

Rapport de stage

**Théorie de la représentation et phénomène de
tamisage cyclique**

dans le cadre du
Stage d'initiation à la recherche - Été 2018
effectué sous la supervision de Franco Saliola

par
Patricia Sorya

Vendredi le 31 août 2018
Université du Québec à Montréal

Table des matières

1	Introduction	1
2	Tamissage cyclique sur les dissections de polygones	3
2.1	Algèbre amassée et triangulations	4
2.2	Espace vectoriel des dissections	8
2.3	Anneau de coordonnées homogènes de la Grassmannienne	10
2.4	Représentation du groupe linéaire général	13
2.5	Irréductibilité de $\mathbb{C}X_{n,k}$	18
3	Tamissage cyclique sur les triangulations de polygones	19
3.1	Triangulations comme sous-ensemble des dissections	20
3.2	Application du phénomène de tamissage cyclique de Westbury	21
3.3	Polynôme "fake degree"	22
3.4	Équivalence entre $F^{\text{CT}_n}(q)$ et $\text{Cat}_{n-2}(q)$	23
3.5	Conclusion	24

1 Introduction

Depuis son introduction en 2004 par Reiner, Stanton et White [10], le phénomène de tamisage cyclique a été noté dans une variété de cas. Il met en relation les trois objets suivants : un ensemble fini X , un groupe cyclique fini C et un polynôme $f(q)$ à coefficients entiers et positifs. Le triplet $(X, C, f(q))$ présente un *phénomène de tamisage cyclique* si pour tout $g \in C$ on a

$$\#X^g = f(\zeta_{o(g)})$$

où $X^g = \{x \in X \mid gx = x\}$ est l'ensemble des points fixes de g pour l'action de C sur X , et $\zeta_{o(g)}$ est une racine primaire de l'unité d'ordre égal à l'ordre de g comme élément du groupe C .

Puisque le phénomène de tamisage cyclique (PTC) implique une action de groupe, il est naturel de vouloir en faire l'étude sous l'angle de la théorie de la représentation. Alors que cette dernière a mené à des résultats intéressants, elle résiste à plusieurs cas a priori pûrement combinatoires.

C'est le cas d'un PTC faisant intervenir l'action de rotation sur l'ensemble des triangulations d'un polygone donné. Une triangulation est obtenue en divisant la surface d'un polygone en triangles, par des diagonales ne se croisant pas. Reiner, Stanton et White énoncent et démontrent ce PTC par dénombrement : ils confirment l'égalité en comparant le nombre de points fixes pour une rotation donnée et l'évaluation du polynôme en la racine appropriée.

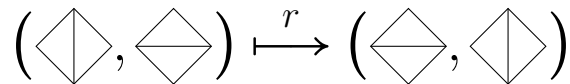


FIGURE 1 – Le polynôme associé à ce PTC est $Cat_2(q) = 1 + q^2$ et l'ordre de r est 4, ce qui donne bien à $f(\zeta_4) = f(i) = 1 + i^2 = 0 = \#X^r$.

À ce jour, il n'existe aucune démonstration par théorie de la représentation de ce théorème. Une telle interprétation donnerait une vision plus approfondie de pourquoi l'égalité tient, en invoquant le mécanisme derrière le PTC de façon intrinsèque.

Brendon Rhoades parvient toutefois à des résultats connexes dans l'étude de l'action de rotation sur des dissections de polygones [8]. Une dissection par k arêtes d'un polygone de n côtés est le tracé de k arêtes du polygone : côtés et diagonales confondus, avec multiplicités permises sur une même arête et sans que les arêtes tracées ne se croisent.

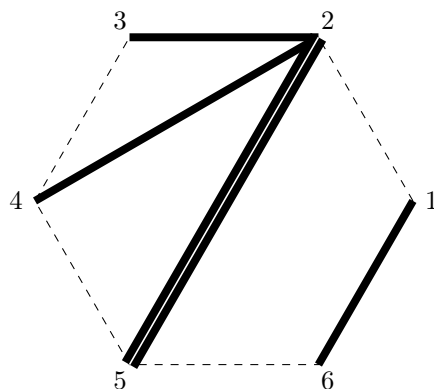


FIGURE 2 – Dissection d'un hexagone par 5 arêtes

Dans la première partie de ce rapport, nous détaillerons les étapes menant au résultat de Rhodes en explorant les notions nécessaires à l'élaboration de sa preuve. Tout d'abord, nous ferons un survol de la théorie de la représentation. Ensuite, nous présenterons la notion d'algèbre amassée et comment elle s'applique dans les travaux de Rhoades. Nous décrirons ensuite l'action de du groupe général linéaire et sa représentation associée. Le tout nous permettra de présenter une version détaillée de la démonstration du PTC sur les dissections de polygones.

En deuxième partie, nous reviendrons sur le problème initial portant sur les

triangulations. Bien que nous n'ayons pas abouti à une démonstration par théorie de la représentation de ce PTC, nous présenterons les pistes tentées et leurs réfutations. Finalement, nous énoncerons des remarques mettant en lien les rotations de triangulations et les résultats de Bruce E. Westbury [6] sur le PTC et la théorie de la représentation. Ces observations pourraient suggérer un façon nouvelle d'aborder ce problème ouvert.

2 Tamisage cyclique sur les dissections de polygones

Brendon Rhoades démontre le théorème suivant dans un article étudiant différents PTC sur des complexes simpliciaux. La rotation des dissections de polygones, telles que définies en introduction, est isomorphe à une certaine action sur les faces d'un complexe simplicial de type A : nous étudierons dans ce rapport le phénomène sous sa facette polygônale.

Théorème 2.1. *Soient $X_{n,k}$ l'ensemble des dissections par k arêtes d'un polygone de n côtés, et C le groupe engendré par r , une rotation horaire de $2\pi/n$. Alors le triplet*

$$(X_{n,k}, C, f(q) = q^{-k} s_{(k,k)}(1, q, \dots, q^{n-1}))$$

présente un phénomène de tamisage cyclique, où $s_{(k,k)}$ est le polynôme de Schur associé à la partition k, k .

On voudrait décrire l'action de C sur $X_{n,k}$ par une *représentation*. Pour voir comment la théorie des représentations s'applique au phénomène de tamisage cyclique, révisons-en les notions de base.

Soient G un groupe et V un \mathbb{C} -espace vectoriel.

Définition 2.2. Une *représentation* est un morphisme $\rho : G \rightarrow GL(V)$. V est alors un G -module puisque G agit sur V par des applications linéaires inversibles.

Une représentation associe à chaque élément $g \in G$ une application linéaire inversible $\rho_g : V \rightarrow V$, décrite par sa matrice dans une base de V donnée. Elle correspond à l'action de G sur V en tant que G -module.

Définition 2.3. Le *caractère* d'une représentation est la fonction $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $\chi(g) = \text{tr}(\rho_g)$.

Le caractère de $g \in G$ sera le même peu importe la base de V choisie. Ainsi, à changement de base près, si G agit sur V par permutation des éléments de sa base B , $\chi(g)$ nous donne le nombre d'éléments de B qui ne varient pas sous l'action de $g \in G$. Par exemple, pour S_3 agissant sur un espace dont la base est $B = \{x_1, x_2, x_3\}$, on a

$$\chi(12) = \text{tr} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

x_3 est le seul point fixe de B pour l'action de (12) .

Pour un phénomène de tamisage cyclique $(X, C, f(q))$ donné, on voudrait décrire $f(q)$ en fonction des caractères d'une représentation $\rho : G \rightarrow GL(V)$ où $C \leq G$ et $X \subseteq V$, tels que $f(\zeta_{o(g)}) = \phi(\chi(g))$ pour $g \in C$, ϕ une fonction de $\chi(g)$ donnée.

Il faut donc trouver une base appropriée de V qui reflétera l'action de C sur X dans son caractère.

2.1 Algèbre amassée et triangulations

Pour définir l'espace vectoriel associé aux dissections de polygones, considérons les dissections qui sont des triangulations. Dans cette section, nous montrerons comment les triangulations possèdent une structure d'*algèbre amassée*.

Définition 2.4. Une *algèbre amassée* \mathcal{A} est un anneau de polynômes en les *variables d'amas*, avec comme coefficients des éléments de l'anneau $\mathbb{Z}\mathbb{P}$, où \mathbb{P} est un semi-corps contenant les *variables coefficients*. C'est-à-dire

$$\mathcal{A} = \mathbb{Z}\mathbb{P}[x]$$

où x est l'ensemble des variables d'amas.

Les algèbres amassées sont caractérisées par le lien entre leurs variables d'amas, obtenues à partir d'un *amas initial* $S = \{(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)\}$, contenant des variables d'amas x_i et des variables coefficients y_i . La mutation $\mu_k(S)$ génère un nouvel amas, dans lequel x_k est remplacé par une nouvelle variable d'amas x'_k , tel que $\mu_k(S) = \{(x_1, \dots, x_{k-1}, x'_k, x_{k+1}, \dots, x_n), (y'_1, \dots, y'_n)\}$. Cette nouvelle variable sera un polynôme de Laurent dans les variables de S . De plus, μ_k est involutive, et alors $\mu_k(\mu_k(S)) = S$. En appliquant μ_k pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ sur chaque amas, l'entièreté des variables d'amas et coefficients est générée.

La mutation dépend de la relation entre les variables de l'amas initial. En particulier, leur relation peut être décrite par un *carquois* Q , un graphe orienté, ne possédant pas de boucle ni de 2-cycle. Chaque sommet de Q est associé soit à une variable d'amas, soit à une *variable gelée*.

Définition 2.5. Une *variable gelée* est un élément $c_i \in \mathbb{P}$ associé à un sommet du carquois Q tel que $\mu_k(c_i) = c_i$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$.

La mutation μ_k est appliquée sur Q et sur les variables associées à ses sommets. $\mu_k(Q)$ est obtenu comme suit à partir de Q :

1. Inverser les flèches entrant et sortant du sommet k
2. Pour tout sous-carquois $i \rightarrow k \rightarrow j$, ajouter une flèche allant de i à j
3. Éliminer les 2-cycles
4. Associer le sommet k à $x'_k = \frac{\prod_{x_e \in E} x_e + \prod_{x_s \in S} x_s}{x_k}$, où E et S sont respectivement les ensembles de variables associées aux points d'arrivée et de

départ des flèches sortant et entrant du sommet k de Q

Pour un amas initial défini par un carquois Q , on obtient alors un nouvel amas défini par un nouveau carquois $\mu_k(Q) = Q'$, dont le sommet k est maintenant associé à la variable x'_k . Toutes les variables sont obtenues ainsi, par mutation sur chaque sommet $k \in \{1, \dots, n\}$ des carquois de chaque amas. On considérera la sous-algèbre $\mathcal{A} = \mathbb{Z}[c][x]$ où c est l'ensemble des variables gelées.

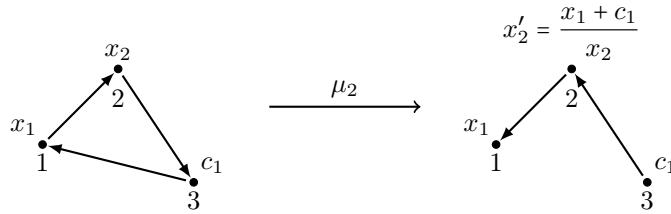


FIGURE 3 – Exemple de mutation sur un carquois

Considérons les triangulations du 4-gone. Sélectionnons l'une des triangulations comme amas initial. Pour définir le carquois qui lui est associé, on assigne à chaque arête un sommet du carquois, accompagné d'une variable : des variables gelées c_1, c_2, c_3, c_4 pour les côtés et une variable d'amas x_1 pour la diagonale. On désignera dorénavant chaque arête (ou sommet du carquois) par la variable qui lui est associée. Pour chaque triangle, on trace un cycle horaire passant par les sommets associés aux arêtes formant le triangle.

En appliquant μ sur x_1 , on obtient bien la seconde triangulation. L'algèbre amassée associée aux triangulations du 4-gone est $\mathcal{A} = \mathbb{Z}[c_1, c_2, c_3, c_4][x_1, \frac{c_1 c_3 + c_2 c_4}{x_1}]$.

Remarques. Les variables d'amas obtenues ne dépendent pas du choix d'amas initial. De plus, la seule autre mutation possible est μ_1 sur la deuxième triangulation ; elle nous ramène au carquois initial et aux variables initiales. Les triangulations sont associées une algèbre amassée de type *fini* puisque les amas, qui correspondent chacun à une triangulation, sont en nombre fini.

La mutation d'une triangulation du 4-gone vers une autre permet de généraliser

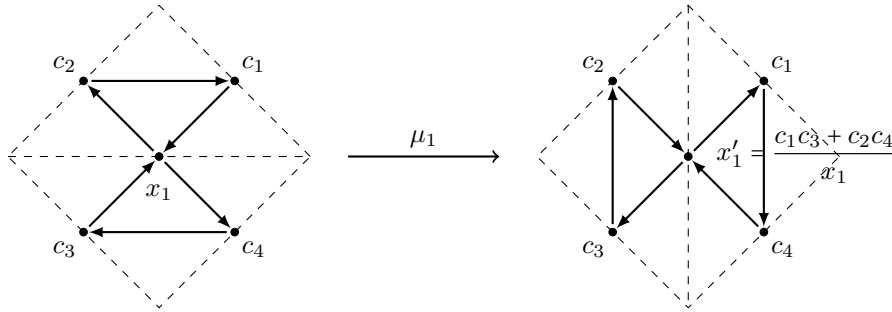


FIGURE 4 – Amas pour les triangulations du 4-gone

aux triangulations de tout polygone. Soit une triangulation t d'un n -gone, qu'on désigne comme amas initial. Ses diagonales sont associées aux variables d'amas x_1, \dots, x_{n-3} . Puisqu'une mutation μ_k n'affecte que le sous-carquois formé des cycles contenant x_k , il suffit de considérer le sous-4-gone dont x_k est la diagonale. Ceci nous donne que $\mu_k(t)$ est la triangulation où x'_k est la diagonale opposée à x_k pour le sous-4-gone considéré. En appliquant μ à chaque diagonale de chaque triangulation, on obtient l'ensemble des triangulations du n -gone. L'ensemble x des variables d'amas représente l'ensemble des diagonales du n -gone, de cardinalité $l = n(n - 3)/2$. L'algèbre amassée associée aux triangulations d'un n -gone est $\mathcal{A} = \mathbb{Z}[c][x]$, où $c = \{c_1, \dots, c_n\}$.

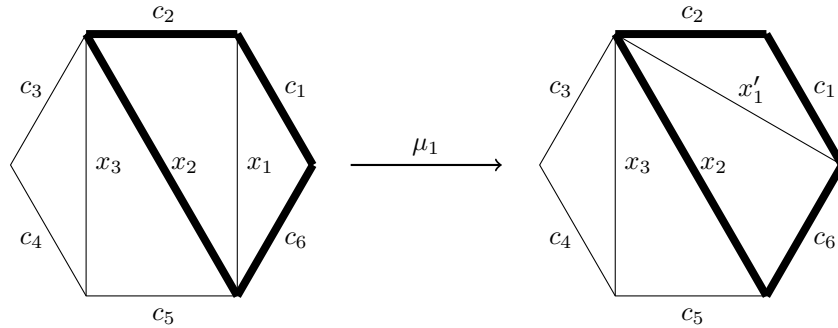


FIGURE 5 – Mutation sur une triangulation du 6-gone, où $x'_1 = \frac{c_1x_2+c_2c_6}{x_1}$

2.2 Espace vectoriel des dissections

Soit $\mathcal{A} = \mathbb{Z}[c][x]$ tel qu'obtenu précédemment. Le produit tensoriel $\mathcal{A} \otimes \mathbb{C}$ est un \mathbb{C} -espace vectoriel. Soient $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ et $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_l) \in \mathbb{N}^l$. Posons $c^\alpha = c_1^{\alpha_1} \dots c_n^{\alpha_n}$ et $x^\beta = x_1^{\beta_1} \dots x_l^{\beta_l}$. Alors

$$\mathcal{A} \otimes \mathbb{C} = \text{span}\{c^\alpha x^\beta \mid \alpha \in \mathbb{N}^n, \beta \in \mathbb{N}^l\}$$

Or, les monomes $c^\alpha x^\beta$ ne sont pas linéairement indépendants. En effet, les variables reliées entre elles par une mutation sont combinaisons linéaires de d'autres monomes. Par exemple, la mutation de la figure 5 nous donne la relation $x'_1 x_1 = c_1 x_2 + c_2 c_6$. L'ensemble générateur peut être réduit aux monomes dont les variables ne sont pas reliées par mutation, provenant donc d'un unique amas.

Définition 2.6. Les *monomes d'amas* sont composés de variables d'amas provenant d'un unique amas. Les *monomes d'amas étendu* sont composés de variables d'amas et gelées provenant d'un unique amas.

D'où

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \otimes \mathbb{C} &= \text{span}\{c^\alpha x^\beta \mid c^\alpha x^\beta \nmid x_k x'_k, k \in \{1, \dots, l\}\} \\ &= \text{span}\{\text{monomes d'amas étendu}\} \end{aligned}$$

Les monomes d'amas étendu forment en fait une base de $\mathcal{A} \otimes \mathbb{C}$ en tant que \mathbb{C} -espace vectoriel. Ceci découle du résultat suivant.

Théorème 2.7 [1]. *Pour une algèbre amassée définie par carquois, les monomes d'amas sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Z}\mathbb{P}$.*

Remarque. Alors qu'elle a été démontrée pour quelques cas particuliers (dont celui nous concernant), l'indépendance linéaire des monomes d'amas est une conjecture pour les algèbres amassées dans leur généralité.

Corollaire 2.8. *Les monômes d'amas étendu de $\mathcal{A} \otimes \mathbb{C}$ sont linéairement indépendants sur \mathbb{C} .*

Démonstration. $\mathcal{A} = \mathbb{Z}[c][x]$ est un anneau gradué. Considérons le sous-anneau des polynômes en c et x de degré m . Soient $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ et $C_i X_i$ des monômes d'amas étendu de degré m .

$$\sum_i \alpha_i C_i X_i = 0$$

Par le Théorème 2.7, les monômes d'amas X_i sont linéairement indépendants sur l'anneau $\mathbb{Z}\mathbb{P}$. On a $\alpha_i C_i = 0$ et donc $\alpha_i = 0$, pour tout i .

L'ensemble des monômes de degré m en c et x , i.e. les monômes d'amas étendus de degré m , forment une \mathbb{Z} -base du sous-anneau de degré m .

Comme \mathcal{A} est un anneau gradué, l'ensemble des monômes d'amas de degré $m \geq 0$ forme une base de \mathcal{A} .

Il forme alors une base pour le \mathbb{C} -anneau $\mathcal{A} \otimes \mathbb{C}$ par la proposition suivante .

Proposition 2.9 [3, p. 440]. *Soient M un R -module libre et S un R -module. Alors la base de M est une S -base de $M \otimes S$.*

□

Nous avons défini un espace vectoriel pour lequel une dissection est un élément de la base. Une dissection $c^\alpha x^\beta$ est telle que α_i et β_j sont respectivement égaux à la multiplicité des arêtes c_i et x_j de la dissection. En effet, les dissections sont composées d'arêtes ne se croisant pas : ces arêtes proviennent d'une triangulation donnée. Le monôme $c^\alpha x^\beta$ est donc composé de variables provenant d'un unique amas.

2.3 Anneau de coordonnées homogènes de la Grassmannienne

Nous voulons décrire l'action de rotation sur les dissections telles que vues comme des éléments de $\mathcal{A} \otimes \mathbb{C}$. L'anneau de coordonnées homogènes de la Grassmannienne nous donnera la structure nécessaire pour ce faire.

Définition 2.10. La Grassmannienne $(2, n)$ notée $Gr_{2, n}$ est l'ensemble des sous-espaces de dimension 2 d'un espace de dimension n .

Un élément P de $Gr_{2, n}$ est caractérisé par n'importe quels deux vecteurs linéairement indépendants $u = (u_1, \dots, u_n)$ et $v = (v_1, \dots, v_n)$ de P .

Soit (e_1, \dots, e_n) la base standard de \mathbb{C}^n . En plongeant $Gr_{2, n}$ dans l'espace projectif $\mathbf{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^n)$ par $P = \text{span}(u, v) \mapsto \mathbb{C}(u \wedge v)$, on obtient

$$P \mapsto \mathbb{C} \left(\sum_{i < j} \begin{vmatrix} u_i & v_i \\ u_j & v_j \end{vmatrix} e_i \wedge e_j \right)$$

Le coefficient de $e_i \wedge e_j$ est le déterminant de la sous-matrice 2×2 en lignes i et j , de la matrice

$$\begin{bmatrix} u^\top & v^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ \vdots & \vdots \\ u_n & v_n \end{bmatrix}$$

Proposition 2.11. L'image de P ne dépend pas de u, v choisis.

Démonstration. Soient u', v' tels que $P = \text{span}(u', v') = \text{span}(u, v)$. Alors il existe $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$ tels que $u' = \alpha_1 u + \alpha_2 v$ et $v' = \beta_1 u + \beta_2 v$ et

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} u'_i & v'_i \\ u'_j & v'_j \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \alpha_1 u_i + \alpha_2 v_i & \beta_1 u_i + \beta_2 v_i \\ \alpha_1 u_j + \alpha_2 v_j & \beta_1 u_j + \beta_2 v_j \end{vmatrix} \\ &= (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) u_i v_j - (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) v_i u_j \\ &= (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) \begin{vmatrix} u_i & v_i \\ u_j & v_j \end{vmatrix} \end{aligned}$$

□

Définition 2.12. Les *coordonnées de Plücker* sont les déterminants des sous-matrices 2×2 de $[u^\top \ v^\top]$. Le déterminant de la sous-matrice formée des lignes i, j est noté Δ_{ij} . Ces coordonnées caractérisent un élément de $Gr_{2,n}$.

Ce système de coordonnées nous donne une relation intéressante. Considérons $P \in Gr_{2,4}$. En développant les coordonnées de Plücker, on obtient

$$\begin{aligned}\Delta_{12}\Delta_{34} &= (u_1v_2 - v_1u_2)(u_3v_4 - v_3u_4) \\ &= u_1v_2u_3v_4 - u_1v_2v_3u_4 - v_1u_2u_3v_4 + v_1u_2v_3u_4 \\ \Delta_{14}\Delta_{23} &= (u_1v_4 - v_1u_4)(u_2v_3 - v_2u_3) \\ &= u_1v_4u_2v_3 - u_1v_4v_2u_3 - v_1u_4u_2v_3 + v_1u_4v_2u_3 \\ \Delta_{13}\Delta_{24} &= (u_1v_3 - v_1u_3)(u_2v_4 - v_2u_4) \\ &= u_1v_3u_2v_4 - u_1v_3v_2u_4 - v_1u_3u_2v_4 + v_1u_3v_2u_4\end{aligned}$$

D'où

$$\Delta_{13}\Delta_{24} = \Delta_{12}\Delta_{34} + \Delta_{14}\Delta_{23}$$

En généralisant à $Gr_{2,n}$, pour quatre lignes $1 \leq i < j < k < l \leq n$ quelconques, on a

$$\Delta_{ik}\Delta_{jl} = \Delta_{ij}\Delta_{kl} + \Delta_{il}\Delta_{jk}$$

Définition 2.13. L'*anneau de coordonnées homogènes* de la Grassmannienne $(2, n)$ est l'anneau

$$\mathbb{C}[Gr_{2,n}] = \mathbb{C}[\{\Delta_{ij}\}_{1 \leq i < j \leq n}] / \langle \Delta_{ik}\Delta_{jl} - \Delta_{ij}\Delta_{kl} - \Delta_{il}\Delta_{jk} \rangle_{1 \leq i < j < k < l \leq n}$$

Proposition 2.14. Les monômes non divisibles par $\Delta_{ik}\Delta_{jl}$, pour tous $1 \leq i < j < k < l \leq n$, forment une base de $\mathbb{C}[Gr_{2,n}]$.

Démonstration. $\mathbb{C}[Gr_{2,n}]$ est un anneau gradué : il est somme directe d'anneaux de polynômes homogènes de degré m . On ne considère que les monômes non divisibles par $\Delta_{ik}\Delta_{jl}$ tels que décrits dans la proposition. Il suffit de montrer que les monômes de degré m sont linéairement indépendants entre eux.

Les monômes de degré 1 sont les coordonnées de Plücker elles-mêmes. Ils génèrent l'anneau de degré 1, isomorphe à $\mathbf{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^n)$. Puisqu'ils sont en nombre égal à la dimension de $\mathbf{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^n)$, les $\Delta_{ij}, 1 \leq i < j \leq n$, sont linéairement indépendants.

Supposons que les monômes de degré $m - 1$ sont linéairement indépendants.

Posons δ_i un monôme de degré m et soient $\alpha_i \in \mathbb{C}$ tels que

$$\sum_i \alpha_i \delta_i = 0$$

Les δ_i sont obtenus en multipliant les monômes de degré $m - 1$ par une coordonnée de Plücker. En factorisant cette coordonnée à chaque δ_i , on obtient

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \Delta_{ij} \left(\sum_k \alpha_{ij}^{(k)} \frac{\delta_{ij}^{(k)}}{\Delta_{ij}} \right) = 0$$

Comme les Δ_{ij} sont linéairement indépendants, on a $\sum_k \alpha_{ij}^{(k)} \frac{\delta_{ij}^{(k)}}{\Delta_{ij}} = 0$ pour tout ij . Les monômes $\frac{\delta_{ij}^{(k)}}{\Delta_{ij}}$ sont de degré $m - 1$: par hypothèse de récurrence, ils sont linéairement indépendants entre eux, d'où $\alpha_{ij}^{(k)} = 0$ pour tout k et pour tout ij . \square

Proposition 2.15.

$$\mathcal{A} \otimes \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}[Gr_{2,n}]$$

Démonstration. Soit t une triangulation d'un n -gone. Considérons un sous-4-gone de t , et étiquetons ses coins i, j, k, l . Supposons sans perte de généralité que la diagonale va de i à k . La variable de l'arête allant de i à k est associée à la coordonnée Δ_{ik} . Les variables des côtés du sous-4-gone sont associées aux coordonnées $\Delta_{ij}, \Delta_{jk}, \Delta_{kl}$ et Δ_{il} .

En répétant cette association pour les sous-4-gones de chaque triangulation, on obtient une bijection entre les monômes d'amas étendu formant la base de $\mathcal{A} \otimes \mathbb{C}$ et les monômes en coordonnées de Plücker formant la base de $\mathbb{C}[Gr_{2,n}]$. \square

2.4 Représentation du groupe linéaire général

Nous avons tous les outils pour décrire l'action de rotation sur les dissections. On considère une dissection dans son écriture par les coordonnées de Plücker $\prod \Delta_{ij}^{\alpha_{ij}}$, où les Δ_{ij} sont les arêtes formant la dissection et α_{ij} leur multiplicités respectives.

On veut trouver un groupe qui agit sur la base de $\mathcal{A} \otimes \mathbb{C}$ trouvée en 2.3, tel que son action traduit

$$r^d \cdot \Delta_{ij} = \Delta_{(i-d \bmod n)(j-d \bmod n)}$$

où on notera n pour $0 \bmod n$.

Posons

$$g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$$

En multipliant $\begin{bmatrix} u^\top & v^\top \end{bmatrix}$ à gauche par g , on obtient

$$g \begin{bmatrix} u^\top & v^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \\ \vdots & \vdots \\ u_n & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_n & -v_n \\ u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ \vdots & \vdots \\ u_{n-1} & v_{n-1} \end{bmatrix}$$

Les déterminants des sous-matrices 2×2 de $g \begin{bmatrix} u^\top & v^\top \end{bmatrix}$ sont

$$\Delta'_{1j} = -u_n v_{j-1} + v_n u_{j-1} = \Delta_{(j-1)(n)} = \Delta_{(j-1 \bmod n)(1-1 \bmod n)}$$

$$\Delta'_{ij} = u_{i-1} v_{j-1} - v_{i-1} u_{j-1} = \Delta_{(i-1)(j-1)} = \Delta_{(i-1 \bmod n)(j-1 \bmod n)}$$

Considérons

$$g^d \begin{bmatrix} u^\top & v^\top \end{bmatrix} = g \cdot g^{d-1} \begin{bmatrix} u^\top & v^\top \end{bmatrix}$$

Posons $\Delta_{ij}^{(d-1)}$ les déterminants des sous-matrices 2×2 de $g^{d-1} \begin{bmatrix} u^\top & v^\top \end{bmatrix}$. Par récurrence, on a

$$\Delta_{ij}^{(d-1)} = \Delta_{(i-(d-1) \bmod n)(j-(d-1) \bmod n)}$$

Alors les déterminants des sous-matrices 2×2 de $g \cdot g^{d-1} \begin{bmatrix} u^\top & v^\top \end{bmatrix}$ sont

$$\begin{aligned} \Delta_{ij}^{(d)} &= \Delta_{(i-1 \bmod n)(j-1 \bmod n)}^{(d-1)} \\ &= \Delta_{(i-1-(d-1) \bmod n)(j-1-(d-1) \bmod n)} \\ &= \Delta_{(i-d \bmod n)(j-d \bmod n)} \end{aligned}$$

L'action de g telle que décrite ci-haut nous donne bien la rotation voulue sur les arêtes d'une dissection.

Nous étudierons donc l'action de g sur $X_{n,k}$ par sa représentation en tant qu'élément du groupe général linéaire $GL_n(\mathbb{C})$.

$\mathbb{C}X_{n,k}$ est le sous-anneau de degré k de $\mathcal{A} \otimes \mathbb{C}$. Le caractère $\chi(g^d)$ de la représentation $\rho : GL_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}X_{n,k}$ nous donne le nombre de points fixes de $X_{n,k}$ pour l'action de g^d .

g est diagonalisable puisque son polynôme caractéristique est scindé :

$$p_g(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^n + 1$$

Les valeurs propres de g sont les racines d'ordre n de -1 , notés ω_j . Il existe une matrice inversible P telle que

$$PgP^{-1} = \begin{bmatrix} \omega_1 & & & & \\ & \omega_2 & & & \\ & & \omega_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \omega_n \end{bmatrix}$$

De plus, g^d est diagonalisable, pour tout $d \in N$ car

$$Pg^dP^{-1} = PgP^{-1} \cdot PgP^{-1} \cdots \cdot PgP^{-1} = \begin{bmatrix} \omega_1^d & & & \\ & \omega_2^d & & 0 \\ & & \omega_3^d & \\ & 0 & & \ddots \\ & & & & \omega_n^d \end{bmatrix}$$

Proposition 2.16. *Les caractères d'éléments d'une même classe de conjugaison sont équivalents.*

Démonstration. Soient $g, h \in G$. Alors g et hgh^{-1} sont dans la même classe de conjugaison et

$$\begin{aligned} \chi(hgh^{-1}) &= \text{tr}(\rho(hgh^{-1})) \\ &= \text{tr}(\rho(h)\rho(g)\rho(h^{-1})) \quad (\text{car } \rho \text{ est morphisme}) \\ &= \text{tr}(\rho(h^{-1})\rho(h)\rho(g)) \quad (\text{car } \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)) \\ &= \text{tr}(\rho(g)) \\ &= \chi(g) \end{aligned}$$

□

Le caractère de Pg^dP^{-1} est équivalent à celui de g^d par la proposition ci-dessus.

Le produit $Pg^dP^{-1} \begin{bmatrix} u^\top & v^\top \end{bmatrix}$ donne

$$\begin{bmatrix} \omega_1^d & & & \\ & \omega_2^d & & 0 \\ & & \omega_3^d & \\ & 0 & & \ddots \\ & & & & \omega_n^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \\ \vdots & \vdots \\ u_n & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1^d u_1 & \omega_1^d v_1 \\ \omega_2^d u_2 & \omega_2^d v_2 \\ \omega_3^d u_3 & \omega_3^d v_3 \\ \vdots & \vdots \\ \omega_n^d u_n & \omega_n^d v_n \end{bmatrix}$$

Si bien que

$$\rho_{g^d}(\Delta_{ij}) = \omega_i^d u_i \cdot \omega_j^d v_j - \omega_i^d v_i \cdot \omega_j^d u_j = \omega_i^d \omega_j^d (u_i v_j - v_i u_j) = \omega_i^d \omega_j^d \Delta_{ij}$$

Pour une dissection $\prod \Delta_{ij}^{\alpha_{ij}}$ donnée, on a donc

$$\rho_{g^d}(\prod \Delta_{ij}^{\alpha_{ij}}) = \prod ((\omega_i^d \omega_j^d)^{\alpha_{ij}} \Delta_{ij}^{\alpha_{ij}}) = \prod (\omega_i^d \omega_j^d)^{\alpha_{ij}} \prod \Delta_{ij}^{\alpha_{ij}} \quad (1)$$

La trace est donc

$$\chi(g^d) = \sum_{X_{n,k}} (\prod (\omega_i^d \omega_j^d)^{\alpha_{ij}})$$

où on somme les coefficients des éléments de $X_{n,k}$.

Définition 2.17. Un *tableau de forme* $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$, où $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_l$, est constitué de l rangées de cases, où la i^e rangée contient λ_i cases.

Considérons un tableau de forme $\lambda = (k, k)$. Les dissections peuvent être représentées par un tableau où les entrées des colonnes sont les i et j des Δ_{ij} de la dissection.

Par exemple, le tableau associé à la figure 2 est

1	2	2	2	2
6	5	5	3	4

.

Notons que puisque les arêtes ne se croisent pas, pour deux colonnes d'entrées i, j et k, l , on a $i < k < l < j$ ou $k < i < j < l$.

Un tel tableau est dit *non-croisé*.

$X_{n,k}$ est donc en bijection avec l'ensemble des tableaux non-croisés de forme k, k d'entrées plus petites ou égales à n .

Définition 2.18. Un *tableau semi-standard de Young de forme* λ est un tableau contenant des entrées (typiquement des éléments de $\{1, \dots, n\}, n \in \mathbb{N}$) telles que l'entrée en $(i + 1, j)$ soit plus grande ou égale à l'entrée en (i, j) et l'entrée en $(i, j + 1)$ soit strictement plus grande l'entrée en (i, j) .

Proposition 2.19 [5]. *Les tableaux non-croisés de forme rectangulaire λ sont en bijection avec les tableaux semi-standards de Young de forme λ , où les occurrences de entrées sont préservées.*

Définition 2.20. La *fonction de Schur* pour une partition λ donnée est

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_n) = \sum_T (x_1, \dots, x_n)^T$$

où $T \in \mathbb{N}^n$ donne le nombre d'occurrences des $i \in \{1, \dots, n\}$ pour un tableau semi-standard de Young de forme λ .

La proposition 2.19 nous donne donc une bijection entre $X_{n,k}$ et chaque terme de $s_{(k,k)}(x_1, \dots, x_n)$. Par exemple, le terme associé à la figure 2 est $x_1 x_2^4 x_3 x_4 x_5^2 x_6$.

Par (1), on a

$$\chi(g^d) = s_{(k,k)}(\omega_1^d, \dots, \omega_n^d)$$

Comme on voudrait plutôt évaluer le polynôme en des racines de l'unité pour satisfaire l'énoncé du phénomène de tamisage cyclique, il suffit de factoriser par ω_1^{2dk} . En effet, avec $\omega_j = e^{\frac{(2j-1)i\pi}{n}}$, on a

$$\frac{\omega_j}{\omega_1} = \frac{e^{\frac{(2j-1)i\pi}{n}}}{e^{\frac{i\pi}{n}}} = e^{\frac{2(j-1)i\pi}{n}} = \zeta^{j-1}$$

où ζ est racine primaire de l'unité d'ordre n .

On a donc

$$\chi(g^d) = \frac{1}{\zeta^{dk}} s_{(k,k)}(1, \zeta^d, \zeta^{2d}, \dots, \zeta^{(n-1)d})$$

Les racines n^e forment un groupe sous la multiplication en \mathbb{C} , d'élément neutre 1. Ce groupe est en bijection avec le groupe cyclique $C = \langle r \rangle$ par l'association $\zeta \leftrightarrow r$. Ainsi, ζ^d est d'ordre égal à r^d en tant qu'élément du groupe des racines n^e , ce qui en fait une racine primaire d'ordre égal à celui de r^d .

Ceci nous permet de conclure que le polynôme

$$f(q) = \frac{1}{q^k} s_{(k,k)}(1, q, q^2, \dots, q^{n-1})$$

donne le nombre de points fixes de l'action de r^d sur l'ensemble des dissections d'un n -gone, lorsqu'évalué en ζ_d , une racine primaire d'ordre égal à celui de r^d .

Le triplet

$$(X_{n,k}, C, f(q) = q^{-k} s_{(k,k)}(1, q, \dots, q^{n-1}))$$

présente donc bien un phénomène de tamisage cyclique.

2.5 Irréductibilité de $\mathbb{C}X_{n,k}$

Il peut être intéressant de noter que l'espace vectoriel $\mathbb{C}X_{n,k}$ est une représentation irréductible de $GL_n(\mathbb{C})$.

Soient G un groupe et V un G -module pour une action donnée.

Définition 2.21. La représentation V est dite *irréductible* si les seuls sous-espaces de V qui sont des G -modules sont V et l'ensemble vide.

Définition 2.22. Soient les représentations $\rho_V : G \rightarrow GL(V)$ et $\rho_W : G \rightarrow GL(W)$. V et W sont *isomorphes en tant que G -modules* s'il existe un isomorphisme $\varphi : V \rightarrow W$ tel que $\rho_V \circ \varphi = \varphi \circ \rho_W$

Proposition 2.23. Soient V et W des G -représentations. $V \simeq W$ si et seulement si $\chi_V = \chi_W$ pour tout $g \in G$.

Cette proposition découle de l'orthogonalité des caractères irréductibles.

Nous avons montré que le caractère de $X_{n,k}$ en tant que représentation de $GL_n(\mathbb{C})$ est la fonction de Schur $s_{(k,k)}(x_1, \dots, x_n)$ où x_i sont des valeurs propres.

Théorème 2.24. Soit V une représentation polynomiale irréductible de $GL_n(\mathbb{C})$. Alors

$$\chi_V = s_\lambda(x_1, \dots, x_n)$$

Une *représentation polynomiale* envoie $g \in GL_n(\mathbb{C})$ sur une matrice de $GL(V)$ dont les coefficients sont des polynômes en coefficients de g .

Lemme 2.25. $\mathbb{C}X_{n,k}$ est une représentation polynomiale irréductible de $GL_n(\mathbb{C})$.

Démonstration. $\rho : GL_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}X_{n,k}$ est bien une représentation polynomiale. Son caractère est une fonction de Schur, coïncidant donc avec le caractère d'une représentation irréductible V de $GL_n(\mathbb{C})$ donnée. Par la proposition 2.23, il existe un isomorphisme $\varphi : X_{n,k} \rightarrow V$. Supposons qu'il existe $E \subset X_{n,k}$, une

sous-représentation non vide de $GL_n(\mathbb{C})$. Alors il existe $W \subset V$ tel que $\varphi|_E : E \rightarrow W$ est un isomorphisme. W est donc une sous-représentation de $GL_n(\mathbb{C})$, ce qui contredit l'irréductibilité de V , d'où $X_{n,k}$ est représentation irréductible de $GL_n(\mathbb{C})$. \square

3 Tamisage cyclique sur les triangulations de polygones

Dans cette section, nous revenons sur le problème initial du phénomène de tamisage cyclique sur les triangulations.

On dénote le q -analogue de $n \in \mathbb{N}$ par

$$[n]_q = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}$$

et le q -coefficient binomial par

$$\begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q! [n-k]_q!} = \frac{[n]_q [n-1]_q \dots [k+1]_q}{[n-k]_q [n-k-1]_q \dots [2]_q}$$

Soient T_n l'ensemble des triangulations d'un polygone de n côtés, et C le groupe engendré par r , une rotation horaire de $2\pi/n$.

Théorème 3.1 [10]. *Le triplet $(T_n, C, \text{Cat}_{n-2}(q))$ présente un phénomène de tamisage cyclique.*

où $\text{Cat}_{n-2}(q)$ est le q -Catalan du n^{e} nombre de Catalan, donné par

$$\text{Cat}_{n-2}(q) = \frac{1}{[n+1]_q} \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}_q$$

C'est par dénombrement que l'égalité $\#T_n^{r^d} = \text{Cat}_{n-2}(\zeta_n^d)$ a été démontrée dans [10]. Comme les triangulations sont en nombre égal à Cat_{n-2} , il y a certainement un mécanisme à élucider qui met en lien les relations $\#T_n = \text{Cat}_{n-2}$ et $\#T_n^{r^d} = \text{Cat}_{n-2}(\zeta_n^d)$.

Une tentative serait d'équivaloir l'action de rotation à l'action d'une permutation du groupe symétrique S_{Cat_n} . Les orbites de la rotation deviennent des sous-modules pour S_{Cat_n} . En connaissant les orbites, on pourrait réduire le problème au calcul de leur caractère en tant que représentations de S_{Cat_n} . Cela revient à un problème de combinatoire sur les différents motifs possibles de triangulation.

On voudrait plutôt considérer T_n dans son ensemble. C'est en utilisant la base définie par l'algèbre amassée et l'action de $GL_n(\mathbb{C})$ décrite par Rhoades que nous présentons des pistes d'exploration de ce problème ouvert.

3.1 Triangulations comme sous-ensemble des dissections

On pourrait voir T_n , l'ensemble des triangulations d'un n -gone, comme un sous-ensemble des dissections, telles qu'étudiées par Rhoades. T_n est donc l'ensemble des dissections par $2n - 3$ arêtes distinctes.

Par la section 2.2, on a que T_n forme une base de l'espace vectoriel $\mathbb{C}T_n$. On voudrait définir une représentation $\rho : GL_n(\mathbb{C}) \rightarrow GL(\mathbb{C}T_n)$. Or, $\mathbb{C}T_n$ n'est pas un $GL_n(\mathbb{C})$ -module et ρ n'est pas bien définie. En effet, prenons par exemple T_4 . Alors

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \\ u_4 & v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + u_2 & v_1 + v_2 \\ u_1 + u_3 & v_1 + v_3 \\ u_3 & v_3 \\ u_4 & v_4 \end{bmatrix}$$

Cette action donne les associations $\Delta_{12} \mapsto \Delta_{13} + \Delta_{23} - \Delta_{12}$ et $\Delta_{23} \mapsto \Delta_{13}$. La triangulation associée à $\Delta_{12}\Delta_{23}\Delta_{34}\Delta_{12}\Delta_{24}$ est alors envoyée sur une combinaison dont au moins un des termes a une multiplicité de deux pour Δ_{13} .

T_n n'est pas stable sous l'action de $GL_n(\mathbb{C})$. On ne peut donc pas décrire l'action de rotation sur les triangulations par l'action de la matrice g comme élément de $GL_n(\mathbb{C})$.

3.2 Application du phénomène de tamisage cyclique de Westbury

Alors que l'ensemble T_n est stable sous l'action de rotation, il l'est aussi pour la réflexion selon un axe de symétrie donné. On pourrait alors définir l'action de C en tant que sous-groupe du groupe diédral approprié.

On se souvient que la matrice correspondant à la rotation est d'ordre $2n$. Re-baptisons la r . Ajoutons comme générateur la matrice s telle que

$$s = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On remarque que les matrices r et s respectent la relation $r^{2n} = s^2 = (sr)^{2n} = Id$.

D'où l'isomorphisme

$$\langle r, s \rangle \simeq D_{2n}$$

où D_{2n} le groupe diédral d'ordre $2n$, par le morphisme de groupes

$$\varphi: \begin{array}{ccc} \langle r, s \rangle & \longrightarrow & D_{2n} \\ s^l r^d & \longmapsto & s^l r^d \end{array}$$

Le groupe diédral est un *groupe de réflexions complexes* si on considère l'élément sr comme générateur. En effet, s et sr sont des réflexions, fixant un hyperplan.

Ceci nous permettrait d'appliquer un théorème de Bruce Westbury.

Théorème 3.2 [6]. *Soit W un groupe de réflexions complexes fini et $C \leq W$ le sous-groupe généré par un élément régulier $g \in W$. Soit V un W -module dont la base B est invariante sous l'action de g . Alors le triplet*

$$(B, C, F^V(q))$$

présente un phénomène de tamisage cyclique.

$F^V(q)$ est la somme des *polynômes "fake degree"* $F^\lambda(q)$ pour chaque sous-module irréductible de V . Nous en donnerons un exemple dans la section 3.3.

En prenant $W = D_{2n}$ et $C = \langle r \rangle$, on a que l'ensemble des triangulations T_n est bien invariant sous l'action de r . De plus,

$$s \begin{bmatrix} u^\top & v^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_n & v_n \\ u_{n-1} & v_{n-1} \\ \vdots & \vdots \\ u_2 & v_2 \\ u_1 & v_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \rho_s(\Delta_{ij}) = -\Delta_{(n-i+1)(n-j+1)}$$

et alors l'action de s sur une triangulation $t = \prod \Delta_{ij}$ donne

$$st = \prod -\Delta_{(n-i+1)(n-j+1)} = \pm \prod \Delta_{(n-i+1)(n-j+1)} = \pm t'$$

où t' est la triangulation obtenue par réflexion sur l'axe de symétrie passant par le sommet 1 séparant le polygone en deux. On a bien $\pm t' \in \mathbb{C}T_n$. Toute composition avec r donnera une rotation des Δ_{ij} , ce qui maintient la structure de triangulation, d'où $\mathbb{C}T_n$ un D_{2n} -module, tel que requis pour appliquer le théorème 3.2.

3.3 Polynôme "fake degree"

Définition 3.3. Le *polynôme "fake degree"* d'un W -module irréductible V^λ est

$$F^\lambda(q) = \sum_{d \geq 0} m_d q^d$$

où m_d est la multiplicité de V^λ dans la sous-algèbre de degré d de l'*algèbre des coinvariants* de W .

Définition 3.4. L'*algèbre des coinvariants* est l'anneau S/S_+^W où $S = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ et S_+^W est l'idéal engendré par les invariants de S par W de degrés strictement positifs.

Par exemple (tiré de [20]), pour $W = \{Id, (12)\} = S_2$ et $S = \mathbb{C}[x, y]$, on a que les invariants forment l'anneau $\mathbb{C}[x + y, xy]$. Alors

$$S_+^W = \mathbb{C}[\{x^k(x+y)^l, y^k(x+y)^l, x^k y^l\}_{k,l>0}]$$

est l'idéal qu'ils engendrent. L'algèbre des coinvariants est $S/S_+^W = \text{span}\{\bar{1}, \bar{x}\}$.

En posant $A_0 = \text{span}\{\bar{1}\}$ et $A_1 = \text{span}\{\bar{x}\}$, on a la graduation $S/S_+^W = A_0 \oplus A_1$. En tant que représentation de W , S/S_+^W a comme modules irréductibles A_0 et A_1 .

Comme $Id \cdot \bar{1} = \bar{1}$ et $(12) \cdot \bar{1} = \bar{1}$, A_0 est la représentation triviale où $\rho_{A_0} : W \rightarrow GL(A_0)$ envoie les éléments de W sur l'identité. Pour A_1 , on a $Id \cdot \bar{x} = \bar{x}$ et $(12) \cdot \bar{x} = \bar{y} = -\bar{x}$ car $(-x) - (y) = -(x+y) \in S_+^W$. On a donc $\rho_{A_0} \neq \rho_{A_1}$, d'où chacune des représentations irréductibles sont de multiplicité 1.

Le "fake degree" de A_0 est donc 1 et celui de A_1 est q . Si $V \simeq m_0 A_0 \oplus m_1 A_1$, alors $F^V(q) = m_0 + m_1 q$.

3.4 Équivalence entre $F^{\mathbb{C}T_n}(q)$ et $Cat_{n-2}(q)$

Avec les hypothèses nécessaires en main, il ne reste qu'à montrer que $Cat_{n-2}(\zeta_n^d) = F^{\mathbb{C}T_n}(\zeta_{2n}^d)$, où ζ_n et ζ_{2n} sont les racines de l'unité d'ordre n et $2n$ respectivement. Le polynôme de gauche est donc évalué en les racines d'ordre égal à celui de $r_n^d \in D_n$, alors que celui de droite est évalué en les racines d'ordre égal à celui de $r_{2n}^d \in D_{2n}$.

Le défi consiste en déterminer les modules irréductibles de $\mathbb{C}T_n$ en premier lieu, puis à ensuite trouver leur multiplicité dans l'algèbre des coinvariants. Nous présentons ici quelques exemples suggérant qu'il serait possible d'obtenir $F^{\mathbb{C}T_n}(q)$ à partir des "fake degrees", tel qu'il corresponde à $Cat_{n-2}(q)$.

Pour T_4 , on a $Cat_2(q) = q^2 + 1$. Les "fake degrees" de D_8 sont $1, q^4, q^4, q^4, q^7 + q, q^6 + q^2, q^5 + q^3$ (obtenus par le package CHEVIE[17] de GAP3). Pour l'action

de $r_8 \in D_8$, on voudrait montrer que les modules irréductibles de T_4 sont les modules correspondants aux "fake degrees" 1 et q^4 , si bien que $F^{\text{CT}_4}(q) = 1 + q^4$.

Comme on a $\zeta_n^k = \zeta_{2n}^{2k}$, on a bien $\text{Cat}_2(\zeta_4) = F^{\text{CT}_4}(\zeta_8)$

Par exemple, avec r_4 d'ordre 4 et r_8 d'ordre 8, on a

$$\zeta_4^2 = \zeta_8^4 = -1 \Rightarrow \text{Cat}_2(\zeta_4) = 0 = F^{\text{CT}_4}(\zeta_8)$$

Et avec r_4^2 d'ordre 2 et r_8^2 d'ordre 4, on a

$$(\zeta_4^2)^2 = (\zeta_8^4)^4 = 1 \Rightarrow \text{Cat}_2(\zeta_4) = 2 = F^{\text{CT}_4}(\zeta_8)$$

Pour T_5 , on a $\text{Cat}_3(q) = q^6 + q^4 + q^3 + q^2 + 1$. Les "fake degrees" de D_{10} sont $1, q^5, q^5, q^{10}, q^9 + q, q^8 + q^2, q^7 + q^3$ et $q^6 + q^4$. Les modules irréductibles correspondraient à $q^8 + q^2, q^6 + q^4$ et 1. Ici, notons que $(\zeta_5^d)^6 = (\zeta_5)^d$, alors le terme q^6 de $\text{Cat}_3(q)$ équivaut à q lorsque évalué en ζ_5 . Il est donc associé au terme q^2 de $F^{\text{CT}_4}(q) = q^8 + q^6 + q^4 + q^2 + 1$.

Pour T_6 , on a $\text{Cat}_4(q) = q^{12} + q^{10} + q^9 + 2q^8 + q^7 + 2q^6 + q^5 + 2q^4 + q^3 + q^2 + 1$. L'ordre des racines ζ_6^d étant diviseur de 6, pour $q = \zeta_6^d$, le polynôme se simplifie à

$$\begin{aligned} \text{Cat}_4(q) &= 1 + q^4 + q^3 + 2q^2 + q + 2 + q^5 + 2q^4 + q^3 + q^2 + 1 \\ &= q^5 + 3q^4 + 2q^3 + 3q^2 + q + 4 \end{aligned}$$

Les "fake degrees" appropriés donneraient

$$F^{\text{CT}_6}(q) = (q^{10} + q^2) + 3(q^8 + q^4) + 2q^6 + 4$$

3.5 Conclusion

Ces exemples suggèrent que notre choix du groupe diédral, combiné à l'action décrite par Rhoades sur les dissections, serait approprié pour l'étude sous l'angle de la théorie de la représentation de ce phénomène de tamisage cyclique.

En générant un plus grand nombre d'exemples, on pourrait lister les "fake degrees" apparaissant dans $F^{\mathbb{C}T_n}(q)$, ainsi que leur module irréductible associé. On pourrait peut-être en relever une généralisation quant aux modules irréductibles de $\mathbb{C}T_n$ en tant que D_{2n} -module, et ainsi potentiellement décrire le polynôme $F^{\mathbb{C}T_n}(q)$ en fonction de n . Ceci nous permettrait de montrer son équivalence à $Cat_{n-2}(\zeta_n^d)$ lorsqu'évalué en ζ_{2n}^d .

Pour conclure, nous énonçons donc la conjecture suivante. Soient $F^{\mathbb{C}T_n}(q)$ et $Cat_{n-2}(q)$ tels que définis plus haut, et ζ_{2n} et ζ_n les racines primaires d'ordre $2n$ et n de l'unité.

Conjecture. Soient $D_{2n} = \langle r, s \mid r^{2n} = s^2 = (sr)^{2n} = Id \rangle$ et $C = \langle r \rangle$. Soit T_n l'ensemble des triangulations d'un polygone de n côtés.

Si r agit sur T_n comme une rotation horaire de $2\pi/n$, et s comme une réflexion selon l'axe séparant le polygone en deux et passant par un sommet, alors le triplet

$$(T_n, C, F^{\mathbb{C}T_n}(q))$$

présente un phénomène de tamisage cyclique, où $F^{\mathbb{C}T_n}(\zeta_{2n}^d) = Cat_{n-2}(\zeta_n^d)$.

Remerciements

Je tiens à remercier les professeurs, chercheurs et étudiants du Laboratoire de combinatoire et d'informatique mathématique (LaCIM) qui m'ont chaleureusement accueillie tout au long de l'été. Un merci particulier à Franco Saliola, directeur de stage, pour ses encouragements et son enthousiasme qu'il a certainement su me partager.

Références

- [1] G. Cerulli Irelli, B. Keller, D. Labardini-Fragoso, and P. Plamondon, *Linear independence of cluster monomials for skew-symmetric cluster algebras*, ArXiv Mathematics e-prints (2012), arXiv :1203.1307.
- [2] V. Lakshmibai and Justin Brown, *The Grassmannian Variety - Geometric and Representation-Theoretic Aspects*, Developments in Mathematics no. 42, Springer-Verlag New York (2015).
- [3] Pierre A. Grillet, *Abstract Algebra*, New York, Springer (2007).
- [4] Bruce E. Sagan, *The Symmetric Group*, New York, Springer (2001). Mathematics e-prints (2006), arXiv :math/0607211v2
- [5] Pavlo Pylyavskyy, *Non-crossing tableaux*, ArXiv Mathematics e-prints (2006), arXiv :math/0607211v2
- [6] Bruce W. Westbury, *Invariant tensors and the cyclic sieving phenomenon*, ArXiv Mathematics e-prints (2009), arXiv :0912.1512.
- [7] Bruce E. Sagan, *The cyclic sieving phenomenon : a survey*, ArXiv Mathematics e-prints (2010), arXiv :1008.0790.
- [8] Brendon Rhoades, *Cyclic sieving and cluster multicomplexes*, ArXiv Mathematics e-prints (2010), arXiv :1005.2561.
- [9] Lauren K. Williams, *Cluster algebras : an introduction*, ArXiv Mathematics e-prints (2013), arXiv :1212.6263v3.
- [10] V. Reiner, D. Stanton and D. White, *The cyclic sieving phenomenon*, Journal of Combinatorial Theory, Series A Volume 108, Issue 1 (2004), pages 17-50.
- [11] S. Fomin, A. Zelevinsky, *Cluster algebras I : Foundations*, Journal of the American Mathematical Society, vol. 15, no. 2 (2002), pages 497–529 .
- [12] S. Fomin, A. Zelevinsky, *Cluster algebras II : Finite type classification*, Inventiones Mathematicae, vol. 154, no. 1 (2003), pages 63–121 .

- [13] S. Fomin, A. Zelevinsky, *Cluster algebras IV : Coefficients*, *Compositio Mathematica*, vol. 143 no. 1 (2006), pages 112-164.
- [14] Florence Maas-Gariepy, *Schur functions and domino tableaux : generalisation to K-theory*, Université du Québec à Montréal, Comptendu de stage (2017), disponible au <http://ism.uqam.ca/~ism/pdf/Maas-Gariepy-rapportscientifique.pdf>
- [15] Benjamin Steinberg, *Representation Theory of Finite Groups : An introductory approach*, New York, Springer (2012).
- [16] Hugh Thomas, *MAT995C : Séminaire de combinatoire — algèbres amasées*, Université du Québec à Montréal, Notes de cours (Hiver 2016), disponibles au <http://www.lacim.uqam.ca/~hugh/amas.html>
- [17] M. Geck, G. Hiss, F. Lübeck, G. Malle, and G. Pfeiffer. *CHEVIE – A system for computing and processing generic character tables for finite groups of Lie type, Weyl groups and Hecke algebras*, *Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput.*, 7 (1996), pages 175-210.
- [18] Jean Michel, *The GAP3 Manual : 84 Finite Reflection Groups*, disponible au <https://webusers.imj-prg.fr/~jean.michel/gap3/htm/chap084.htm>
- [19] David E. Speyer, *Math 665 : Combinatorics of GL representation theory*, University of Michigan, Notes de cours (Automne 2012), disponibles au http://www.math.lsa.umich.edu/~speyer/665_2012/.
- [20] A. Broer, V. Reiner, L. Smith and P. Webb, *The module structure of the coinvariant algebra of a finite group representation* *RIMS Kôkyûroku* no. 1593 (2008), pages 185-189.