et $i+1 < 2^k$ (car $i+2 < 2^k$), on a $0 < k_1 < k$. Si $k_1 \neq k_2$ alors

$$p = \frac{t_1 m}{2^{k-k_1}} - \frac{t_2}{2^{k-k_2}}$$

n'est pas un entier, car c'est la différence de deux fractions irréductibles sur des dénominateurs différents. Donc $k_1 = k_2$. On a donc

$$\begin{aligned} m+j &= 2^{k_1}t_2 \\ &\implies p = \frac{t_1 m - t_2}{2^{k-k_1}} \\ m+j-2^k &= (2^{k_1}t_2 - 2^k) = 2^{k_1}(t_2 - 2^{k-k_1}) \\ &\implies p+1 = \frac{t_1 m - (t_2 - 2^{k-k_1})}{2^{k-k_1}} \end{aligned}$$

Comme $2^{k_1}t_1 < 2^k$, on a que $t_1 < 2^{k-k_1}$ donc $t_1 \in A_{k-k_1}$. Pour vérifier que l'on a trouvé un sommet de T_m au-dessus du niveau k qui donne p ou $p+1$, il suffit de vérifier que $(t_1, t_2, k-k_1)$ ou $(t_1, t_2 - 2^{k-k_1}, k-k_1)$ est un sommet de T. C'est à dire, que t_2 ou $t_2 - 2^{k-k_1}$ sont dans A_k ce qui est équivalent à

$$\begin{aligned} &\iff 0 < t_2 < 2^{k-k_1} \text{ ou } 0 < t_2 - 2^{k-k_1} < 2^{k-k_1} \\ &\iff 0 < t_2 < 2^{k-k_1} \text{ ou } 2^{k-k_1} < t_2 < 2^{k-k_1+1} \\ &\iff 0 < t_2 < 2^{k-k_1+1} \\ &\iff 0 < 2^{k_1}t_2 < 2^{k+1} \\ &\iff 0 < m+j < 2^{k+1} \end{aligned}$$

Or $0 < m+j$, car m, j sont positif et $m+j < 2m+j < 4m < 2^{k+1}$. Donc on a bien un triplet dans un niveau $k' < k$ de T tel que l'image par s_m de ce triplet est p ou $p+1$. Donc $N_{m,k'}$ contient p ou $p+1$ ce qui est une contradiction.

Conclusion Donc deux sommets contigus qui ne sont pas des positions frontières ne peuvent pas apparaître pour la première fois sur la même ligne de T_m. Ils ne peuvent donc pas apparaître pour la première fois dans le même $U_k 2^r m$ et donc ne peuvent pas avoir la même longueur de séquences de Elmsley. □

Théorème 1. *Pour chaque carte du sous-paquet qui n'est pas une carte frontière, la plus courte séquence pour se rendre à une carte milieux est unique.*

Démonstration. Considérons une carte non frontière x ayant deux séquences distinctes pour se rendre à une carte milieux. Soit

$$m_1, m_2, ..., m_k, \text{out}, m_{k+2}, ..., m_n$$

et

$$m_1, m_2, ..., m_k, \text{in}, m'_{k+2}, ..., m'_n$$

les deux séquences. Soit

$$y = m_k \circ m_{k-1} \circ \cdots \circ m_1(x)$$

Alors y n'est pas une carte frontière, car on ne peut pas sauter à une carte frontière sans passer par une carte milieux et y n'est pas une carte milieux sinon la séquence se termine à m_k et les deux séquences sont identique. y a deux séquences de Elmslsey distinctes c'est-à-dire out, $m_{k+2}, ..., m_n$ et in, $m'_{k+2}, ..., m'_n$, car s'il existait des séquences plus courtes pour y il en existerait des plus courtes pour x. Donc y a deux séquences distinctes qui ont des premiers mouvements différents.

Ainsi out(y) et in(y) on la même longueur de séquences, car la séquence de out(y) est

$$m_{k+2}, ..., m_n$$

et la séquence de in(y) est

$$m'_{k+2}, ..., m'_n$$

De plus in(y) et out(y) sont une à côté de l'autre, car si y est dans la première moitié

$$\text{out}(y) = 2y \text{ et } \text{in}(y) = 2y + 1$$

et si y est dans la seconde moitié alors

$$\text{out}(y) = 4n - 2y - 1 \text{ et } \text{in}(y) = 4n - 2y - 2$$

Donc si une carte a deux séquences pour se rendre à la carte milieux, alors deux cartes contiguës ont la même longueur de séquences pour se rendre à la carte milieux. □

Maintenant que l'on sait que la plus courte séquence pour apporter une carte à une position milieu est unique, on s'intéresse à la façon de calculer cette séquence. Pour ce faire on construit d'abord l'arbre $\widetilde{T}_m$ pour la taille de sous-paquet qui nous intéresse. $\widetilde{T}_m$ est l'arbre T_m dans lequel on supprime tous les sommets qui ne sont pas entiers ou qui n'apparaissent pas pour la première fois. Pour construire $\widetilde{T}_m$ on commence avec la carte milieux et on applique les deux opérations qui donnent des entiers. On continue ainsi ligne par ligne en ajoutant les positions que si elles n'ont pas déjà été ajoutées. On utilise ensuite le lemme suivant :

Lemme 4. *Les cartes d'une classe de type A ont le même premier mouvement pour leurs séquences d'Elmsley. De plus si on considère le sommet du représentant de la classe dans $\widetilde{T_m}$, ce premier mouvement est un*

— out *si c'est l'opération* 1 *ou* 3 *qui a engendré le sommet*

— in *si c'est l'opération* 2 *ou* 4 *qui a engendré le sommet*

Démonstration. Soit U_k le premier U qui contient une certaine classe de type A. Alors si une certaine carte x de cette classe est envoyée sur $S(x)$ dans U_{k-1} par un mélange S alors ce mélange S envoie la classe de type A sur la classe de type B de $S(x)$ par le corollaire 1. Comme U_{k-1} est fermé sur les classes de type B, toutes les cartes de la classe de type A sont envoyé dans U_{k-1} par le mélange S. Ainsi elle progresse dans les U_i par les mêmes mouvements et ont donc le même premier mouvement pour leur séquence.

Soit s le représentant de notre classe de type A que l'on nomme $\mathcal{A}_s$ et soit p le parent de s.

Si s est engendré par l'opération 1 alors $s = \frac{p}{2}$. Comme p doit alors être pair, le *out* envoie $\mathcal{A}_s = \mathcal{A}_{\frac{p}{2}}$ sur $\mathcal{B}_p$. Donc les cartes de A_s progresse par le *out* car $\mathcal{B}_p$ est dans U_{k-1}.

Si s est engendré par l'opération 3 alors $s = (m-1) - \frac{p-1}{2}$. Comme p doit alors être impair, le *out* envoie $\mathcal{A}_s = \mathcal{A}_{(m-1)-\frac{p-1}{2}}$ sur $\mathcal{B}_p$. Donc les carte de $\mathcal{A}_s$ progresse par le *out* car $\mathcal{B}_p$ est dans U_{k-1}.

On raisonne de même pour les autres cas en calculant sur quelle classe de type B est envoyée la classe de type A. □

On peut donc procéder de la façon suivante pour trouver la séquence d'une carte x dans un paquet de $2^k m$ cartes.

1. On commence avec une séquence vide
2. On construit $\widetilde{T}_m$
3. On calcule le représentant a de x et on le trouve dans $\widetilde{T}_m$
4. On utilise l'étiquette de l'arête incidente à a pour déterminer le mélange S à effectuer
5. On ajoute ce mélange à la fin de la séquence
6. Si S(x) n'est pas une position milieu, on reprend à 3 avec $x = S(x)$

On peut toutefois optimiser l'algorithme en ne recherchant pas tous les représentants les uns après les autres.

Pour ce faire, on remarque que par les opérations les deux enfants entiers d'un sommet a sont de la forme b et $(m-1) - b$. On considère un représentant c la classe $\mathcal{A}_c$ de la carte x et la figure 5 qui illustre une portion de l'arbre $\widetilde{T}_m$.

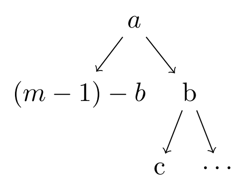

FIGURE 5 – Portion de l'arbre $\widetilde{T}_m$ autour du sommet c

Par le lemme 4, on sait que par un mélange S la classe $\mathcal{A}_c$ progresse vers la classe $\mathcal{B}_b$.

Ainsi, après le mélange S la carte x se retrouve dans $\mathcal{B}_b$ et donc elle est soit dans $\mathcal{A}_b$ ou $A_{(m-1)-b}$. Par conséquent, le représentant de $S(x)$ ne peut pas être n'importe où dans l'arbre, ce doit forcément être un des deux enfants de a. Dans tous les cas, on sait aussi qu'après notre carte sera dans la classe $\mathcal{B}_a$.

Faisons un exemple pour illustrer l'algorithme. On cherche la séquence de Elmsley pour envoyer la carte 7 à une carte milieu dans un paquet de 26 cartes. On construit d'abord $\widetilde{T}_{13}$ en appliquant successivement les opérations qui donnent des entiers et en ajoutant chaque entier qu'une fois. (voir figure 6). Par exemple, on applique ① et ④ sur 6 pour obtenir ces deux enfants entiers. Pour construire le quatrième niveau, on n'ajoute aucun sommet sous 8, car les opérations ① et ④ donnent 4 et 8 qui sont déjà dans l'arbre.

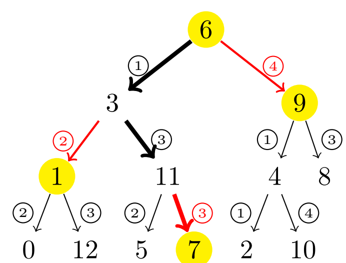

FIGURE 6 – Arbre $\widetilde{T}_{13}$

À partir de $\widetilde{T}_{13}$, on trouve le représentant de 7 et l'arête incident étant étiqueté ③, on a que le mélange à effectuer est un *out*. En effectuant le *out*, on se retrouve à la position 14 dont le représentant est 1. Or le parent de 7 est 11 donc 1 est le deuxième enfant de 3. L'arête qui le relit est ②, il faut donc faire un *in*. De même, in(14) = 22 dont le représentant est 9 qui n'est pas le parent de 11. Il faut donc faire le mélange *in* qui nous apporte à la carte milieu. La séquence pour déplacer 7 à une position milieu est donc *out*, *in*, *in*.

Pour implémenter l'algorithme, on note aussi que les deux enfants d'un sommet sont toujours engendrés par la paire ② et ③ ou la paire ① et ④. Donc pour faire progresser les classes $\mathcal{A}$ associées à ces deux sommets, il faut faire des mélanges différents. Par exemple, comme $\mathrm{out}(7) = 14 \equiv 1 \not\equiv 11$ et que pour faire progresser $\mathcal{A}_{11}$ on utilise le mélange *in*, on doit utiliser le mélange *out* pour faire progresser 14. Comme $\text{out}(\mathcal{A}_{11}) = \mathcal{B}_3 = \text{in}(\mathcal{A}_1)$ on se retrouve ensuite sur le même sommet, soit le sommet 3 et l'algorithme se répète. Finalement, l'algorithme est donc le suivant pour trouver la séquence jusqu'à une position milieu d'une carte x :

1. Commencer avec une séquence vide
2. Construire $\widetilde{T}_m$
3. Calculer le représentant a de x et on le trouve dans $\widetilde{T}_m$
4. Trouver l'opération S associée à l'étiquette de l'arête incidente à a
5. Si x n'est congru a a, S change de mélange
6. Ajouter S à la fin de la séquence
7. Si $a \neq \frac{m-1}{2}$ reprendre à 4 avec en remplaçant a par son parent et x par $S(x)$

3 Conclusion

On peut maintenant formuler les théorèmes suivants qui résument l'ensemble du problème.

Théorème 2. *Le chemin que suit une carte qui n'est pas une carte frontière pour aller au-dessus du paquet se fait en trois parties :*

- *Se rendre à une position de carte milieu : le chemin le plus court est unique.*
- *Passer d'une carte milieu à une carte frontière d'ordre k : les mélanges* in *ou* out *ont le même effet.*
- *Passer de la carte frontière d'ordre k vers le dessus du paquet : le chemin le plus court est unique.*

Il y a donc exactement deux séquences d'Elmsley pour les cartes qui ne sont pas à une frontière.

De plus, on a maintenant des algorithmes permettant de calculer les séquences. Il serait maintenant intéressant d'adapter les techniques présentées ici à d'autres mélanges, entre autres le mélange *flip* qui est semblable au *horseshoe*.

Références

[1] Émile Nadeau and Stéphanie Schanck. Résultats sur le problème d'elmsley pour les mélanges horseshoe. Rapport technique, Laboratoire de combinatoire et d'informatique mathématique (LaCIM), Université du Québec à Montréal, August 2015.